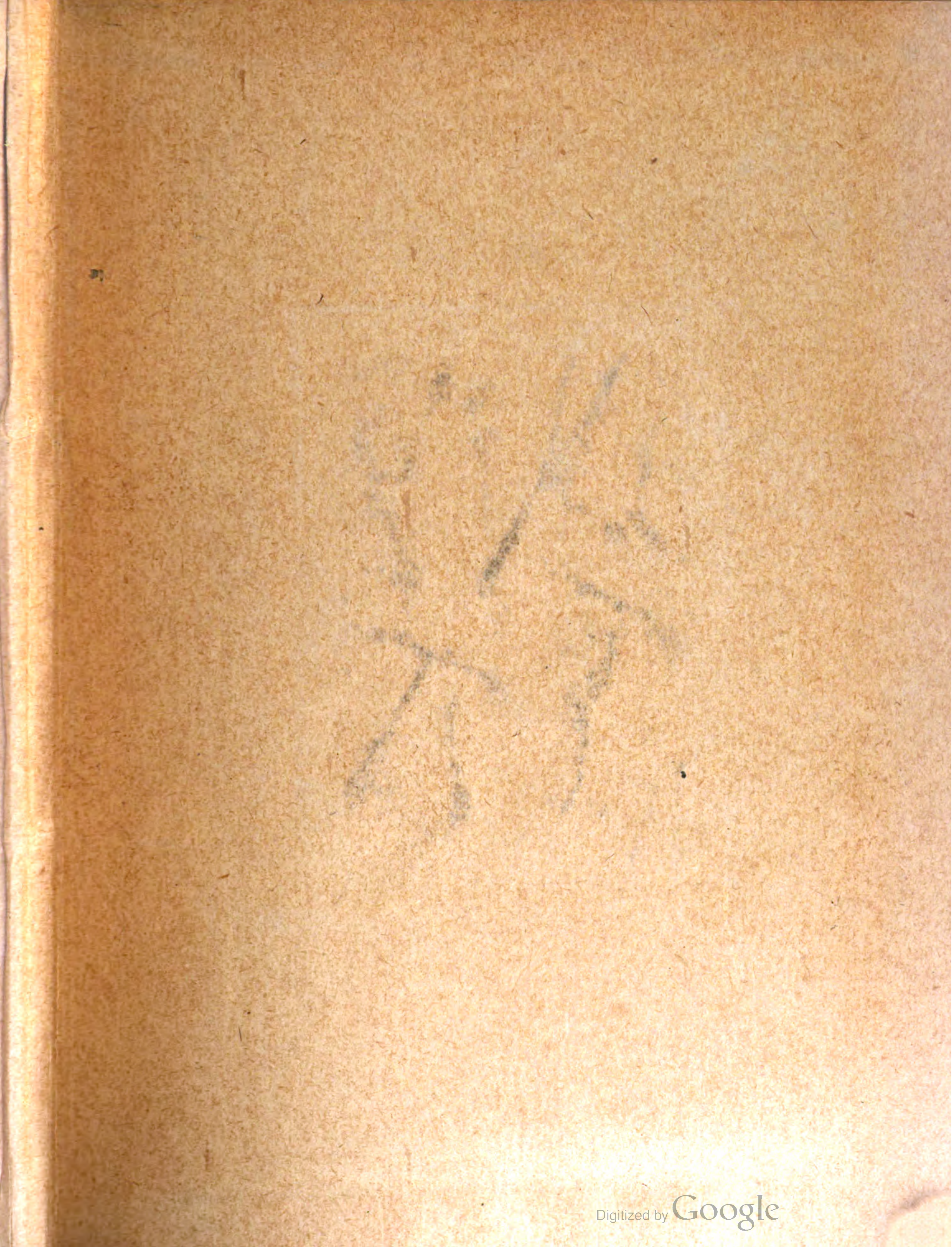

3 6105 000 721 907
Stanford University Libraries


STANFORD·VNIVERSITY·LIBRARY



Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgegeben von

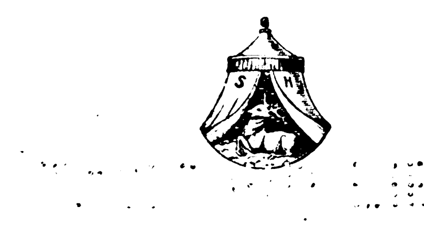
Prof. Dr. P. Debye und **Prof. Dr. M. Born**
in Zürich in Göttingen

Schriftleiter:

Dr. Erich Hückel
in Göttingen

ZWEIUNDZWANZIGSTER JAHRGANG
1921

Mit acht Tafeln



Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1921

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (R.) = Referat, (T.) = Tagesereignisse, (Z. B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

S.

T.

U.

Namensverzeichnis der „Personalien".

# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. | 1. Januar 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 5. Januar 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Dynamisches Quantengewicht, Nernstsches Theorem und Gibbssches Paradoxon.

Von W. Schottky.

Einleitung.

Durch Arbeiten Einsteins[1]), O. Sterns[2]), K. F. Herzfelds[3]) u. a. ist folgender Zusammenhang des Nernstschen Theorems mit der Quantentheorie zur Evidenz gebracht worden: „Für verschiedene Zustände eines Systems, dessen stoffliche Zusammensetzung gegeben ist, ist der Temperaturkoeffizient der freien Energie beim absoluten Nullpunkt dann und nur dann identisch, wenn das Gewicht des untersten Quantenzustandes für diese verschiedenen Zustände dasselbe ist.“

Wird definitionsmäßig die Vertauschbarkeit gleicher Elemente in der Berechnung des Gewichtes unterschlagen, so kann für reine Stoffe mit fester Lagerung aller Teilchen (ein wegen der Nullpunktsenergie allerdings in Wirklichkeit nicht realisierbarer Idealfall) das Gewicht gleich 1 gesetzt werden, der Temperaturkoeffizient der freien Energie wird dann gleich 0; für alle anderen Modifikationen, für die der Temperaturkoeffizient der freien Energie ebenfalls gleich 0 ist, müßte dann also auch das Gewicht des untersten Quantenzustandes gleich 1 sein.

Bei der Untersuchung der Frage, ob das vom statistisch-quantentheoretischen Standpunkt aus verständlich ist, hat man sich bisher auf das „Vertauschungsgewicht“ beschränkt, das heißt: man hat untersucht, ob beim absoluten Nullpunkt (also im Quantenzustand kleinster Energie) eine Vielheit möglicher Fälle und damit ein von 1 abweichendes Gewicht dadurch zustande kommen kann, daß ungleichartige Moleküle ihre Lage vertauschen. Einstein vermutete in den von ihm als Mischkristalle bezeichneten Körpern eine solche vollkommene Vertauschbarkeit der ungleichartigen Moleküle bis herab zum untersten Quantenzustand; O. Stern wies dagegen darauf hin, daß auch in Mischkristallen mit sehr ähnlichen Komponenten die Vertauschung ungleichartiger Moleküle im statischen Raumgitter immer eine, wenn auch noch so kleine, Energieänderung bedingt. Es stellt also das in der Entropie bzw. freien Energie auftretende „Vertauschbarkeitsglied“ nur scheinbar eine temperaturunabhängige Konstante dar; in Wirklichkeit gibt es beim absoluten Nullpunkt keinen Körper, dessen Zustand nicht auch in bezug auf die Lagerung ungleichartiger Komponenten eindeutig bestimmt wäre. Ob freilich bei gegebenen äußeren Variabeln dieser Zustand des absoluten Minimums der freien Energie immer ein einheitlicher ist, erscheint nach den neueren Untersuchungen Tammans fraglich; vielleicht kann man einen Mischkristall beliebiger Zusammensetzung gar nicht als thermodynamischen Gleichgewichtszustand bis zu beliebig tiefen Temperaturen als einheitliche Phase verfolgen, sondern er spaltet sich unterhalb einer gewissen Temperatur in 2 verschiedene stabile Komponenten von besonders einfacher Zusammensetzung und von solchem Mengenverhältnis, daß sich in Summa das gegebene Mischungsverhältnis ergibt. Es würde dann für solche Körper der Inhalt des Nernstschen Theorems wohl besser durch eine Formulierung ersetzt werden, die nicht auf das ganze Temperaturbereich bis zum absoluten Nullpunkt, sondern nur auf den Zustand bei der betreffenden Temperatur selbst Rücksicht nimmt.

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 1914, S. 820.
2) Ann. d. Phys. **49**, 823, 1916.
3) Zeitschr. f. Phys. Chemie **95**, 139—153, 1920.

Hier soll jedoch nicht zu diesen Vertauschbarkeitsfragen Stellung genommen werden, sondern es soll, was meines Wissens bisher noch nicht geschehen ist[1]), eine andere Art von Gewicht eines Quantenzustandes in ihrer Bedeutung für das Nernstsche Theorem diskutiert werden, nämlich die Möglichkeit verschiedener dynamischer Realisierbarkeiten desselben Energiezustandes. So wenig wir auch bisher über die Statistik der Quantenzustände selbst der einfachsten Systeme (Keplerbahn und „rotierende Hantel") wissen, so scheint doch eins sicher zu sein, daß, wenigstens bei den höheren Energiestufen, eine größere Mannigfaltigkeit von gleichwertigen Zuständen möglich ist, die sich durch Verschiedenheiten der durchlaufenen Bahn voneinander unterscheiden, daß also das Gewicht der Quantenzustände dieser einfachen Systeme nicht durchweg gleich 1 ist. Und auch für den untersten Quantenzustand[2]) scheint die Annahme des Gewichtes 1 (wobei immer, wie üblich, von der Vertauschbarkeit gleicher Elemente abgesehen wird) nicht die einzig mögliche zu sein, wie weiter unten diskutiert werden soll. Wir fragen, wie diese Art von „Gewichten" die Gültigkeit des Nernstschen Theorems beeinflussen würde, wie insbesondere bei der Verdampfung fester Körper — für Gasreaktionen gilt dann ganz das gleiche — die von Nernst aufgestellten Gleichungen abgeändert werden müßten, und endlich, ob sich umgekehrt aus der experimentellen Prüfung Nernstscher Formeln ein Anhalt für das quantentheoretisch vorläufig noch so schwer zugängliche „Gewicht des untersten Quantenzustandes" gewinnen läßt.

Der Einfluß der Gewichtszahlen auf die chemischen Gleichgewichte bei Systemen mit vielen und wenigen Bestandteilen. (Eine größenordnungsmäßige Betrachtung).

Wir schicken eine größenordnungsmäßige Betrachtung voraus. Es werde ein System angenommen, das merklich durch einen Zustand von einheitlicher Energie definiert sein soll; bei festen Körpern denken wir also an einen Zustand in der Nähe des absoluten Nullpunktes. Die freie Energie dieses Systems hat dann den Wert:

$$F_0 = E_0 = KT \ln p_0. \tag{1}$$

Dabei ist die Konstante in der Energie E_0 durch die Wahl irgendeines zweckmäßigen Nullzustandes der Energie bestimmt[1]), während das Gewicht p_0 dadurch eindeutig definiert ist, daß die einfachsten Systeme, die keiner inneren Bewegungen mehr fähig sind (z. B. das Elektron) das Gewicht 1 erhalten.

Wir denken uns nun zunächst unter den erwähnten durch einen bestimmten Energiezustand definierten Systemen ein solches mit einer außerordentlich großen Teilchenzahl, etwa einem festen Körper, der ν Mole einer verdampfbaren Substanz enthält. Dann ist bekanntlich die freie Energie dieser Substanz im Gaszustande von der Größenordnung νRT. Beide freien Energien müssen im Gleichgewicht gleich sein; ob das Gewicht p_0 des festen Körpers die Konzentration des Dampfes merklich beeinflußt, hängt also davon ab, ob

$$KT \ln p_0 \backsim \nu RT \tag{2}$$

ist oder von niederer Größenordnung d. h. ein merklicher Einfluß auf das chemische Gleichgewicht — und dies gilt nicht nur für das Dampfgleichgewicht, sondern in jedem Falle — ist bloß dann zu erwarten, wenn

$$\ln p_0 \sim \frac{\nu R}{K} = n \text{ ist,}$$

wobei n die Zahl der betreffenden Moleküle im festen Körper bedeutet. Oder es muß sein:

$$p_0 \sim e^n. \tag{3}$$

Ist die Zahl der Teilchen n groß, so sieht man, daß ein Gewicht von der Größenordnung n, n^2 usw. überhaupt keinen nennenswerten Einfluß auf das Gleichgewicht ausübt; es ist also auch durch noch so genaue experimentelle Bestätigung des Nernstschen Theorems auf keine Weise festzustellen, ob das Gewicht der Quantenzustände des festen Körpers wirklich gleich 1 oder nur von niederer Größenordnung als e^n ist.

Dieselbe Betrachtung gilt, wenn der feste Körper nicht in normale Moleküle, sondern in seine kleinsten Bausteine (Elektrone, Atomkerne) verdampft wird.

Jetzt denken wir uns aber statt dessen ein System mit nur wenigen Teilchen, z. B. ein Molekül, im Dissoziationsgleichgewicht mit seinen Bestandteilen. Es ist dabei nicht, wie beim festen Körper nötig, daß wir uns auf den Zustand kleinster Energie beschränken, sondern die Betrachtung gilt für jede Energiestufe. Dann folgt, wenn man wieder ein einzelnes System im Gleichgewicht mit seinen Bestandteilen untersucht, genau wie oben Gleichung (2) als Bedingung dafür, daß ein Einfluß des Gewichtes eines Quantenzustandes auf das Gleichgewicht

1) Einstein (a. a. O.) zieht allerdings auch schon die „Zahl der Freiheitsgrade" in Betracht.

2) In Fällen, wo der Zustand kleinster Energie nicht durch die niedrigsten Quantenzahlen charakterisiert ist, wollen wir, mehr der Thermodynamik als der Quantentheorie folgend, den Zustand kleinster Energien als „untersten" Quantenzustand bezeichnen. (S. w. u.)

1) Vgl. dazu z. B. W. Schottky, Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum I. Ann. d. Phys. **62**, 132, 1920.

merklich wird und man sieht, daß bei $n = 2$ bereits ein Gewicht $p = 2$ einen nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluß auf das Gleichgewicht ausüben wird.

Die exakte Abhängigkeit der chemischen Konstanten von den Quantengewichten.

Die exakten Beziehungen erhalten wir, wenn wir die Translationsbewegung des verdampfenden Bestandteiles mit in Rechnung setzen und die Gesamtheit aller möglichen Zustände betrachten, also das Gleichgewicht zwischen irgendwelchen Komponenten in der homogenen Gasphase untereinander und mit dem Bodenkörper untersuchen. Die freie Energie der ganzen Phase läßt sich dann, idealen Gaszustand vorausgesetzt, in Summanden F_k zerlegen, die nur von den einzelnen Komponenten abhängen und bei jeder Komponente läßt sich wieder eine Zerlegung in Summanden F_{km} vornehmen, die sich nur auf den Zustand der m ten Energiestufe des betrachteten Gebildes beziehen. (Wir nehmen mit Einstein[1]) an, daß nur eine Reihe ausgezeichneter Energiewerte möglich ist.)

Wir haben dann

$$F_{km} = \nu_{km} RT (\ln c_{km} - (^3/_2 \ln T + C_k)) + \\ + \nu_{km} f^i_{km} \qquad (4)$$

Hierbei bedeutet ν_{km} die Molenzahl für den betreffenden Zustand, c_{km} die Konzentration in Molen/ccm, C_k eine bekannte chemische Konstante und f^i_{km} die innere freie Energie pro Mol des betreffenden Bestandteiles. Da wir es bei der Berechnung der inneren freien Energie pro Mol, f^i_{km} mit einer großen Zahl voneinander unabhängiger Teilchen zu tun haben, deren jedes eine Energiestufe auf verschiedene Weise soll realisieren können, so geht das Gewicht des Quantenzustandes der betr. Energiestufe in den Ausdruck für f^i nicht in der durch Gleichung (1) dargestellten Form ein, sondern, wie man sich leicht überzeugen kann[2]), in der Form:

$$f^i_{km} = e_{km} - RT \ln p_{km}, \qquad (5)$$

wobei e_{km} die innere Energie pro Mol bedeutet.

Um die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, haben wir

$$f_{km} = \frac{\partial F_{km}}{\partial \nu_{km}}$$

zu bilden, wobei wir berücksichtigen müssen, daß c_{km} proportional ν_{km} ist[3]).

1) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 318 bis 393, 1916.

2) Denn das Gewichtsglied hat dann die Form:

$$KT \ln p_{km}^{n_{km}} = n_{km} KT \ln p_{km} = \nu_{km} RT \ln p_{km}.$$

(n_{km} Molekülzahl für den Zustand (k, m).)

3) Bei der Diskussion der betreffenden Gleichung in meiner Annalen-Arbeit (**62**, 152, 1920) war dies übersehen worden.

Wir erhalten dann

$$f_{km} = \\ RT \ln (c_{km} - (^3/_2 \ln T + \Gamma_k + \ln p_{km})) + e_{km}. \quad (6)$$

Hierbei ist $\Gamma_k = C_k - 1$ mit der Nernstschen Konstanten i' identisch; es ist die Konstante, die in der einfachen Dampfdruckgleichung auftritt, wenn man mit natürlichen Logarithmen und Konzentration pro ccm rechnet. Wir können sie deshalb als „natürliche Konzentrationskonstante" bezeichnen. Sie hat den Wert:

$$\Gamma_k = \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi \mu_k K}{h^2} - \ln N. \qquad (7)$$

μ_k bedeutet dabei die Masse eines Teilchens der betreffenden Gattung (die für die verschiedenen Zustände m identisch ist), K ist die Boltzmannsche Konstante, N die Zahl der Moleküle im Mol.

Bei der Diskussion von Gleichung (6) brauchen wir nun nicht die Gleichgewichts-Bedingungen für Dampf und feste Phase sowie innerhalb des Dampfes einzeln aufzustellen, sondern wir brauchen nur zu untersuchen, wie sich Gleichung (6) von der betreffenden für gewöhnlich als richtig angenommenen Gleichung unterscheidet.

Einatomige Gase, unterster Quantenzustand.

Wir diskutieren zunächst den Fall der einatomigen Gase. Bei diesen ist bei nicht allzu hohen Temperaturen nur der unterste Quantenzustand der inneren Anordnung möglich; in diesem Gebiet ist also f_{km} mit f_k, c_{km} mit c_k identisch usw. Die bisher als richtig angenommene Gleichung für f_k unterscheidet sich von Gleichung (6) durch das Fehlen des Gliedes $\ln p_k$, das sich auf den untersten Quantenzustand des einatomigen Gases bezieht.

Wir wollen nun sehen, was das für einen Einfluß auf die Dampfdruckgleichung hat. Greifen wir beim festen Körper wieder den untersten Quantenzustand heraus, d. h. untersuchen wir das Gleichgewicht in der Nähe des absoluten Nullpunktes, so haben wir für den festen Körper, falls wir auch hier das „dynamische Gewicht" nicht ohne weiteres $= 1$ setzen, Gleichung (1) für die freie Energie. Die Änderung der freien Energie bei der Zufügung von $d\nu_k$ Molen der betreffenden Atomart ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_k} = \frac{\partial E_0}{\partial \nu_k} - KT \frac{\partial \ln p_0}{\partial \nu_k} \qquad (8)$$

Gleichsetzung der Ausdrücke (7) und (8) führt nur dann zur bisher angenommenen Dampfdruckformel[1]) für einatomige Gase, wenn die

1) Vgl. z. B. Nernst, Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Gleichung (67), S. 101.

beiden Gewichtsglieder im festen und dampfförmigen Zustand gleich sind, d. h.

$$KT\frac{\partial \ln p_0}{\partial \nu_k} = RT \ln p_k \qquad (9)$$

oder, wenn wir jetzt wieder statt der Molenzahl ν_k die Teilchenzahl $n_k = N\nu_k$ einführen und N gegen $\frac{R}{K}$ wegheben:

$$\frac{\partial \ln p_0}{\partial \nu_k} = \ln p_k. \qquad (9a)$$

Diese Gleichung ist aber dann erfüllt, wenn das Gewicht p_0, soweit die Abhängigkeit von den Teilchen n_k in Frage kommt, von der Form ist:

$$p_0 = p_k^{\nu_k}, \qquad (10)$$

d. h. wenn bei Hinzufügung jedes Teilchens das Gewicht p_0 auf das p_k-fache steigt. Das ist aber dann der Fall, wenn jedes Teilchen auch im festen Körper die durch das Gewicht p_k ausgedrückte Vielheit der möglichen Bewegungen unabhängig von seiner neuen Umgebung beibehält, wie ja auch in Formel (5) der Ausdruck für f'_{km} aus der Annahme der gegenseitigen Unabhängigkeit der Zustände der einzelnen Teilchen erschlossen worden ist.

Wenn sich also empirisch die Dampfdruck- (oder richtiger Dampfkonzentrations)-Formel mit der gewöhnlichen chemischen Konzentrationskonstante Γ als richtig ergibt, so haben wir daraus zu schließen, daß entweder das Gewicht des untersten Quantenzustandes der betreffenden (hier als einatomig angenommenen) Molekeln im Dampf- und festen Zustande $= 1$ ist, oder daß wenigstens das Gewicht des untersten Quantenzustandes durch die Kondensation nicht geändert wird.

Glücklicherweise liegen nun an 2 chemisch ganz verschiedenartigen einatomigen Gasen so genaue Messungen und daraus sich ergebende Berechnungen der chemischen Konstanten vor, daß wir für diese beiden und damit wohl für die meisten einatomigen Substanzen die Entscheidung, ob mit der Kondensation ein Wechsel des Quantengewichts verbunden ist oder nicht, fällen können. Bei Quecksilber unterscheidet sich nach Nernst[1]) die aus den Beobachtungen ermittelte chemische Konstante von der unter denselben Voraussetzungen wie Γ_k berechneten „Briggischen Druckkonstante[2])" C nur um $+0{,}01$ (unter Zugrundelegung der Sternschen Zahlenwerte um $+0{,}03$) mit einer angegebenen Genauigkeit von $\pm 0{,}03$.

Ähnlich ist es beim Argon; hier ist der Unterschied $+0{,}04$ (nach O. Stern $+0{,}06$) bei einer Genauigkeit von $\pm 0{,}06$. Innerhalb der Beobachtungsfehler stimmt also die chemische Konstante dieser beiden einatomigen Gase mit der ohne Berücksichtigung innerer Quantenzustände berechneten überein.

Um jedoch über die Genauigkeit dieser Aussage und den möglichen Einfluß einer Verschiedenheit der Quantengewichte im festen und gasförmigen Zustand ein Bild zu gewinnen, wollen wir noch die Größe der zu erwartenden Abweichung in der Nernstschen Konstante für den allgemeinen Fall berechnen, daß sowohl im Gaszustand wie im festen Zustande die Quantengewichte der einzelnen einatomigen Molekeln voneinander unabhängig, jedoch verschieden sind; im Gaszustand p_k, im festen Zustand p_k', wobei wir noch weiter der Einfachheit halber annehmen, daß der feste Körper nur aus den Molekeln k bestehe. Es wird dann für den festen Zustand pro Mol:

$$KT \ln p_0 = KT \ln p_k'^{n} = nKT \ln p_k' = RT \ln p_k' \qquad (11)$$

und der zu erwartende Unterschied in der chemischen Konstante ist bei Rechnung mit natürlichen Logarithmen einfach

$$\ln p_k - \ln p_k'.$$

bei der Rechnung mit Briggischen Logarithmen (wie bei Nernst)

$$\log^{10} p_k - \log^{10} p_k'.$$

Nun wird die Mannigfaltigkeit pro Molekel im Gaszustand, wenn sie überhaupt vorhanden ist, sicher größer sein, als in dem durch Nachbarstörungen eingeschränkten festen Zustand; wir werden also

$$\ln p_k - \ln p'_k > 0$$

zu erwarten haben. Ist nun

$$p'_k = 1, \; p_k = 2,$$

so ist der zu erwartende Unterschied in Briggischen Logarithmen

$$\log 2 = 0{,}30.$$

Das ist nach den Meßresultaten und der angegebenen Genauigkeit also für einatomige Gase ganz ausgeschlossen, ebenso alle höheren Quantengewichte im Gase bei dem Quantengewicht 1 im festen Körper.

$p'_k = 2, p_k = 3$ würde ergeben

$$\log {}^3/_2 = 0{,}18,$$

für

$$p_k > 3$$

1) Grundlagen, Seite 151.

2) Nernst rechnet nicht mit natürlichen Logarithmen und Konzentrationen, sondern mit Briggischen Logarithmen und Atmosphärendrucken.

noch größere Werte, also auch das ist ausgeschlossen. Man findet, daß bei Argon erst die Zahlen

$$p'_k = 3, p_k = 4$$

und bei Quecksilber sogar erst (bei Zugrundelegen des Sternschen Wertes)

$$p'_k = 6\ p_k = 7$$

mit den Beobachtungen verträglich waren. Unter diesen Umständen wird man sicher geneigt sein, der ebenfalls mit den Beobachtungen verträglichen Annahme

$$p_k = p_k'$$

den Vorzug zu geben. Mit den Absolutwerten der Größen

$$p_k \text{ und } p_k'$$

bzw. der allgemeiner definierten Größe p_0 werden wir uns weiter unten beschäftigen.

Bemerkt sei noch, daß für den Fall, daß kein Temperaturgebiet zur Verfügung steht, in dem im Dampfzustand mit genügender Genauigkeit die höheren Quantenzustände vernachlässigt werden können, die obigen Betrachtungen ihre Gültigkeit behalten, falls nur statt dem Index $_k$ wieder der Doppelindex $_{k1}$, der sich auf den untersten Quantenzustand der Dampfmolekel bezieht, eingesetzt wird.

Die höheren Quantenzustände der einatomigen Dampfmolekeln.

Wenn man von den Voraussetzungen der Einsteinschen Quantentheorie ausgeht, so unterscheidet sich eine Atomart im höheren Quantenzustand von einer Atomart im untersten Quantenzustande ebenso, aber auch nicht mehr, als sich eine chemische Verbindung von einer isomeren Verbindung unterscheidet, d. h. nur durch ihre Energie. Dem Umstand, daß diese Art von Stoffen durch höhere Quantenzahlen als 1 charakterisiert ist, wird man wohl keine prinzipielle Bedeutung mehr beimessen, nachdem man sich gezwungen gesehen hat, anzunehmen, daß auch im untersten Quantenzustand für gewisse Teile des Atoms (L = Schale) die Quantenzahl 2 eine Rolle spielt.

Wir sind also ebenso berechtigt, nach der chemischen Konstante der Gase in einem höheren Quantenzustand m zu fragen, als nach ihrer chemischen Konstante für den untersten Quantenzustand, und wir können die Gleichgewichte auch ebenso wie oben in der Nähe des absoluten Nullpunktes untersuchen. Dann gelten die oben wiedergegebenen Betrachtungen ganz analog, und wir finden als Bedingung, daß auch für diese Systeme die chemische Konstante durch Γ_k wiedergegeben wird, wieder die Gleichung (9b), jetzt in der Form:

$$\frac{\partial \ln p_0}{\partial n_k} = \ln p_{km}. \tag{9b}$$

Ist nun p_{km} von p_{k1} verschieden, so kann offenbar Gleichung (9b) nicht gelten, falls Gleichung (9a) gilt[1]). Falls die höheren Quantenzustände einatomiger Gase als besondere chemische Individuen aufgefaßt werden, und falls für diese Zustände das Gewicht ein anderes ist wie für den untersten Quantenzustand — was wohl außer Frage steht —, so existierten also gewisse Arten von einatomigen Gasen, für die das Nernstsche Theorem nicht gilt, für die sich die chemische Konstante nicht nach Nernst-Tetrode-Stern durch Γ_k (Gl. 7) ausdrückt.

Mehratomige Molekeln.

Indem wir bei den einatomigen Molekeln verschiedene Energiestufen eingeführt und die chemische Konstante dieser verschiedenen Energiestufen diskutiert haben, haben wir damit auch zugleich den allgemeinen Fall beliebig zusammengesetzter Molekeln prinzipiell erledigt. Der einzige praktische Unterschied besteht darin, daß bei mehratomigen Molekeln eine quasi-starre[2]) Rotation der verschiedenen Atome der Molekel um irgendeine Achse des Gebildes möglich ist, und daß den verschiedenen Quantenstufen einer Rotation viel kleinere Energieunterschiede entsprechen als den ersten Energiesprüngen bei einatomigen Gebilden. Das hat zur Folge, daß schon bei den gewöhnlichen Temperaturen, bis zu den tiefsten Temperaturen herab, bei denen man überhaupt noch den Dampfdruck messen kann, das mehratomige Verdampfungsprodukt ein Gemisch der verschiedensten Energiestufen darstellt, so daß man auf die „chemische Konstante" dieses Gemisches aus der Dampfdruckkurve keinen Rückschluß ziehen kann, wenn man nicht das Energie- und Gewichtsverhältnis aller höheren Quantenstufen zur untersten Stufe beherrscht. Der einzige zweiatomige Stoff, bei

1) Die linke Seite ist in beiden Fällen gleich, da die Gewichtsänderung des Quantenzustandes im festen Körper nur davon abhängt, was für materielle Teilchen entfernt sind, nicht in welchem Zustand sich diese materiellen Teilchen im Dampfraum befinden.

2) In einer vor kurzem erschienenen Notiz in dieser Zeitschr. (**21**, 238, 1920) habe ich Bedenken geäußert, ob ein durch Coulombsche Kräfte im kinetischen Gleichgewicht gehaltenes System, wie es nach unseren jetzigen Vorstellungen „die Materie" darstellt, bei der Rotation als starr angesehen werden kann. Da jedoch die Rotation gegenüber den Elektronenbewegungen, die den Abstand der Atomkerne regeln, als „unendlich langsame" Bewegung wird angesehen werden können, fällt offenbar diese Frage mit der allgemeineren zusammen, ob die kinetischen Gleichgewichtsmodelle, die wir für die Materie benutzen, die genügende Starrheit besitzen. Und das scheint ja wegen der sehr großen Energieunterschiede, die bei kleinen Verschiebungen auftreten, wohl der Fall zu sein.

dem in einem genügend großen Temperaturgebiet praktisch nur der unterste Quantenzustand in Frage kommt, ist das Wasserstoffmolekül. Beobachten wir für dieses in unseren Sinne chemisch eindeutige Gebilde eine chemische Konstante $= \Gamma_k$, so haben wir nach dem Vorhergehenden zu schließen, daß das „Gewicht" der unterstquantigen Wasserstoffmoleküle im Dampfzustand dasselbe ist wie im festen Körper. Nun ist sicher im festen Körper keine Rotation der Moleküle möglich; chemische Konstante $= \Gamma_k$ bedeutet also, daß dem untersten Rotationszustand der H_2-Dampfmoleküle das Gewicht 1 zuzuschreiben ist. Findet man dagegen die chemische Konstante größer als Γ_k, so gelten die bereits oben für einatomige Molekeln aufgestellten Beziehungen: einer — in Briggischen Logarithmen — um 0,30 größeren chemischen Konstante entspricht die Gewichtszahl 2 für den untersten Quantenzustand usw. Nun ist es nicht uninteressant, daß die von Kohner und Winternitz[1]) berechnete chemische Konstante der unterstquantigen Wasserstoffmoleküle eine Abweichung von dem Normalwert zeigt, die fast ebensogut das Gewicht 2 als das Gewicht 1 für den untersten Quantenzustand zuläßt. Die Abweichung ist nämlich $0{,}10 \pm 0{,}15$. Einem Gewicht 3 würde jedoch eine Abweichung von $+0{,}47$ entsprechen; das ist offenbar durch die Messungen ausgeschlossen. Damit scheint mir zur Quantentheorie des Wasserstoffmoleküls eine neue empirische Ergänzung gegeben. F. Reiche, der die Gewichte der verschiedenen Quantenzustände aus der Kurve der spezifischen Wärme zu erschließen versucht[2]), kommt zu dem Schluß, daß der nullquantige rotationslose Zustand aller Wahrscheinlichkeit nach nicht existiert. Für die höheren Stufen (von 1 an) werden die Gewichtszahlen n, $n+1$, $2n$ und $2n+1$ diskutiert. Die Zahl $2n+1$, die für den untersten Quantenzustand das Gewicht 3 ergeben würde, gibt den Verlauf der spezifischen Wärme ziemlich ungenügend wieder; wenn man nunmehr weiß, daß auch der experimentelle Wert der chemischen Konstanten dieses Gewicht ausschließt, so ist damit diese Annahme wohl endgültig erledigt. Dagegen sind leider bis jetzt die chemischen Daten noch nicht genau genug, um zwischen dem Gewicht n ($=1$ für den untersten Quantenzustand) und $n+1$ oder $2n$ ($=2$ für den untersten Quantenzustand) entscheiden zu können; und diese Entscheidung wäre um so wichtiger, als für die Kurven der spezifischen Wärmen die Gewichte n und $2n$ gleichwertig sind, so daß von dieser Seite aus kein Aufschluß darüber zu erwarten ist. Es handelt sich dabei bekanntlich um die Frage, ob verschiedene Umlaufsinne der Rotation um eine (hypothetische) Vorzugsrichtung doppelt oder nicht doppelt zu zählen sind, bzw. ob eine Drehung der Rotationsrichtung um 180° in gewissem Sinne einen neuen Quantenzustand bedeutet. Eine nur ein wenig genauere Bestimmung der in Betracht kommenden Daten würde hier die Entscheidung bringen.

Vielleicht ist noch der Hinweis nicht überflüssig, daß die von uns eingeführte chemische Konstante für den untersten Quantenzustand eines rotationsfähigen Moleküls in keiner Beziehung steht zu der von verschiedenen Seiten berechneten[1]) chemischen Konstante zwei- und mehratomiger Moleküle im Gebiet höherer Temperaturen. Bei der Bestimmung dieser Konstanten rechnet man mit einer praktisch stetigen Ausfüllung des Phasenraumes durch die möglichen Zustände des Moleküls, und Gewichtsfragen spielen dabei keine Rolle.

Spekulationen über das Gewicht der Quantenzustände. Der feste Körper beim absoluten Nullpunkt.

Indem wir bei der Diskussion der Resultate des vorangehenden Abschnittes annahmen, daß das Quantengewicht der Rotation eines mehratomigen Moleküls im festen Zustand verschwindet, haben wir bereits ein spekulatives Moment in unsere im übrigen nur mit allgemeinsten Aussagen rechnende Betrachtung gebracht. Diese Art von Spekulationen möchten wir hier noch erweitern und glaubhaft zu machen suchen, daß für den festen Körper das dynamische Gewicht mindestens des untersten Quantenzustandes entsprechend der Nernstschen Annahme, gleich 1 ist.

Wir stützen uns dabei auf das, was bisher über die Quantelung von mehr oder minder einfachen Systemen bekannt ist, das, so wenig es ist, doch zur Beantwortung der Frage auszureichen scheint. Freilich sind wir uns der Skizzenhaftigkeit und Unvollkommenheit der folgenden Gedankengänge durchaus bewußt.

Die Quantentheorie der bedingt periodischen Bewegungen unterscheidet bekanntlich „entartete" und nicht entartete Systeme. Bei den entarteten Systemen hängt die Energie nur von gewissen linearen Kombinationen der einzelnen Phasenvolumina und damit der Quantenzahlen ab[2]), so daß mit verschiedenen Kombinationen von Quantenzahlen derselbe Energiewert realisierbar ist. Bei den nicht entarteten Systemen entspricht dagegen „im allgemeinen" jeder anderen Kom-

1) Nernst, a. a. O.
2) Ann. d. Phys. 58, 657—694, 1919.

1) Z. B. von Tetrode, Akad. Amsterdam, 27. II. 1915.
2) Vgl. z. B. P. S. Epstein, Berl. Ber. 1918, S. 444.

bination von Quantenzahlen ein anderer Energiewert. Bei den nicht entarteten Problemen kann also einem bestimmten Energiewert nur dann eine Vielheit möglicher Fälle, ein von 1 verschiedenes Gewicht zuzuschreiben sein, wenn entweder einer eindeutig bestimmten Kombination von Quantenzahlen schon an sich ein von 1 verschiedenes Gewicht zuzuschreiben ist, oder wenn die Energieabhängigkeit eine solche ist, daß sich in gewissen Fällen die Energiewerte verschiedener Quantenzustände praktisch decken.

Die Behauptung, die die erste Möglichkeit (von 1 verschiedenes Gewicht bei eindeutig definierten Quantenzuständen) ausschließt, ist zwar vorläufig noch mehr Glaubenssache als feststehendes Theorem. Wenn man jedoch berücksichtigt, daß bei den nicht entarteten Problemen jedem eindeutig definierten Quantenzustand ein gleich großes Phasenvolumen zuzuordnen ist[1]), und wenn man weiter berücksichtigt, daß im Grenzfall langsamer Bewegungen die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes (der hier unser „Gewicht" entspricht) der Größe des betrachteten Phasenvolums proportional ist, so wird man sich nicht gut der Hypothese entziehen können, daß auch für die endlich voneinander verschiedenen Quantenzustände ihre Wahrscheinlichkeit durch die in allen Fällen gleiche Größe des elementaren Phasenraumes gegeben, d. h. daß das Gewicht aller Zustände gleich, und bei passender Definition = 1 ist.

Es bleibt also jetzt nur noch die zweite Frage zu prüfen, ob bei nicht entarteten Problemen die Energie verschiedener Quantenzustände „praktisch" dieselbe sein kann. Diese Frage ist nicht ganz obenhin zu beantworten, denn es scheint, als ob selbst dann, wenn man bei Konstanthaltung sämtlicher übrigen Quantenzahlen nur die einer einzigen Teilbewegung wachsen läßt, nicht notwendig damit immer eine Zunahme der Energie verbunden wäre. (Zweiquantiger Zustand der L-Schale als Zustand kleinster Energie!) Es ist also immerhin eine genauere Analyse der Quantenbedingungen des zu untersuchenden Systems und der Energievariation bei Veränderung irgendwelcher Quantenzahlen notwendig, und zwar ist hierbei zu untersuchen, ob und in welchen Fällen die Energieunterschiede zweier Quantenzustände so klein sind, daß sie bei der thermodynamischen Beobachtung nicht zu unterscheiden sind, denn das sieht man ohne weiteres: Unendlich benachbarte Energiewerte unterscheiden sich thermodynamisch in keiner Weise von genau identischen Werten.

1) In dem Sinne, daß, wenn man dieses von der Zahl der Freiheitsgrade abhängige Elementarvolumen mit der Anzahl der eindeutigen Quantenzustände multipliziert, sich gerade eine vollständige Ausfüllung des Phasenraumes ergibt.

Fassen wir nun insbesondere den untersten Quantenzustand in einem festen Körper ins Auge. Wenn wir nachweisen, daß irgendeiner Variation der Quantenzahl nicht nur überhaupt Energieunterschiede, sondern auch thermodynamisch endliche Energieunterschiede entsprechen (die genauere Definition hiervon folgt sogleich), so haben wir offenbar zugleich bewiesen, daß wir es nicht nur nicht mit entarteten, sondern auch nicht mit solchen Systemen zu tun haben, die sich thermodynamisch wie entartete verhalten.

Von einer Nullpunktsbewegung der Atomkerne im Gitter sehen wir ab. Dann handelt es sich also darum, ob den Elektronenbewegungen um die Atomkerne genau oder wenigstens für die thermodynamische Betrachtung ein von 1 verschiedenes Gewicht zuzuschreiben ist. Nun können wir offenbar die die Bewegung bestimmenden Quantenzahlen einteilen in „Dimensionierungsquanten" und „Bahnneigungsquanten" und endlich ist vielleicht noch verschiedener Umlaufsinn zu berücksichtigen.

Durch Änderung der Dimensionierungsquanten wird die Form einer Bahn verändert, z. B. wird aus einem Kreis eine Ellipse usw. Nun ist für das Atominnere der Einfluß einer solchen Änderung der Dimensionierungsquanten schon verhältnismäßig gut bekannt; man weiß, daß z. B. für die L-Schale bereits die relativistische Korrektion bei Übergang von den (nahezu) auf einer Kugel verlaufenden Bahnen zu dem „Ellipsenverein" (bzw. seinem räumlichen Analogon) Energieunterschiede bedingt, die vielen Tausenden von Graden entsprechen. Das heißt: Wenn man durch die Gleichung

$$h\nu = k\Theta, \Theta = \frac{h}{k}\cdot\nu$$

die „charakteristische Temperatur" Θ für irgendeinen Energieunterschied einführt, der einer Wellenlänge ν oder einer Wellenlängendifferenz $\Delta\nu$ entspricht, so ist diese Größe Θ für die durch verschiedene Einzelquanten bei gleicher Quantensumme bedingte relativistische Energiedifferenz in der L-Schale von der Größenordnung vieler Tausender von Graden. Es ist nämlich die diesem Energieunterschied entsprechende Schwingungsdifferenz der K_α- und $K_{\alpha'}$- oder L_α- und L_β-Linie nach Sommerfeld von der Größenordnung:

$$\Delta\nu \sim Z^4 \cdot \Delta\nu,$$

wobei Z die Kernladung, $\Delta\nu$ die der Feinstruktur der Balmerserie entsprechende Schwingungsdifferenz ist. Diese hat den Wert[1])

1) Es ist dies der theoretische und der indirekt aus dem He-Spektrum erschlossene Wert. Die bisher ziemlich ungenauen direkten Messungen am H-Atom ergeben bekanntlich im Mittel eine kleinere Zahl.

$$\Delta \nu_H = 1,1 \cdot 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

und es entspricht ihr die charakteristische Temperatur

$$\Theta_H = \frac{h}{K} \Delta \nu_H = 4,86 \cdot 10^{-11} \cdot \Delta \nu_H = 0,53^0.$$

Die der relativistischen Energiedifferenz eines zweiquantigen Systems entsprechende charakteristische Temperatur Θ_R ist also von der Größenordnung:

$$\Theta_R = Z^4 \cdot \Theta_H = Z^4 \cdot 0,5^0.$$

Für $Z > 10$ liegt mithin die charakteristische Temperatur dieser Umsetzung bereits außerhalb des Erreichbaren.

Für kleine Kernladungs- bzw. effektive Kernladungszahlen wird im Atom die relativistische Korrektion übertroffen durch die Störungen durch Nachbarringe oder Nachbarschalen, die mit den Dimensionsänderungen der mehrquantigen Bahn bei irgendeiner Vertauschung von Quantenzahlen verknüpft sind. Hier kann zur größenordnungsmäßigen Bestimmung der in Frage kommenden Energiedifferenzen die Rechnung von A. Landé über das Heliumatom[1]) benutzt werden. Es ergibt sich daraus, daß die Energiedifferenzen, die durch Wechsel der Dimensionierungsquanten bei gleichen Winkelquanten und bei gleicher Energie der ungestörten, nicht relativistischen Bahn hervorgerufen werden, bei der Quantenzahl 2 etwa $^1/_{10}$ der Totalenergie betragen. Es handelt sich hierbei also auch um charakteristische Temperaturen von etwa 10000 Grad.

Aus der gleichen Arbeit können wir auch die Energiedifferenzen entnehmen, die verschiedenen Bahnneigungsquanten entsprechen. Diese Frage interessiert uns besonders, weil eine Verschiedenheit der Neigungsquanten bereits beim untersten Quantenzustand möglich ist; genauer: weil bei ungestörtem Umlauf von Elektronen in gegeneinander geneigten Bahnen und in ihren untersten Quantenzuständen verschiedene Neigungen der Bahnebenen gegeneinander möglich sind, denen dieselbe Gesamtenergie entspricht. Durch die gegenseitigen Störungen werden jedoch diese verschiedenen Zustände gleicher Energie weit auseinander gerückt; und wenn auch die von Landé angestellte Rechnung für die Quantenzahl 1 noch so ungenau ist, so lehrt doch ein Blick auf die Tabelle S. 120, daß die Energiedifferenzen auch hier von der Größenordnung der Totalenergie sind.

Endlich ist noch der Fall zu betrachten, daß irgendein umlaufendes Elektron oder eine Gruppe von solchen, seine Bewegungsrichtung umkehrt, während andere Elektronen sie beibehalten. Bei ungestörten Bahnen würde das auch Zuständen gleicher Energie entsprechen. Bei den komplanaren Bahnen der 2 Heliumelektronen bedingt das jedoch (Landé, Schlußbemerkung) noch größere Energiedifferenzen als die Änderung der Dimensionsquanten oder Bahnneigungsquanten.

Wir finden also: Jede vom Zustand tiefster Energie ausgehende Quantenänderung innerhalb des Atoms entspricht einer charakteristischen Temperatur, die nicht nur größer ist als die eben noch meßbaren Temperaturintervalle, sondern in der Regel größer als alle erreichbaren Temperaturen überhaupt. Wenn sich also eine solche Vielfachheit von Quantenbahnen innerhalb des Atoms thermodynamisch geltend machen kann, so muß sie das zuerst in einem Einfluß auf die spezifische Wärme bei hohen Temperaturen tun, und es wäre allerdings keine undankbare Aufgabe, nach solchen Effekten zu suchen.

Als allgemeine Tatsache steht jedoch fest, daß Energieumsetzungen innerhalb der Atome bei gewöhnlichen Temperaturen nicht auftreten. Für eine große Reihe von Fällen haben wir nachgewiesen, daß dies nicht von einem zu kleinen, sondern von einem zu großen Wert der charakteristischen Temperatur herrührt; und dieses Resultat werden wir jetzt unbedenklich auch auf diejenigen Störungen ausdehnen können, die nicht von der gegenseitigen Beeinflussung der Teilchen desselben Atoms, sondern von der Wechselwirkung der verschiedenen Atome im festen Körper aufeinander herrühren. Denn, da diese Kräfte wie wir wissen, größenordnungsmäßig dieselben sind wie innerhalb des Atoms, werden Fälle „zu kleiner“ Θ nicht auftreten können, ohne daß auch irgend einmal „gut meßbare“ Θ vorkommen. Das Nichtauftreten von Freiheitsgraden des Atominnern in der spezifischen Wärme fester Körper bei gewöhnlichen Temperaturen ist also der experimentelle Beweis dafür, daß auch hier die charakteristischen Temperaturen „zu groß“ sind.

Im untersten Quantenzustand sind also nicht nur die gegenseitigen Neigungen, Dimensionierungen und Umlaufsinne der Bahnen innerhalb des Atoms eindeutig, sondern auch die Bahnneigungen und Umlaufsinne in bezug auf die Lage und die Bahnen der Nachbaratome.

Damit ist wohl der Nachweis erbracht, daß wir es beim untersten Quantenzustand eines festen Körpers nicht nur mit keinem entarteten, sondern auch nicht mit einem quasientarteten (d. h. durch sehr kleine erste Energiedifferenzen charakterisierten) System zu tun haben. Wir können deshalb bei geeigneter Definition der

1) Diese Zeitschr. **21**, 114—122, 1920. Wir nehmen an, daß die Kritik Herrn Bohrs an den Landéschen Rechnungen nicht das Größenordnungsmäßige seiner Resultate trifft.

Gewichtszahlen dem festen Körper im untersten Quantenzustand das Gewicht 1 beilegen[1]).

Fortsetzung. Quantengewicht von Gasmolekeln.

Soweit die Veränderung von Dimensionierungsquanten in Frage kommt, gilt für freie Gasmolekeln dasselbe, was im Vorhergehenden über die Quantelung des Atominnern gesagt ist. Fälle von Quasientartung im thermodynamischen Sinne können bloß vorkommen, wenn die Störungen durch Nachbarbahnen verschwinden und die relativistische Energiedifferenz genügend klein wird. Solche Ausnahmefälle sind: Das Wasserstoffatom, bei dem der Energieunterschied der beiden zweiquantigen Bahnen einer charakteristischen Temperatur von nur $0{,}53^0$ entspricht, das *He*-Ion, bei dem derselbe Unterschied $2^4 \cdot 0{,}53 = 4{,}2^0$ beträgt usw. Hierbei handelt es sich jedoch durchweg um Systeme, die bei gewöhnlicher Temperatur nicht merklich im Dampfraum vorhanden sind, und bei diesen Systemen auch erst um die höheren Quantenzustände.

Auch verschiedene gegenseitige Neigungen und Umlaufsinne von Bahnen innerhalb von Molekeln sind unter den im vorigen Abschnitt behandelten Fällen bereits diskutiert; sie führen, wie wir sahen, zu sehr hohen charakteristischen Temperaturen.

Dagegen kommen wir zu Entartungsproblemen, wenn wir die Orientierung und den Umlaufsinn einer ganzen Molekel im Raum verändert denken, ohne die relativen Bewegungen innerhalb des Systems zu ändern. Betrachten wir zuerst die Bahnneigungen gegen eine ideale Vorzugsrichtung, so ist bekannt, daß bei der Keplerbahn zu der azimutalen Quantensumme 1 eine mögliche Neigung (nach Bohr; Sommerfeld vermutete anfangs 2), zu der Quantensumme 2 zwei mögliche Neigungen existieren usw. Da nun die Energie durch die Quantensumme (bei gegebener radialer Quantenzahl) vollständig bestimmt ist, erhalten wir hier in der Tat verschiedene Fälle von vollständig gleicher Energie; dem zweiquantigen Wasserstoffatom ist also für jeden von den beiden um $\Theta = 0{,}53^0$ verschiedenen Zuständen noch das Gewicht 2 zuzuschreiben usw. Wir haben also hier Systeme mit der charakteristischen Temperatur $\Theta = 0$ vor uns, die, wenn man nicht die Quantenzahl 1 als charakteristisch für das Nernstsche Theorem ansieht, offenbar eine Durchbrechung desselben bedeuten würden.

Daß für mehratomige Molekeln in höheren Quantenzuständen ebenfalls von 1 verschiedene Gewichtszahlen auftreten müssen, die auf der Quantelung der Bahnneigung des rotierenden Gesamtsystems gegen eine (ideale) Vorzugsrichtung beruhen, ist schon früher erwähnt worden. Wir bemerkten dort auch, daß bei Ausschließung des rotationslosen Zustandes für den untersten Quantenzustand sowohl theoretisch wie experimentell die Gewichtszahlen 1 und 2 möglich seien und weiter, daß es sich hierbei vom quantentheoretischen Standpunkt um die Frage nach der „Quantelung des Umlaufsinnes" handele.

In derselben Frage nach der Quantelung des Umlaufsinnes scheint uns nun auch bei einatomigen Molekeln die thermodynamische Erfahrung Aufschluß bieten zu können. Theoretisch ist die Frage deshalb nicht so klar wie bei der Quantelung anderer Variabeln, weil es sich bei der Quantelung von Winkelkoordinaten in der Phasenebene der betreffenden separierten Koordinaten und Impulse nicht um eine geschlossene von dem Systeme durchlaufene Linie handelt, sondern um ein Rechteck, das nur längs der Koordinatenachse durch Bahnstücke begrenzt ist. Nun haben wir jedoch bei der Untersuchung des festen Körpers im untersten Quantenzustand festgestellt, daß, wenn überhaupt in einem Atom ein verschiedener Umlaufsinn (jetzt sämtlicher Teile eines Atoms gegenüber den entsprechenden Bewegungen in den Nachbaratomen) möglich ist, diesen beiden Bewegungen endlich verschiedene Energiewerte zukommen müssen; für den untersten Quantenzustand ist also hier das Umlaufsgewicht jedenfalls gleich 1[1]). Eine gleiche Betrachtung gilt jedoch nicht für den Gaszustand; hier kann die gleichzeitige Umkehr des Umlaufsinnes im ganzen System störungsfrei erfolgen, und es wäre von vornherein die Gewichtszahl 2 nicht ausgeschlossen. Daraus, daß für die einatomigen Molekeln (*Hg* und *Ar*) die chemische Konstante experimentell gleich Γ festgestellt ist (siehe oben), folgt jedoch, daß bei Elektronenumläufen einer möglichen Verschiedenheit des Umlaufsinnes nicht ein doppeltes Gewicht des betreffenden Quantenzustandes zuzuschreiben ist.

Die Allgemeinheit dieses Resultates erfährt

1) Die Gewichtszahl 2, die z. B. durch das Auftreten spiegelbildlicher Isomeren bedingt wäre, wird durch unsere Betrachtung nicht ausgeschlossen. (Vgl. O. Stern, a. a. O. S 387.) Doch bedingt eine derartige auf den festen Körper als Ganzes sich erstreckende Mannigfaltigkeit nach unsern früheren Untersuchungen keine thermodynamisch meßbare Wirkung.

1) Wieder käme hier unter Umständen das Quantengewicht 2 für den festen Körper als Ganzes in Betracht, da offenbar eine gleichzeitige Umkehr aller Umlaufsrichtungen im ganzen festen Körper die Energie konstant lassen muß. Diese Mannigfaltigkeit kommt jedoch thermodynamisch nicht in Frage.

allerdings vorläufig noch eine starke Einschränkung. Sowohl *Ar* wie *Hg* sind, wie wir wissen, Atome mit einer geraden Zahl von Elektronen außerhalb des Kernes, und es wäre denkbar, wenn auch, besonders beim *Hg*-Atom, nicht gerade wahrscheinlich, daß hier im untersten Quantenzustand die Bewegungen derart sind, daß schon von vornherein entgegengesetzte Bewegungen paarweise einander zugeordnet sind. Eine Umkehr aller Umlaufsrichtungen würde dann zu demselben Resultat führen, wie eine Vertauschung gleichartiger Elektronen und diese Mannigfaltigkeit hatten wir ja definitionsgemäß aus der Gewichtsbestimmung ausgeschlossen. Unter diesem Gesichtspunkte wäre die Bestimmung der chemischen Konstante eines einwertigen Atoms, etwa des *Na*-Dampfes, besonders erwünscht.

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß bei den ganzen vorangehenden Spekulationen gewisse für die Statistik wichtige Fragen, wie die der „Erreichbarkeit" eines gewissen Quantenzustandes von einem anderen Zustande aus (Bohr), sowie die Stabilitätsfragen für die betrachteten Bahnen nicht berücksichtigt sind. Beides könnte im Sinne einer Verkleinerung von Quantengewichten wirken. Endlich ist noch die Voraussetzung bedingt periodischer Bewegungen hervorzuheben, die vielleicht nicht immer erfüllt ist.

Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes. Gibbssches Paradoxon.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die vorangehenden Betrachtungen, soweit sie sich auf das Quantengewicht des untersten Energiezustandes (bei festen Körpern und Gasmolekeln) beziehen, eher eine Bestätigung als eine Widerlegung des Nernstschen Theorems gebracht haben, wenn auch die endgültige Entscheidung noch aussteht. Nun könnte die Frage nach dem Gewicht des untersten Quantenzustandes von Gasmolekeln und besonders von einatomigen Gasen vielleicht als eine müßige erscheinen, wenn man von vornherein von dem durch soviele Ergebnisse anscheinend schon voll bestätigten Nernstschen Theorem ausgeht, das ja nach dem eingangs aufgestellten Satz das Quantengewicht 1 für den untersten Quantenzustand bedingen würde. Wenn wir im Laufe unserer Untersuchung nicht in dieser Weise vorgegangen sind, sondern vielmehr die Tragweite des Nernstschen Theorems durch kombinierte Anwendung von quantentheoretischen und experimentellen Resultaten zu prüfen versucht haben, so sind wir dazu vom Standpunkt einer möglichst vorurteilslosen Forschung natürlich auf alle Fälle berechtigt; doch sollen zur besonderen Erklärung dieses Vorgehens noch zwei Gesichtspunkte hervorgehoben werden.

Der eine betrifft das Prinzip der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes. (Nernst a. a. O. S. 72—76). Es soll hierzu nur kurz bemerkt werden, daß wir zwar diese Betrachtungen, soweit sie sich auf adiabatische Änderung von Arbeits-Koordinaten beziehen, für sehr einleuchtend halten und das sich daraus ergebende Resultat mit der Adiabatenhypothese der Quantentheorie identifizieren[1]); für chemische Umsetzungen halten wir jedoch den betreffenden Schluß nicht für bindend, indem wir es für möglich halten, daß beim absoluten Nullpunkt eine chemische Reaktion nicht ohne Zuhilfenahme unendlicher Volumina auf reversibelm Wege durchgeführt werden kann. Eine nähere Diskussion dieses Gesichtspunktes, der noch gewisse weitere Perspektiven zu eröffnen scheint, würde jedoch den Rahmen dieser Darstellung überschreiten.

Der andere Umstand, den wir zum Schluß noch einmal hervorheben möchten, ist der, daß bei dem höheren Quantenzustand sowohl von mehratomigen wie von einatomigen Gasmolekeln das Quantengewicht ohne jede Frage größer als 1, mithin die chemische Konstante dieser Substanzen nicht $= \Gamma_k$ ist. Thermodynamisch hat das zur Folge, daß einer Gasmolekel mit dem Quantengewicht p_{km} bei gegebenem Energieunterschied gegenüber einer festen Phase ein p_{km} mal größerer Dampfdruck entspricht, als einer Molekel mit dem Quantengewicht 1 bei gleichem Energieunterschied gegenüber der festen Phase. Ebenso bei Gasreaktionen. Die Zwillings-Quantenzustände derselben Energiestufen verhalten sich also in bezug auf freie Energie und chemisches Gleichgewicht genau so wie chemisch verschiedene Gasarten, bei denen sich ja auch die Partialdrucke (immer den idealen Gaszustand vorausgesetzt) ungestört addieren. Das führt uns zum Schluß auf eine merkwürdige Erweiterung des Gibbsschen Paradoxons.

Bis vor wenigen Jahren glaubte man bekanntlich die ungestörte Superposition der freien Energie in einem Gasgemisch auf Komponenten von „chemisch" verschiedener Beschaffenheit beschränkt. Als Paradoxon erschien dabei die völlige Beibehaltung dieser ungestörten Superposition der freien Energie bei chemisch fast identischen Gasen. Durch die Einsteinsche Auffassung der verschiedenen Quantenzustände desselben Gebildes als „chemisch verschiedene"

---

1) Vgl. auch A. Smekal, Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip. Diese Zeitschr. 19, 137—142, 1918.

Substanzen haben wir inzwischen Gasarten kennen gelernt, die sich im alten Sinn chemisch nicht unterscheiden und die trotzdem bezüglich der freien Energie bei Mischung das Verhalten chemisch verschiedener Gase zeigen. Damit war das Paradoxon noch einen Schritt weiter geführt; immer noch konnte man jedoch die verschiedenen Energiestufen als Charakteristikum für einen „chemischen" Unterschied ansehen, wie man ja auch chemische Verbindungen von gleicher Zusammensetzung, jedoch verschiedener Energie kennt. Wenn jedoch nun, wie wir sahen, auch innerhalb derselben Energiestufen noch Zwillingszustände vorhanden sind, die sich in bezug auf Partialdrucke und chemische Gleichgewichte wie chemisch verschiedene Substanzen verhalten, so scheint das Paradoxon zu einem ganz rettungslosen geworden zu sein, und es wird offenbar notwendig, die Begriffe „physikalisch" und „chemisch" hier aus dem Spiel zu lassen und sich nach einem neuen Kennzeichen umzusehen, welches diese ungestörte Superposition entweder herbeiführt oder vernichtet. Und eine solche scheint uns nun die statistische Betrachtung einfach in der Identität oder Verschiedenheit des Phasenraumbereiches zu liefern, in dem sich die inneren Bewegungen in einer Molekel der betrachteten Art befinden. Die Frage nach der Größe und Gestalt dieses elementaren Phasenraumbereichs hat die Quantentheorie zu beantworten; die endlichen und untereinander gleichen Elementarbereiche, mit denen sie operiert, erklären in Wahrheit die in dem Gibbsschen Paradoxon auftretende Diskontinuität. Und dabei ist es nicht einmal nötig, daß die oben als Zwillingszustände bezeichneten Zustände gleicher Energie wirklich diskreten Bereichen des Phasenraumes angehören; denn auch die Einstein-Bohrsche Quantenhypothese kennt kontinuierliche Übergänge zwischen verschiedenen Quantenzuständen, und zwar gerade bei entarteten Systemen, wie sie in bezug auf gewisse Freiheitsgrade die mehrquantigen Gasmolekeln darstellen. Ausschlaggebend ist vielmehr einzig und allein die quantenmäßig veränderliche Größe des elementaren Phasengebietes, das der betreffenden Bewegung zuzuordnen ist.

Eine Stütze dieser Auffassung scheint auch eine Betrachtungsweise zu bieten, die in weiterer Verfolgung der von Einstein begonnenen „chemischen" Unterteilung von früher nur als „physikalisch" verschiedenartig betrachteten Zuständen die rein gaskinetisch in verschiedene Geschwindigkeitsintervallen befindlichen Gasmolekeln als verschiedenartige Stoffe behandelt. Das auf diese Stoffe angewandte Gibbssche Paradoxon löst sich in der Tat in eine Stetigkeitsbetrachtung auf, und man erkennt so auf indirektem Wege von neuem seinen Zusammenhang mit der Quantenhypothese.

Zusammenfassung.

Es wird der Einfluß eines von 1 verschiedenen „dynamischen Quantengewichtes" der festen Körper und Gasmolekeln auf die chemische Konstante in Dampfdruck- und Reaktionsgleichgewichten untersucht. Für den untersten Quantenzustand scheint sich aus gewissen theoretischen und experimentellen Daten das Gewicht 1 und damit eine Bestätigung des Nernstschen Theorems zu ergeben; doch fehlen zur Klärung dieser Frage, die nunmehr mit der Frage nach der „Quantelung des Umlaufsinnes" zusammenfällt, noch gewisse entscheidende Resultate. Auf die höheren Quantenzustände von Gasmolekeln (ein- und mehratomigen) läß sich das Nernstsche Theorem nicht ausdehnen, da hier sicher von 1 verschiedene dynamische Quantengewichte auftreten; eine Betrachtung dieser Fälle unter dem Gesichtspunkt des Gibbsschen Mischungsparadoxons zeigt zugleich, daß dieses Paradoxon seine Wurzel in der aus der Quantentheorie bekannten Zellenstruktur des Phasenraums hat.

(Eingegangen 22. Oktober 1920.)

Kritisches zur Messung der Horizontalintensität.

Von E. Mauz.

In dieser Zeitschrift **18**, 402, 1917 veröffentlichte Dieterici eine elektrische Methode zur Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Auf Anregung von Herrn Prof. Paschen untersuchte ich die Bedingungen für die Genauigkeit dieser Methode und führte Messungen mittels eines nach den Angaben von Herrn Paschen gebauten Magnetometers durch.

1. Die Methode.

Es wird vom Gaußschen Verfahren zur Bestimmung der Horizontalintensität nur der Schwingungsversuch benutzt. Durch Hinzufügen eines elektromagnetisch erzeugten Hilfsfeldes zum Erdfeld erhält man eine Doppelmessung, aus welcher sich das unbekannte Verhältnis von Trägheitsmoment zu magnetischem Moment des Schwingungsmagnets eliminieren läßt.

Schwingt ein Magnet vom magnetischen Moment M und dem Trägheitsmoment I in einem homogenen magnetischen Felde von der Feldstärke H, so beträgt seine ganze Schwingungsdauer



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M \cdot H}}. \quad (1)$$

Wird die Feldstärke H um die Stärke H' eines homogenen, parallelen Zusatzfeldes vermehrt (Zuschaltung, Index 2) oder vermindert (Gegenschaltung, Index 1), so ergibt sich

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{H + H'}{H - H'}, \quad (2)$$

woraus

$$H = H' \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \quad (3)$$

wird. Dies ist die dem Meßverfahren zugrunde liegende Formel. Dabei bedeutet H die Horizontalintensität des Erdmagnetismus, H' ein bekanntes, ihr paralleles homogenes Hilfsfeld.

Die Formel (3) ergibt den Wert von H mit einer Genauigkeit von ungefähr 1 Proz. Um größere Genauigkeit zu erreichen, ist dieselbe in doppelter Hinsicht zu erweitern:

Erstens kommt zu der Direktionskraft des Feldes $M \cdot H$ in Formel (1) noch die Direktionskraft ϑ der Aufhängung hinzu; dabei bezeichne

$$\Theta = \frac{\vartheta}{M \cdot H} \quad (4)$$

das sogenannte Torsionsverhältnis.

Sodann ist das magnetische Moment M des Schwingungsmagnets infolge Induktion der verschiedenen Felder H, $(H + H')$ und $(H - H')$ nicht konstant. Bezeichnet m das zu dem permanenten magnetischen Moment M in einem schwachen Felde H hinzutretende induzierte Moment, so läßt sich ansetzen

$$m = pH. \quad (5)$$

Es bezeichne ferner

$$\Delta = \frac{m}{M} = \frac{pH}{M} \quad (6)$$

den sog. Koeffizienten der magnetischen Induktion.

Man erhält nunmehr an Stelle von Formel (1) die erweiterte Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(M + pH)H + \vartheta}}, \quad (7)$$

woraus

$$\frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} = \frac{H}{H'} \frac{1 + \left[1 + \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right] \Delta + \Theta}{1 + 2\Delta} \quad (8)$$

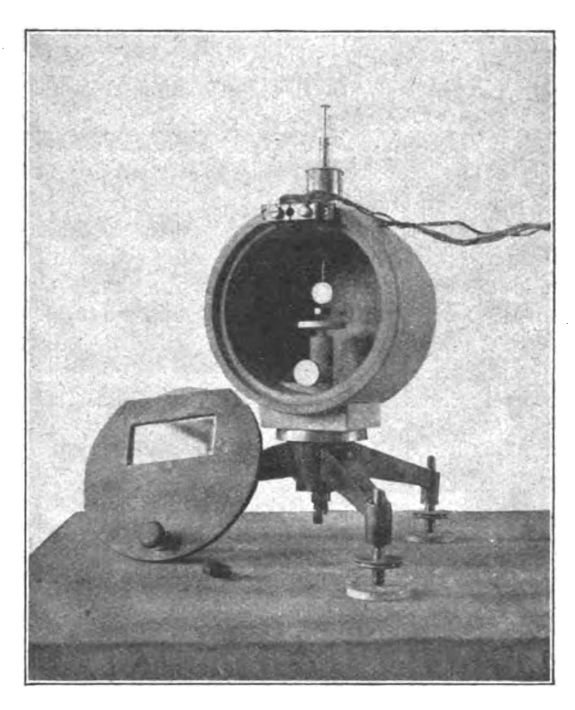
und endlich

$$H = H' \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \left\{1 + \left[1 - \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right] \Delta - \Theta\right\}. \quad (9)$$

Dies ist die genaue Formel für das vorliegende Meßverfahren.

2. Das Magnetometer.

Das Magnetometer (Fig. 1) wurde in der Werkstatt des Physikalischen Instituts der Universität Tübingen nach den Angaben des Herrn Paschen gebaut. Dasselbe besteht im wesentlichen aus einem zylindrischen Gehäuse aus gut getrocknetem, paraffiniertem Holz, welches auf einem Messingdreifuß drehbar befestigt ist. Mitten auf dem Gehäuse sitzt ein Torsionskopf, an welchem der Stabmagnet (22,5 mm lang, 4,7 mm hoch und breit, 3,9 g schwer) mittels eines etwa 3 cm langen Quarzfadens aufgehängt ist. Er kann durch ein ver-



schiebbares hölzernes Tischchen arretiert werden. Der mit dem Magnet fest verbundene Spiegelträger trägt einen Planspiegel von 18 mm Durchmesser. In den Gehäusezylinder sind, symmetrisch zum mittleren Querschnitt durch den Torsionskopf, zwei Nuten eingedreht, in denen sich je 3 Lagen zu je 3 Windungen eines 0,75 mm dicken, mit Seide isolierten Kupferdrahtes befinden. Die Abmessungen sind so gewählt, daß die mittelsten Windungen einen Abstand gleich ihrem Radius aufweisen. Von der Konstruktion des Magnetometers ist zu fordern, daß der ganze Apparat aus unmagnetischem Material hergestellt ist; im übrigen verlangt die Ausmessung der Stromspulen die größte Sorgfalt.

3. Ausmessung der Stromspulen.

Der Radius der Spulen wurde nach zwei Methoden: durch Messung des Umfanges und



des Durchmessers ermittelt. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

Mittlerer Spulenradius . . . $R = 8{,}262$ cm
„ Spulenabstand . . . $A = 8{,}272$ „
Durchmesser des umsponnenen Kupferdrahtes . . . . . $d_u = 0{,}079$ „
Durchmesser des blanken Kupferdrahtes . . . . . $d_b = 0{,}075$ „

Zur Prüfung der Genauigkeit der Messungen von Radius und Abstand der Spulen wurde die verwendete Schublehre mit dem Normalmaßstab eines Komparators verglichen. Es ergab sich, daß die Längenmessungen infolge von Teilungsfehlern und mangelnder Schärfe der Teilstriche um

$$\pm 0{,}0025 \text{ cm} = \pm 0{,}3 \text{ Prom.}$$

unsicher sind.

Diese Unsicherheit begrenzt im folgenden die Genauigkeit der absoluten Werte der Messungen; dagegen konnte die relative Genauigkeit noch wesentlich gesteigert werden. Bei den folgenden Untersuchungen wurde 0,1 Prom. als obere Fehlergrenze gesetzt und versucht, die Einflüsse sämtlicher Fehlerquellen kleiner zu gestalten, oder, wo dies nicht möglich war, in Rechnung zu setzen.

4. Das Hilfsfeld.

Das Hilfsfeld H' wurde durch zwei symmetrische Kreisströme in der Anordnung von Gaugain[1]) erzeugt, bei welcher die mittlere Entfernung A der Spulen gleich ihrem mittleren Radius R ist. Diese Anordnung liefert für ein kleines Gebiet im Mittelpunkt ein homogenes Feld. Man erhält für zwei Spulen von je n Windungen vom Abstand $A = R$ für die Systemmitte bei einer Stromstärke von i Amp.

$$H' = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}} \frac{n \cdot i}{R \cdot 10} = \frac{c}{R} i \text{ Gauß.} \qquad (10)$$

Mit den vorliegenden Werten ergibt sich der Faktor

$$\frac{c}{R} = 0{,}97890;$$

entsprechend der Genauigkeit der Spulenausmessung beträgt der Fehler $\pm 0{,}3$ Prom., somit

$\frac{c}{R} = 0{,}9789 \pm 3$ Einheiten der letzten Stelle.

Genauer ist es jedoch, die Feldstärke für den Ort der Pole, welcher um $\frac{5}{6} \cdot \frac{2{,}25}{2}$ cm vom Mittelpunkt abweicht, unter Berücksichtigung der Einzelwerte für R und A an Stelle ihres Mittels zu berechnen. Man erhält dann im vorliegenden Falle

$$\frac{c}{R} = 0{,}97866,$$

einen um 0,25 Prom. kleineren Wert.

Die Stromstärke des Hilfsfeldes wurde mittels eines Kompensationsverfahrens gemessen. Dieselbe wurde dabei so reguliert, daß ein Meßkreis bestehend aus Normalwiderstand, Normalelement und Galvanometer stromlos blieb. Die Anordnung ermöglichte die Stromstärke auf $\pm 0{,}03$ Prom. konstant zu halten.

5. Aufstellung und Justierung.

Die Aufstellung wurde unter möglichster Berücksichtigung der bei magnetischen Messungen gebotenen Vorsichtsmaßregeln durchgeführt. Besondere Sorgfalt wurde auf Elimination der durch die Stromzuleitungen des Hilfsfeldes entstehenden magnetischen Felder gelegt. Es wurden sämtliche Leitungen tunlichst bifilar geführt und verdrillt, Widerstandsspulen vertikal gestellt und die ganze Anordnung zur Regulierung und Messung der Stromstärke vom Magnetometer entfernt aufgebaut.

Um trotzdem noch vorhandene störende Felder der Zuleitung feststellen zu können, wurde je ein Ende der Magnometerspulen von den Kontaktstücken losgeschlossen und letztere durch einen konischen Kontaktstöpsel kurzgeschlossen. Das Einsetzen des Kurzschlußstöpsels allein würde nicht genügen; da nämlich der Widerstand eines Stöpsels mindestens 10^{-4} Ohm, der Widerstand einer Spule etwa 0,2 Ohm beträgt, so fließt durch die Spule immer noch 0,5 Prom. des Stromes. Ein Abschwächen des Erdfeldes mittels Kompensationsmagnete sowie ein Verstärken des Stromes auf das Zehnfache des größten bei den Messungen vorkommenden Wertes ließ die störenden Felder stärker hervortreten und ermöglichte ihre hinreichende Beseitigung mittels einer Windungsfläche in der Zuleitung. Ihr Einfluß auf die Schwingungsdauer war schließlich geringer als 0,1 Prom., der Einfluß auf die Richtung verschwindend.

Um das Hilfsfeld der Horizontalintensität parallel zu richten, wurde die Gegenschaltung benutzt, da hierbei eine kleine Abweichung der Feldrichtung vom magnetischen Meridian eine starke Abweichung des resultierenden Feldes bewirkt. Infolge des täglichen Ganges der Deklination muß diese Einstellung jeweils kurz vor der Messung vorgenommen werden. Um dieselbe rasch und genau zu ermöglichen, wurde später eine Mikrometerverstellung angebracht. Außerdem wurde die Magnetbefestigung derart abgeändert, daß der Stabmagnet in ein besonderes Schwingungsschiffchen

1) Gaugain, Pogg. Ann. **88**, 442, 1853.

eingelegt wird. Hierdurch ist es möglich, eine Torsion des Quarzfadens zu eliminieren, indem man zunächst das leere Schiffchen in den magnetischen Meridian dreht und dann erst den Magnet einlegt.

6. Die Zeitmessung.

Die Schwingungsdauern wurden mit einer Stoppuhr, welche in Intervallen von 0,2 Sek. vorrückt, gemessen. Die Genauigkeit, mit welcher sich eine Zeitdifferenz bestimmen ließ, soll auf Grund von Vorversuchen zu $\pm$ 0,1 Sek. angenommen werden.

Da es sich um relative Zeitmessungen handelt, kommen nur die Korrektionen wegen der Dämpfung und wegen der endlichen Amplitude in Betracht. Der Einfluß der Dämpfung bleibt unter 0,1 Prom., solange das natürliche logarithmische Dekrement λ kleiner ist als 0,014, was hier stets erfüllt war; der größte auftretende Wert betrug $\lambda = 0{,}0097$. Es zeigte sich ferner, daß bei den verwendeten Schwingungsdauern (von 2,5 bis 13,5 Sek.) die Amplitude sich stets in etwa 8 Minuten auf die Hälfte verringerte. Da die Gesamtmeßzeit für die langsame (T_1) wie für die rasche (T_2) Schwingung auf Grund der Fehlergleichung (12) gleich lang gewählt wurde, so waren bei gleichen Anfangsamplituden auch die Endamplituden dieselben, die Korrektion wegen der endlichen Amplitude hob sich somit heraus.

Für den Fehlereinfluß der Zeitmessung ergibt sich aus der Beziehung

$$Z = \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2}, \tag{11}$$

welche die Zeitgrößen von Formel (9) enthält, die Fehlergleichung

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{H^2 - H'^2}{HH'} \left\{ -\frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta T_2}{T_2} \right\}. \tag{12}$$

Setzt man im ungünstigsten Falle

$$-\Delta T_1 = +\Delta T_2 \; (= \pm 0{,}1 \text{ Sek.})$$

und bezeichnet Tg die Gesamtmeßzeit, so muß dieselbe für die vorgeschriebene Fehlergenze

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \pm 0{,}1 \text{ Prom.}$$

betragen

$$Tg = 2 \cdot \frac{H^2 - H'^2}{HH'} \, 10^3 \text{ Sek.} \tag{13}$$

Der Einfluß eines Fehlers der Zeitmessung wird um so geringer, je weniger sich das Hilfsfeld von der Horizontalintensität unterscheidet. Für eine vorgeschriebene Fehlergrenze ist dementsprechend eine um so kürzere Gesamtmeßzeit notwendig, z. B. bei den im Abschnitt 8 aufgeführten Messungen

Hilfsfeld H' . .	1,42	1,88 Gauß.
Gesamtmeßzeit Tg	1400	250 Sek.

7. Das Korrektionsglied.

$$\left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{H'}{H} \right)^2 \right] \Delta - \Theta \right\}. \tag{14}$$

Das Torsionsverhältnis Θ wurde mittels des Torsionskopfes bestimmt zu $\Theta = 0{,}00507$.

Die Bestimmung des magnetischen Induktionskoeffizenten Δ erfolgte nach Weber[1]) durch Drehen einer Spule im Erdfeld mit und ohne den Magnetstab, sowie Herausziehen desselben aus der Spule. Aus den Galvanometerausschlägen der hierbei induzierten Ströme ergab sich $\Delta = 0{,}0035$. Es ist bei dieser Differenzenmethode schwierig, den Wert für Δ sehr genau zu bekommen. Sein Einfluß im Korrektionsglied tritt jedoch infolge des Faktors

$$\left[1 - \left(\frac{H'}{H} \right)^2 \right]$$

um so mehr zurück, je näher das Hilfsfeld der Größe der Horizontalintensität sich nähert, so daß bereits eine mäßige Genauigkeit von Δ hinreichend ist.

8. Messungen.

Die durchgeführten Messungen bezweckten den praktischen Gebrauch des Magnetometers in den Einzelheiten zu untersuchen, sowie den theoretisch berechneten Einfluß des magnetischen Induktionskoeffizienten nachzuweisen. Die Messungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Tübingen ausgeführt. Im folgenden wird als Beispiel eine ungestörte Versuchsreihe aufgeführt. Die Ergebnisse besitzen, da der Meßraum nicht eisenfrei gebaut war, nur relative Bedeutung.

Bei der Ausrechnung wurde zunächst das Korrektionsglied wegen der magnetischen Induktion nicht berücksichtigt. Es ergibt sich nunmehr, da

$$H_{\text{corr}} = H_{\text{I}} (1 - 0{,}12\,\Delta) = H_{\text{II}} (1 - 0{,}49\,\Delta) \tag{15}$$

für den Koeffizienten der magnetischen Induktion der Wert $\Delta = 0{,}0022$ und als korrigierter zeitlicher Mittelwert

$$H_{\text{corr}} = 0{,}19946 \text{ Gauß.}$$

Unter Benutzung des direkt gemessenen Wertes $\Delta = 0{,}0035$ erhält man $H_{\text{I corr}} = 0{,}19949$ Gauß. Der Unterschied beträgt 0,15 Prom.; es ist somit für das stärkere Hilfsfeld der Serie I die Genauigkeit von Δ nach der Messung von Abschnitt 7 gerade hinreichend.

Sowohl die Erwägungen über den Fehlereinfluß der Zeitmessung (Abschnitt 6), wie über

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **22**, 417, 1884.

1919 Juli 20.

Hilfsfeld: Serie I 0,18816 Gauß; Serie II 0,14246 Gauß.

Messung Nr.	Uhrzeit vorm.	Schwingungsdauern T_1 Sek.	T_2 Sek.	Feldstärken in $\gamma = 10^{-5}$ Gauß H_I	Mittel	H_{II}	Differenz
1	7^{16}—7^{28}	13,39	2,388	19951	199	199	
2	7^{29}—7^{40}	13,40	2,386	47			
3	7^{45}—8^{15}	$6{,}186_3$	$2{,}541_4$		45	29	16
4	8^{22}—8^{33}	13,42	2,386	43			
5	8^{35}—8^{46}	13,42	2,386	43			
6	8^{50}—9^{24}	$6{,}186_3$	$2{,}540_5$		41,5	24	17,5
7	9^{33}—9^{44}	13,44	2,386	40			
8	9^{46}—9^{57}	13,44	2,384	37			
9	10^{00}—10^{32}	$6{,}191_9$	$2{,}542_5$		36,5	22	14,5
10	10^{37}—10^{47}	13,47	2,388	36			
11	10^{48}—10^{57}	13,47	2,386	34			
				Mittel:	19941	19925	16,0

den des Koeffizienten der magnetischen Induktion (Abschnitt 7) zeigen, daß man die günstigsten Messungsbedingungen erhält, wenn man die Stärke des Hilfsfeldes nahe derjenigen der Horizontalintensität wählt. Eine obere Grenze hierfür ergibt der Umstand, daß dann bei Gegenschaltung die störenden Felder der Zuleitung einen zu großen Einfluß gewinnen.

Die bei den Messungen gesammelten Erfahrungen wurden dazu benutzt, eine verbesserte Konstruktion des Magnetometers zu entwerfen, welche jedoch infolge von Materialmangel nicht ausgeführt werden konnte. Unter anderem war dabei beabsichtigt, die Spulen auf Marmorscheiben zu wickeln, welche eine höhere Genauigkeit der Ausmessung ermöglichen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Paschen für die freundliche Anregung und Unterstützung bei dieser Arbeit meinen ergebensten Dank aussprechen.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die von Dieterici angegebene elektrische Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus bei Benutzung eines von Paschen konstruierten Magnetometers und unter Berücksichtigung von Korrektionsgliedern die Horizontalintensität bis auf 0,3 Prom. bei etwa 10 Minuten Beobachtungszeit zu messen gestattet. Die relative Meßgenauigkeit ist erheblich größer, die absolute läßt sich durch Verfeinerung der Magnetometerkonstruktion bis 0,1 Prom. steigern.

(Eingegangen 23. Oktober 1920.)

Das Theorem der übereinstimmenden Zustände und die Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von A. Byk.

Die das elementare Wirkungsquantum enthaltende Entropiekonstante der hochtemperierten und hochverdünnten einatomigen Gase fällt bei der Bildung der Zustandsgleichung und der spezifischen Wärme heraus; andererseits muß zu ihrer experimentellen Bestimmung aus der Dampfdruckkurve nach dem Nernstschen Wärmetheorem die Flüssigkeit mit herangezogen werden. Dies führt zu der Vermutung, daß die Quanteneffekte des fluiden Zustandes sich sehr viel deutlicher zeigen werden, wenn man von den bisher fast ausschließlich betrachteten verdünnten Gasen zu Zuständen höherer Dichte bis zum tropfbar-flüssigen übergeht. Um die Beschränkung auf die Methode der Schwingungen zu vermeiden, die bei den Gasen und Flüssigkeiten wenig natürlich erscheint, knüpfen wir an die auch auf aperiodische Bewegungen anwendbare Plancksche Strukturtheorie des Phasenraumes[1]) an. Diese scheint auf den ersten Blick allerdings zu ihrer Durchführung in dem erwähnten Falle spezielle Annahmen über die Natur der van der Waalsschen Anziehungskräfte zu erfordern. Aber die Aufgabe vereinfacht sich durch Übergang von der charakteristischen thermodynamischen Funktion für Volumen und Temperatur als unabhängige Variable, der freien Energie, zu ihrem Volumkoeffizienten, der Zustandsgleichung. Bei dieser ergibt sich ein neuer Gesichtspunkt für die Quantentheorie, der nicht auf den partiellen Differentialquotienten der freien Energie nach dem Volumen beschränkt,

1) Ann. d. Phys. (4) 50, 385, 1916.

sondern auf diese selbst in voller Allgemeinheit anwendbar ist. Im Bereich der Zustandsgleichung führt die klassische Mechanik nach Kamerlingh Onnes[1]) mit Hilfe des Prinzips der mechanischen Ähnlichkeit zum Theorem der übereinstimmenden Zustände. Dieses ist aber erfahrungsgemäß nur ein Grenzgesetz für Substanzen mit hohen kritischen Temperaturen, während diejenigen mit niedriger kritischer Temperatur bzw. niedrigem Siedepunkt in zunehmendem Maße davon abweichen[2]). Man kann sich fragen, ob diese Abweichung nicht etwa damit zusammenhängt, daß vielleicht das der klassischen Mechanik entsprechende Ähnlichkeitsprinzip mit der Quantentheorie unverträglich ist.

Vergleicht man zwei mechanisch untereinander ähnliche Molekülsysteme und bezieht die Phasenbahnen in den zu diesen beiden gehörigen Phasenräumen auf Einheiten, die sich gemäß der physikalischen Dimension der betreffenden Koordinaten und Impulse aus den spezifischen Fundamentaleinheiten beider Molekülsysteme ergeben, so werden die Systeme der Phasenbahnen in beiden Räumen miteinander identisch. Die Zelleneinteilung beider Phasenräume in Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit aber wird eine verschiedene sein, da das elementare Wirkungsquantum h, gerade wegen seiner universellen Konstanz im C.G.S.-System, in den spezifischen Einheiten der beiden Molekülsysteme einen verschiedenen Wert besitzt.

Als Temperatureinheit des spezifischen Maßsystems benutzten wir wie gewöhnlich die kritische ϑ_0. Indem wir dann den Zusammenhang der Temperatur- mit der Energie-Einheit durch die auch im Falle des Versagens der mechanischen Ähnlichkeit noch gültige Gleichung

$$T = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V}$$

(T Temperatur, S Entropie, U innere Energie, V Volumen, wobei wir S, U, V auf 1 Mol Substanz beziehen wollen) und durch die Festsetzung bestimmen, daß in der wahrscheinlichkeitstheoretischen Definitionsgleichung der Entropie $S = k \log W$ (W thermodynamische Wahrscheinlichkeit) die Konstante k für jedes spezifische Maßsystem gleich 1 wird, erhalten wir als spezifische Einheit der Energie $k\vartheta_0$. Sofern dies eine molekulare, nicht eine molare Größe ist, scheint es natürlich, als Einheiten von Masse und Volumen hier nicht das Molekulargewicht und das kritische Volumen φ_0, sondern die entsprechenden auf ein wahres Molekül bezogenen Größen m_0 (wahres Gewicht des Moleküls) und $\frac{\varphi_0}{N}$ (N Anzahl der Moleküle im Mol) zu wählen. In diesen Einheiten hat h als eine Größe von der Dimension Energie mal Zeit die Einheit

$$m_0^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/3}(k\vartheta_0)^{1/2}\ \mathrm{g\,cm^2\,sec^{-1}}.$$

Die $n$te Potenz des „reduzierten Wirkungsquantums"

$$w = \frac{h}{m_0^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/3}(k\vartheta_0)^{1/2}}$$

wird, wenn n die Anzahl der Freiheitsgrade ist, die Größe des Elementargebietes der Wahrscheinlichkeit in den auf ihre spezifischen Einheiten reduzierten Phasenräumen messen. Das reduzierte Wirkungsquantum w aber ist nicht mehr, wie es nach dem Ähnlichkeitsprinzip der klassischen Mechanik sein sollte, von Molekülsystem zu Molekülsystem konstant, sondern hängt von den Werten der individuellen Konstanten in seinem Nenner ab.

Für 41 Substanzen, für die die erforderlichen Daten zur Prüfung der Theorie vorliegen, ergeben sich die folgenden w-Werte:

1. He 2,04,
2. H_2 1,12,
3. CH_4 0,144,
4. N_2 0,138,
5. CO 0,133,
6. O_2 0,124,
7. A 0,112,
8. C_2H_4 0,0805,
9. C_2H_6 0,0728,
10. N_2O 0,0681,
11. CO_2 0,0645,
12. SO_2 0,0444,
13. Xe 0,0390,
14. Methylformiat 0,0385,
15. Methylacetat 0,0311,
16. Äthylformiat 0,0310,
17. Äthyläther 0,0301,
18. i-Pentan 0,0298,
19. n-Pentan 0,0294,
20. Benzol 0,0275,
21. Äthylidenchlorid 0,0261,
22. Äthylacetat 0,0260,
23. Methylpropionat 0,0259.
24. Propylformiat 0,0256,
25. Äthylenchlorid 0,0252,
26. Hexamethylen 0,0252,
27. Di-i-Propyl 0,0248,
28. n-Hexan 0,0244,
29. Fluorbenzol 0,0244,
30. Methylisobutyrat 0,0223,
31. Äthylpropionat 0,0221,
32. n-Propylacetat 0,0221,
33. Methylbutyrat 0,0221,
34. n-Heptan 0,0209,
35. Chlorbenzol 0,0204,
36. CCl_4 0,0193,
37. Di-i-Butyl 0,0187,
38. n-Oktan 0,0182,
39. Brombenzol 0,0164,
40. Jodbenzol 0,0135,
41. $SnCl_4$ 0,0131.

1) Archives Néerlandaises **30**, 112, 1897.

2) Vgl H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung (Enzyklopädie d. mathem. Wissenschaften V 10, Leipzig 1912, S. 720) sowie speziell für die Troutonsche Regel: W. Nernst, Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, S. 19, 1906.

w sinkt also von He bis zu $SnCl_4$ auf den 156. Teil seines Wertes.

Leitet man die freie Energie f, auf die spezifische Maßeinheit $k\vartheta_0$ bezogen, aus der Struktur des Phasenraumes ab, so erhält man eine universelle Funktion von φ und ϑ (reduziertes Volumen und reduzierte Temperatur) mit w als Parameter, so daß für die auf C.G.S.-Einheiten bezogene freie Energie F pro Mol die Beziehung besteht:

$$\frac{F/N}{k\vartheta_0} = f(\varphi, \vartheta, w) \qquad (1)$$

und entsprechend für eine beliebige, in C.G.S.-Einheiten gemessene Zustandsgröße G von der Dimension

$$[\text{Masse}]^{\mu}\,[\text{Volumen}]^{\xi}\,[\text{Energie}]^{\varepsilon}\,[\text{Temperatur}]^{\tau}$$

die Beziehung:

$$\frac{G}{m_0^{\mu}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{\xi}(k\vartheta_0)^{\varepsilon}(\vartheta_0)^{\tau}} = g(\varphi, \vartheta, w), \qquad (2)$$

wobei g ebenfalls eine universelle Funktion von φ, ϑ, w ist. Der Inhalt der Gleichungen (1) bzw. (2), die das Theorem der übereinstimmenden Zustände in doppelter Weise, nämlich durch Übergang von der Zustandsgleichung, dem partiellen Differentialquotienten der freien Energie nach dem Volumen, zu der freien Energie selbst sowie durch Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik erweitern, möge als „Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände" bezeichnet werden. Daß die quantentheoretische Fassung hier nicht einfach ein Ersatz der klassischen Formulierung durch eine andere darstellt, sondern eine Erweiterung des klassischen Theorems, in der dieses als Grenzfall noch enthalten ist, zeigt sich darin, daß in (1) und (2) die Funktionen f bzw. g für kleine w, d. h. wenn h entsprechend der klassischen Boltzmannschen Theorie als Differential gegenüber den im Molekülsystem maßgebenden Größen der Dimension Energie mal Zeit anzusehen ist, von w unabhängig werden. Das klassische Theorem der übereinstimmenden Zustände erscheint so als klassischer Grenzfall des Quantentheorems in demselben Sinne wie das klassische Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz als Grenzfall des quantentheoretischen Planckschen Strahlungsgesetzes. Daß wir mit der Basierung unserer spezifischen Einheiten auf den Ansatz $S = \log W$ die richtige Größenordnung getroffen haben, ergibt sich daraus, daß die w für He und die übrigen tiefsiedenden Gase, die die typischen Abweichungen vom klassischen Theorem der übereinstimmenden Zustände zeigen, nicht weit von 1 liegen, während die w-Werte für die hochsiedenden Substanzen, wo der klassische Grenzfall praktisch bereits erreicht ist, in der Tat kleine, reine Zahlen sind.

Die Anwendung der skizzierten Quantentheorie auf die Thermodynamik des fluiden Aggregatzustandes im einzelnen knüpft zweckmäßig an die aus der charakteristischen thermodynamischen Funktion f abgeleiteten thermodynamischen Funktionen des Druckes (Zustandsgleichung), der inneren Energie und der Entropie an. Zur Prüfung eignen sich sowohl empirische wie theoretisch begründete thermodynamische Beziehungen, da es zunächst nur darauf ankommt, w hier überall als Argument der thermodynamischen Funktionen nachzuweisen.

Die folgenden thermodynamischen Beziehungen lassen sich durch reduzierte Gleichungen[1]) im Sinne des klassischen Theorems der übereinstimmenden Zustände mit w als individuellem Parameter, der für kleine Werte desselben herausfällt, darstellen:

Die charakteristische thermodynamische Funktion einatomiger Gase[2]) *gemäß der Planckschen Strukturtheorie des Phasenraumes; die empirische Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes*[3]), *die Modifikation des Theorems der übereinstimmenden Zustände durch Kristine Meyer*[4]), *die Zustandsgleichungen von Avogadro (der idealen Gase), von D. Berthelot*[5]) *und A. Wohl*[6]), *die quantentheoretischen Zustandsgleichungen entarteter Gase von Sackur*[7]), *Nernst*[8]) *und Keesom*[9]), *die Boyle-Temperatur, die Inversionstemperatur des Joule-Kelvin-Effekts; die Dampfdruckgleichungen von van der Waals*[10]) *und von Nernst*[11]), *die Regel der geraden Mittellinie der Dampf- und Flüssig-*

1) Infolge des molekularen Charakters unserer spezifischen Fundamentaleinheiten sind die im C.G.S.-System gemessenen Zustandsgrößen auf ein Molekül und nicht auf ein Mol zu beziehen. So ist z. B. hier das reduzierte Volumen φ, wenn V das Volumen des Mols ist, als der Quotient $\frac{V/N}{\varphi_0/N}$ und nicht als der Quotient $\frac{V}{\varphi_0}$ aufzufassen.

2) M. Planck, Sitzungsber. d. Preußischen Akademie d. Wissenschaften in Berlin 1916, S. 667.

3) Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O., S. 729.

4) Zeitschr. f. physik. Chem **32**, 1, 1900; **71**, 325, 1910.

5) Sur les thermomètres à gaz (Paris 1903, bei Gauthier-Villars), S. 46.

6) Zeitschr. f. physik. Chem. **87**, 1, 1914.

7) Zeitschr. f. Elektrochem. **20**, 565, 1914.

8) Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes (Halle 1918), S. 168.

9) Diese Zeitschr. **14**, 665, 1913.

10) Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes (2. Aufl., I. Teil, 1899, Leipzig, bei J. A. Barth), S. 158.

11) a. a. O. S. 100.

keitsdichten von Cailletet und Mathias[1]), *der kritische Koeffizient, der kritische Dampfspannungskoeffizient; die revidierte Troutonsche Regel der Verdampfungswärmen*[2]); *die Entropie der idealen einatomigen Gase;* weiterhin von Erscheinungen außerhalb des Rahmens der reinen Thermodynamik, für die das Theorem der übereinstimmenden Zustände in Betracht kommt: *der Koeffizient der inneren Reibung nach Reinganum*[3]) *und nach Nernst*[4]), *der Temperaturkoeffizient der molekularen Oberflächenenergie nach Eötvös, die nach Ph. A. Guye*[5]) *reduzierte Molekularrefraktion.*

Die reduzierte Entropie der idealen Gase nimmt z. B. die Form an:

$$\frac{S/N}{k} = \ln\varphi + \tfrac{3}{2}\ln\vartheta - 3\ln\left[\frac{w}{e^{1/2}(2\pi)^{1/2}}\right].$$

(π Ludolfsche Zahl, e Basis der natürlichen Logarithmen).

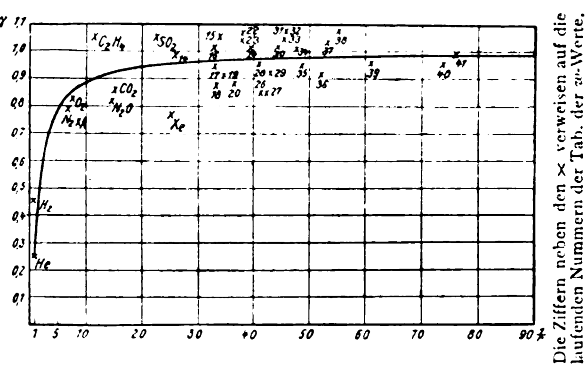
Eine Reihe der thermodynamischen Quasi-Invarianten lassen sich in der Form darstellen

$$\alpha + \beta\frac{\delta w}{e^{\delta w} - 1}.$$

So wird für die reduzierte charakteristische Temperatur der K. Meyerschen Modifikation des Theorems der übereinstimmenden Zustände: $\alpha = 0$, $\beta = 0{,}32$, $\delta = 8{,}1$; für die reduzierte Konstante der Dampfdruckgleichung von van der Waals[6]): $\alpha = 4{,}2$, $\beta = 3{,}2$, $\delta = 13$; für die reduzierte Konstante des Gesetzes der geraden Mittellinie: $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 0{,}76$, $\delta = 3{,}5$; für den kritischen Koeffizienten: $\alpha = 3{,}1$; $\beta = 0{,}71$, $\delta = 5{,}8$; für die reduzierte Konstante der Formel von Reinganum zur Darstellung des Koeffizienten der inneren Reibung: $\alpha = 0{,}64$, $\beta = 1{,}7$, $\delta = 7{,}6$. Für die revidierte Troutonsche Regel wird eine speziellere Theorie auf Grundlage einer Quantenrotation nach P. Ehrenfest[7]) entworfen, die die Troutonschen Zahlen mit dem gleichen Grade der Genauigkeit wiedergibt wie die empirische Formel von Nernst[8]), die sie als Funktion der absoluten Siedetemperatur formuliert. Fig. 1 stellt als Beispiel die Konstante γ des Gesetzes der geraden Mittellinie in reduzierter Form:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi_{Fl}} + \frac{1}{\varphi_D}\right) = 1 + \gamma(1 - \vartheta)$$

als Funktion von $\frac{1}{w}$ dar. (φ_{Fl} und φ_D reduziertes Flüssigkeits- bzw. Dampfvolumen.) Die un-



Die reduzierte Konstante γ des Gesetzes der geraden Mittellinie von Cailletet und Mathias als Funktion des reziproken reduzierten Wirkungsquantums $\frac{1}{w}$.

regelmäßigen Schwankungen, die sich stets auch bei allen Anwendungen des klassischen Theorems auf hochsiedende Substanzen zeigen, sind im wesentlichen der mangelnden Erfüllung der geometrischen Ähnlichkeit auch im Sinne der klassischen Mechanik zuzuschreiben[1]) und verschwinden, wie tabellarische Zusammenstellungen zeigen, wenn man nur Reihen von Körpern ähnlicher chemischer Konstitution in Betracht zieht.

Der Nachweis von Quanteneffekten, die wie bei der Troutonschen Zahl und der Konstante des Gesetzes der geraden Mittellinie die Werte der thermodynamischen Quasi-Invarianten im Verhältnis von 1 : 4 verändern, bestätigt die anfangs ausgesprochene Vermutung, daß wir es beim Übergang von den idealen Gasen zu dichteren Zuständen der Materie mit sehr viel stärkeren Quanteneffekten zu tun haben werden. Die Volumverminderung erweist sich als ein weit wirksameres Mittel zur Herausschälung von der experimentellen Prüfung zugänglichen Quanteneffekten als die bisher zu diesem Zwecke fast ausschließlich in Betracht gezogene Temperaturerniedrigung.

Die gleichzeitige Anknüpfung der Zustandsgleichung und der Entropiegleichung an das Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände macht es möglich, die scheinbar so ver-

1) Compt. rend. **102**, 1202, 1886.
2) W. Nernst, Theoretische Chemie (7. Aufl., Stuttgart 1913), S. 295.
3) Ann. d. Phys. (4), **10**, 341, 1903.
4) Sitzungsber. d. Preuß. Akademie d. Wissenschaften in Berlin 1919, S. 118.
5) Annales de chimie et de physique (6) **21**, 233, 1890.
6) Unser Quantentheorem bewährt sich hier in einem Falle, in dem nach W. Nernst (Theoretische Chemie, 7. Aufl., S. 235) die prinzipielle Unhaltbarkeit des klassischen Theorems der übereinstimmenden Zustände besonders deutlich hervortritt.
7) Verhandlungen der Deutsch. Physikalischen Gesellschaft **15**, 451, 1913.
8) W. Nernst, Theoretische Chemie (7. Aufl.), S. 294.

1) Kamerlingh Onnes und Keesom, a. a. O., S. 721.

schiedenartigen individuellen Konstanten dieser beiden Gebiete auf denselben Parameter w zurückzuführen, der einerseits die typische Konstante der Entropie und des Nernstschen Wärmetheorems, das Molekulargewicht, andererseits die kritischen Größen φ_0 und ϑ_0 enthält.

Die Thermodynamik der Gase und Flüssigkeiten erscheint so etwa auf den Punkt geführt, auf dem sich die Thermodynamik des Vakuums (der Wärmestrahlung) nach Aufstellung des Wienschen Verschiebungsgesetzes befand. In beiden Fällen ist eine Variable aufgefunden, als deren Funktion sich die charakteristische thermodynamische Funktion darstellen läßt. Diese Variable ist im Falle der Wärmestrahlung $\frac{T}{\nu}$ (ν Schwingungszahl), im Falle der Gase und Flüssigkeiten die gleichdimensionierte Größe

$$\frac{\vartheta_0}{m_0^{-1/3}(k\vartheta_0)^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{-1/3}}.$$

Da bei der Strahlung verschiedene Zustände der einzelnen Substanz, des Vakuums, im Falle der Thermodynamik des fluiden Zustandes aber das Gesamtverhalten verschiedener Substanzen den Gegenstand des Vergleiches bilden, so ist die Variable im ersten Falle eine physikalische, die sich beim Übergang von einem Zustande einer Substanz zum anderen ändert, im zweiten Falle eine chemische, d. h. eine solche, die für die einzelne Substanz konstant ist und nur durch Ersatz einer Substanz durch eine andere variiert. Dementsprechend vermitteln auch unsere Kurven, z. B. die hier gezeichnete Kurve 1, beim Fortschreiten auf der Abszissenachse den Übergang von einer Substanz zur anderen[1]), während die sonst üblichen Quantenkurven, etwa zur Darstellung der spezifischen Wärmen als Temperaturfunktion, das Verhalten einer einzelnen Substanz in verschiedenen Zuständen charakterisieren.

Wenn auch die Existenz einer bis auf die Abweichungen von der mechanischen Ähnlichkeit im klassischen Sinne universellen charakteristischen thermodynamischen Funktion und die Natur des in sie eingehenden individuellen Parameters nunmehr klargestellt sein dürfte, so wird doch noch viel Arbeit erforderlich sein, um die explizite, analytische Form dieser Funktion zu finden. Man wird dabei, wie dies hier geschehen ist, wohl kaum anders vorgehen können, als daß man zunächst diese Funktion bzw. die aus ihr abgeleiteten Funktionen durch empirische Formeln approximiert, um dann allmählich durch Ausbildung der quantentheoretischen Vorstellungen im einzelnen, wofür bei der Troutonschen Zahl ein Ansatz gemacht wird, zu der vollständigen Form der Funktion f des Quantentheorems der übereinstimmenden Zustände aufzusteigen. Soweit bereits durchgearbeitete quantentheoretische Ansätze, wie im Falle der Entropie der idealen Gase, vorliegen, brauchen diese nur, wie wir es getan haben, auf die Form einer Funktion von w gebracht zu werden.

Die hier für die Quantenthermodynamik der Gase und Flüssigkeiten entwickelte Methode, eine im C.G.S.-System absolute Konstante in das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit einzuführen, ist ihrer Natur nach offenbar nicht auf dieses Gebiet beschränkt. Auch in der speziellen Relativitätstheorie kommt z. B. in Gestalt der Lichtgeschwindigkeit c eine solche Konstante vor, die die Erfüllung der mechanischen Ähnlichkeit im strengen Sinne unmöglich machen und nur als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten zulassen wird. Demgemäß läßt sich das reduzierte kinetische Potential[1]) als die für bewegte Körper verallgemeinerte (negativ genommene) freie Energie für ein der Quantentheorie unterworfenes einatomiges Gas[2]) auf eine Form bringen, die neben w die „reduzierte Lichtgeschwindigkeit"

$$\frac{c}{(k\vartheta_0)^{1/2}m_0^{-1/3}}$$

als gleichberechtigten zweiten individuellen Parameter enthält.

Auch das allgemeine Relativitätsprinzip führt zu einer universellen Konstanten nicht verschwindender Dimension, dem Radius des sphärischen Universums[3]). Sein reduzierter Wert geht als Parameter in alle geometrischen Verhältnisse quasi-ähnlicher Figuren, z. B. einer Maschine und ihres Modells ein. Mechanische Ähnlichkeit ist also schon in diesem Falle, in dem von den Technikern seit langem das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit praktisch angewandt zu werden pflegt, infolge der mangelnden geometrischen Ähnlichkeit, die mit dem Euklidischen Raume fällt, streng genommen nicht mehr vorhanden. Das Versagen des Ähnlichkeitsprinzips aus rein geometrischen Gründen in diesem besonders durchsichtigen Falle macht

1) Hierin gleichen sie z. B. den Kurven, die nach Lothar Meyer die Atomvolumina als Funktion der Atomgewichte und nach Moseley die Wurzeln aus den Schwingungszahlen der K_α-Linien als Funktion der Ordnungszahlen der Elemente darstellen.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. (4) **26**, 1, 1908.

2) M. Planck, Sitzungsber. d. Preußischen Akademie d. Wissenschaften in Berlin 1916, S. 667.

3) A. Einstein, Sitzungsber. d. Preußischen Akademie d. Wissenschaften in Berlin 1917, S. 149, 1919, S. 355.

das Wesen der hier für die Quantentheorie des fluiden Zustandes benutzten Methode deutlich, die lediglich von dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit und dem absoluten Charakter des Wirkungsquantums Gebrauch macht.

Die erhaltenen Resultate führen im Gegensatz zu der von R. C. Tolman[1]) postulierten Relativität der Größe zu der Auffassung, daß zwar die Bewegung relativ, die Größe als solche aber absolut ist. Derartig abstrakte Sätze gewinnen, wie die Entwicklung des Relativitätsprinzips der Bewegung gezeigt hat, physikalische Bedeutung erst durch eine präzise mathematische Formulierung und durch konkrete Anwendungen. Die mathematische Formulierung stellt hier das Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände in der Form der Gleichung (2) dar, die konkreten Anwendungen die gesamte physikalische Thermodynamik des fluiden Zustandes. Die Gleichung (2) läßt sich leicht auf beliebige Variable und eine größere Anzahl von im C.G.S.-System universellen und daher im spezifischen Maßsystem individuellen Parametern verallgemeinern. Das Auftreten dieser Parameter bei einer Ähnlichkeitstransformation und ihr Fehlen bei einer Bewegungstransformation charakterisiert dann den absoluten Charakter der Quantität als solcher im Gegensatz zu dem relativen Charakter der Bewegung.

1) Physical Review (2) **3**, 244, 1914.

Berlin, im November 1920.

(Eingegangen 26. November 1920.)

Über radioaktive Tatsachen und Kernstruktur.

Von Gerhard Kirsch.

Wir stellen uns die Aufgabe, ein Kernmodell zu konstruieren, das möglichst viele Einzelheiten des radioaktiven Zerfalls erklärt. Hierbei wollen wir an der in der vorangegangenen Arbeit: „Notiz zur Geiger-Nuttallschen Beziehung"[1]) wahrscheinlich gemachten Annahme festhalten, daß die Atomkerne im wesentlichen aus einigen 50 α-Teilchen und einigen 20 Bindeelektronen bestehen, wozu im Falle der Radiumreihe und Actiniumreihe noch einzelne H-Teilchen kommen. Wir wollen zuvörderst die vorliegenden Anhaltspunkte für die Größe, sowohl des Kernes selbst, als auch seiner mutmaßlichen Bestandteile betrachten. Aus der Zerstreuung der α-Strahlen beim Durchgang durch Materie schließt Rutherford[1]) auf einen Maximalradius der Kerne der Goldatome von $3 \cdot 10^{-12}$ cm, eine Angabe, die man wohl ohne weiteres auf die Atomkerne der radioaktiven Elemente übertragen darf. Betreffend die Größe des α-Teilchens liegen unseres Wissens bis heute 2 experimentelle Ergebnisse vor: C. G. Darwin[2]) bestimmte die Summe der Radien des H- und α-Teilchens, also, da das H-Teilchen vielleicht bedeutend kleiner angenommen werden darf, damit den Radius des α-Teilchens zu $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm im Maximum. Rutherford[3]) gibt an, daß sich das rasch bewegte α-Teilchen wie ein zweifach positiv geladenes, senkrecht zur Bewegungsrichtung stehendes Scheibchen vom Radius $3 \cdot 10^{-13}$ cm verhält. Auch die Schätzungen der Größe des negativen Elektrons liegen in der gleichen Größenordnung.

Nun bedeuten diese Ziffern, wenn nicht wirkliche Größenangaben, so doch mindestens eine Grenzdistanz, von der ab das betrachtete Gebilde nicht mehr durch eine punktförmige Ladung ersetzt gedacht werden kann. Jedenfalls aber sind die Kernbestandteile im Kern einander durchschnittlich so nahe, daß bei ihren wechselseitigen Wirkungen ihre Struktur wesentlich mit ins Spiel kommt, dieselben also nicht nach dem Coulombschen Gesetz berechnet werden können, ja vielleicht wie bei den Atomen auf mit dem Atomradius vergleichbare Distanzen von ganz anderer Größenordnung werden. Ebenso, wie seinerzeit die kinetische Theorie der Gase bereits die schönsten Resultate lieferte und die viel kompliziertere Dynamik der Atome im festen Körper uns erst jetzt nach genauerer Erkenntnis der gitterförmigen Strukturen derselben näher zugänglich wird, ebenso dürfte es sich auch beim Atomkern infolge der dichten Packung der Ladungen gleichsam um einen neuen Aggregatzustand der Elektrizität handeln, an den man wohl auch auf dem Wege heranzukommen trachten kann, daß man sich zuerst ein Bild schafft von den Anordnungen der Ladungen im Innern des Atomkerns und dann aus dem Gefundenen eventuell auf die dynamischen Verhältnisse schließt. Von vornherein werden wir aber Ergebnisse der klassischen Elektrodynamik und Quantentheorie nur soweit heranziehen, als dies zwanglos möglich ist.

Das erste, worauf wir unsere Aufmerksamkeit richten wollen, ist die von W. Kossel[4]) gefundene Tatsache, daß der mittlere Elektronen-

1) Diese Zeitschr. **21**, 452, 1920.

1) Phil. Mag. **27**, 493, 1914.
2) „ „ **27**, 506, 1914.
3) „ „ **37**, 560, 1919.
4) Diese Zeitschr. **20**, 265, 1919.

gehalt der Kerne, — wenn man ihre Masse bis auf den nicht durch 4 teilbaren Rest als ausschließlich aus *He*-Kernen bestehend annimmt —, deutlich gewisse Zahlen (2, 6, 12) bevorzugt. Wir möchten dies mit Kossel dahin deuten, daß diese Zahlen besonders den durch Stabilität ausgezeichneten Elektronenanordnungen im Kern entsprechen, aber unsere Vorstellungen dahin weiterbilden, daß diesen Zahlen je ein weiterer komplett gewordener Elektronenring entspricht, derart, daß der erste Ring 2, der zweite 4, der dritte 6 Elektronen enthält und die Summen also 2, 6 und 12 betragen; wir möchten hier auf die auffallende Tatsache hinweisen, daß diese „Stufenbildung" in der Kurve, die die Bindeelektronenzahl als Funktion der Kernladungszahl darstellt, stets in die unmittelbare Nachbarschaft von Edelgasen fällt, und zwar auf *Ar*, dann auf die Elemente unmittelbar vor *Kr* und *X*; unwillkürlich sucht man nach der vierten Stufe bei der Zahl

$$20 = 2 + 4 + 6 + 8;$$

sie ist weniger ausgeprägt und dieses Stabilitätsmaximum(!) ist bei den Elementen vor dem *Pb*, höchstens bis *Pb* selbst zu suchen, also ebenfalls relativ nahe vor dem schwersten Edelgase, der Emanationsplejade. Die Tatsache der Isotopie scheint allerdings demgegenüber streng zu beweisen, daß die Eigenschaften der Elektronenhülle in erster Ordnung ausschließlich von der Kernladungszahl abhängen, so daß also auch ein Zusammenhang zwischen der Periodizität des Aufbaus der Hülle und des Kernes ausgeschlossen erscheint. Wir wollen gleich bemerken, daß wir auch im Folgenden oft kurz von Ringen sprechen werden, ohne uns damit auf die Vorstellung von Ringen im Gegensatz zu schalenförmigen Anordnungen festlegen zu wollen. In den Atomkernen der radioaktiven Elemente werden wir also eine Anordnung der Bindeelektronen in 4 bis 5 „Ringen" annehmen.

Nun wollen wir versuchen Anhaltspunkte für die Verteilung der positiven Ladungen, also nach unseren Annahmen der α-Teilchen im Kern zu erhalten. Zu diesem Zwecke machen wir die bereits von mehreren Autoren benutzte Annahme, daß sich die emittierten α-Teilchen vor der Emission im Kern mit der gleichen Geschwindigkeit bewegten, die wir als ihre Anfangsgeschwindigkeit beobachten. Weiter wollen wir für die α-Teilchen eine Quantenbedingung als wirksam annehmen. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Entweder kann man auf jedes Elektron des α-Teilchens ein Impulsquantum rechnen oder auf das α-Teilchen als Ganzes eines, oder man kann auf die α-Teilchen eines Ringes mit p Teilchen einen der Ansätze von Sommerfeld oder von Ratnowsky für das Impulsmoment

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{p} \qquad \text{oder} \qquad \frac{h}{2\pi}\sqrt[p]{p!}$$

anwenden. Diese verschiedenen Ansätze ergeben für die Bahnradien der Teilchen insgesamt Werte von derselben Größenordnung, nämlich etwa 10^{-13} cm, die alle mit der Schätzung des Maximalradius des Kernes von Rutherford zu $3 \cdot 10^{-12}$ cm sehr wohl verträglich sind. Da es für unsere Betrachtungen auf genaue absolute Werte nicht ankommt, so ist es nicht notwendig, daß wir uns in dieser Richtung auf bestimmte Annahmen festlegen. Genaue Werte der Bahnradien für die Annahme eines Impulsquantums auf das ganze α-Teilchen hat H. Th. Wolff[1]) gegeben.

Die regelmäßige Abnahme der Lebensdauer der aufeinanderfolgenden α-Strahler in der Mitte jeder Zerfallsreihe bei gleichzeitiger Zunahme der Anfangsgeschwindigkeit der α-Teilchen legt den Gedanken nahe, daß es sich hier um den Abbau eines Ringes von α-Teilchen handelt, der ein α-Teilchen nach dem anderen emittierend sich jedesmal enger zusammenzieht, wodurch sich die Geschwindigkeit der noch verbleibenden Teilchen in dem bei den Anfangsgeschwindigkeiten der α-Strahler beobachteten Maße erhöht. Wir wollen annehmen, daß es von mehreren eventuell vorhandenen α-Ringen der innerste ist, der beim radioaktiven Zerfall abgebaut wird und führen dafür folgende Gründe an: erstens die Kleinheit des Bahndurchmessers (z. B. $1 \cdot 10^{-13}$ cm für *RdTh*) im Verhältnis zu dem von Rutherford gegebenen Maximaldurchmesser des Kernes ($3 \cdot 10^{-12}$ cm); zweitens, daß es plausibel ist, daß beim Zerfall die schon im Kern mit der größten Energie begabten α-Teilchen emittiert werden, und das sind, wenn man nur einquantige Bewegung zuläßt, diejenigen mit dem kleinsten Bahnradius.

Die Vorstellung von den Kernen als einer Art flüssigen oder festen Aggregatzustandes der Elektrizität, in dem also die Ladungen bis zu gegenseitiger Berührung (cum grano salis) einander genähert sind, nötigt dazu, sich die Elektronenringe mit 2, 4, 6 usw. Elektronen ungefähr wie Perlenschnüre vorzustellen, deren innerster ungefähr einen Durchmesser von der Größenordnung des Elektrons selbst hat und deren Durchmesser ungefähr in arithmetischer Reihe mit den Besetzungszahlen wachsen. Wir haben es also im Kern mit einiger Wahrscheinlichkeit mit einer Reihe von α- und mit einer Reihe von β-Ringen zu tun, die jedenfalls

1) Diese Zeitschr. **21**, 177, 1920.

aufs engste ineinandergeschachtelt sind. Wir wollen von einem Atomkern folgendes Schema entwerfen, das diesen Umständen recht gut Rechnung trägt. Im Zentrum befinde sich ein α-Teilchen; um dasselbe läuft der innerste Elektronenring von 2 Elektronen; auf diesen folgt ein α-Ring, der radioaktive Ring, aus dem die α-Strahlen stammen; auf diesen folgt wieder ein β-Ring von z. B. 4 Elektronen usw. α- und β-Ringe alternierend. Dynamische und energetische Stützen und Konsequenzen dieses Modells sollen Gegenstand einer späteren Mitteilung werden. Heute soll dieses Modell seine Hauptstütze erhalten, indem mit seiner Hilfe auf einfachste Weise zunächst die Hauptzüge des radioaktiven Zerfalls der *Th*-Reihe erklärt werden.

Wir wollen also die weiteren Untersuchungen mit der Thoriumreihe beginnen, weil sie nach unseren Vorstellungen die am einfachsten gebaute ist, da ihre Kerne, wie sich aus ihrem durch 4 stets teilbaren Atomgewicht ergibt, nur aus α-Teilchen und Elektronen bestehen. Wir nehmen an, daß der emittierende α-Ring beim *RdTh* noch 5 α-Teilchen enthält und somit bei *ThA* noch 2. Der innerste Teil des Kernes hat also beim *ThA* infolge der noch bestehenden symmetrischen Verteilung der Massen im emittierenden α-Ring seinen Schwerpunkt im Zentrum. Hat jedoch der *ThA*-Kern eines der beiden α-Partikel emittiert, so tritt, da keine andere Möglichkeit symmetrischer Anordnung der Massen besteht, eine Umlagerung ein derart, daß das letzte α-Teilchen des Ringes zu dem einen bereits in der Mitte befindlichen hinzutritt. Ist also der α-Ring am Ende des Zerfalls der aufeinanderfolgenden α-Strahler vollständig aufgelöst, so befinden sich nunmehr entweder 2 β-Ringe nebeneinander oder sie verschmelzen zu einem. Jedenfalls aber ist eine relativ große Anhäufung negativer Ladungen im innersten Teil des Kernes zustande gekommen und läßt es begreiflich erscheinen, daß nunmehr β-Zerfall eintritt. Um aber den nach dem β-Zerfall noch einmal eintretenden α-Zerfall zu erklären, machten wir eben die für die naive Anschauung naheliegende Annahme der nach dem Zerfall des *ThA* eintretenden Inversion im innersten Teil des Kernes. Das zweite nunmehr noch in der Achse befindliche, dort ruhende oder oszillierende α-Teilchen macht dann nach dem ersten β-Zerfall, mindestens aber sofort nach dem zweiten β-Zerfall mit größter Schnelligkeit (*ThC*!) diesem, wenn man so sagen darf, unnatürlichen Zustande ein Ende und verläßt das Atom. Da diese α-Emission unter wesentlich anderen Umständen stattfindet als die anderen, so ist es begreiflich, daß die *C*-Produkte sich nicht so gut in die Geiger-Nuttallsche Gleichung fügen, wie die aufeinanderfolgenden α-Strahler in der Mitte der Reihen[1]). Nach dieser letzten α-Emission befindet sich der Atomkern in einem Zustand ähnlich dem am Beginn des Zerfalls beim *RdTh*; nimmt man an, daß der nunmehr innerste β-Ring 4 Elektronen zählt, und daß die von den $MsTh_1$ und $MsTh_2$ emittierten β-Partikel mit den beiden von *ThB* und *ThC* (bzw. *ThC''*) emittierten vor Beginn des Zerfalls im *Th*-Kern ebenfalls einen Ring mit 4 Elektronen bildeten, so ist die Ähnlichkeit des stabilen Endproduktes mit dem relativ stabilen Stammelement eine sehr große und läßt die relativ große Stabilität des letzteren gegenüber seinen Folgeprodukten begreiflich erscheinen.

Auf die *Ra*-Reihe sind ganz dieselben Anschauungen anwendbar, wie auf die *Th*-Reihe, nur enthält dieselbe nach unseren Anschauungen noch 2 *H*-Teilchen und 2 Elektronen mehr in jedem Kern. Wir möchten annehmen, daß diese Bestandteile sich in der Achse oder in nächster Nähe des Zentrums, jedenfalls innerhalb des radioaktiven α-Ringes befinden, dann enthält das *RaD* nach denselben Emissionsvorgängen, wie sie in der *Th*-Reihe stattfinden, also auch noch 2 Elektronen und 2 *H*-Teilchen mehr, als das stabile *Th*-Blei; da die stabilen Endprodukte einander jedenfalls sehr ähnlich sein werden und *H*-Teilchen, soviel wir heute wissen, nicht emittiert werden, so ist durch die Anwesenheit dieser beiden *H*-Teilchen nebst den 2 Elektronen das nochmalige Eintreten zweier β-Zerfalle und eines α-Zerfalls in der Radiumreihe im Gegensatz zur Thoriumreihe zu begründen. Das schließliche Endprodukt der *Ra*-Reihe sieht also nach unseren Vorstellungen geradeso aus wie das der *Th*-Reihe, nur ist das zweifach positiv geladene *He*-Teilchen im Zentrum ersetzt durch 2 *H*-Teilchen. Da also der innerste Kern des Kerns der Elemente der *Ra*-Reihe anders beschaffen ist, so wird darin wohl auch der Grund zu suchen sein, daß das relativ stabile Stammelement einer anderen Plejade angehört als das der *Th*-Reihe.

Auch auf die *Ac*-Reihe sind unsere Überlegungen ohne weiteres anwendbar, wenn man die Tatsache, daß auf *UY* und *AcB* ein in bezug auf β-Zerfall stabileres Element folgt, dahin deutet, daß die *Ac*-Reihe ein ungerades Atomgewicht hat und dementsprechend in den der *Th*-Reihe analogen Elementen das zentrale α-Teilchen durch ein *H*- oder X_3-Teilchen (J. J. Thomson) ersetzt denkt, sowie im innersten β-Ring ein Elektron weniger annimmt. Wollte

1) Verf. l. c.

man an der Abzweigung der *Ac*-Reihe von der *U·Ra*-Reihe beim *U* II festhalten, so böte sich die Möglichkeit, anzunehmen, daß das *U* II auf zweierlei Art α-Zerfall erleiden kann, nämlich entweder ein α-Partikel aus dem Ring emittierend sich in Ionium oder das aus der Achse emittierend sich in *UY* verwandeln kann; doch müßte diesfalls *AcB* mit *RaD* identisch zusammengesetzt sein.

Zuletzt sei noch versucht, aus unseren Vorstellungen noch eine Konsequenz zu ziehen. Man betrachtet heute vielfach die radioaktiven Elemente alle als α- und β-strahlend und nimmt an, daß eben nur meist eine der beiden Zerfallswahrscheinlichkeiten derart überwiege, daß das Radioelement entweder ausschließlich als α- oder ausschließlich als β-Strahler erscheine.

Wir wollen von diesem Standpunkt einmal die aufeinanderfolgenden α-Strahler in der Mitte der Reihen betrachten. Beispielsweise in der *Th*-Reihe folgt auf den β-Strahler $MsTh_1$ der kurzlebigere β-Strahler $MsTh_2$, ein Umstand, der wohl mit dem auch sonst beobachteten Symmetriebedürfnis der Elektronen begründet werden kann, das wir bereits einmal[1]) herangezogen haben. Das nächste Element in der Reihe, *RdTh*, enthält nach unserer Vorstellung wieder eine gerade Zahl Kernelektronen und außerdem 2 Elektronen weniger als $MsTh_1$; daher muß es in bezug auf β-Zerfall stabiler sein als $MsTh_1$. Die bei *RdTh* tatsächlich beobachtete β-Strahlung würde sich diesen quantitativen Überlegungen ohne weiteres fügen, falls man annehmen will, daß sie aus dem Kern stammt. Während des weiteren α-Zerfalls über *ThX* und *ThEm* bis *ThA* ist wegen der „Konzentrationsverminderung" der positiven Ladungen im innersten Teil des Kernes eine Steigerung der β-Zerfallswahrscheinlichkeit zu erwarten; da aber die jedenfalls weitaus größere Steigerung der β-Zerfallswahrscheinlichkeit durch die Inversion beim Zerfall des *ThA* nur zu einem β-Strahler (*ThB*) mit der Periode $T = 10{,}6^h$ führt, so ist die Steigerung derselben durch die α-Zerfalle von *RdTh*, *ThX* und *ThEm* jedenfalls relativ so geringfügig, daß schon beim *ThX* die α-Zerfallswahrscheinlichkeit sie vollständig überdeckt. Für die beim *RdAc* nachgewiesene β-Strahlung gelten dieselben Überlegungen und es ist also selbstverständlich, daß eine solche β-Strahlung neben der α-Strahlung hier nur am Anfang der Reihe aufeinanderfolgender α-Strahler mit wachsender Zerfallsgeschwindigkeit auftreten kann. Aus diesem Grunde müssen wir auch heute die β-Strahlung des Radiums beiseite lassen, bis eingehendere Spezialisierung der Vorstellungen vom Bau des innersten Teiles des Kernes der *Ra*-Reihe das Auftreten einer β-Strahlung daselbst nicht schon beim *U* II oder *Jo*, sondern erst beim *Ra* zu erklären erlaubt. Es verlohnt sich vielleicht, nach dem eventuellen radioaktiven Charakter einer solchen Nebenreihe zu fragen. Unsere Annahmen über die Anordnungen der Ladungen im Kern führen hier zu der Vorstellung, daß der innerste β-Ring ein β-Teilchen verloren hat und daher der nächste (radioaktive) α-Ring sich ausdehnt und mit ihm wahrscheinlich auch alle folgenden Ringe. Dies hat eine Herabsetzung aller Frequenzen und damit nach dem Lindemannschen Ansatze für die Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\lambda = (\nu\tau)^{N}$$

auch eine Herabsetzung dieser zur Folge, über deren Größenordnung sich nichts auch nur Annäherndes sagen läßt. Es ist sehr wohl denkbar, daß die Produkte dieses β-Zerfalls überhaupt stabil sind. Wir wollen nur noch bemerken: eine Ausdehnung des radioaktiven α-Ringes auf einen Radius von etwa $2{,}5\cdot 10^{-13}$ cm, hätte zur Folge, daß ausgeschleuderte α-Teilchen weniger als die kritische Geschwindigkeit von $6\cdot 10^8$ cm sec^{-1} haben und nicht mehr ionisierend wirken würden. Ferner: eine aus aufeinanderfolgenden α-Strahlern ungerader Valenz bestehende Nebenreihe würde keine Emanation enthalten, Spuren der Elemente dieser Nebenreihe, seien sie noch so stabil, könnten nur in sehr kleiner Menge im Verhältnis zum stabilen Endprodukt der Hauptreihe vorhanden sein. Ein Ultracäsium wäre infolge seiner chemischen Eigenschaften sehr schwer, leichter spektroskopisch nachzuweisen. Am ehesten wäre wohl noch ein Ultrajod zu fassen. In diesem Zusammenhange kann man kaum umhin, daran zu denken, daß Soddy[1]) in den von ihm anläßlich der Atomgewichtsbestimmung des *Th*-Bleies analysierten Ceyloner Thoriten 1 bis 2 g Jod auf zirka 80 g *Pb* fand.

Betreffs der β-Strahlungen bei *RdTh* und *RdAc* sind Deutungsversuche wie der hier unternommene ja allerdings durch die bis heute vorliegenden experimentellen Befunde kaum gerechtfertigt, doch bietet unser aus alternierenden α- und β-Ringen aufgebautes Kernmodell die Möglichkeit für eine ganze Reihe wesentlicher Einzelheiten im Verlaufe des radioaktiven Zerfalls Erklärungen zu geben.

1) Nature **94**, 615, 1915.

Uppsala, 6. September 1920.

(Eingegangen 18. September 1920.)

1) Verf. l. c.



Bemerkung zur Rotationsbewegung im Gravitationsfeld der Sterne.

Von A. Kopff.

Im 19. Jahrgang dieser Zeitschrift hat H. Thirring[1]) gezeigt, daß im Gravitationsfeld ferner rotierender Massen Kräfte wirksam sind, die der Zentrifugal- und Corioliskraft entsprechen. Diese Untersuchung stützt sich auf die älteren Einsteinschen Gravitationsgleichungen (ohne das kosmologische Zusatzglied), und die Integration ist unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die $g_{\mu\nu}$ im Unendlichfernen gewissen Grenzwerten zustreben. Bei einer Rotation gegen ein Koordinatensystem, in welchem diese Grenzbedingungen erfüllt sind, treten die Zentrifugal- und Corioliskräfte der klassischen Mechanik auf.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß man zu denselben Kräften gelangt, wenn man die erweiterten Einsteinschen Gravitationsgleichungen[2]) zugrunde legt. Eine Lösung dieser Gleichungen ist durch die Werte:

$$\left.\begin{array}{l} g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \dfrac{x_\mu x_\nu}{R^2 - r^2}\right); \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0 \qquad g_{41} = 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

gegeben. Beschränkt man sich auf die Umgebung eines der beiden Nullpunkte und transformiert man mittels:

$$\begin{array}{l} x_1' = + x_1 \cos\left(\omega' \dfrac{x_4}{i}\right) + x_2 \sin\left(\omega' \dfrac{x_4}{i}\right); \; x_3' = x_3 \\ x_2' = - x_1 \sin\left(\omega' \dfrac{x_4}{i}\right) + x_2 \cos\left(\omega' \dfrac{x_4}{i}\right); \; x_4' = x_4 \end{array} \quad (2)$$

die Gravitationspotentiale auf ein Koordinatensystem, das gegen die Gesamtheit der im Durchschnitt ruhenden Materie mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotiert, so ergeben sich für die in Frage kommenden $g'_{\mu\nu}$ (wenn man sich auf dieselben Näherungen wie H. Thirring beschränkt) die Beträge:

$$\left.\begin{array}{l} g_{14}' = - i x_2' \omega'; \; g_{24}' = + i x_1' \omega' \\ g_{34}' = 0; \; g_{44}' = 1 + x_1'^2 \omega'^2 + x_2'^2 \omega'^2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

und für die Feldkomponenten $\Gamma_{\mu}{}^{\tau}{}_4$ die Werte:

$$\left.\begin{array}{cccc} 0 & -i\omega' & 0 & -\omega'^2 x_1' \\ i\omega' & 0 & 0 & -\omega'^2 x_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega'^2 x_1' & \omega'^2 x_2' & 0 & 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Im rotierenden Koordinatensystem erhält man zufolge der Bewegungsgleichungen der Relativitätstheorie die Beschleunigungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 x_1'}{dt^2} = + 2\omega' \dfrac{dx_2'}{dt} + \omega'^2 x_1' \\ \dfrac{d^2 x_2'}{dt^2} = - 2\omega' \dfrac{dx_1'}{dt} + \omega'^2 x_2' \\ \dfrac{d^2 x_3'}{dt^2} = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Hieraus folgt also in derselben Näherung, in der die Newtonschen Gesetze gelten, daß die Zentrifugal- und Corioliskräfte der klassischen Mechanik auftreten, sobald eine Rotation im Gravitationsfeld der im Durchschnitt ruhenden und gleichmäßig verteilten Materie des Weltalls stattfindet. Angenommen ist hierbei noch, daß letzteres räumlich geschlossen ist.

Heidelberg-Königstuhl, Oktober 1920.

(Eingegangen 10. Oktober 1920.)

1) H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Diese Zeitschr. 19, 33, 1918.

2) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Sitzungsber. 1917, S. 142.

Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie.

Von Werner Kramer.

Zur photogrammetrischen Bestimmung der wahren Maßverhältnisse eines Gegenstandes werden wenigstens zwei Photogramme mit innerer Orientierung und von verschiedenen Standpunkten aus gebraucht. Im Folgenden soll gezeigt werden, daß man dennoch mit nur einem Photogramme auskommt, sobald dieses ein Spiegelbild des zu messenden Gegenstandes mit enthält[1]). Das Spiegelbild auf dem Photogramme kann nämlich angesehen werden als eine zweite Aufnahme des Gegenstandes, für das als Auge das Spiegelbild des eigentlichen Auges zu nehmen ist.

In Fig. 1 bedeute Σ die spiegelnde Ebene, B die beliebig gegen Σ geneigte Bildtafel, O das Auge, O_1 das Spiegelbild des Auges. Die Zeichenebene Π werde durch OO_1 senkrecht zu B und Σ gelegt. Die Schnitte von Π mit Σ und B seien w und n; w ist dabei in Π Symmetriegrade zu O, O_1 während n sich aus der Orientierung des photographischen Apparates ergibt.

Wir betrachten einen beliebigen Punkt M

1) Dieser Fall scheint bisher nicht betrachtet worden zu sein. Wenigstens berichtet weder Laussedat in seinen „Recherches sur les instruments“ darüber, noch bringt C. Pulfrich in seiner Schrift „Stereoskopisches Sehen und Messen“ diesbezügliche Literaturangaben. Auch in Doležals Berichten über die Fortschritte der Photogrammmetrie in dem „Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik“ (Bd. 14—24) findet sich nichts.

des Halbraumes über Σ mit dem Spiegelbild M_1. Nach dem Reflexionsgesetz liegen M und M_1 derart, daß sich OM_1 und O_1M in einem Punkte S der spiegelnden Ebene schneiden. Das Photogramm gibt die Bildpunkte $\overline{M}$, $\overline{M}_1$ von M und M_1. Durch senkrechte Projektion auf Π gehen die Punkte M, M_1, $\overline{M}$, $\overline{M}_1$, S bezüglich über in die Punkte M', M_1', $\overline{M}'$, $\overline{M}_1'$ S', wobei S' auf w der Schnittpunkt der Geraden $O\overline{M}_1'\,M'_1$ und O_1M' ist.

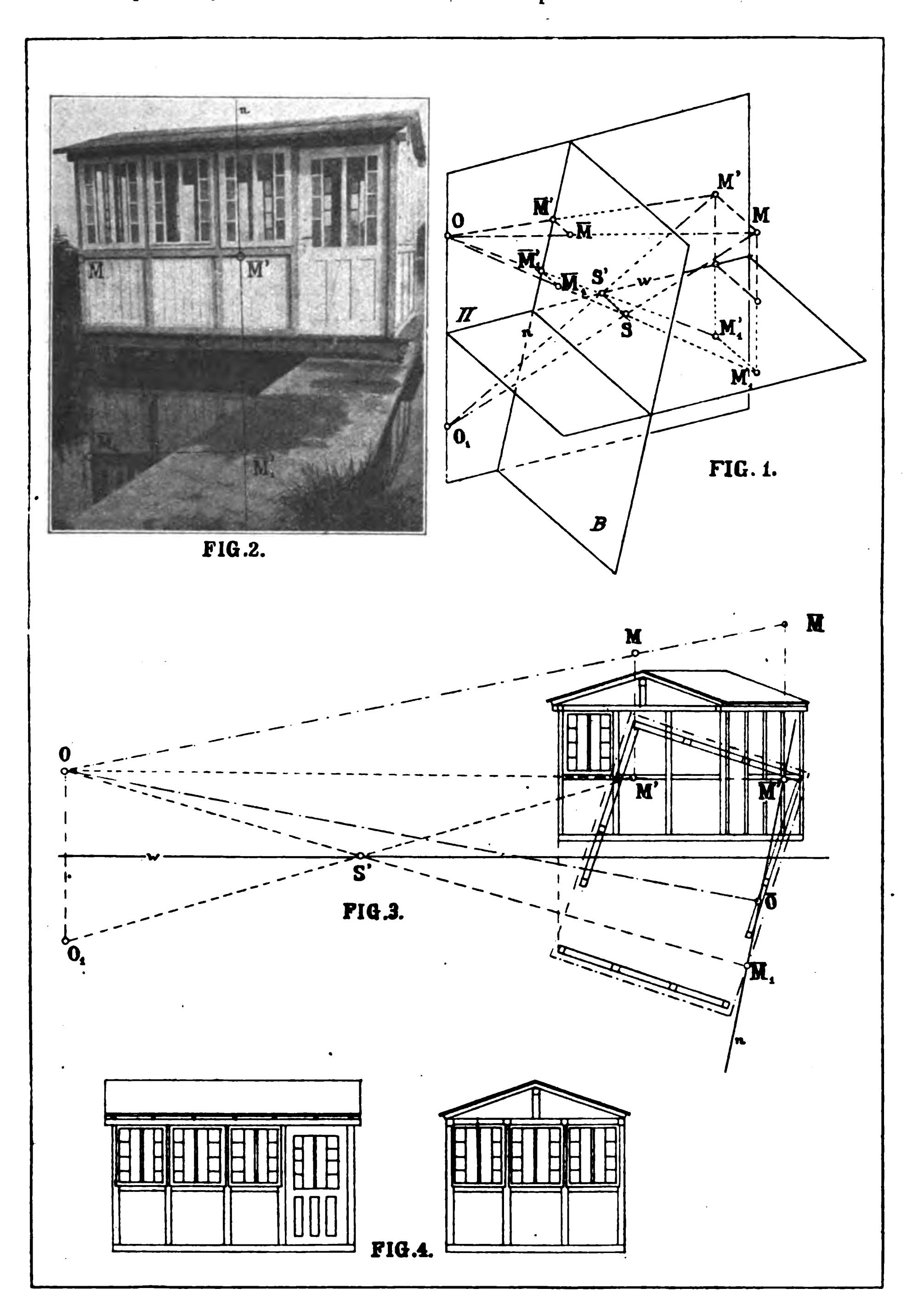


FIG. 1. FIG. 2. FIG. 3. FIG. 4.

Bekannt ist nun in der Zeichenebene Π die Lage der Punkte O, O_1 und die Lage der Geraden w und n. Aus dem Photogramm B, in dem die Gerade n gleichfalls festliegt, ergeben

sich in Π die Punkte $\overline{M}'$, $\overline{M}_1'$. Der Schnittpunkt der Geraden w mit dem Strahl $O\overline{M}_1'$ ist S'. Der Projektionspunkt M' ist sonach als Schnitt der Geraden O_1S' mit $O\overline{M}'$ bestimmt. Damit ist M im Aufriß festgelegt. Um den zugehörigen Grundriß angeben zu können, muß man noch die Entfernung des Punktes M von der Zeichenebene Π kennen. Sie ergibt sich sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $O\overline{M}'\,\overline{M}$ und $OM'\,M$, die gegebenenfalls um OM' in die Zeichenebene Π hineingedreht werden.

Das Verfahren ist an einem Beispiel durchgeführt worden: Fig. 2 gibt ein Photogramm, dessen innere Orientierung durch die Plattenneigung gegen die spiegelnde Ebene Σ (hier die horizontale Wasserfläche) und durch die Entfernung $O\overline{O}$ des Objektivmittelpunktes von der Platte gegeben ist. Die Bezeichnung ist der Fig. 1 entsprechend gewählt, so daß sich die Einzelheiten der Konstruktion für den Punkt M verfolgen lassen. In Fig. 3 ist Aufriß und Grundriß bestimmt worden. Daraus sind die Maße für die Front- und Seitenansicht in Fig. 4 entnommen.

Sollen nicht nur die Maßverhältnisse, sondern auch die wahren Maße selbst dem Photogramm entnommen werden, so ist bei der Aufnahme entweder der Abstand des Objektivmittelpunktes von der spiegelnden Ebene zu messen, oder ein Maß am Gegenstand selbst zu bestimmen.

(Eingegangen 1. Oktober 1920.)

Über eine neue Methode zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen.

Von Alexander Fischer, Göding (Mähren).

Das von W. Ritz[1]) erdachte und von H. Lorenz[2]) verallgemeinerte Näherungsverfahren zur Lösung von Elastizitätsproblemen erfreut sich infolge seiner Eleganz in der mathematisch-physikalischen und technischen Literatur größter Beliebtheit und wächst sein Anwendungsgebiet noch immer. Es benützt ein Minimalprinzip, und zwar beruht es auf der Bedingung, daß die Differenz J der innern Arbeit L und der doppelten äußern Arbeit L_a

$$J = L - 2L_a \qquad (1)$$

im Falle des elastischen Gleichgewichts zu einem Minimum wird[1]). Ritz setzt die Näherungslösungen aus einer Reihe zusammen, deren Glieder aus Funktionen der Koordinaten

$$F_1(x, y, z)\, F_2(x, y, z) \ldots,$$

welche die Grenzbedingungen für sich erfüllen, sowie aus einem unbestimmten Faktor bestehen, welcher eben unter Anwendung des genannten Minimalprinzipes bestimmt wird. Für zweidimensionale Probleme, die auf gewöhnliche Differentialgleichungen hinauslaufen, wäre also folgender Ansatz zu verwenden:

$$t = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots \qquad (2)$$

Für Probleme mit bloß einem Koeffizienten genügt schon die Gleichheit beider Arbeiten, was H. Lorenz an mehreren Problemen zur Lösung benützte.

Wie ersichtlich, verlangt das Verfahren zunächst die Aufstellung der Ausdrücke für die Arbeiten, ist daher bloß zur Lösung von Problemen geeignet, bei denen eine solche möglich ist.

Im folgenden soll ein Verfahren gegeben werden, das mit dem soeben behandelten Ritzschen große Ähnlichkeit aufweist, das aber, da ihm eine rein analytische Minimalforderung zugrunde gelegt ist, stets anwendbar ist, wo es sich um Gewinnung von partikulären Näherungslösungen handelt. Es knüpft an eine Differentialgleichung unmittelbar an und ist infolgedessen sein Anwendungsgebiet ein viel größeres. Es möge bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß es in der hier mitgeteilten Form — und zwar aus später erwähnten Gründen — bloß auf gewöhnliche Differentialgleichungen anwendbar ist, daß es aber zweifellos auch auf partielle Differentialgleichungen wird erweitert werden können, wodurch es auch in dieser Hinsicht dem Ritzschen Verfahren ebenbürtig sein wird.

Das Verfahren beruht auf der von H. v. Sanden in seiner „Praktischen Analysis"[2]) gegebenen Approximationsrechnung zur Approximation von ebenen Kurven, die er — im Gegensatz zu anderen — auf der Methode der kleinsten Quadrate aufbaut. Die Minimalforderung ist in diesem Falle die, daß die Summe der Quadrate der Kurvendifferenzen — zwischen gegebener und approximierender Kurve — ein Minimum werde. Hierin liegt also die erwähnte Beschränkung, daß nämlich infolge der Verwendung von ebenen Kurven bloß zweidimensionale Probleme, bzw. gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst werden können und ist die erwähnte Er-

1) Crelles Journal 1908: „Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik".

2) Diese Zeitschr. 1913 und Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1913: „Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie". Siehe auch Anm. 1) in der nächsten Spalte.

1) H. Lorenz, Lehrb. d. techn. Physik IV. Techn. Elastizitätslehre 1913, München, Oldenbourg.

2) v. Sanden, Prakt. Analysis (Handbuch d. angewandten Mathematik I) 1914, Leipzig, Teubner.

weiterung in der Aufstellung und Verwendung einer Theorie der Flächenapproximation zu erblicken.

Das Wesen der Approximationsrechnung ist in kurzen Worten erledigt: Es sei eine Kurve $f(x)$ gegeben und soll dieselbe in einem bestimmten gegebenen Bereich (x_1, x_2) durch eine Kurve von der Gleichung

$$\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n) \tag{3}$$

approximiert werden. Hierin sind die

$$C_\lambda \ (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

die zu bestimmenden Approximationsparameter. Die Forderung, daß dies mit möglichster Annäherung geschehe, lautet:

Das Integral

$$M = \int_{x_1}^{x_2} (f - \varphi)^2 dx \tag{4}$$

ist zu einem Minimum zu machen. Diese Forderung wird erfüllt, indem man die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial M}{\partial C_\lambda} = 0 \ (\lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

setzt. Hierdurch entstehen n, im allgemeinen nicht lineare Gleichungen für die Größen C_λ und nach Bestimmung derselben ist die Approximationskurve festgelegt.

Wie ersichtlich, reizt die äußere Form zu einem Vergleiche mit dem Ritzschen Verfahren: Es sind unbestimmte Größen vorhanden, zu deren Bestimmung eine Minimalforderung dient, es sind Intervallgrenzen vorgeschrieben, usw. Der entscheidende Schritt ist nun folgender: Die gegebene Differentialgleichung wird in zwei Teile gespalten, und zwar so, daß die eine Seite bloß Funktionen der unabhängigen Veränderlichen enthält, während auf der anderen auch Funktionen der abhängigen Veränderlichen vorkommen. Geht man nun mit dem schon erwähnten Ansatz

$$t = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots \tag{2}$$

in die letztere Seite ein, so wird sie hierdurch ebenfalls bloß Funktion der unabhängigen Veränderlichen, und zwar werden beide Seiten der Gleichung identisch sein, wenn t ein Integral der Differentialgleichung ist. Im allgemeinen wird dies nicht der Fall sein und ist daher die Approximationsrechnung anwendbar: Die Seite der unabhängigen Veränderlichen ist durch die andere Gleichungsseite zu approximieren. [Will man bloß ein partikuläres Integral der Differentialgleichung erhalten, so sind für $F_i(x)$ irgendwelche passende Funktionen anzunehmen.]

Wie leicht einzusehen, werden sich aber je nach der Wahl der zu approximierenden Funktion für den gleichen Ansatz verschiedene Werte der Approximationsparameter ergeben. Für eine bestimmte, gewählte, zu approximierende Funktion ergeben sich Parameter, die sie zwar am besten durch den Ansatz der Näherungslösung approximieren, welche Näherungslösung aber die beste für die Differentialgleichung — gegenüber dem wahren Integral derselben — darstellt, ferner welche zu approximierende Funktion eine mit der nach Ritz erhaltenen identische Näherungslösung ergibt und ob schließlich die nach Ritz erhaltene Lösung mit der für den gewählten Ansatz — im obigen Sinne — besten Lösung zusammenfallen muß, — über alle diese Fragen sind noch eingehende Untersuchungen anzustellen.

Eine solche zu approximierende Funktion ist auch die Null der implizite dargestellten Differentialgleichung

$$f(x, y, y', y'' \ldots) = 0.$$

Wird die Approximation für diese durchgeführt, so ergibt sich als Minimalforderung

$$\int_{x_1}^{x} f^2(x, y, y', y'')\, dx = \text{Min.}$$

Für diese Wahl der zu approximierenden Funktion haben Durchrechnungen von Elastizitätsproblemen, deren eines im folgenden gegeben wird, die Übereinstimmung der nach beiden Methoden erhaltenen Resultate ergeben, so daß sich die Vermutung einstellt, daß beide Minimalforderungen identisch sind. Solange aber nicht die oben angedeuteten Untersuchungen ausgeführt worden sind, muß das Verfahren stets mit dem Vorbehalt der „Richtigkeit auf Widerruf" angewendet werden.

Das zu behandelnde Beispiel[1]) betrifft den einseitig horizontal eingespannten Balken, der am freien Ende die Last Q trägt. Ist ξ die Durchbiegung im Abstande z von der Einspannung,

Θ das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts und

E der Elastizitätsmodul,

so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \varkappa(z_0 - z), \tag{6}$$

worin für

$$\frac{Q}{E\Theta} = \varkappa \tag{6a}$$

gesetzt wurde.

Hier lautet die Minimalforderung

1) Siehe Anmerkung 2) und 3) S. 398.

$$\int_0^{z_0} \left\{ \varkappa (z_0 - z) - \frac{d^2 \xi}{d z^2} \right\}^2 dz = \text{Min.}$$

Führt man die Rechnung für die von H. Lorenz behufs Behandlung dieses Beispiels nach dem Ritzschen Verfahren gewählten 3 Ansätze durch, so ergibt sich vollkommene Übereinstimmung der Resultate.

Die Ansätze sind:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \xi = a_1 z^2 + a_2 z^3, \\ &\text{II.} \quad \xi = a\,(1 - \cos \alpha z), \\ &\text{III.} \quad \xi = a_1 (1 - \cos \alpha z) + a_2 (1 - \cos 3 \alpha z), \end{aligned} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2 z_0},$$

worin die a die zu bestimmenden Konstanten sind. Für sie ergeben sich die Werte:

$$\text{in I.} \quad a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{E\Theta} \cdot z_0, \quad a_2 = -\frac{1}{6} \frac{Q}{E\Theta},$$

$$\text{in II.} \quad a = \frac{32}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{E\Theta} \cdot z_0^3,$$

$$\text{in III.} \quad a_1 = \frac{32}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{E\Theta} \cdot z_0^3, \quad a_2 = \frac{a_1}{81}.$$

(Ansatz I ergibt eine mit der exakten Lösung der Differentialgleichung vollkommen identische Lösung.)

Zusammenfassung.

Es wird ein dem Ritzschen Verfahren ähnliches Verfahren zur näherungsweisen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben, das im Gegensatz zu diesem auf einer rein analytischen Minimalforderung beruht und daher auf Probleme aller Art anwendbar ist, die auf gewöhnliche Differentialgleichungen hinauslaufen. Für das im Texte angegebene Beispiel aus der Elastizitätstheorie ergibt sich vollkommene Identität der nach beiden Verfahren erhaltenen Resultate.

(Eingegangen 21. August 1920.)

Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen.

(Zur Erwiderung an Herrn K. Lichtenecker.)

Von H. C. Burger.

1. Herr K. Lichtenecker hat kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) einige Bedenken erhoben zu meiner Berechnung[2]) des Leitvermögens einer verdünnten mischkristallfreien Legierung. Ich will hier die Beschwerden des Herrn Lichtenecker kurz beantworten.

2. Meine Berechnung bezieht sich auf Metalle. Die Fälle $\sigma_1 = 0$ bzw. $\sigma_2 = 0$ habe ich daher von vornherein ausgeschlossen, was man auch aus den Gleichungen (1) und (2) sehen kann. Die Diskrepanz meiner Formel (8) in diesen Fällen beruht auf folgenden Umständen.

A. $\sigma_2 = 0$. Aus (5) folgt nur dann (6), wenn $(k - 1)\,x$ klein gegen die Einheit ist. Da aus $\sigma_2 = 0$ folgt: $k = \infty$, ist die Entwicklung, die (6) liefert, nicht gültig. In diesem Falle ist σ unbestimmt, wie von vornherein zu ersehen ist. Ist $\sigma_2 = 0$, aber klein, dann ist (6), und daher auch (8), gültig, wenn x klein genug ist.

B. $\sigma_1 = 0$. Für Platten und Stäbchen ist $Q = 0$, $R = 0$ (bzw. $R = 0$). In (8) sind dann die Brüche $\frac{Q}{\sigma_1}$ und $\frac{R}{\sigma_1}$ $\left(\text{bzw. } \frac{R}{\sigma_1}\right)$ unbestimmt. Das Leitvermögen σ ist also auch unbestimmt, wie man von vornherein sehen kann.

3. Daß schon von Maxwell der Fall erledigt ist, daß die Teilchen Kugeln sind, habe ich leider übersehen. Mein Resultat ist im völligen Einklang mit dem von Maxwell. Wenn der Wert für k nicht in (6) sondern in (5) substituiert wird, findet man genau seine Formel. Ich habe aber σ nach x entwickelt und das erste Glied, von dem ich sicher war, behalten. Weder Maxwell noch ich können vom Glied mit x^2 etwas aussagen, weil bei der Bestimmung von $\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_1} = k$ die Glieder mit x und höheren Potenzen fortgelassen sind.

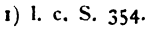
4. Meiner Berechnung ist die Annahme, daß $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ von der Einheit nicht sehr abweicht, völlig fremd. Nur habe ich, wie schon oben gesagt, angenommen, daß $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ weder Null noch unendlich ist.

Freilich muß in jedem Falle x klein genug sein, um die Entwicklung, die von (5) zu (6) führt, zu gestatten. Aber für jeden Wert von $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ existiert ein endlicher, wiewohl vielleicht kleiner Wert von x, für welchen diese Entwicklung erlaubt ist.

5. Daß die Unterschiede der Leitfähigkeit, die Herr Lichtenecker beispielsweise berechnet hat[1]), klein sind, kann ich nicht beistimmen. Daß die Eigenschaften verdünnter Lösungen sich wenig von denen des Lösungsmittels unterscheiden und daher auch untereinander kleine absolute Differenzen zeigen, ist nicht zu ver-

1) Diese Zeitschr. **21**, 352, 1920.
2) Diese Zeitschr. **20**, 73, 1919.

1) l. c. S. 354.



wundern. Wichtig sind nicht die Werte des Leitvermögens selbst, aber die Unterschiede mit dem Leitvermögen des Lösungsmittels. Diese hängen sehr beträchtlich von der Form der Teilchen ab.

6. Meine Formeln sind nicht unsicher, sondern sie stellen Näherungen dar. Wenn man σ als Funktion von x nach x entwickelt, sind die Glieder mit x^0 und x^1 durch die Formel (8) richtig dargestellt. Die folgenden Glieder dieser Entwicklung habe ich nicht untersucht. Ob daher (8) für $x = 0{,}01$ (Beispiel von Lichtenecker) eine genügende Näherung darstellt, kann ich nicht entscheiden, aber daß es ein Gebiet gibt, in dem (8) gilt, und in dem die „Leitfähigkeitsverminderung" erheblich von der Gestalt der Teilchen abhängt, ist sicher. Ich meine nicht fehlzugehen, wenn ich behaupte, daß auch für konzentrierte Legierungen ein beträchtlicher Einfluß der Form der Teilchen bestehen wird[1]).

1) Meine Arbeit berührt nicht die Richtigkeit der Rechnungen des Herrn Lichtenecker, sondern nur deren allgemeine Anwendbarkeit.

Utrecht, Instituut voor theoretische Natuurkunde, August 1920.

(Eingegangen 10. September 1920.)

Berichtigung zu meiner Arbeit: „Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie"[1]).

Von Hans Thirring.

Von den Herren Laue und W. Pauli wurde ich freundlichst auf folgende Fehler in meiner oben genannten Arbeit aufmerksam gemacht: Bei der näherungsweisen Integration der Einsteinschen Feldgleichungen bedeutet in den Formeln für die retardierten Potentiale $\gamma_{\mu\nu}$ [Gl. (3) l. c.] die Größe dV einfach das gewöhnliche räumliche Volumelement des Integrationsraumes (in Polarkoordinaten: $r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$) und nicht, wie von mir irrigerweise behauptet, das natürlich gemessene Volumelement

$$i \frac{dx_4}{ds} r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Es ist daher in den Gleichungen (10) und (12) überall ein Faktor $i\frac{dx_4}{ds}$ zu streichen. Ferner wurde inkorrekterweise beim Übergang von Gleichung (12) zu (13) gesetzt: $\int \varrho_0 dV = M$. Statt dessen gehört richtig:

$$\int \varrho_0 dV_0 = i\int \varrho_0 \frac{dx_4}{ds} dV = M$$

oder mit Berücksichtigung von (11):

$$M = 4\pi\sigma a^2\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{3}\right).$$

Durch Elimination dieser Fehler erhält man für die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des Linienelements an Stelle von (10) das untenstehende Schema (Gl. (16)).

Die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt lauten dann folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{8kM}{3a}\omega\dot{y} + \frac{4kM}{15a}\omega^2 x \\ \ddot{y} &= +\frac{8kM}{3a}\omega\dot{x} + \frac{4kM}{15a}\omega^2 y \\ \ddot{z} &= \qquad\qquad\quad -\frac{8kM}{15a}\omega^2 z \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Es bleibt also gegenüber meinen ursprünglichen Formeln (22) die Corioliskraft ungeändert: zum Zentrifugalkraftglied tritt jedoch der Faktor $^4/_5$ hinzu.

Ferner lauten die Bewegungsgleichungen in dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotierenden Bewegungssystem (s. Gl. 25):

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -1 - \frac{2kM}{a}\left[1 + \frac{a^2\omega^2}{3} - \frac{2\omega^2}{15}(z^2 + x^2 - 2y^2)\right], & +\frac{2kM}{a}\frac{\omega^2}{5}xy, & 0, & +i\frac{4kM}{3a}\omega y \\ +\frac{2kM}{a}\frac{\omega^2}{5}xy, & -1 - \frac{2kM}{a}\left[1 + \frac{a^2\omega^2}{3} - \frac{2\omega^2}{15}(z^2 + y^2 - 2x^2)\right], & 0, & -i\frac{4kM}{3a}\omega x \\ 0, & 0, & 0, & 0, \\ +i\frac{4kM}{3a}\omega y, & -i\frac{4kM}{3a}\omega x, & 0, & -1 + \frac{2kM}{a}\left[1 + a^2\omega^2 - \frac{2\omega^2}{15}(2z^2 - x^2 - y^2)\right] \end{vmatrix} \quad (16)$$

1) Diese Zeitschr. **19**, 33, 1918.

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right]\dot{y}+\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{8kM}{3a}+\omega^2\frac{4kM}{15a}\right\}x\\
\ddot{y} &= -2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right]\dot{x}+\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{8kM}{3a}+\omega^2\frac{4kM}{15a}\right\}y\\
\ddot{z} &= -\frac{8kM}{3a}\omega^2 z.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Auch hier führt die Berichtigung des Fehlers einfach dazu, daß bei den Termen mit ω^2 noch der Faktor $^4/_5$ hinzugefügt werden muß. Infolge eines weiteren Rechenfehlers bei der Transformation auf das rotierende Koordinatensystem stand in dem Term mit $\omega\omega'$ ursprünglich der Faktor $^4/_3$ statt $^8/_3$. Es sind daher im vorletzten Absatz meiner Arbeit zwei Sätze noch folgendermaßen zu verbessern: „Läßt man nun das Bezugssystem gleichsinnig mit der Hohlkugel mitrotieren, so wird zunächst für kleine Werte von ω' die Zentrifugalkraft abnehmen und erreicht ein Minimum, wenn $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem „Mitführungskoeffizienten" geworden ist. Von da ab wächst sie wieder und erreicht, sobald $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem doppelten Mitführungskoeffizienten wird, den ursprünglichen Wert, den sie für $\omega' = 0$ hatte".

Das prinzipielle Resultat meiner Arbeit (Auftreten von Zentrifugal- und Corioliskräften im Gravitationsfelde der fernen rotierenden Massen) bleibt vollständig ungeändert.

Wien, 15. Oktober 1920.

(Eingegangen 25. Oktober 1920).

BESPRECHUNGEN.

P. Luckey, Einführung in die Nomographie. Zweiter Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Bd. 37.) 8°. IV, 63 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.— u. Teuerungszuschlag.

Dem Büchlein ist weite Verbreitung in Physikerkreisen zu wünschen! Aus dem Gebiet der Nomographie sind diejenigen Methoden herausgegriffen, die sich ihrer vielseitigen Brauchbarkeit wegen schon häufig in der physikalischen und technischen Literatur vorfinden, und es ist dem Verfasser gelungen, in flotter und klarer Darstellung einen Überblick zu geben, nicht nur über die Prinzipien der Nomographie, sondern auch über ihre praktische Anwendung, die an zahlreichen, sehr instruktiven Beispielen gezeigt wird.

Der vorliegende Band, zu dessen Verständnis die Lektüre des ersten übrigens nicht erforderlich ist, behandelt zunächst die „Funktionsleiter", d. h. die Darstellung einer Funktion durch bezifferte Teilstriche einer Geraden, auf der auch das Prinzip des Rechenschiebers basiert.

Sehr eingehend wird darauf das „Logarithmenpapier" behandelt, eine Art Millimeterpapier, dessen Netz für eine oder beide Koordinaten logarithmisch geteilt ist und das im Handel zu haben ist, ohne bisher die gebührende Verbreitung gefunden zu haben.

Ferner geht der Verfasser ausführlich auf die Fluchtlinien-Nomogramme ein, deren Übersichtlichkeit ihnen in der technischen Literatur bereis einen festen Platz gesichert hat.

Wenn im folgenden einige kritische Bemerkungen gemacht werden, so sollen dies lediglich Vorschläge für eine hoffentlich recht bald nötig werdende Neuauflage sein.

Bei der Auseinandersetzung des Prinzips der Funktionsleiter (S. 2) wäre es klarer, in der Gleichung $x = l \cdot f(\alpha)$ alle drei Buchstaben x, l, α als reine Zahlen aufzufassen und den Abstand OP des Teilstriches P vom Nullpunkt O nicht mit x zu bezeichnen, sondern $OP = x$ mm zu schreiben. Ebenso auf S. 30 $AP = u$ mm, $BQ = v$ mm, $CR = w$ mm.

Ferner müßte darauf hingewiesen werden, daß die Längeneinheit l doch in praxi nicht beliebig ist, sondern von der gewünschten Genauigkeit abhängt. Ist $d\alpha$ der Betrag der kleinsten Zahl, die man ablesen will, und nimmt man an, daß auf der Zeichnung halbe Millimeter noch sicher darstellbar sind, so wird man in der Näherungsgleichung $dx = l \cdot f'(\alpha)\, d\alpha$ $dx = 0{,}5$ zu setzen haben und daraus eine Anweisung für l entnehmen. Diese Überlegung entscheidet auch, ob ein geplantes Nomogramm die erforderliche Genauigkeit leisten wird.

Bei der Anfertigung einer Funktionsleiter (und eines Nomogramms überhaupt) spielt die Interpolation eine wichtige Rolle, da es keineswegs nötig ist, die Lage aller Teilstriche und Punkte zu berechnen, sondern nur ein hinreichend dichtes Gerippe, das durch lineare Interpolation weiter auszufüllen ist. Hierbei leistet ein sogenannter Proportionszirkel gute Dienste. Bei dem Beispiel der Strömung in Rohrleitungen (S. 24), wäre ein Hinweis auf den Gültigkeitsbereich der gewonnenen Formel und die sogenannte kritische Geschwindigkeit angebracht. Auf S. 28 wäre vielleicht zu bemerken, warum ein gewöhnliches Lineal als Weiser nicht brauchbar ist.

Am Ende des siebenten Abschnittes ließe sich zwanglos die Erweiterung der darin besprochenen Methode auf vier Variabelen anfügen, welche sich ergibt, wenn man die Koeffizienten a, b und c der Gleichung (4) von zwei Variabelen abhängen läßt. Statt die quadratische Gleichung in mehreren Beispielen zu be-

handeln, wäre es wohl besser, auch einmal die kubische Gleichung heranzuziehen. Dabei könnte die Bemerkung Platz finden, daß es vielfach die Aufgabe des Nomogramms (und graphischer Methoden überhaupt) ist, Näherungswerte zu finden, deren Verbesserung der Rechnung überlassen bleibt. v. Sanden.

J. Perry, Höhere Mathematik für Ingenieure. Autor. deutsche Bearbeitung von R. Fricke u. F. Süchting. Dritte Auflage. 8⁰. XVI, 450 S. u. 106 Fig. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 20.—, geb. M. 22.—

Das eigenartige Buch erscheint in dritter Auflage, die sich von den beiden ersten durch eine übersichtlichere Unterteilung des Stoffes mit entsprechenden Überschriften unterscheidet. Am Inhalt selbst ist nur wenig geändert.

Daß jemand, ohne besonders mathematisch veranlagt zu sein und ohne andere Lehrbücher oder Vorlesungen benutzen zu können, aus diesem Buche Mathematik lernt, halte ich für ausgeschlossen. Der große Wert des Buches liegt aber darin, daß es ein vortreffliches Übungsbuch für das Studium der Mathematik — besonders an technischen Hochschulen — darstellt.

Eine intensive Durcharbeitung des Buches wird dem Leser eine sehr förderliche Gewandtheit in der Anwendung mathematischer Methoden vermitteln. Es ist ja eine bekannte Tatsache, daß dem angehenden Ingenieur — und für den Physiker dürfte das gleiche gelten — die Aneignung des mathematischen Denkapparates weniger Schwierigkeiten macht, als die Aufgabe, bei einem vorgelegten Problem der Technik oder Physik den richtigen Punkt zu finden, wo das mathematische Werkzeug anzusetzen ist, und es dann weiter richtig zu benutzen. Diese Fähigkeit, „den geeigneten Ansatz zu finden", läßt sich nur durch Übung erwerben und dazu bietet das Perrysche Buch die günstigste Gelegenheit. In den ersten beiden Kapiteln werden aus fast allen Gebieten der technischen Physik Beispiele behandelt und teilweise auch zahlenmäßig durchgerechnet.

Die Darstellung ist flott und anregend — auch zur Kritik, denn vom systematisch-mathematischen Standpunkt ist manches nicht „in Ordnung". Es ist kein Nachteil, denn der mathematisch geschulte Leser findet schon das Richtige heraus. Und wenn er an der Formulierung Anstoß nimmt — um so besser wird er eine präzise Darstellung zu würdigen wissen. Wünschenswert erscheint mir allerdings eine sorgfältigere Fassung des Begriffs der Näherung. Eine Näherungsformel benutzt man, um Rechenarbeit zu sparen. Wie weit man darin gehen darf, hängt aber durchaus von der verlangten Genauigkeit ab. Sagt man darüber gar nichts aus, so wäre es, lediglich vom Standpunkte der Arbeitsersparnis aus, am bequemsten alle Zahlen näherungsweise gleich Null zu setzen! Die Näherungsformel $\sin x = x$ ist z. B. doch erst brauchbar, wenn man angibt, daß etwa bei einem Fehler von 1 Proz. mit der Formel gerechnet werden darf, solange $|x| < 0{,}245$ (entsprechend 14^0) bleibt. Die Angabe bei Perry, daß die Formel nur für „sehr kleine" x anwendbar, ist ohne praktisch brauchbaren Inhalt und wird die meisten Leser zu übertriebener Sorge bei der Anwendung der Formel veranlassen.

Perry erstrebt offenbar, dem Leser durch zahlreiche numerische Beispiele ein gewisses Gefühl für Genauigkeitsschätzungen anzuerziehen. Ich glaube jedoch, daß trotzdem präzise Angaben über die Gültigkeit von Näherungen nicht überflüssig sind.

Wünschenswert ist es auch, da Perry empirische Funktionen ausdrücklich in den Kreis seiner Betrachtung zieht, wenigstens die graphische Integration heranzuziehen.

Das dritte Kapitel mit der Überschrift „Schwierigere Aufgaben und Lehrsätze" scheint mir aus dem Rahmen des Buches eigentlich herauszufallen. Es werden darin weniger Beispiele als Lehrsätze gebracht und diese in meist unbefriedigender Darstellung. So wird z. B. (S. 362) nach dem „wahren Wert der Funktion $\frac{\ln x}{x - 1}$ für $x = 1$" gefragt, statt nach dem Grenzwert.

Ich glaube, der Wert des ganzen Buches würde gewinnen, wenn dies letzte Kapitel wegbliebe. Die dadurch erreichbare Preisreduktion würde den folgenden Auflagen einen noch größeren Leserkreis sichern und das ist durchaus wünschenswert. v. Sanden.

Michele Giua und Clara Giua-Lollini, Combinazioni chimiche fra metalli. gr. 8⁰. XVI u. 446 S. m. 207 Abbildungen. Mailand, Ulrico Hoepli. 1917. Lire 12.50.

Das Werk beginnt mit einer kurzen Einführung in die Theorie der binären Schmelzdiagramme. Das hier Gegebene erscheint zum Verständnis der nachfolgenden Kapitel kaum hinreichend und zudem nicht einwandfrei. Sodann wird das Wesen der thermischen Analyse dargestellt und gleichzeitig auf eine Unsicherheit hingewiesen, die der Deutung der mit ihrer Hilfe erhaltenen Ergebnisse zuweilen anhaftet, indem die Frage, ob zwei Stoffe eine Verbindung miteinander eingehen oder nicht, durch das Schmelzdiagramm nicht immer mit Sicherheit beantwortet wird. Das dritte Kapitel handelt von der Natur der intermetallischen Verbindungen und erläutert zunächst die Beziehungen zwischen den Begriffen „Chemische Verbindung" und „Phase". Darauf wendet es sich den angeblichen Verbindungen veränderlicher Zusammensetzung zu. Schließlich wird die Zusammensetzung der Metallverbindungen vom Standpunkte der Valenzlehre, ihr Dissoziationsgrad im geschmolzenen und ihre Existenzmöglichkeit im gasförmigen Zustande besprochen. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den physikalischen Eigenschaften der Metallegierungen. Die Verfasser schließen sich der Auffassung an, daß eine Verbindung nach festen Verhältnissen einer Diskontinuität, einem singulären Punkte in der Kurve einer physikalischen Eigenschaft in Abhängigkeit von der Zusammensetzung entsprechen müsse, fehlt ein solcher Punkt, so müsse ein mit Hilfe der thermischen Analyse ermitteltes Maximum auf der Schmelzkurve einer Verbindung veränderlicher Zusammensetzung entsprechen. In diesem Kapitel haben die folgenden Eigenschaften: Spezifisches Volumen, Wärmekapazität, elektrische Leitfähigkeit, magnetische Eigenschaften, elektrolytisches Potential, thermoelektrische Kraft, Wärmeleitfähigkeit, Wärmeausdehnung, Härte, Fließdruck und Kristallform Berücksichtigung gefunden. Am Schlusse desselben findet sich ein Abschnitt über die in der Natur vorkommenden intermetallischen Verbindungen. Das nun folgende fünfte Kapitel ist das umfangreichste und behandelt im einzelnen die homöopolaren Metallverbindungen, d. h. die Verbindungen zweier wahren Metalle miteinander, indem die Verbindungen eines Metalls mit einem Elemente metalloiden Charakters (*B, C, Si, P, As, S, Se, Te*) als heteropolare Verbindungen hier keine Berücksichtigung finden. Die Erörterungen stützen sich auf die Schmelzdiagramme der einzelnen Systeme. Die Verfasser benutzen hier in weitgehendem Maße das ausgezeichnete, leider

noch unvollendete Werk von K. Bornemann: „Die binären Metallegierungen", Halle a. S., erste Lieferung 1909, zweite Lieferung 1912. Es ist dies eine in der Form einheitliche Zusammenstellung der Schmelzdiagramme der binären Metallegierungen auf Grund sorgfältiger kritischer Verwertung der bisherigen Untersuchungen, welche zuerst in der Metallurgie (Band 6—9, 1909—1912) erschienen ist. Da die Verfasser an nur zwei Stellen auf das Bornemannsche Werk hinweisen, so muß an dieser Stelle hervorgehoben werden, daß weitaus die größte Mehrzahl der in diesem Kapitel wiedergegebenen Schmelzdiagramme eine etwas verkleinerte, im wesentlichen unveränderte Wiedergabe der von Bornemann entworfenen Schmelzdiagramme ist, zumal das Schmelzdiagramm als vollständiger Ausdruck der Konstitution einer Metallegierung anzusehen ist und daher im allgemeinen keiner Erläuterungen bedarf. Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit den oben erwähnten heteropolaren Verbindungen, soweit sie metallischen Charakter aufweisen. Das siebente Kapitel enthält nach einer kurzen theoretischen Einführung die Beschreibung der wenigen ternären Metallverbindungen, die zurzeit bekannt sind. Einige Tabellen, unter denen eine Bibliographie der binären Systeme ohne chemische Verbindung hervorgehoben sein möge, schließen das Werk. R. Ruer.

G. Berndt, Radioaktive Leuchtfarben. (Sammlung Vieweg, Heft 47.) gr. 8°. IV u. 108 S. m. 28 Fig. u. 1 Tafel. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1920. M. 7.60 u. Teuerungszuschlag.

Das Buch ist vornehmlich für Hersteller und Verbraucher radioaktiver Leuchtfarben bestimmt, enthält aber auch für den Physiker lesenswerte Abschnitte.

Fast die Hälfte des Heftes nehmen drei einführende Kapitel über Phosphoreszenz (10 S.), Radioaktivität (22 S.) und Meßmethoden (10 S.) ein. Sie teilen die Schwäche der meisten derartigen Einführungen, daß sie dem Fachmann Unnötiges sagen und seinen Genauigkeitsansprüchen nicht genügen, während sie den Laien doch nicht zu vollem Verständnis führen können.

Der eigentliche Gegenstand des Buches wird in vier Teilen behandelt. Im Kapitel „Zusammensetzung und Herstellung" (15 S.) werden rein rechnungsmäßig an Hand der radioaktiven Zerfallsgesetze die verschiedenen Möglichkeiten radioaktiver Zusätze zu phosphoreszierendem Zinksulfid mit ihren Vor- und Nachteilen besprochen. Im folgenden Kapitel „Prüfung und Messung" (15 S.) behandelt der Verfasser, vielfach auf eigenen Messungen fußend, die Abhängigkeit der Helligkeit einer Leuchtfarbe von Schichtdicke, Korngröße und Gehalt an α-strahlenden Stoffen, die absolute Photometrie und die physikalisch besonders bemerkenswerte Abnahme der Helligkeit mit der Leuchtdauer. Diese Abnahme findet er im Einklang mit Rutherfords Theorie der Zerstörung der Szintillationszentren. Die übrigen Abhängigkeiten lassen sich, wie bei so unbestimmten Verhältnissen zu erwarten, nicht formelmäßig darstellen. Ein weiteres Kapitel „Verwendung" (7 S.) ist physikalisch ohne Belang, während aus dem Schlußkapitel „Statistik und Ökonomie" zwei Punkte hervorgehoben sein mögen. Erstens schätzt der Verfasser den Jahresverbrauch an *Ra*-Metall für Leuchtfarben allein in Deutschland auf 2 g, die wichtigeren Zwecken nutzlos entzogen werden (Mesothor würde statt dessen genügen), zweitens ergeben die Messungen des Verfassers einen visuellen Ökonomiekoeffizienten von 15 Proz., womit die Leuchtfarben an erster Stelle aller künstlichen Lichtquellen stehen. Wirtschaftlich wäre dagegen eine solche Beleuchtung sehr ungünstig. Gudden.

Berichtigung.

Auf Seite 644 dieser Zeitschrift **21**, 1920 erste Spalte, 19. Zeile von unten lies richtig A. König, statt A. Köster.

Tagesereignisse.

Wie die Zeitung El Argentino in La Plata in ihrer Nummer vom 25. Oktober 1920 mitteilt, fand in diesen Tagen eine **Erinnerungsfeier für den im Oktober 1920 verstorbenen Professor der Elektrotechnik von der National-Universität in La Plata Dr. Konrad Simons** (einem Bruder des jetzigen deutschen Ministers des Auswärtigen) statt. Professor Simons war seinerzeit der einzige der deutschen Professoren in Argentinien, dem der mit der Universität abgeschlossene Vertrag während des Krieges erneuert wurde. Die Fakultät hatte bereits am 19. Dezember 1918 beschlossen, einen von den elektrotechnischen Hörsälen der Universität mit seinem Namen zu bezeichnen. Auch war beschlossen worden, zu seiner Ehrung in dem elektrotechnischen Hörsaal eine Bronzeplatte anzubringen, die besagte, daß der gefeierte Lehrer zugleich der Begründer des elektrotechnischen Unterrichts in Argentinien war. An der Feier beteiligten sich der Rektor und der Senat der Universität, während sich der Präsident der Republik und der deutsche Gesandte offiziell vertreten ließen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Ingenieur M. G. Raeder zum Dozenten für anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Trondhjem, Dr. Ernest Anderson, Professor der Agrikulturchemie am Transvaal University College, Pretoria, zum Professor der Chemie an der Universität Nebraska, Lincoln, Neb., D. L. Scoles vom Iowa State College in Ames, Iowa, zum Leiter der Abteilung Chemie an der Illinois Wesleyan University Bloomington Ill., Dr. Lee Irwin Smith, Lehrer für Chemie an der Harvard Universität und Newton W. Speece zu Lehrern für organische Chemie bzw. Chemie an der Universität Minnesota, Minneapolis, Minn.

Gestorben: Der ord. Professor für physikalische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Friedrich Dolezalek, der ord. Professor der Elektrotechnik an der Universität La Plata, früher in Jena Dr Konrad Simons (während des Weltkriegs), der Farbenphotograph Sir William Abney in London, während des Kriegs der ord. Professor der Physik an der Universität Warschau Dr. Andrej Robertovic Kelly (Colley) (1918), der ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Moskau Dr. E. Hopius (1918), der ord. Professor der physikalischen Geographie, der Meteorologie und des Geomagnetismus an der Universität Moskau Dr. Ernst Jegorovic Leyst (1918), der ord. Professor der Physik an der Militär-Medizinischen Akademie in St. Petersburg Dr. N. Egoroff (1918), der Professor emer. am Technologischen Institut Nikolaus I. in St. Petersburg Dr. Nikolaj Alexandrovic Heschus (1919), der Assistent am Physikalischen Institut der Petrowski Landwirtschaftlichen Akademie in Moskau G. Pohrt (1919) der Assistent am Physikalischen Institut der Universität Moskau J. Ussigin (1919).

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

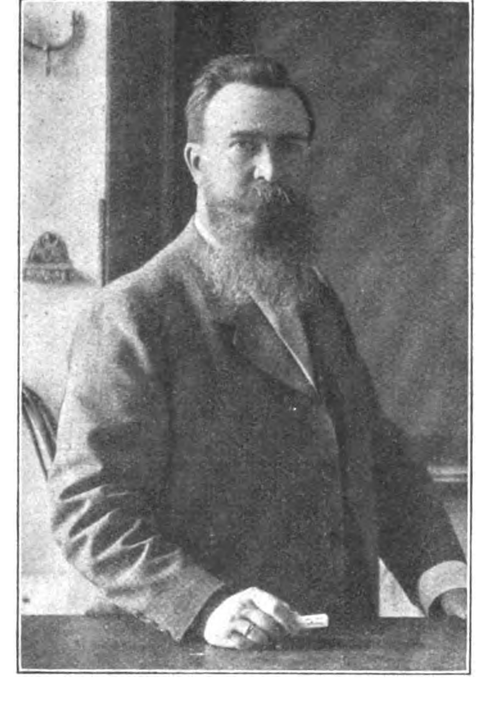
No. 2. — 15. Januar 1921. — 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 4 am 20. Januar 1921.

INHALT:

Franz Richarz.

Im Alter von fast 60 Jahren starb am 10. Juni v. J. in Marburg a. L., wo er nahezu zwei Jahrzehnte als Professor der Physik und Direktor des Physikalischen Instituts gelehrt und gewirkt hat, Franz Richarz. Mit ihm ist wieder einer der Physiker dahingegangen, die noch unmittelbar aus der Schule und Denkweise des Meisters der Physik, H. v. Helmholtz, hervorgegangen sind.



Franz Richarz, geb. am 15. Oktober 1860 in Endenich bei Bonn a. Rh., hat das große Glück gehabt, gerade in den für das ganze Leben so entscheidenden Jahren der wissenschaftlichen Ausbildung unter dem Einfluß der hervorragendsten Männer seiner Zeit zu stehen. Seine Studienzeit verbrachte er zunächst in seiner Vaterstadt Bonn, wo er durch Clausius und Kékulé in die Wissenschaft eingeführt wurde. Dann ging er nach Berlin, wo er in jene Glanzzeit physikalischer und mathematischer Forschung kam, als dort G. Kirchhoff, Helmholtz und Kummer lehrten. Als junger Doktor nahm er dann auch an dem damals unter der anregenden Leitung von A. Kundt stehenden Physikalischen Colloquium teil.

Es ist für Richarz stets charakteristisch gewesen, daß er in gleicher Weise die experimentelle wie die theoretische Physik beherrschte und pflegte. Ähnlich wie bei H. Hertz wechseln bei ihm in bunter Reihenfolge experimentelle und theoretische Arbeiten ab.

Seine erste, eine experimentelle Arbeit, entstand auf Anregung und unter Leitung von Helmholtz im Berliner Physikalischen Institut. Sie hat die Bildung von Ozon, Wasserstoff-

superoxyd und Überschwefelsäure bei der Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure zum Gegenstand.

Er promovierte mit dieser Arbeit am 18. November 1884 in Berlin.

In jene Zeit fällt bereits der Beginn jener Arbeit, die seinen Namen für alle Zeit in der Physik unvergänglich gemacht hat, die Bestimmung der Gravitationskonstante mit der Wage. Diese Arbeit, die er zuerst mit Arthur König, dann mit Otto Krigar-Menzel zusammen ausführte, hat ihn nicht weniger als 12 Jahre, 1884—1896, beschäftigt. Durch Anwendung einer glücklich ausgesonnenen Anordnung war es hierbei möglich, eine wesentlich größere Genauigkeit zu erreichen, als bei den früheren Messungen mit der Wage. Sie ist mit Unterstützung der Berliner Akademie der Wissenschaften und des Kriegsministeriums, das die Kasematten in Spandau zur Verfügung stellte, ausgeführt. Die Schwierigkeiten, zum Teil unvorhergesehener Art, waren außerordentlich groß; es bedurfte großen Geschickes und großer Sorgfalt und Geduld, sie alle zu überwinden. Dafür sind denn auch der so gewonnene Wert der Gravitationskonstanten und der mittleren Erddichte wohl die zuverlässigsten, die wir zurzeit besitzen.

Neben dieser Arbeit sind in jener Zeit nun noch eine große Reihe wichtiger sowohl experimenteller wie theoretischer Arbeiten entstanden. Von ersteren seien zunächst diejenigen erwähnt, welche die Messung der elektromotorischen Gegenkraft der Polarisation in verdünnter Schwefelsäure zum Gegenstand haben. Sie zeigen, daß die Erwärmung des Elektrolyten bei großer Stromdichte sehr zu beachten ist; diese kann bis zum Sieden des Elektrolyten und damit plötzlicher starker Stromminderung durch Bildung einer Dampfhülle führen — ein Vorläufer des Wehneltunterbrechers.

Vor allem aber ist seiner mit R. v. Helmholtz ausgeführten Abhandlung über das Dampfstrahlphänomen zu gedenken. In jener Arbeit wird mit Bestimmtheit auf den kondensationsbildenden Einfluß von Ionen auf den Dampfstrahl hingewiesen. Verstärkte Kondensation tritt danach stets ein, wenn in der Nähe durch chemische oder elektrische Prozesse freie Ionen geschaffen werden. Der Dampfstrahl kann direkt sehr oft als Reagens auf freie Ionen dienen.

Unter den theoretischen Arbeiten jener Zeit ragen besonders zwei hervor, die zum Teil in Bonn entstanden sind, wo er sich habilitiert hatte; die eine: „Die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome" schüttet ein wahres Füllhorn origineller und weittragender Gedanken aus. Es wird darin nach einer Berechnung der Größe des elektrischen Elementarquantums, dessen Existenz Helmholtz aus den Gesetzen der Elektrolyse erschlossen hatte, gezeigt, wie die Vorstellung der Helmholtzschen elektrochemischen Theorie an einer Reihe von physikalischen Erscheinungen quantitative Bestätigung findet, z. B. in der Größe der Dissoziationswärme, der Periode der Eigenschwingungen von Molekülen, insofern sie als rotierende Dipole betrachtet werden können, dann vor allem beim Magnetismus. Richarz stellt hier als erster die Vorstellung auf, daß die Ampèreschen Molekularströme auf rotierende Elektronen zurückzuführen sind und zeigt, wie man hieraus für die Größe der magnetischen Sättigung bei Eisen Werte erhält, welche in der Größenordnung durchaus im Einklang mit der Erfahrung sind. Es ist für Richarz eine besondere Freude gewesen, daß es ihm vergönnt war, gerade an Gedanken des großen von ihm innig verehrten Meisters Helmholtz anzuknüpfen und ihre Bedeutung und Fruchtbarkeit darzutun.

Als zweite seiner theoretischen Arbeiten sei ferner vor allem seine Erklärung des Gesetzes von Dulong und Petit, insbesondere auch der Abweichungen von diesem hervorgehoben. In Anknüpfung an Boltz-

mannsche Überlegungen zeigt er, daß das Gesetz mit dem bekannten Zahlenwert der Atomwärme 6,4 erfüllt sein muß, wenn die Zentren der Atome bei der Wärmebewegung sich von ihrer Normallage nur um Strecken entfernen, die klein sind gegen die Abstände von den Nachbaratomen. Abweichungen sind hiervon zu erwarten mit sinkender Temperatur und — falls Atomgewicht und Atomvolumen gleichzeitig klein sind — in voller Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Die neuen Überlegungen von Einstein hierüber, die von der Quantentheorie ausgehen, hat er vollständig anerkannt, betont jedoch mit Recht, daß neben diesen Einsteinschen Gedanken auch die von ihm hervorgehobenen Einflüsse bei jeder Theorie der spezifischen Wärme fester Körper zu beachten und in Rechnung zu setzen sind.

1895 wurde Richarz als ordentlicher Professor der Physik und Direktor des physikalischen Instituts nach Greifswald berufen, wo er 6 Jahre geblieben ist. Auch diese Greifswalder Zeit ist reich an wissenschaftlichen Arbeiten, die er teils selbst, teils mit seinen Schülern verfaßt hat.

Er zeigte, um nur einiges zu nennen, daß Röntgenstrahlen das Dampfstrahlphänomen auslösen. Mit W. Ziegler zusammen arbeitete er die so anschauliche Demonstration der oszillatorischen Entladung eines Kondensators mittels der Braunschen Röhre aus; mit demselben maß er direkt die Temperatur im Elektrolyten an den Elektroden bei großer Stromdichte. Sein Schüler Löwenherz maß auf seine Veranlassung die Temperatur der Luft in auf- und absteigenden Luftströmen im Raum des Laboratoriums und zeigte die Richtigkeit der Theorie des konvektiven Gleichgewichtes in der Atmosphäre.

Als er 1901 dem Ruf an die Universität Marburg folgte, erwartete ihn hier die große Aufgabe, den physikalischen Unterrichts- und Lehrbetrieb in wesentlich größere moderne Verhältnisse überzuführen und umzugestalten. Mit großem Eifer und vollem Erfolg hat er sich dieser schweren zeitraubenden Arbeit gewidmet. Dank seiner Initiative erfreut sich heute die Universität Marburg des Besitzes eines der größten modernen physikalischen Institute Deutschlands. Das Neue Physikalische Institut ist gerade vor dem Kriege im wesentlichen fertig gestellt. Es ist ein tragisches Geschick, daß es Richarz nicht mehr vergönnt war, nun jetzt nach dem Kriege die Jahre zu erleben, in denen es so recht seiner Bestimmung dienen sollte.

Eine reiche wissenschaftliche Tätigkeit in Lehre und Forschung hat Richarz hier in Marburg neben dieser organisatorischen Tätigkeit entfaltet. Zeugnis davon gibt die außerordentlich stattliche Reihe von Dissertationen, die im Laufe dieser 19 Marburger Jahre im Physikalischen Institut entstanden und den verschiedensten Gebieten der Physik entnommen sind.

Eine größere Gruppe ist der Erforschung der merkwürdigen Heuslerschen Legierungen gewidmet, denen Richarz seit ihrer Entdeckung das größte Interesse entgegenbrachte. Andere befassen sich mit der Prüfung der Richarzschen Erklärung des Gesetzes von Dulong und Petit und ihres weiteren Ausbaues; wieder andere Arbeiten sind den Grundfragen der Maxwellschen Theorie gewidmet, dem Nachweis der elektrostatisch ponderomotorischen Wirkung der Induktion, der magnetischen Wirkung der dielektrischen Verschiebungsströme. Der Raum verbietet, auf Einzelheiten einzugehen; es war ein reiches wissenschaftliches Leben, das durch Richarz in Marburg in der Physik geschaffen wurde. Aber auch auf die Nachbargebiete erstreckte sich sein Interesse; namentlich war es die Meteorologie, die er auf jede Weise pflegte und zu fördern suchte. Seinen äußeren Ausdruck fand dieses lebhafte Interesse in der Gründung des Kurhessischen Vereins für Luftfahrt, dessen Vorsitzender er bis zu seinem Tode war. Unermüdlich hat er als solcher

den Verein und seine Ziele auf jede Weise zu fördern gesucht.

Besonderen Dank schuldet ihm die Physik für die Herausgabe der Vorlesungen von Helmholtz über die Theorie der Wärme, eine nicht leichte Aufgabe, die er glänzend gelöst hat. Die glückliche Gabe anschaulicher Darstellung, die Richarz in hohem Grade besaß, zeigt sich in hellem Licht in seinem Buche: Maxwellsche Theorie verknüpft mit der Elektronentheorie, das aus Vorträgen in Oberlehrerkursen und einer Vorlesung entstanden ist. Es ist in hervorragender Weise geeignet, in die nicht ganz leichten Gedankengänge dieser Theorien einzuführen. Den gleichen Vorzug leichter Faßlichkeit haben seine für einen weiteren Kreis bestimmten „Neuere Fortschritte der Elektrizität".

Die Vielseitigkeit seiner Interessen zeigte sich besonders bei der Gestaltung des von Drude und ihm begründeten Gießen-Marburger Colloquiums, wo er stets darauf bedacht war, neben physikalischen Vorträgen auch möglichst zahlreich solche aus den Nachbargebieten zu gewinnen.

Wie seine vielen Schüler stets dankbar ihres nun dahingegangenen Lehrers, der vielen Anregungen aller Art, die er ihnen gab, und seines gütigen freundlichen Wesens gedenken werden, so wird auch in der Physik, die ihm so Vieles verdankt, sein Name nicht vergehen. Sein Werk wird sein Andenken bei uns für immer lebendig halten.

F. A. Schulze.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Messungen der Ionisation und Ionenbeweglichkeit bei Luftfahrten.

Von Albert Wigand.

(Vorgetragen in der Sitzung der D. Phys. Gesellschaft zu Nauheim am 22. Sept. 1920, sowie in der Sitzung der D. Meteorol. Gesellschaft zu Leipzig am 6. Okt. 1920. Kurzer Auszug: diese Zeitschr. 21, 571, 1920.)

1. Einleitung.

Es soll im folgenden ein vorläufiger Bericht gegeben werden über eine Reihe von luftelektrischen Freiballonfahrten und Flugzeugaufstiegen, die ich gemeinsam mit Herrn H. Koppe zum Studium der Ionisation kurz vor dem Kriege begonnen und dann im Jahre 1919 wieder aufgenommen habe. Nachdem bei früheren Halleschen Ballonfahrten die Leitfähigkeit[1]) und das Potentialgefälle[2]) bis zu Höhen von 9000 m gemessen worden waren, erschienen mir, in Anbetracht der widerspruchsvollen Ergebnisse der älteren Beobachtungen über die Ionisation in der freien Atmosphäre, neue Untersuchungen über diese Frage wünschenswert, und zwar Messungen von Ionengehalt, Unipolarität und Ionenbeweglichkeit. Nur auf diesem Wege wird man wohl auch den noch ungelösten Grundfragen der luftelektrischen Forschung beikommen können, nämlich der Bildung und Aufrechterhaltung des elektrostatischen Erdfeldes sowie der Entstehung der Gewitterelektrizität.

Während über die Zunahme der Leitfähigkeit mit der Höhe kein Zweifel besteht, sind die von den verschiedenen früheren Beobachtern gefundenen Ergebnisse für die vertikale Änderung der Ionisation (räumliche Ladungsdichte, Ionengehalt) in der freien Atmosphäre nicht miteinander und mit der bekannten Wirkung der in Betracht kommenden Ionisatoren in Einklang zu bringen. Wir sehen ab von den älteren, im Ballon ausgeführten Zerstreuungsmessungen ohne Sättigungsstrom und Aspiration (Ebert, Lutz, Linke), sowie von Ionisationsmessungen im Gebirge (Conrad, Kähler, Knoche, Dember, Dorno, Gockel), bei denen sich im allgemeinen eine Zunahme des Ionengehaltes mit der Höhe ergab, jedoch örtlich stark beeinflußt. Berücksichtigt man also nur die Freiballonmessungen mit Aspirationsapparaten vom Typus des Ebertschen, so fand

1) A. Wigand, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 16, 232, 1914.
2) E. Everling, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 16, 240, 1914.

Gerdien[1]) im allgemeinen keine sichere Zunahme des Ionengehalts mit der Höhe bis zu 7100 m; in einzelnen, meteorologisch besonders gekennzeichneten Schichten (oberhalb einer Dunstschicht) wurde zwar Zunahme, jedoch gelegentlich auch Abnahme nach oben festgestellt, wobei sich die Ionen beider Vorzeichen mitunter grundsätzlich verschieden verhielten. Lüdeling[2]), Lutz[3]) und Gockel[4]) dagegen stellten in größerer Höhe, oberhalb der unteren Wolken, eine eindeutige Zunahme des Ionengehalts fest. Man bekommt den Eindruck, daß diese Verschiedenheiten in erster Linie auf den Einfluß der meteorologischen Beschaffenheit der betreffenden Schichten zurückzuführen sind, vielleicht aber auch in Unvollkommenheiten der Methodik ihre Ursache haben. Es ist daher zu erwarten, daß durch Weiterbildung der Versuchsmethoden und besonders durch neue Untersuchungen mit genauer Beachtung der zugehörigen meteorologischen Elemente eine Klärung der Frage eintreten wird. Und um den Einfluß dieser Elemente möglichst einfach übersehen zu können, ist eine weitgehende Herabsetzung der Versuchsdauer angebracht, damit nicht während der Messungen durch wesentliche Änderung der Höhe oder der Eigenschaften der Luftschicht (z. B. Wolkenbildung) Komplikationen eintreten können.

Für die Beweglichkeit der Ionen fand Gerdien[5]), daß sie mit der Höhe stärker zunimmt, als umgekehrt proportional dem Luftdruck. Auch dieses Ergebnis verdient nachgeprüft und auf seine Ursachen untersucht zu werden, wozu gleichzeitige Messung von Ionengehalt und Leitfähigkeit geeignet und möglichst kurze Beobachtungszeit erforderlich ist.

Sieht man ab von Änderungen der Ionenadsorption und Wiedervereinigung mit der Höhe, so läßt die derzeitige Kenntnis der in der Atmosphäre wirksamen Ionisatoren erwarten, daß die Ionisation beim Aufsteigen durch die untersten 1—2 km der freien Atmosphäre abnimmt, darüber aber nach oben wächst. Denn in der freien Atmosphäre hat der Gehalt der Luft an der hauptsächlich für die unteren Schichten als Ionisator in Frage kommenden Radium-Emanation und ihren kurzlebigen Zerfallsprodukten im Mittel bereits in rund 1,2 km Höhe nur noch die Hälfte des Betrags am Boden[1]). Und auch die durchdringende Strahlung nimmt bis etwa 1 km Höhe ab, um dann aber in größerer Höhe stark zu wachsen[2]). Außer diesen Ionisatoren und dem wegen seiner Langlebigkeit in allen Höhen praktisch gleichmäßig verteilten Radium D[1]) mit seinen Zerfallsprodukten kommen andere Ionisatoren, auch die Sonnenstrahlung, normalerweise in der Troposphäre wohl nicht erheblich in Betracht.

1) H. Gerdien, Göttinger Nachr. 1903, S. 383; 1904, S. 277; diese Zeitschr. 4, 632, 1903.
2) G. Lüdeling, Illustr. aeronaut. Mitt. 7, 321, 1903.
3) K. W. Lutz, Diss. München, Technische Hochschule, 1904, S. 91—95.
4) A. Gockel, diese Zeitschr. 11, 280, 1910.
5) H. Gerdien, l. c.

2. Methodik der Messungen.

a) Im Ballon. Durch die Verwendung von zwei Ebertschen Ionenzählern und einem Leitfähigkeitsapparat nach dem Prinzip des Gerdienschen wurde es uns möglich, im Ballon in längstens 7 Minuten gleichzeitige Werte des Ionengehaltes und der Leitfähigkeit und damit der Beweglichkeit für positive und negative Ionen zu bestimmen. Während dieser Zeit hielt sich der Ballon fast stets ohne Ballastabgabe in gleicher Höhe. Meist konnte in länger dauernden Gleichgewichtslagen eine größere Zahl von Einzelversuchen hintereinander ausgeführt werden. Bei früheren Beobachtern war ein Vielfaches dieser Zeit zur Ausführung der gleichen Messungen erforderlich, und ohne Gleichzeitigkeit für beide Vorzeichen.

Die beiden Ionenzähler[3]) waren vom neuen Typ der Firma Günther & Tegetmeyer, mit 40 cm langem, senkrechtem Kondensatorrohr und Wulfschem Zweifadenelektrometer (Empfindlichkeit etwa 1 Skt. für 1,7 Volt). Das benutzte Spannungsintervall war 214 bis 80 Volt. Die Gesamtkapazität von Elektrometer plus Kondensator betrug für die beiden Instrumente 20,0 und 23,9 cm. Das eine wurde stets mit positiver, das andere mit negativer Aufladung verwendet. Kontrollversuche mit gleicher Aufladung beider Instrumente ergaben keine merkliche Abweichung gleichzeitiger Messungen. Die Versuchsdauer lag zwischen $3^1/_2$ und 7 Minuten, die geförderte Luftmenge war rund 1,4 Liter pro Sekunde. Bei der ersten der 4 Ballonfahrten benutzten wir nur einen Ionenzähler mit abwechselnd positiver und negativer Aufladung und einer Versuchsdauer von 10 bis 15 Minuten.

Der als Korrektion zu berücksichtigende Ladungsverlust der Elektrometer bei abgestelltem Luftstrom (Isolationsprobe) war im Ballon meist so gering, daß er vernachlässigt werden konnte. Am Boden morgens vor dem Aufstieg bewirkte die hohe Luftfeuchtigkeit häufig eine so schlechte

1) V. F. Hess und W. Schmidt, diese Zeitschr. 19, 109, 1918.
2) W. Kolhörster, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 15, 1111, 1913; 16, 719, 1914.
3) In dankenswertem Entgegenkommen uns leihweise überlassen von den Herren Abderhalden und Berndt.

Isolation, daß nur wenige Versuche gelangen, deren Zuverlässigkeit, mit den Ballonbeobachtungen verglichen, als wesentlich geringer einzuschätzen ist.

Die beiden Ionenzähler wurden im Ballon auf den Deckeln ihrer Transportkästen festgeschnallt und auf den zwei Ecken einer Schmalseite des Korbrandes aufgestellt, so daß sie bequem von einem Beobachter gemeinsam bedient werden konnten.

Der Leitfähigkeitsapparat hatte annähernd dieselben Abmessungen des Kondensators wie der Gerdiensche[1]) und war ausgestattet mit einem Wulfschen Zweifadenelektrometer und einem von Hand betriebenen, achtflügeligen Ventilator, der auch ohne Querdrahtnetz einen genügend gleichmäßig verteilten Luftstrom erzeugte. Die richtige Ventilationsgeschwindigkeit für die verwendete Aufladespannung und die erreichten Ballonhöhen wurden durch Laboratoriumsversuche ausprobiert.

Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug etwa 1,6 Volt für 1 Skt., die Gesamtkapazität des Elektrometers plus Kondensator 9,70 cm. Das benutzte Spannungsintervall war 151 bis 57 Volt. Als Versuchsdauer genügten am Boden und in den unteren Luftschichten 2 bis 3 Minuten, in 3 bis 4 km Höhe 1 bis $1^1/_2$ Minuten, so daß während eines Versuchs mit den beiden Ionenzählern mehrere Leitfähigkeitsmessungen mit Wechsel des Vorzeichens der Aufladung vom anderen Beobachter ausgeführt werden konnten. Der Apparat war auf einer Ecke des Korbrandes festgemacht.

Die Isolation des Elektrometers für sich wurde während der Fahrten kontrolliert und nötigenfalls durch Abzug des Ladungsverlustes vom beobachteten Zerstreuungswerte berücksichtigt. Korrektionen wegen der Abweichung der Feldverteilung im Inneren des Kondensators von der theoretisch angenommenen einfachen Form, sowie wegen radioaktiven Beschlags im Kondensator sind vorläufig nicht angebracht worden.

Zur Ausgleichung von Eigenladungen des Ballons und zur Erzielung einer definierten Gestaltung des elektrischen Feldes um den Ballon derart, daß an der Meßstelle im Korb das Feld praktisch gleich null ist, wurde, wie bei unseren früheren luftelektrischen Fahrten, ein schnell tropfender Gummisack mit Chlorcalcium- oder Kochsalzlösung und ferner ein Platinblech mit frischem Radium F-Belag außen am Ballonkorbe angebracht. Der Referenzpunkt dieser Kollektoren lag in der Höhe des Korbbodens. Ballonkugel, Takelung und Korb wurden durch Überziehen mit zahlreichen dünnen Drähten zu einem einheitlichen Leiter gemacht.

Für die meteorologischen Messungen wurden geprüfte Aneroide, Barographen und Aspirations-Psychrometer benutzt. Zur Entlastung der Beobachter von den Ablesungen dieser Instrumente, sowie zur sicheren Interpolation für die durchfahrenen Schichten diente bei der zweiten und vierten Fahrt ein Marvin-Bungescher Drachenmeteorograph, der seitlich einige Meter vom Korbe entfernt in Korbhöhe frei mit senkrechtem Ventilationsrohr hing und durch ein kleines, elektrisch angetriebenes Flügelrad so ventiliert wurde, daß beim Steigen des Ballons der natürliche Luftstrom den Ventilatorstrom verstärkte. Auch auf visuelle meteorologische Beobachtungen, besonders von Wolken und Dunst, legten wir Wert.

b) Im Flugzeug. Luftelektrische Ballonbeobachtungen bedürfen meist längerer Beobachtungszeiten und haben daher den unvermeidlichen methodischen Nachteil, daß sie nur in bevorzugten Schichten, in denen sich der Ballon eine Zeit lang von selbst im Gleichgewicht hält, ausgeführt werden können. Solche Stabilitätsschichten sind immer durch geringe Temperaturabnahme nach oben, durch Isothermie oder Temperaturinversion ausgezeichnet. Für andere Schichten gelingt es im Ballon nur vereinzelt, luftelektrische Beobachtungen zu gewinnen.

Das Flugzeug dagegen ermöglicht als Träger luftelektrischer Instrumente mit subjektiver oder besser noch registrierender Beobachtung gleichmäßig für jede durchstiegene Schicht brauchbare Messungen. Will man die im Ballon verwendeten Beobachtungsmethoden für Ionisation und Leitfähigkeit mit geeigneten Änderungen auf das Flugzeug übertragen, so wird man zwar auch hier in vielen Fällen den Aufstieg stufenförmig gestalten müssen, kann aber in jeder gewünschten Höhenlage, unabhängig von der vertikalen Temperaturverteilung und der durch sie bedingten Stabilität der Schichtung, so lange horizontal fliegen, als die Beobachtungen dauern sollen. Werden hingegen Methoden verwendet, durch die man Momentanwerte der Ionisation und Leitfähigkeit erhält, was mit Benutzung der starken, im Flugzeuge zur Verfügung stehenden Aspiration ausführbar ist, so genügt ein einfacher Aufstieg ohne Stufen, um lückenlose Beobachtungen in allen durchflogenen Schichten durchführen zu können. Das Flugzeug gestattet es daher, im Gegensatz zum Freiballon, mit dem man nur Stichproben bekommt, durch regelmäßige Terminaufstiege von kurzer Dauer über einem bestimmten Orte eine vollständige und systematische luftelektrische Erforschung

1) H. Gerdien, Göttinger Nachr. 1905, S. 240; diese Zeitschr. 6, 800, 1905.

der Atmosphäre schon jetzt bis zur Grenze der Troposphäre, bald wohl auch darüber hinaus, einzuleiten. Andere luftelektrische Messungen, wie Potentialgefälle, durchdringende Strahlung und Gehalt der Luft an radioaktiven Substanzen, lassen sich analog im Flugzeug durchführen.

Die bisher von mir gemeinsam mit Herrn Koppe im Flugzeug ausgeführten Versuche beschränken sich, da eine Fortsetzung wegen des darniederliegenden deutschen Flugwesens zur Zeit nicht möglich ist, einerseits auf die Anpassung eines Ebertschen Ionenzählers an das Flugzeug und eine Anzahl Versuchsflüge mit subjektiver Ablesung zur Erprobung dieser Methode; die beiden letzten dieser Flüge ergaben bis zu Höhen von 4,3 und 5,2 km befriedigende zeitliche Mittelwerte für den Ionengehalt. Andererseits habe ich neue Methoden zur Gewinnung von Momentanwerten der Ionisation und Leitfähigkeit im Flugzeuge durch Strommessung konstruktiv und mit Laboratoriumsversuchen vorbereitet.

Das Wulfsche Zweifadenelektrometer ist im Flugzeuge bei guter elastischer Aufhängung hinreichend gegen die Erschütterungen unempfindlich, wenn man seine übliche Meßempfindlichkeit durch stärkere Fadenspannung auf etwa 5 Volt für einen Skt. herabsetzt. Die Vibrationen äußern sich dann nur in einer geringfügigen Verbreiterung der Fäden, so daß auch photographische Registrierung möglich sein wird.

Unter Hinweis auf die in anderen Veröffentlichungen mitgeteilte ausführlichere Beschreibung der Flugzeugmethodik[1]) mit dem Ebertschen Ionenzähler seien hier nur mit einigen Erläuterungen die Fig. 1—3 wiedergegeben: das Forschungsflugzeug als Ganzes (eine C-Maschine Maybach-Rumpler von 260 PS bester Steigfähigkeit), sodann ein Blick abwärts von hinten auf den als Beobachtungsraum eingerichteten Beobachtersitz und den Führersitz, schließlich eine Skizze der Einrichtung des Beobachtungsraumes im Aufriß.

Der Ebertsche Ionenzähler mit dem Wulfschen Elektrometer E (Fig. 3) von 20,0 cm Gesamtkapazität wurde im Beobachterraum des Flugzeugs mit dem 40 cm langen Kondensator-Zylinder Z nach unten, durch Stahlspiralen und Gummizüge nach allen Seiten gefedert aufgehängt. Der vom Fahrtwind erzeugte und durch den Verschluß V regulierbare Luftstrom tritt unter dem Rumpf, genügend weit entfernt von den Abgasen des Motors, durch ein nach vorn umgebogenes, mit dem Zylinder Z verbundenes Rohr R ein. Der Zerstreuungsstab St wird durch ein kleines Bernsteinstück J an seinem freien



Fig. 1. Hallesches Forschungsflugzeug.

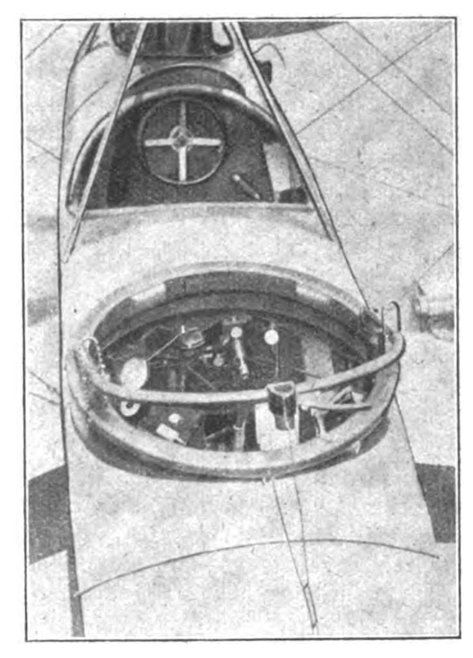


Fig. 2. Beobachtungsraum des Flugzeugs.

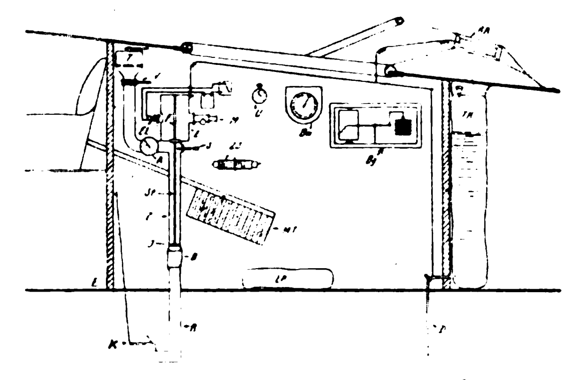


Fig. 3. Einbau der Instrumente im Beobachtungsraum des Flugzeugs.

1) A. Wigand, Die Naturwissenschaften 7, 487, 1919; Luftfahrt 1920, S. 8; H. Koppe, Illustr. Flugwelt 1, Heft 9, 1919; A. Wigand und H. Koppe, Beitr. z. Physik d. fr. Atmosphäre 1921.

Ende auch bei stärkeren Erschütterungen zentrisch im Zylinder gehalten.

Zur Ausgleichung von Eigenladungen des Flugzeuges wurde ein Gummisack mit Chlorcalciumlösung als Tropfkollektor TK mit Spritzdüse D und außerdem ein kräftiger Radium F-Kollektor RK angebracht, da es noch nicht feststeht, ob die Ausgleichswirkung der Verbrennungsgase des Motors hinreichend ist und nicht vielmehr durch den Motor während des Fluges eine Aufladung des Flugzeuges eintritt.

Die Ventilationsstärke im Kondensator wurde zwar gegenüber der bei der gewöhnlichen Verwendung des Ionenzählers üblichen erheblich gesteigert (Fördermenge bis nahezu 10 Liter pro Sekunde), jedoch nicht über die bei der verwendeten Höhe der Aufladung (205 bis 43 Volt) und der Dimensionierung des Kondensators für Sättigungsstrom zulässige Grenze, was wir durch besondere Versuche im Laboratorium mit Variierung der Ventilationsstärke kontrollierten.

Die Versuchsdauer im Flugzeug für die Messung des Ionengehalts eines Vorzeichens betrug 5 bis 6 Minuten bei konstanter Flughöhe. Für mehrere Versuche hintereinander mit Wechsel des Vorzeichens der Aufladung ließ sich die Höhenstufe entsprechend länger einhalten. Mit einem zweiten Ionenzähler konnten während des Aufstiegs Vergleichsbeobachtungen am Boden ausgeführt werden.

Zur gleichzeitigen Registrierung der meteorologischen Elemente (Luftdruck, Temperatur, relative Feuchtigkeit) beim Fluge wurden außer dem nur zur Orientierung und Kontrolle des Einhaltens der konstanten Höhenstufe bestimmten, im Beobachterraum hängenden Aneroid Bm und dem Barographen Bg zwei für das Flugzeug eingerichtete Meteorographen an den äußeren Stielpaaren in erprobter Aufhängungsart[1]) angebracht (Fig. 1). Visuelle Beobachtungen über luftelektrisch wichtige meteorologische Erscheinungen wie Wolken und Dunst konnten vom Beobachter nebenbei gemacht werden. Während des Fluges wurden außerdem am Aufstiegsplatz neben den meteorologischen Stationsbeobachtungen auch Höhenwindmessungen mit Pilotballonen angestellt.

3. Beobachtungsergebnisse.

In den beiden Tabellen werden die Beobachtungsergebnisse von 4 Ballonfahrten und 2 Flugzeugaufstiegen durch Zusammenstellung der Mittelwerte mitgeteilt. Die Fig. 4—7 zeigen übersichtlich in einheitlichem Maßstab den bei diesen Luftfahrten gefundenen vertikalen Verlauf von Leitfähigkeit, Ionengehalt und Beweglichkeit im Zusammenhang mit den meteorologischen Elementen. Aus den beim Luftdruck b mm Q. S. beobachteten Werten der Leitfähigkeit $\lambda_{\pm}$ und des Ionengehaltes $E_{\pm}$ wurde die Beweglichkeit $v_{\pm}$ berechnet: $\lambda_{\pm} = E_{\pm} \cdot v_{\pm}$. Die auf Atmosphärendruck reduzierte Beweglichkeit ist: $v'_{\pm} = \frac{b}{760} \cdot v_{\pm}$. Von einer Berechnung der Ionenzahl $n_{\pm}$ aus dem als Ladung pro m³ angegebenen Ionengehalt $E_{\pm} = n_{\pm} \cdot e$ wurde vorläufig abgesehen, da für die hierzu einzusetzende Ionenladung e die noch immer nicht unerhebliche Unsicherheit der Größe des Elementarquantums sowie auch die Möglichkeit mehrfacher Ionenladung in Betracht zu ziehen wären.

Die wesentlichsten luftelektrischen Ergebnisse der einzelnen Aufstiege seien kurz hervorgehoben:

1. Freiballonfahrt (Fig. 4), 11—12. Juli 1914. Wetterlage antizyklonal mit Gewitterbildung. Messungen nachts und bis 2 Stunden nach Sonnenaufgang; keine merkliche Wirkung der Sonnenstrahlen auf die Ionisation. Zunahme von E_+ und E_- mit der Höhe oberhalb der

Flugzeugaufstiege.

Zeit h	Zeit m	Seehöhe H m	Luftdruck b mm	Temp. t^0 C	relat. Feucht. R Proz.	Ionengehalt ESE pro m³. E_+	E_-	$E_+ + E_-$	$E_+ - E_-$	E_+ / E_-	Bemerkungen
11ª 12p	56 1	5200	395	— 15,8	61	1,143	—	2,086	+ 0,200	1,23	1. Aufstieg (Halle a. S.) 23. Juli 1919. Beobachter K.
12	5 11	5200	395	— 15,8	61	—	0,943				
	16 21	3300	506	— 5,0	77	—	0,608	—	—	—	
10ª	0 5	4300	448	— 10,3	67	—	0,842	—	—	—	2. Aufstieg (Halle a. S.) 24. Juli 1919. Beobachter W.

1) A. Wigand und A. Wienecke, Beitr. z. Physik d. fr. Atmosph. 1921.

Freiballonfahrten.

Zeit h m	Seehöhe H m	Luftdr. b mm	Temp. t^0C	Dampfdr. e mm	rel. F. R Proz.	Leitfähigkeit ESE·10⁴ λ_+	λ_-	$\lambda_+ + \lambda_-$	λ_+/λ_-	Ionengehalt ESE pro m³ E_+	E_-	$E_+ + E_-$	$E_+ - E_-$	E_+/E_-	Beweglichkeit cm/sek : Volt/cm v_+	v'_+	v_-	v'_-	$v_+ : v_-$	Bemerkungen
10p 50 – 11 30	85	760	20,5	13,6	77	0,694	0,755	1,449	0,92	0,264	0,425	0,689	−0,161	0,62	2,63	2,63	1,77	1,77	1,49	1. Fahrt. (Bitterfeld.) } In Dunstschicht
12a 25 – 2 30	240	746	19,2	13,4	81	0,528	1,086	1,614	0,49	0,202	0,618	0,820	−0,416	0,33	2,61	2,56	1,76	1,73	1,48	(ohne Ausgleichung.) } In Dunstschicht
3 52 – 4 20	2180	591	7,9	7,2	92	1,358	1,421	2,779	0,96	0,205	0,442	0,647	−0,237	0,46	6,63	5,16	3,22	2,50	2,06	In Cu-Höhe über Str. (Morgendämmerung.)
4 25 – 40	3200	523	1,4	3,9	77	6,43	7, 02	13,45	0,92	0,745	—	—	—	—	8,64	5,95	—	—	—	Dunst, ⊙$^{1-2}$. (4a 21 Sonnenaufg. üb. Str-Bk.)
4 50 – 5 10	3870	481	−2,5	2,8	74	7,87	8, 07	15,94	0,98	0,861	1,380	2,241	−0,519	0,62	9,14	5,79	5,85	3,70	1,56	Über StrCu, Dunst ⊙$^{1-2}$.
6 10 – 21	4100	467	−4,3	2,7	83	7,57	—	—	—	0,810	—	—	—	—	9,35	5,75	—	—	—	Aufst. Böen, CuNi üb. Ballonh., Dunst ⊙^{2}.
8 50 – 9 10	180	750	20,6	14,4	80	0,496	0,596	1,092	0,83	—	0,409	—	—	—	—	—	1,46	1,44	—	(Bretleben am Kyffhäuser.) Dunst.
8a 10 – 39	85	768	14,3	11,3	92	0,49	0, 89	1,38	0,55	0,199	0,888	1,087	−0,689	0,22	2,46	2,49	1,00	1,01	2,46	2. Fahrt (Bitterfeld.) Dunst, ⊙$^{0-1}$.
10 57 – 11 34	1150	676	10,0	9,0	98	1,85	1, 74	3,59	1,06	0,715	0,289	1,004	+0,426	2,47	2,59	2,33	6,02	5,36	0,43	Zwischen 2 Str, ⊙^{1}.
11 55 – 12p 9	1815	624	10,3	5,0	53	3,45	4, 12	7,57	0,84	0,581	0,555	1,136	+0,026	1,05	5,94	4,88	7,43	6,10	0,80	Über Str. ⊙^{2}.
12 49 – 1 4	3430	513	2,0	2,6	50	6, 29	7, 06	13,35	0,89	1,046	0,850	1,896	+0,196	1,23	6,01	4,06	8,30	5,60	0,72	⊙^{2}.
9a 28 – 45	85	762	0,0	4,3	91	0,299	0,276	0,575	1,08	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3. Fahrt. (Bitterfeld.) Dunst, Str.
1p 27 – 42½	2950	529	−10,0	0,8	40	4,51	5, 95	10,46	0,76	0,782	0,831	1,613	−0,049	0,94	5,76	4,01	7,16	4,98	0,80	⊙^{2} } Nahe über schnell sich hebendem Str. Vertikalböen.
1 50 – 2 18	2950	529	−10,4	1,5	80	6,18	6, 28	12,46	0,98	0,883	0,834	1,717	+0,049	1,06	7,00	4,87	7,54	5,24	0,93	⊙^{2} } Nahe über schnell sich hebendem Str. Vertikalböen.
7a 31 – 45	85	754	0,7	4, 3	90	0,271	0,353	0,624	0,77	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4. Fahrt. (Bitterfeld.) ⊙$^{0-1}$. } In Dunstschicht.
10 18 – 52	580	709	1,4	4, 4	87	1,007	1,251	2,258	0,80	0,173	0,254	0,427	−0,081	0,68	5,82	5,43	5,00	4,66	1,16	⊙$^{0-1}$. } In Dunstschicht.
11 25 – 39	1625	623	3,0	0,68	12	3,69	4,78	8,47	0,77	0,735	0,770	1,505	−0,035	0,95	5,02	4,12	6,21	5,09	0,81	⊙^{1}.
12p 20 – 58	2960	527	−4,5	0,61	19	7,32	7,25	14,57	1,01	0,885	0,837	1,722	+0,048	1,06	8,27	5,74	8,66	6,01	0,96	⊙^{1}.
3 14 – 32	100	752	3,5	5,0	85	0,620	0,553	1,173	1,12	0,230	0,200	0,430	+0,030	1,15	2,69	2,66	2,76	2,73	0,97	(10 km nordöstl. Braunschweig.) Dunst, ⊙$^{0-1}$.

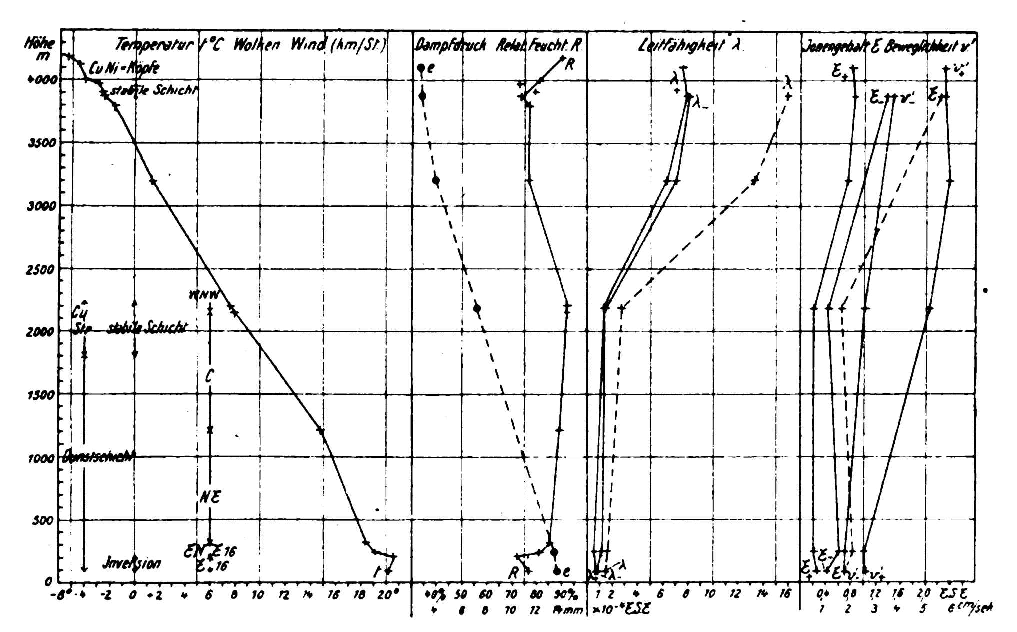


Fig. 4. Erste Ballonfahrt.

unteren Dunstschicht (über 2180 m Höhe). Allgemeine Zunahme von v_+' und v_-' mit der Höhe bei abnehmendem Dampfdruck und abnehmender Dunststärke; v_+' nahezu konstant in 2180 bis 4100 m Höhe. In jeder Höhenstufe ist $E_- > E_+$, $v_+' > v_-'$ und $\lambda_- > \lambda_+$. Die gleichzeitig gemessene Zahl der Kondensationskerne nimmt gleichmäßig ab von 30000 in cm³ am Boden auf < 50 in 3900 m Höhe[1]).

2. Freiballonfahrt (Fig. 5), 5. Okt. 1919. Wetterlage antizyklonal. Zunahme von E_+ und E_- oberhalb der Wolken (1815—3430 m); E_- in 3430 m nicht größer als am Boden. Zunahme von v_+' und v_-' von der Bodendunstschicht an bis oberhalb der Wolken (1815 m). Darüber bei abnehmendem Dampfdruck geringe Abnahme von v_+' und v_-' mit zunehmender Höhe. In der Bodendunstschicht $E_- > E_+$ und $v_+ > v_-$; über dem unteren Str von 1150 m nach oben $E_+ > E_-$ und $v_- > v_+$.

3. Freiballonfahrt, 10. Dez. 1919. Wetterlage zyklonal. Messungen in 2950 m nahe über Str (Eiskristalle), der sich schnell hebt; Vertikalböen; Schicht nicht in luftelektrischem Gleichgewicht. E- und v-Werte von derselben Größenordnung wie bei den anderen Fahrten in gleicher Höhe. Zeitliche Zunahme von E und v; Einfluß des Dampfdruckes nicht ersichtlich. Kein erheblicher Unterschied von E_+ und E_-; $v_- > v_+$. Gleichzeitiges Potentialgefälle in 2950 m Höhe 15,7 Volt/m (nach Messungen von Hrn. W. Müller[2]).

1) A. Wigand, Ann. d. Phys. **59**, 713, 1919.
2) W. Müller, Diss. Halle 1920; Ann. d. Physik **63**, 611, 1920.

4. Freiballonfahrt (Fig. 6), 21. Februar 1920. Wetterlage zyklonal, am Rande eines Hochs. Über der Bodendunstschicht E_+ und E_- größer als in der Dunstschicht; darüber (1625 bis 2960 m Höhe) geringe Zunahme von E_+ und E_- ohne erheblichen Unterschied von E_+ und E_-. E-Werte bereits in 1625 m Höhe von derselben Größenordnung wie bei den anderen Fahrten in etwa 3 km. Zunahme von v_-' mit der Höhe bei abnehmendem Dampfdruck.

Flugzeugaufstiege (Fig. 7), 23. und 24. Juli 1919. Wetterlage antizyklonal, wenig verschieden an den beiden Tagen. Zunahme von E_- mit der Höhe von 3300 bis 5200 m. In 5200 m $E_+ > E_-$. E-Werte von derselben Größenordnung wie bei den Ballonfahrten in 3—4 km Höhe. Brauchbarkeit der Methode damit erwiesen.

4. Allgemeine Folgerungen.

Soweit aus den Ergebnissen dieser 6 Luftfahrten allgemeinere Folgerungen gezogen werden können, läßt sich folgendes sagen:

a) Ionisation. Der Ionengehalt für beide Vorzeichen nimmt nach seinem allgemeinen vertikalen Verlauf vom Boden bis 5,3 km Höhe zu, jedoch keineswegs gleichmäßig. In den untersten, durch Dunst und Wolken getrübten Luftschichten hat der Ionengehalt dieselben oder auch kleinere Werte als am Boden. Nahe oberhalb der Bodendunstschicht und der unteren Wolken in etwa $1^1/_2$ bis 3 km Höhe steigt der Ionengehalt auf ein Mehrfaches des am Boden gemessenen an, um alsdann lang-



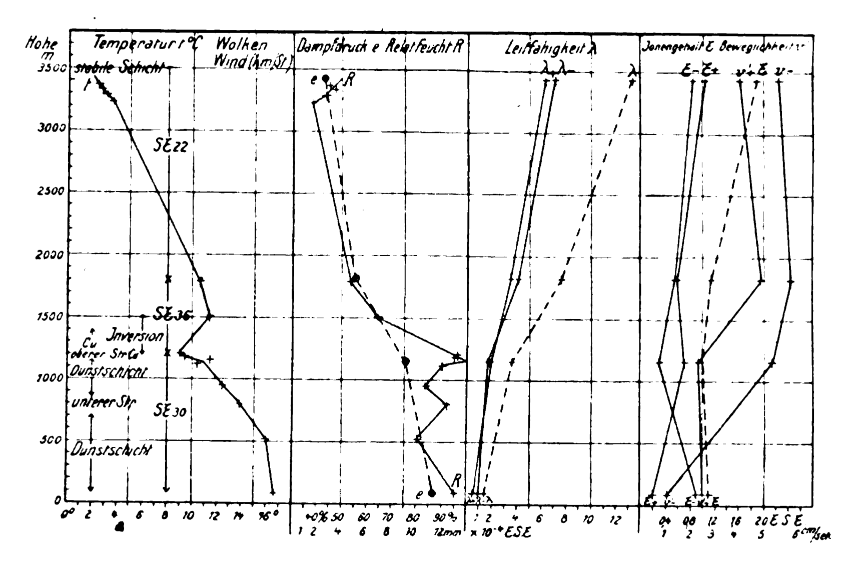


Fig. 5. Zweite Ballonfahrt.

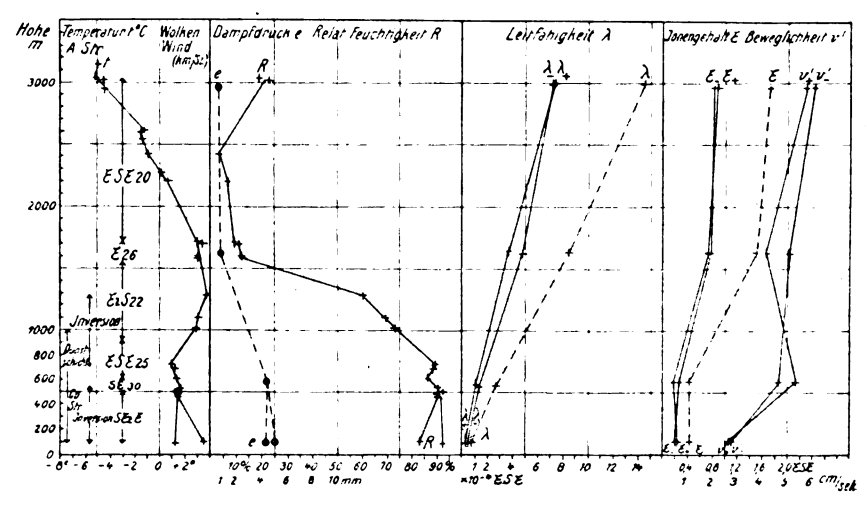


Fig. 6. Vierte Ballonfahrt.

samer mit der Höhe zu wachsen. Dieser Höhenverlauf steht im Einklang mit dem, was man über die vertikale Änderung der Wirkung der atmosphärischen Ionisatoren (radioaktive Substanzen und durchdringende Strahlung) weiß, und mit dem bekannten verstärkenden Einfluß, den Dunst und Wolken auf die Wiedervereinigung der Ionen ausüben.

Die Werte des Ionengehalts für bestimmte Höhen zeigen an verschiedenen Tagen merkliche Unterschiede. Ein einfacher Zusammenhang der Wetterlage hiermit und überhaupt mit dem vertikalen Verlauf des Ionengehalts ist nicht sicher erkennbar.

Ein allgemeiner auftretendes, typisches Überwiegen der Ionen eines Vorzeichens ist insofern festzustellen, als in der Höhe $E_+ > E_-$ die Regel zu sein scheint. In Einzelfällen bestehen verständliche Beziehungen der Unipolarität zu den Eigenschaften der Luftschichten; bei Gewitterlage war in allen Höhen $E_- > E_+$[1]), wobei die in größerer Zahl vorhandenen negativen Ionen stets geringere Beweglichkeit hatten als die positiven in derselben Höhe; jedoch wurde in allen Schichten $\lambda_- > \lambda_+$ gefunden.

Die bei Luftfahrten gemessene Unipolarität kann leicht gefälscht werden durch ein bei ausgeglichenem Luftfahrzeug nur an der Meßstelle herrschendes elektrostatisches Feld oder durch eine Eigenladung des ganzen Fahrzeugs. Als Kontrolle hierfür wird man die dauernde Beobachtung des Spannungsgefälles, das in der Nähe

1) In Übereinstimmung mit Messungen anderer Beobachter am Erdboden, z. B. A. Gockel, Luftelektrische Beobachtungen, Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturforsch. Ges. **54**, Abh. 1, S. 21, 1917.

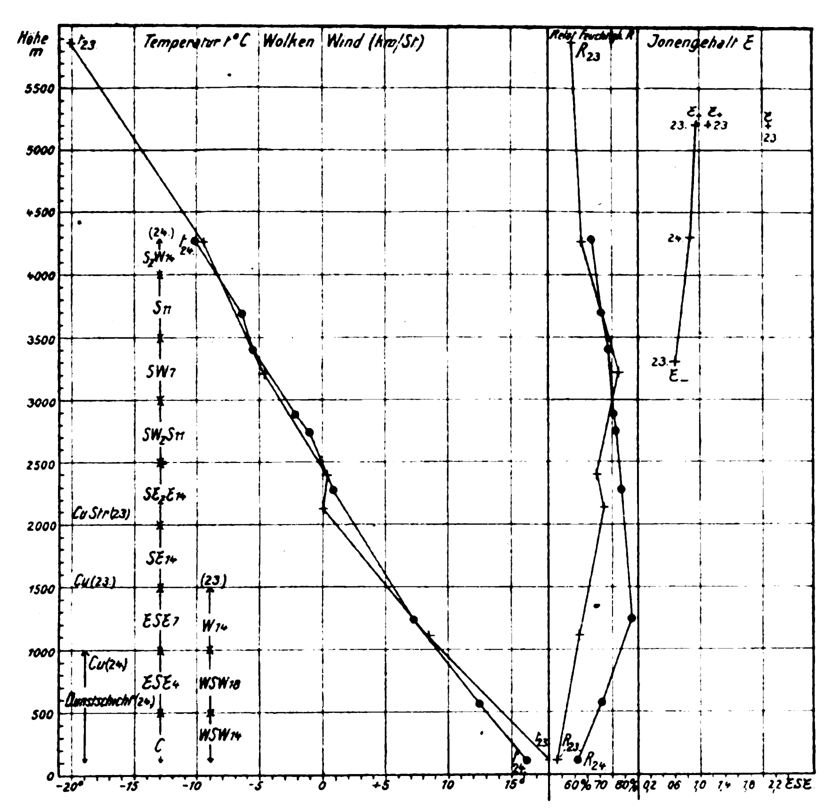


Fig. 7. Flugzeugaufstiege.

des Korbes praktisch verschwinden sollte, benutzen. Bei unsern Ballonfahrten bewirkten wir die Korbausgleichung in derselben Weise wie bei den früheren Halleschen luftelektrischen Fahrten mit Messung des Potentialgefälles[1]) und unterstützten die Wirkung des Tropfausgleichers noch durch ein kräftiges Radium F-Präparat an derselben Stelle des Korbes. Nach den Untersuchungen von Hrn. W. Müller[2]), der im künstlichen Felde und bei unserer dritten Ballonfahrt die Feldverteilung um einen derartig ausgeglichenen Ballon gemessen hat, ist anzunehmen, daß am Korbrande, wo die Apparate für Leitfähigkeit und Ionengehalt standen, das Feld durch Ausgleichung hinreichend klein gehalten wurde. Da die vollkommene Ausgleichung aber nicht dauernd kontrolliert wurde und daher in einzelnen Fällen vielleicht doch nicht ganz gesichert ist, so wird der quantitative Wert dieser Unipolaritätsbestimmungen nicht zu hoch einzuschätzen sein. Der Gesamtionengehalt $(E_+ + E_-)$ und die Gesamtleitfähigkeit $(\lambda_+ + \lambda_-)$ werden durch nicht zu große Fehler der Ausgleichung relativ weit weniger gefälscht als die polaren Einzelwerte, deren Unterschied, wenn er nicht gerade sehr klein ist, immerhin wenigstens qualitativ dem Vorzeichen nach richtig festgestellt sein dürfte.

Die Beobachtungen der ersten Ballonfahrt oberhalb der Bodendunstschicht in 3200 bis 4100 m Höhe bei Sonnenaufgang bis 2 Stunden danach zeigen, auch verglichen mit den Ergebnissen der anderen Aufstiege, daß ein Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation in diesen Höhen nicht anzunehmen ist; der Aufstieg wurde zur Untersuchung dieses Einflusses als Nachtfahrt unternommen. Die für eine direkte Ionisierung der Luft in Frage kommenden kurzen Wellenlängen sind in dem in die Troposphäre eindringenden Sonnenultraviolett nicht merklich vorhanden[1]); das ultraviolette Sonnenspektrum bricht nach meinen Beobachtungen in 9 km Höhe wie am Boden nahezu bei der gleichen, viel größeren Wellenlänge (290 $\mu\mu$) schon ab. Eine etwaige lichtelektrische Wirkung der Sonnenstrahlung auf luftfremde Bestandteile der Atmosphäre (Dunstteilchen, Wolkenelemente) ist jedenfalls in dieser reinen Höhenluft nicht von merklicher Größe; und auch für die unteren Luftschichten ist nicht bekannt, daß der Hallwachs-Effekt

1) E. Everling, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **16**, 240, 1914.
2) W. Müller, l. c.

1) A. Wigand, Verhandl. d. D. Physik. Ges. **15**, 1090, 1913; diese Zeitschr. **14**, 1144, 1913.

für die Ionisierung eine wesentliche Rolle spielte. Daß eine etwa bei Tage durch Sonnenstrahlung eingetretene Ionisation noch bei Nacht andauern sollte, ist ausgeschlossen, da sie durch Wiedervereinigung der Ionen bereits in einigen Minuten praktisch vollständig verschwunden sein würde.

Diese Bemerkung erscheint mir nicht überflüssig, da man die mehrfach am Erdboden beobachtete Erhöhung der Leitfähigkeit und des Ionengehalts bei absteigender Luftbewegung, unter Nichtbeachtung der schnellen Wiedervereinigung der Ionen, irrtümlich durch „Ionenführung absteigender Luftströme" gedeutet hat. Der beobachtete Effekt wird vielmehr am einfachsten wohl darin seine Erklärung finden, daß die Ionen der abwärts geführten, reineren Luft höherer Schichten einen kleineren Wiedervereinigungskoeffizienten und einen größeren Wert der auf Atmosphärendruck reduzierten Beweglichkeit besitzen. Über die außerdem als Ursache des Effektes denkbare Herabführung eines in der Luft enthaltenen Ionisators kann man bis jetzt nichts Bestimmtes aussagen.

b) Beweglichkeit. Um die in verschiedenen Höhen gefundenen Beweglichkeiten unter Ausschaltung des Luftdruckeinflusses miteinander vergleichen und ihre Beeinflussung durch besondere Faktoren studieren zu können, berechnet man zweckmäßig die auf Atmosphärendruck reduzierte Beweglichkeit v'; nach bekannten Laboratoriumsversuchen (besonders von Langevin) sollten Luftdruck und Beweglichkeit für die bei unseren Fahrten in Betracht kommenden Drucke einander umgekehrt proportional sein.

Wir finden, daß die reduzierte Beweglichkeit v' für beide Vorzeichen vom Boden an in den unteren Schichten mit der Höhe etwa auf das Doppelte zunimmt, sich aber dann in etwa 2—4 km Höhe nur noch wenig ändert. Für die gleiche Höhe ist meist $v_- > v_+$, außer bei Gewitterlage, wo durchweg $v_+ > v_-$ bei überwiegendem E_- gefunden wurde. Die Sicherheit der quantitativen Beobachtung dieser polaren Verschiedenheiten ist bei Luftfahrten nach dem über die Messung der Unipolarität Gesagten ohne laufende Kontrolle der Ausgleichung des Luftfahrzeugs nicht groß.

Der schon länger bekannte Einfluß der Feuchtigkeit auf die Beweglichkeit zeigt sich bei unseren Ballonfahrten insofern, als die reduzierte Beweglichkeit v' im allgemeinen mit Abnahme des herrschenden Dampfdrucks, solange dieser nicht zu kleine Werte annimmt, wächst. Dies ist jedenfalls eine der Ursachen für den gefundenen vertikalen Verlauf von v', da der Dampfdruck in der Regel mit zunehmender Höhe abnimmt.

Erheblicher ist gewiß der ebenfalls schon bekannte Einfluß des in den bodennahen Schichten lagernden Dunstes, dessen schneller Abnahme mit zunehmender Höhe wohl hauptsächlich die starke, bei unseren Ballonfahrten gefundene Zunahme der reduzierten Beweglichkeit v' beim Durchsteigen der unteren Schichten zuzuschreiben ist. Auch die Zahl der Kondensationskerne nimmt vom Boden aus entsprechend schnell mit zunehmender Höhe ab, was bei der ersten Ballonfahrt auch gemessen wurde.

Die nach Laboratoriumsversuchen bestehende geringe Abnahme der Beweglichkeit mit der Temperatur ist bei den Ballonfahrten nicht mit Sicherheit erkennbar, da dieser Effekt von der Wirkung der Feuchtigkeit und des Dunstes überlagert wird.

Die reduzierten Beweglichkeitswerte der bodenfernen Schichten sind auffallend groß im Vergleich mit den bodennahen Werten, was ich noch näher untersuchen will. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, daß hierin noch Fehler der Meßmethodik stecken, die den quantitativen Wert des Befundes herabsetzen, insofern die zugleich vorkommenden Arten von Ionen größerer und kleinerer Beweglichkeit in den verschiedenen Apparaten nicht übereinstimmend gemessen werden. Die von uns beobachtete Zunahme der reduzierten Beweglichkeit mit der Höhe ist aber wohl jedenfalls qualitativ reell und schon von Gerdien gefunden worden. Es kommt dadurch zum Ausdruck, daß die gewöhnlichen atmosphärischen Ionen, auch abgesehen von den sogenannten „schweren", in den bodennahen Schichten größer und schwerer beweglich sind als in der Höhe oberhalb des Dunstes und der unteren Wolken. Diese Abnahme der Ionengröße mit zunehmender Höhe ist, abgesehen von dunstiger Gewitterlage, durchweg für die negativen Ionen beträchtlicher als für die positiven. Ähnlich hat man auch im Laboratorium mit weiterer Druckerniedrigung als bei unseren Ballonversuchen ein Anwachsen der auf Atmosphärendruck reduzierten Beweglichkeit und damit eine Abnahme der Ionengröße für die negativen und bei noch tieferen Drucken auch für die positiven Ionen festgestellt (Langevin, Kovarik, Lattey, Todd).

Es ist wohl denkbar, daß die gewöhnlichen („kleinen") Luftionen in der reineren Luft höherer Schichten bei dem geringeren Drucke in ihrer Gesamtheit oder auch nur zu einem beträchtlichen Teile ihrer Gesamtzahl kleiner sind und eine merklich größere reduzierte Beweglichkeit haben, als in der stets getrübten Luft am Boden und auch in gereinigter Luft bei Laboratoriumsversuchen mit Röntgen- oder Radiumstrahlen als Ionisatoren; denn bei diesen letzteren

Versuchen können durch die Ionisatoren selbst chemische Umsetzungen bewirkt und so Verunreinigungen eingeführt werden, die sich an die Ionen anlagern und ihre Beweglichkeit verkleinern würden. Ich halte es auch nicht für ausgeschlossen, daß erhöhte Werte der Ionenbeweglichkeit bei Ballonversuchen durch das Auftreten mehrfach geladener Ionen verursacht sein können.

Daß ferner die von uns am Boden gemessenen Beweglichkeiten in der Regel etwas größer sind als die sonst nach anderen Methoden in der Atmosphäre und im Laboratorium gefundenen, erklärt sich einfach dadurch, daß man mit dem Gerdienschen Apparat die Leitfähigkeit zu groß bekommt, weil die Kapazität des Kondensators in Wirklichkeit kleiner ist, als sie bei der benutzten einfachen Formel angenommen wird. Da die deshalb nötige Korrektion, die nach Swann[1]) schätzungsweise 20 Proz. und mehr betragen soll, noch nicht genau bekannt ist, wurde sie vorläufig unberücksichtigt gelassen.

Auch die Kurzsche Korrektion wegen der Erhöhung der Zerstreuungswerte durch radioaktiven Beschlag im Kondensator ist vorläufig nicht angebracht worden, da ihre Größe für die verschiedenen Höhen über dem Boden noch unbekannt ist. Während dieser Fehler oberhalb der Bodendunstschicht in 2 km Höhe jedenfalls schon sehr gering wird, kann er am Boden den wirklichen Wert der Leitfähigkeit und des Ionengehalts und damit auch der Beweglichkeit um mehrere Prozente zu groß erscheinen lassen.

c) Leitfähigkeit. Der vertikale Verlauf der Leitfähigkeit zeigt die bereits von andern Beobachtern gefundene und von mir bis 9 km Höhe[2]) festgestellte Zunahme von λ mit der Höhe, die nicht nur auf Rechnung der durch Luftdruckabnahme bewirkten Zunahme der Ionenbeweglichkeit kommt, sondern außerdem in einer Zunahme der Ionisation sowohl wie der auf Atmosphärendruck reduzierten Beweglichkeit begründet ist.

5. Zusammenfassung.

1. Bei 4 Freiballonfahrten wurden Messungen des Ionengehalts und der Ionenbeweglichkeit bis 4,1 km Höhe ausgeführt, mit besonderer Berücksichtigung der meteorologischen Beschaffenheit der Luftschichten und kurzer Versuchsdauer.

2. Der Ebertsche Ionenzähler wurde den Versuchsbedingungen im Flugzeug angepaßt und diese Methode bei 2 Flügen bis 5,2 km Höhe erprobt.

3. Für den allgemeinen vertikalen Verlauf des Ionengehalts ergab sich in den unteren Schichten mit Dunst und Wolken Konstanz oder Abnahme nach oben, darüber zunächst schnelle Zunahme auf ein Mehrfaches, sodann langsameres Anwachsen des Ionengehalts. Diese vertikale Änderung des Ionengehalts wird erklärt durch den vertikalen Verlauf der Wirkung der normalen atmosphärischen Ionisatoren und durch den Einfluß von Dunst und Wolken auf die Wiedervereinigung der Ionen. In größerer Höhe überwog in der Regel der Gehalt an positiven Ionen (E_+).

4. Die auf Atmosphärendruck reduzierte Ionenbeweglichkeit nahm mit der Höhe in den unteren Schichten etwa auf das Doppelte zu, um sich darüber nur noch wenig zu ändern. Dies Verhalten wird durch den Einfluß der Feuchtigkeit und des Dunstes gedeutet. In der Regel war für gleiche Höhe die Beweglichkeit $v_- > v_+$.

5. Bei Gewitterlage wurde bis 4,1 km Höhe durchweg $E_- > E_+$ und $v_+ > v_-$ gefunden.

6. Eine Beeinflussung der Ionisation durch die Sonnenstrahlung ist nach Messungen in 3,2 bis 4,1 km Höhe bei Sonnenaufgang bis zwei Stunden danach nicht anzunehmen.

Zu diesen Untersuchungen standen aus der Aerophysikalischen Stiftung (Halle) und aus der Pareystiftung (Halle) Mittel zur Verfügung.

Halle a. S., Physikalisches Institut der Universität, im September 1920.

(Eingegangen 26. September 1920.)

1) W. F. G. Swann, Terr. Magn. and Atm. Elektr. **19**, 85, 1914.

2) A. Wigand, Verhandl. der D. Phys. Ges. **16**, 232, 1914.

Zu Schottkys Gleichgewichtssätzen für die elektromagnetisch aufgebaute Materie.

Von M. v. Laue.

Schottkys[1]) Beweis für seine nicht unwichtigen Gleichgewichtssätze beruht auf zwei allgemeinen und strenggültigen Sätzen: Erstens, daß in einem vollständigen, stationären, im Bezugssystem K ruhenden System das Volumenintegral für jede Komponente des Tensors $\mathfrak{p}$ der absoluten Spannungen (Impulsströmungen) im zeitlichen Mittel verschwindet; zweitens, daß die Diagonalsumme $\sum_1^3 \mathfrak{p}_{ii}$ des Maxwellschen Spannungstensors gleich der Energiedichte W ist oder, was dasselbe sagt, die Diagonalsumme des elektromagnetischen Welttensors $\sum_1^4 T_{ii}$ verschwin-

1) W. Schottky, diese Zeitschr. **21**, 232, 1920.



det. Letzterer Satz wird nicht auf die ganzen elektromagnetischen Spannungen und die ganze Energie angewandt, sondern auf den Anteil, welche die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Ladungsträgern daran hat. Man überzeugt sich leicht, daß er auch dafür gilt.

Daneben aber steht noch eine Überlegung für die Impulsströmung, die von der Bewegung der Ladungsträger herrührt, und teils in deren elektromagnetischen Eigenfeldern, teils in den mechanischen Teilen ihren Sitz hat. Schottky setzt:

$$p_{ik} = \mathfrak{g}_i \mathfrak{q}_k; \qquad (1)$$

berechnet er dann die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ einfach nach der klassischen Dynamik aus der Massendichte μ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$:

$$\mathfrak{g} = \mu \mathfrak{q},$$

so folgt:

$$\Sigma p_{ii} = \mu q^2. \qquad (2)$$

Dies ist die doppelte Dichte der kinetischen Energie, nach Newton berechnet. Daraus ergibt sich alles Weitere.

Hierbei sind die relativistischen Korrektionen an der Newtonschen Dynamik, welche bei der Elektronenbewegung im Atom bekanntlich einigermaßen in Betracht kommen, vernachlässigt. Ein schwereres Bedenken jedoch erhebt sich gegen Gl. (1): sie lautet nämlich eigentlich, auch in der Newtonschen Dynamik[1])

$$p_{ik} = t_{ik} + \mathfrak{g}_i \mathfrak{q}_k,$$

wobei die t_{ik} die relativen oder (im Falle der Mechanik) elastischen Spannungen bedeuten. Diese muß man immer in Betracht ziehen, wenn man in der Maxwellschen Elektrodynamik mit Ladungsträgern rechnet; denn die ponderomotorischen Kräfte dieser Theorie können für sich allein das Dasein einer Ladung nicht erklären[2]). Hier ist es um so notwendiger, sie zu beachten, weil auch die elektromagnetischen Spannungen, soweit sie nicht auf der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Ladungsträgern beruhen, sondern dem Eigenfelde eines einzelnen angehören, bisher nicht in Rechnung gesetzt sind. Man kann auch nicht von vornherein sehen, ob man die t_{ik} vernachlässigen darf. Denn wenngleich sie auf die kleinen Räume beschränkt sind, welche die Ladungsträger und ihre unmittelbare Umgebung einnehmen, so werden sie doch um so größer, je kleiner diese Räume sind, und zwar so stark, daß ihr Raumintegral bei Abnahme dieser Raumteile wächst.

1) Vgl. z. B. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation, Gl. (292). Braunschweig 1919.

2) Keine Elektrodynamik, in welcher die Diagonalsumme des Welttensors Null ist, kann das Bestehen von Ladungen erklären. Mies Theorie, welche dies leistet, gibt jener Summe einen anderen Wert.

Obwohl man Gl. (1) in ihrer Anwendung auf ein ganzes Teilchen nachträglich rechtfertigen kann, möchten wir Schottkys Gedankengang in diesem Punkt doch ersetzen durch folgende einfache und strenge Überlegung: Zum Welttensor T fassen wir zusammen alle Energie eines Teilchens, sofern sie im Sinne der relativistischen Dynamik als mechanische zu bezeichnen ist, soweit sie also im Ruhsystem K^0 des Teilchens keine Strömung zeigt. Ein Teil von ihr wird elektromagnetischer Natur sein. Ebenso sind die mechanischen und die elektromagnetischen Spannungen, soweit sie dem Eigenfeld angehören, in T ausgedrückt. Die Diagonalsumme $\sum_1^4 T_{ii}$, welche durchaus von Null verschieden sein wird, ist eine Invariante der Lorentztransformation, hat also in K, dem Ruhsystem unseres stationären Systems den gleichen Wert, wie in K^0. Gemäß der physikalischen Bedeutung der T_{ik} heißt dies:

$$\sum_1^3 p_{ii} - W = \sum_1^3 p^0_{ii} - W^0. \qquad (3)$$

Jetzt integrieren wir diese Gleichung, trotzdem in ihr nur die Energie usw. eines Teilchens auftritt, doch über das Volumen des ganzen Systems oder auch sogleich über den ganzen dreidimensionalen Raum, da das Eigenfeld sich höchstens bis zu den Systemgrenzen erstreckt. Rechts ersetzen wir dabei δV durch

$$\delta V^0 \sqrt{1 - (q/c)^2};$$

und finden, da unter der Voraussetzung, daß die Teilchen in ihrem inneren Zustande durch die Einwirkung der anderen nicht erheblich verändert sind (daß also ihre Bewegung quasistationär vor sich geht) und daß

$$\int \sum_1^3 p^0_{ii} \, \delta V^0 = 0$$

ist, wenn wir mit E die Energie des Teilchens bezeichnen,

$$\int \sum_1^3 p_{ii} \, \delta V = E - E^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}.$$

Da andererseits[1])

$$E = E_0 : \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$$

ist, können wir auch schreiben:

$$\int \sum_1^3 p_{ii} \, \delta V = E \frac{q^2}{c^2} = \frac{E^0 \frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

1) M. v. Laue, l. c., Gleichung (321).

Jetzt ist noch die Summation über alle materiellen Teilchen und die zeitliche Mittelung vorzunehmen. Dann folgt, wie bei Schottky, indem wir mit E^* die Energie der Wechselwirkung bezeichnen:

$$\Sigma E^0 \overline{\left(\frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)} + \overline{E^*} = 0. \quad (4)$$

Jedes Glied der Summe bezieht sich auf ein Teilchen. E^0 ist für jedes Teilchen zeitlich unveränderlich, so daß die Mittelung nur an dem dahinter stehenden Bruch vorzunehmen ist.

Andererseits erfordert der Energiesatz:

$$\Sigma \overline{E} + \overline{E^*} = \Sigma E^0 \overline{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^{-1/2}} + \overline{E^*} = U. \quad (5)$$

Subtrahieren wir nun Gl. (4), so folgt:

$$\Sigma E^0 \overline{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}} = U. \quad (6)$$

Aus dieser streng gültigen gewinnt man Schottkys angenäherte Gleichung für die kinetische Energie

$$\overline{L} = -(U-U^0) \qquad (U^0 = \Sigma E^0),$$

indem man die Wurzel nach steigenden Potenzen von $(q/c)^2$ entwickelt und $(q/c)^4$ und noch höhere Potenzen fortläßt. Dann berechnet man die kinetische Energie mit einem durch $(q/c)^2$ gemessenen Fehler. Dagegen gibt es keine streng-gültige Gleichung, welche der Schottkyschen Formel

$$E = 2(U-U^0)$$

entspräche, man kann aus (4) und (5) nicht die beiden, in Strenge ungleichen Summen eliminieren. Dies gelingt nur, sofern man die erwähnte Reihenentwicklung und Vernachlässigung vornimmt.

Dieser abgeänderte Gedankengang umgeht also das Bedenken wegen der vernachlässigten Spannungen, führt zu der strenggültigen Gl. (6) und zeigt, daß Schottkys Gleichgewichtssätze gelten, soweit man die Bewegung der Teilchen als quasistationär betrachten darf, und sofern man die Glieder mit $(q/c)^4$ neben denen mit $(q/c)^2$ fortläßt. Dies sind die einzigen Einschränkungen.

Berlin, November 1920.

(Eingegangen 15. November 1920.)

Über das Abzweigungsverhältnis der Actiniumfamilie von der Uran-Radiumfamilie.

Von Adolf Smekal.

Nachdem es gelungen war, die Konstanz des Verhältnisses von Actinium zu Uran in Uranerzen verschiedenster Herkunft zu erweisen [1]), konnte behauptet werden, daß die zuerst von Boltwood [2]) aufgestellte Hypothese eines genetischen Zusammenhanges der Actinium- mit der Uran-Radiumfamilie eine gesicherte Stütze erhalten habe. Die weitere Feststellung, daß eine derartige Konstanz auch für das Verhältnis der UX- zur UY-Produktion für das Uran stattfindet [3]), welches aus den oben erwähnten Uranerzen gewonnen war, zeigte, daß die Abzweigung der Actiniumfamilie beim UII anzunehmen war und daß der weitere in Frage kommende Zerfall über UY und das von Hahn und Meitner [4]), Soddy und Cranston [5]) entdeckte Protactinium zum Actinium führt:

$$\underset{(238)}{UI} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(234)}{UX_1} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(234)}{UX_2} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(234)}{UII} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} \underset{(230)}{UY} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(230)}{Pa} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(226)}{Ac} \xrightarrow[\beta]{} \\ \xrightarrow{\alpha} \underset{(230)}{Jo} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(226)}{Ra} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(222)}{RaEm} \xrightarrow[\alpha]{} \end{cases}$$

In Übereinstimmung mit diesem Zerfallsschema erhält das Actinium das bereits seinerzeit angenommene Atomgewicht 226, allerdings im Gegensatz zu dem Werte 227, den Fajans [6]) und van den Broek [7]) ausgehend von gewissen Zahlenbeziehungen über mittlere Lebensdauer mit dem Atomgewicht, vermutet hatten. Während ältere Rechnungen ergaben, daß etwa 8 Proz. aller zerfallenden UI-Atome im Wege der Actiniumreihe weiter zerfallen könnten, bestimmten Hahn und Meitner [8]) dieses Verhältnis nunmehr zu 3 Proz. Neuerdings wurde diese Zahl von Kirsch [9]) auf 4,2 Proz. geschätzt und von St. Meyer [10]) zu 4,12 Proz. gefunden.

Der doppelte α-Zerfall des UI und die aus obigem Zerfallsschema resultierende Existenz

1) St. Meyer und V. F. Hess, Mitteil. Ra-Inst. Nr. 122, Wien. Ber. (2a) **128**, 909, 1919.
2) B. B. Boltwood, Sill. Journ. **25**, 269, 1908.
3) G. Kirsch, Mitteil. Ra-Inst. Nr. 127, Wien. Ber. (2a) **129**, 309, 1920.
4) O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr. **19**, 208, 1918.
5) F. Soddy und J. A. Cranston, Proc. Roy. Soc., 7. Febr. 1918.
6) K. Fajans, diese Zeitschr. **16**, 456, 1915.
7) A. van den Broek, Nature **96**, 677, 1916.
8) O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr, **20**, 529, 1919.
9) G. Kirsch, l. c.
10) St. Meyer, Mitteil. Ra-Inst. Nr. 130, Wien. Ber. (2a) **129**, 483, 1920.

von „Isotopen höherer Ordnung", nämlich von Atomen gleicher Kernladung und bis auf die Atomgewichtsdezimalen auch gleichem Atomgewicht, bereiten nun aber dem Verständnis dieser Erscheinungen wesentliche Schwierigkeiten. Da es kürzlich Rutherford[1]) gelungen ist, die Existenz eines dem *He*-Kerne isotopen Kernbestandteiles von der Masse 3, X_3 genannt, nachzuweisen, ist es außerordentlich naheliegend, mit St. Meyer[2]) zu vermuten, daß einer der beiden „α-Zerfälle" des *UII* in Wirklichkeit der Aussendung von X_3-Partikeln entspricht, womit sich für das *Ac* das gesuchte Atomgewicht 227 ergeben und zugleich die Existenz solcher „Isotopen höherer Ordnung" vermeiden lassen würde:

$$\underset{(238)}{UI} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(234)}{UX_1} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(234)}{UX_2} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(234)}{UII} \nearrow^{X_3} \underset{(231)}{UY} \xrightarrow[\beta]{} \underset{(231)}{Pa} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(227)}{Ac} \xrightarrow[\beta]{} .$$

$$\underset{(234)}{UII} \searrow_{\alpha} \underset{(230)}{Jo} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(226)}{Ra} \xrightarrow[\alpha]{} \underset{(222)}{RaEm} \xrightarrow[\alpha]{}$$

Eine zweite Möglichkeit für das Auftreten von X_3-Strahlen ist nach St. Meyer beim Radioactinium gegeben, bei dem merkwürdigerweise zwei verschiedene „α"-Reichweiten gefunden worden sind.

Wie das Atomgewicht des Urans zeigt, ist ein Aufbau des Urankernes aus Heliumkernen allein ausgeschlossen, da dieses sonst durch 4 teilbar sein müßte. Es muß — wenn nicht einzelne Wasserstoffkerne den Überschuß über das Gewicht von 59 α-Teilchen erklären sollen — mindestens 2 X_3-Partikel im Urankern geben. Dann folgt aus dem Atomgewicht das Vorhandensein weiterer 58 α-Teilchen in demselben, sowie jener Anzahl von Elektronen, welche die Kernladung gerade auf 92 positive Elementarquanten zu erniedrigen gestattet. Das *UII* würde dementsprechend 2 X_3- und 57 α-Teilchen besitzen.

Indem wir nun aus dem multiplen Zerfall des *UII* auf eine außerordentliche Instabilität seines Kernes im Augenblick des Zerfalles schließen, können wir mangels einer begründeteren Voraussetzung annehmen, daß es bloß vom Zufall abhängen soll, ob bei der Explosion eines individuellen *UII*-Atoms gerade ein α-Partikel oder ein X_3 zur Ausschleuderung gelangt. Daß es beim Kernaufbau wohl hauptsächlich auf die Ladung der konstituierenden Partikel ankommt, bezüglich welcher α-Partikel und X_3 einander vertreten können, mag hierbei auch eine gewisse Rolle spielen. Dann ist das Verhältnis der Anzahlen der über die Actiniumreihe zerfallenden Atome zu jener sich im Wege der Radiumreihe verwandelnden direkt durch 2 : 57 gegeben. Aus

$$2 : 57 = x : 100 - x$$

folgt für das **Abzweigungsverhältnis der Actiniumfamilie** $x = 3{,}4$ Proz., ein Wert, der gerade in das von den neueren Bestimmungen zugelassene Intervall 3 — 4,2 Proz. hineinfällt. Diese auffallende Übereinstimmung darf wohl zugunsten der Richtigkeit der Vermutung eines X_3-Zerfalles an jener Stelle gebucht werden.

Die nächste, mit dem Atomgewicht des Urans verträgliche Annahme wäre, daß der *UII*-Kern 6 X_3 und 54 α-Teilchen enthält. Diese Annahme ergäbe für das Abzweigungsverhältnis der Actiniumfamilie 10 Proz., also bereits einen viel zu hohen Wert, so daß derart auf das Vorhandensein von bloß zwei X_3-Teilchen ein Kern aller Atome der Uran-Radiumfamilie geschlossen werden kann[1]).

Die obige Annahme über die Zerfallswahrscheinlichkeit der *UII*-Kerne erinnert sehr an die modellmäßige Begründung, die Lindemann[2]) für die Geiger-Nuttallsche Beziehung zwischen Zerfallskonstanten und Reichweiten der α-Strahlen zu geben versucht hat. Dort wird nämlich ganz allgemein angenommen, daß die Teilchen, von deren Lage die Stabilität des Atomkerns abhängt, sich unabhängig voneinander bewegen und daß jedes von ihnen eine für das Instabilwerden kritische Stellung gleich oft in der Sekunde passiert. Obwohl es sich da nur um α-Strahlen handelt, hat Kirsch[3]) gezeigt, — allerdings noch unter Verwendung von *He*- und *H*-Partikeln beim Aufbau der Kerne — daß die Zahl jener Teilchen gleich der Anzahl aller positiven und negativen Kernbestandteile gesetzt werden kann. Hier wird also nur von den positiv geladenen Kernbestandteilen angenommen, daß ihre Bewegungen zufallsartig verteilt sind. —

Will man die Übereinstimmung des unter unseren Annahmen berechneten Abzweigungsverhältnisses der Actiniumreihe mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten Ergebnissen nicht

1) E. Rutherford, Proc. Roy. Soc. (A) **97**, 374, 1920.

2) St. Meyer, Zeitschr. f. phys. Chemie **95**, 407, 1920; S. 433.

1) Daß sich in den *U*-Kernen bloß die Minimalanzahl der nach den Atomgewichten erforderlichen X_3-Kerne vorfindet, ist auch von vornherein zu erwarten, wenn man die geringere Stabilität des X_3-Kernes gegenüber der des α-Teilchens bedenkt. (Näheres über diesen Punkt in einem demnächst in den „Naturwissenschaften" erscheinenden Aufsatz des Verfassers.)

2) F. A. Lindemann, Phil. Mag. **30**, 560, 1915.

3) G. Kirsch, diese Zeitschr. **21**, 452, 1920.

für ganz zufällig erklären, so wird man im Kern des *UY*, *Pa* usw. das Vorhandensein von bloß einem X_3-Teilchen neben den konstituierenden *He*-Kernen anzunehmen haben. Die zweite Vermutung von St. Meyer, daß etwa beim Zerfall des Radioactiniums X_3-Strahlen frei werden könnten, ist damit also ohne weiteres vereinbar. Es ist allerdings nicht möglich, diesen Fall in ähnlicher Weise zahlenmäßig zu prüfen wie beim *UII*, weil beim *RdAc* über einen multiplen Zerfall bisher nichts bekannt geworden ist. Da das *RdAc* als das aus dem Actinium durch β-Zerfall unmittelbar hervorgehende Folgeprodukt das runde Atomgewicht 227 haben müßte, kämen für den Aufbau seines Kernes 56 α-Teilchen und ein X_3 in Betracht. In der gleichen Weise beurteilt wie beim *UII*, ergäbe sich ein der X_3-Umwandlung entsprechendes Abzweigungsverhältnis von 1,76 Proz., also immerhin so klein, daß das neue Folgeprodukt, selbst bei vom *AcX* merklich verschiedener Lebensdauer, auch bei neueren Untersuchungen der Beobachtung entgangen sein könnte. Hält man es für möglich, daß das auf derartige Weise entstehende neue Isotop des *AcX* ähnlich wie das *UY* ein β-Strahler ist, so wäre damit vielleicht eine Erklärung für die bekannte β-Strahlung des *RdAc* gefunden.

Die kleinere von St. Meyer, Hess und Paneth[1]) gefundene α-Reichweite des *RdAc* von 4,2 cm stimmt nach der Geiger-Nuttallschen Beziehung so gut mit der Lebensdauer desselben überein, daß auf Grund obigen, allerdings ganz hypothetischen Abzweigungsverhältnisses unbedingt auf eine Zuordnung derselben zum wirklichen α-Zerfall des *RdAc*, der zum *AcX* führt, geschlossen werden muß. Es ist nun bemerkenswert, wiewohl einer modellmäßigen Interpretation jedenfalls nicht ohne weiteres fähig, daß man die größere, somit dem X_3-Zerfall zuzuordnende Reichweite von 4,61 cm als Reichweite von durch α-Strahlen der Reichweite 4,2 cm gestoßenen X_3-Partikeln berechnen kann. Das Reichweitenverhältnis von stoßendem α-Strahl und von durch freien Zusammenstoß erzeugtem schnellem X_3-Strahl beträgt nämlich 1,1 [2]). Somit haben wir in der Tat $4{,}2 \cdot 1{,}1 = 4 \cdot 62$. Das gleiche würde natürlich noch für X_3-Partikel in Atomkernen gelten, deren Abtrennungsarbeit von kleinerer Größenordnung ist, als die Energie des abtrennenden α-Strahles selbst [1]). Vielleicht kann also auch diese Übereinstimmung nicht bloß als zufällig angesehen werden und die Annahme eines X_3-Zerfalles beim *RdAc* stützen. Um X_3-Strahlen aus Sauerstoff oder Stickstoff, wie bei den Rutherfordschen Experimenten, die hier durch den Stoß der *RdAc*-α-Strahlen von der Reichweite 4,2 cm erzeugt werden müßten, kann es sich bei den weitreichenden Strahlen des *RdAc* keinesfalls handeln. Deren Reichweite müßte jedenfalls größer als 4,61 cm sein, entsprechend dem Energiebetrag, den der X_3-Strahl von der Zerlegung des *N*- bzw. *O*-Kernes nach Rutherford mitbekommt. Man findet diese Reichweite zu 5,85 cm, wenn man den freiwerdenden Energiebetrag als durch den Überschuß über die beim freien Zusammenstoß übertragene Energie gegeben ansieht [2]). Abgesehen davon, daß diese Reichweite überhaupt viel zu groß herauskommt, müßte nach Rutherford das Verhältnis der Strahlen größerer Reichweite zu jenen der kleineren unter der jetzigen Annahme etwa $1 : 10^5$ sein, was vollkommen ausgeschlossen ist. Jedenfalls wäre eine direkte Bestimmung dieses Verhältnisses etwa durch Szintillationszählungen sehr erwünscht, um einerseits das Verhältnis der vermuteten Abzweigung zu bestimmen, ferner um obigen Zusammenhang zwischen den beiden Reichweiten auf seine Realität hin prüfen zu können.

Es mag vielleicht befremden, daß von der Möglichkeit einfacher *H*-Strahl-Emissionen im Vorangehenden nicht die Rede war, obwohl Rutherford doch durch diese fundamentale Frage überhaupt erst auf seine neueren Untersuchungen gekommen ist. In der Tat würde ja die Annahme einer Zusammensetzung des *UII*-Kernes aus 58 *He*- und 2 *H*-Kernen unter ähnlichen Voraussetzungen wie früher fast das gleiche, oben für zutreffend befundene Abzweigungsverhältnis der Actiniumreihe ergeben; indessen würde die geringere Ladung und Masse der *H*-Kerne weder bezüglich der bereits festgestellten Isotopien noch bezüglich der Atomgewichte zu brauchbaren Resultaten führen, so daß die obigen Annahmen diesbezüglich als das einzig mögliche übrig zu bleiben scheinen. Es mag

---

1) St. Meyer, V. F. Hess und F. Paneth, Mitteil. Ra-Inst. Nr. 64. Wien. Ber. (2a) **123**, 1459, 1914.

2) E. Rutherford, Phil. Mag. **37**, 571, 1919, gibt in einer Tabelle, S. 273, das Vierfache dieses Verhältnisses, offenbar durch einen Rechenfehler entstellt, zu 5,05, an Stelle von 4,41 an. Ebenso in seiner neuen Arbeit, l. c. S. 380.

1) Da beim freien Zusammenstoß 96 Proz. der Energie des α-Teilchens auf das X_3 übertragen werden, sieht man, daß man die gewünschte Reichweite nahezu auch erhält (um 6 Proz. größer), wenn man annimmt, daß die X_3-ausschleudernden *RdAc*-Kerne ebensoviel Energie abgeben als die α-entsendenden Kerne.

2) Nimmt man hierfür bloß den Überschuß über die Gesamtenergie des α-Teilchens, so erhält man die nur um weniges kleinere Reichweite 5,73 cm, also noch immer einen viel zu großen Wert.

schließlich noch hervorgehoben werden, daß ein Auftreten radioaktiver *H*-Strahlen an irgendeiner Stelle der Uran-Radium- oder der Actiniumfamilie keineswegs unbedingt mit den gemachten Annahmen in Widerspruch stehen müßte. Die praktisch erfüllte Ganzzahligkeit der Atomgewichte reiner Elemente bezogen auf $o = 16$ spricht in der Tat für die hauptsächliche Teilnahme von α- und X_3-Teilchen am Aufbau der Atomkerne. Diese Ausdrucksweise soll streng genommen natürlich bloß zum Ausdrucke bringen, daß man den genannten Partikeln eine Art selbständige Existenz innerhalb der Kerne zuschreibt. Bei so instabilen Kernen wie *UII* mag dies in der Tat zutreffen, bei anderen kann aber vielleicht der Zusammenhalt der Bausteine eines α-Teilchens im Inneren des Kernes infolge der Kernkohäsionskräfte ein weniger fester sein als beim freien α-Teilchen, so daß unter Umständen ein einzelner *H*-Kern — trotz der sonst sehr beträchtlichen Binnenenergie des freien α-Teilchens —, daraus entfernt werden könnte. Da man beim radioaktiven Zerfall überhaupt mit mannigfachen Umlagerungen der Kernbestandteile rechnen muß, sollte vielleicht auch — in Erweiterung des oben Gesagten — die Möglichkeit offen gelassen werden, daß infolge eines solchen Vorganges beispielsweise vier X_3-Teilchen an Stelle von drei *He*-Kernen eine selbständige Existenz innerhalb des Kernes gewinnen. Ob derartige allgemeine Fälle wirklich auftreten, dürfte sich allerdings erst beurteilen lassen, wenn die Isotopen hinreichend bekannt sein werden, welche die Elemente des periodischen Systems zusammensetzen.

Zusammenfassung.

Es wird das Abzweigungsverhältnis der Actiniumfamilie von der Uran-Radiumfamilie auf Grund einfacher Voraussetzungen, wonach vor allem die eine Zerfallsmöglichkeit des *UII* in der Aussendung eines X_3-Partikels bestehen soll, zu 3,4 Proz. gefunden, während die bisherigen Bestimmungen 3—4,2 Proz. ergeben haben. Ebenso ergibt sich beim Radioactinium ein quantitativer Hinweis für ein mögliches Auftreten von radioaktiven X_3-Strahlen.

Wien, II. Physikal. Institut d. Universität, November 1920.

(Eingegangen 22. November 1920.)

Weiß hoher Ordnung.

Von Th. Des Coudres.

Bei Interferenzen im stetigen Spektrum nach Art der Talbotschen Streifen findet die Höhe der beobachteten Gangunterschiede eine Grenze im Auflösungsvermögen des verwendeten Spektralapparates. Hierauf weisen schon Gehrcke und Reichenheim[1]) hin. Die Erzeugung von optischen Wegunterschieden ist durch das Michelsonsche Interferometer sehr erleichtert worden. Daher liegt es nahe, die feinsten, im Spektrum erreichbaren Interferenzstreifen zur Prüfung der tatsächlichen Leistungsfähigkeit einer gegebenen Versuchsanordnung zu benutzen.

Aber noch eine andere, und zwar von der Zerlegungsvorrichtung unabhängige Grenze für die Enge der Riefelung besteht. Sie beruht auf der Endlichkeit der durchschnittlichen Zeiten, während deren die einzelnen Leuchtteilchen merklich gleichmäßig schwingen. Man kann auch sagen: Für eine zeitlich hinreichend beschränkte Kohärenz der Strahlung wird das Auflösungsvermögen einer Spektralvorrichtung nicht ganz ausgenützt, diese wirkt für solches Licht vielmehr wie ein Apparat von geringerer auflösender Kraft. Würde nur die Ausstrahlungsdämpfung in Betracht kommen, so wäre es auch mit den stärksten heutigen Zerlegungsmitteln (Stufengitter, Lummersche Platte) aussichtslos, die durch die Natur der Strahlung gesetzte Grenzkannelierung erreichen zu wollen. Anders, wenn sich die Molekularbewegungen geltend machen sollten, auf die wir die Verbreiterung der Spektrallinien schieben[2]), oder wenn das von Planck angenommene Spiel des wechselseitigen Energieaustausches zwischen Oszillatoren und freien Elektronen[3]) die ungestörte Schwingungszeit der Leuchtteilchen irgendeiner Lichtquelle genügend herabsetzen würde. Im Sinne unserer Fragestellung darf auch jede Gaslinie als „weiß" gelten, d. h. als ein Ausschnitt aus dem kontinuierlichen Spektrum betrachtet werden. Auf die Möglichkeit bejahenden Ergebnisses hin ist eine Versuchsanordnung im Leipziger Institute im Bau begriffen. Das rechtfertigt vielleicht bei der jetzigen wirtschaftlichen Notlage der deutschen Physik diese vorzeitige Veröffentlichung. Ge-

1) Ann. d. Phys. (4) **23**, 745, 1907.
2) W. C. Mandersloot, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 1, 1916. Nur die Dopplerwirkung bei geradlinigen Lichtträgerbahnen von gleichbleibender Geschwindigkeit beeinflußt die verwirklichbare Höhe der Ordnung des Weiß nicht.
3) Berl. Akad. Ber. 1913, S. 350.



gebenenfalls könnten anderorts Ausgaben nach der gleichen Richtung gespart werden.

Diakonissenhaus Leipzig-Lindenau, November 1920.

(Eingegangen 19. November 1920.)

Eine approximative Berechnung der Erstarrungswärmen der verflüssigten Edelgase.

Von J. Narbutt.

Für die verflüssigten Edelgase sind Messungen der Erstarrungswärmen infolge der Seltenheit der Edelgase und ihrer tiefen Erstarrungstemperaturen nicht leicht auszuführen. Daher ist, soweit ich mich aus der hier am Orte vorhandenen Literatur überzeugen konnte, nur vom Argon die latente Schmelzwärme von Eucken[1]) gemessen worden, dagegen ist die Größe der Schmelzwärmen von Neon, Krypton, Xenon, Niton und Helium noch nicht bekannt. Deshalb sei es mir im folgenden gestattet auf Grund des von Eucken experimentell gefundenen Wertes für Argon und mit Hilfe des periodischen Systems der Elemente von Mendelejeff die Erstarrungswärmen der übrigen genannten verflüssigten Edelgase angenähert zu berechnen.

Dividiert man die latente Schmelzwärme pro Grammatom ($A\varrho$, in Kilogrammkalorien) durch die absolute Schmelztemperatur (Θ, beim Druck einer Atmosphäre) für verschiedene Elemente, so erkennt man, daß diese Quotienten für die Elemente einer Untergruppe des periodischen Systems nur verhältnismäßig geringe Schwankungen aufweisen, wie dies aus der Tabelle I ersichtlich ist.

Tabelle I.

	$A\varrho$ Cal.	Θ^0	$\frac{A\varrho}{\Theta}$
Na	0,626 [2])	371 [2])	0,00169
K	0,572 [2])	337 [2])	0,00170
Rb	0,525 [2])	312 [2])	0,00168
Cs	0,500 [2])	302 [2])	0,00166

	$A\varrho$ Cal.	Θ^0	$\frac{A\varrho}{\Theta}$
Cu	2,74 [3])	1337 [3])	0,0020
Ag	2,28 [3])	1234 [3])	0,0018

	$A\varrho$ Cal.	Θ^0	$\frac{A\varrho}{\Theta}$
Zn	1,8 [3])	692 [3])	0,0026
Cd	1,54 [3])	594 [3])	0,0026
Hg	0,57 [3])	234 [3])	0,0024

	$A\varrho$ Cal.	Θ^0	$\frac{A\varrho}{\Theta}$
Al	2,17 [4])	930 [3])	0,0023
Tl	1,47 [3])	575 [3])	0,0026

	$A\varrho$ Cal.	Θ^0	$\frac{A\varrho}{\Theta}$
Cl	0,814 [3])	170 [3])	0,0048
Br	1,293 [3])	266 [3])	0,0049
J	1,787 [3])	386 [3])	0,0046

Weil nun die Schmelzwärmen nicht selten ungenau bestimmt sind und die Angaben für ein Element zuweilen recht beträchtlich differieren, so darf man annehmen, daß der Quotient $\frac{A\varrho}{\Theta}$ für jede Untergruppe eine konstante Größe ist. Auch findet diese Annahme darin eine Stütze, daß für Gruppen chemisch nahe verwandter organischer Substanzen von analoger Konstitution eine ähnliche Regelmäßigkeit schon bekannt ist[1]) und genannte Gruppen mit den Untergruppen im periodischen System bis zu einem gewissen Grade vergleichbar sind. Je genauer die Schmelzwärmen der Elemente bestimmt worden sind, desto besser bestätigt sich die Regel von der Konstanz der Quotienten.

Obwohl die Mittel aus den Quotienten in beiden Untergruppen einer Hauptgruppe des periodischen Systems differieren können, so wird dies doch um so weniger der Fall sein, je ähnlicher in chemischer Beziehung die Elemente beider Untergruppen sich verhalten. Es ist nun sehr wahrscheinlich, daß die Quotienten für alle Elemente der nullten Hauptgruppe denselben Wert haben,

1) Beibl. z. d. Ann. d. Phys. **40**, 322, 1916.
2) E. Rengade; Chem. Zentralbl. **2**, 573, 1913.
3) Physikalisch-chemische Tabellen von Landolt-Börnstein-Roth, IV. Aufl.
4) G. Rudorf, Das periodische System. Leipzig, L. Voß 1904, S. 144.

1) Vgl. J. Narbutt, Zeitschr. f. Elektrochem. **25**, 53, 1919.



und wir können die Schmelzwärmen der in dieser Gruppe befindlichen Elemente berechnen, wenn der Wert der Konstante und die absoluten Schmelztemperaturen der Elemente bekannt sind.

Nach Eucken (l. c.) beträgt die Schmelzwärme von Argon pro Grammatom 0,268 Cal., und die absolute Schmelztemperatur ist gleich 83,8° [1]), woraus die Konstante den Wert 0,0032 erhält. Jetzt lassen sich die Schmelz- bzw. Erstarrungswärmen von Neon, Krypton, Xenon und Niton angenähert berechnen und für Helium, für welches die Schmelztemperatur unbekannt ist, ein höchster Wert schätzen. In der Tabelle II sind die so gefundenen Werte in Kilogrammkalorien pro Grammatom angeführt.

Tabelle II.

	Θ^0	$A\varrho$ Cal.
He	$< 1,15^0$ [2])	$< 0,004$
Ne	24 [3])	0,08
Ar	84	(0,268)
Kr	104 [4])	0,33
Xe	133 [4])	0,43
Nt	202 [4])	0,65

Hier sei noch besonders darauf hingewiesen, daß nach der Tabelle der Wert der latenten Schmelz- bzw. Erstarrungswärme von Helium exzeptionell niedrig und wohl der niedrigste für irgendeinen augenblicklich auf der Erde bekannten Stoff sein muß.

1) Siehe J. W. Cederberg, Die thermodynam. Berechnung usw. Berlin, R. Friedländer & Sohn 1916, S. 38.

2) Vgl. A. F. Holleman, Lehrb. d. anorgan. Chemie 1919, S. 266.

3) H. Kamerlingh Onnes u. C. A. Crommelin, Beibl. z. d. Ann. d. Phys. **40**, 6, 1916.

4) Physikalisch-chemische Tabellen von Landolt-Börnstein-Roth, IV. Aufl.

Dorpat, im Juni 1920.

(Eingegangen 5. November 1920.)

Versuche über das Fließen von Metalldrähten unter dauernder Belastung.

Von Paul Ritter.

Die folgenden Versuche bringen einige Gesetzmäßigkeiten des zeitlichen Verlaufs des Fließens in weiten Grenzen der Belastung und der Zeit. Nachdem die Versuche zuerst mit drei Sorten Kupfer vorgenommen und zu einem gewissen Abschluß gekommen waren, ergaben weitere Versuche mit anderen Metallen, daß sich Aluminium, Zink und Blei mit Kupfer zu einer Gruppe von Metallen gleichartigen Verhaltens zusammenfassen lassen, während Eisen, Messing, Bronze und Packfong eine Gruppe von anderem Charakter bilden.

I. Kupfergruppe.

Zuerst wurden Zeit und Dehnung bei Drähten im ursprünglichen Zustand unter konstanter Belastung beobachtet, die Ergebnisse graphisch zusammengestellt, dabei aber wegen des starken Abklingens des Fließens nicht das natürliche Zeitmaß, sondern der Briggsche Logarithmus der in Minuten gemessenen Zeit benützt. Auch für die Dehnung erwies es sich bei Zink und Blei besser, statt der Dehnung den Logarithmus derselben einzuführen. Fig. 1 und 2 zeigen die Ergebnisse für Kupfer und Zink. Es geht aus ihnen das für diese Gruppe charakteristische Merkmal hervor, daß die Dehnung, wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, von Null bis zu einer Grenzdehnung, welche den Bruch bedingt, allmählich zunimmt. Auch wo der Bruch in den beobachteten Zeiten noch nicht eingetreten ist, spricht die Regelmäßigkeit der gesamten Beobachtungsergebnisse dafür, daß er im weiteren Verlauf selbst bei sehr kleinen Belastungen noch eintreten wird. Die Grenzdehnung ist in schwachem Maß um so größer, je kleiner die Belastung ist.

Für den Zusammenhang der Größenbelastung p, Dehnung d und Zeit t wurden einige von anderer Seite aufgestellte Formeln herangezogen, doch nicht für die einheitliche Wiedergabe des ganzen Versuchsgebiets für genügend geeignet gefunden[1]). Es wurde daher folgende mehr allgemeine Formel versucht:

$$\varDelta = \pi \cdot \vartheta, \tag{1}$$

wobei $\varDelta$ bloß Funktion von d, π von p und ϑ von $\log t = \tau$ sein soll. Gleichwertig ist die Form:

$$D = P + T, \tag{1a}$$

wobei

$D = \log \operatorname{nat} \varDelta$, $P = \log \operatorname{nat} \pi$ und $T = \log \operatorname{nat} \vartheta$ ist. Durch Differenzieren bei konstantem p er-

1) Bouasse, Sur les courbes de déformation des fils, Ann. de Toulouse **2**, 360 setzt $d = \varDelta \log (Bt + 1)$; Andrade, Über das zähe Fließen in Metallen und verwandte Erscheinungen, diese Zeitschr. **11**, 709, 1910, setzt

$$l = l_0 (1 + \beta t^{1/3}) e^{kt};$$

hierbei wird die Belastung jedoch ständig derart verkleinert, daß die Spannung für die Flächeneinheit des augenblicklichen Querschnitts konstant bleibt. Vgl. auch über die Abhängigkeit der Bruchlast von der Zeit: Le Chatelier, l'influence du temps et de la température sur les propriétés mécaniques et les essais des métaux, Sonderabdr. aus Baumaterialienkunde, Jahrg. 1901 u. 1902, S. 6; Striebeck, Der Warmzerreißversuch von langer Dauer, Mitteilungen auf dem Gebiet des Ing., Heft 12; P. Ludwig, Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit usw., diese Zeitschr. **10**, 411, 1909.

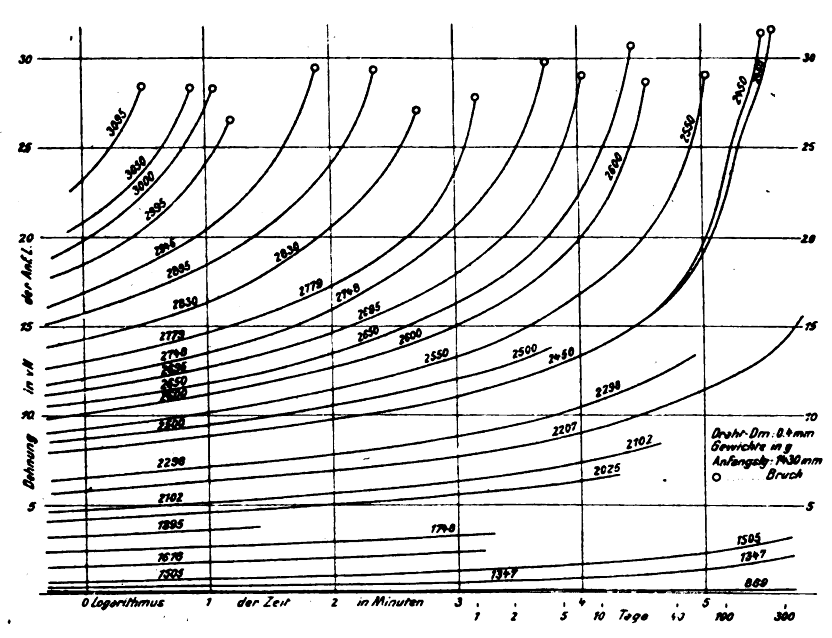


Fig. 1.

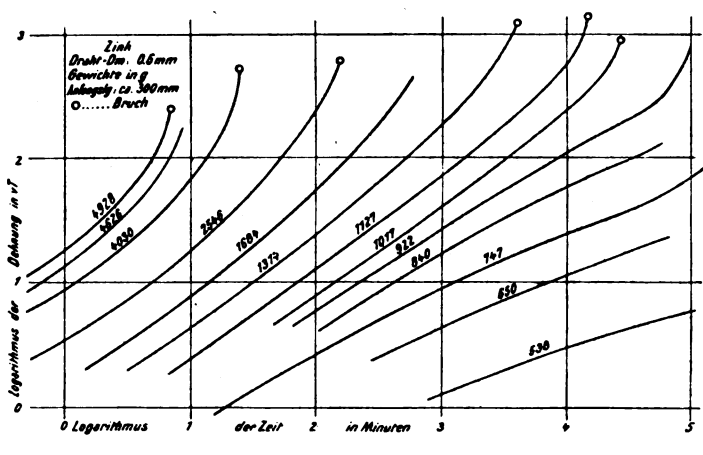


Fig. 2.

gibt sich mit der Bezeichnung $v(\tau, d) = \left|\frac{dd}{d\tau}\right|_p$

$$v(\tau, d) = \left|\frac{dd}{d\tau}\right|_p = \frac{dT}{d\tau} : \frac{dD}{dd} = T' : D' \qquad (2)$$

und ferner für 4 Punkte. von denen je 2 in τ und d übereinstimmen:

$$v(\tau_1 d_1) : v(\tau_1 d_2) = v(\tau_2 d_1) : v(\tau_2 d_2). \qquad (2a).$$

Diese Proportion stellt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichungsform (1) dar und erweist sich (vgl. die Tangenten in Fig. 1 und 2) gut erfüllt (mit Ausnahme der Stücke knapp vor dem Bruch). Aus (2) ergibt sich durch Integration bei konstant gehaltenem $d = d_1$ zwischen den Grenzen τ_0 und einem allgemein gedachten τ, wobei also $\left|\frac{dd}{d\tau}\right|_p$ als Funktion von τ erscheint,

$$\left.\begin{aligned} T(\tau) - T(\tau_0) &= \log\text{nat}\frac{\vartheta(\tau)}{\vartheta(\tau_0)} = \\ &= D'(d_1)\int_{\tau_0}^{\tau}\left|\frac{dd}{d\tau}\right|_p d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Mit dem soweit bekannten ϑ erhält man durch (1) aus jedem einzelnen Dehnungsversuch Δ als Funktion von d bis auf den hierbei konstanten Faktor π und durch die Gesamtheit der Versuche schließlich auch die Abhängigkeit des π von p. Es erwies sich in weiten Grenzen

$$P = \log\text{nat}\,\pi$$

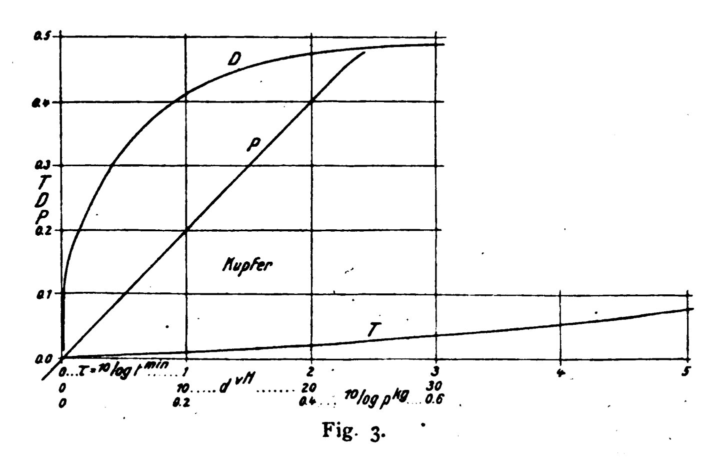


Fig. 3.

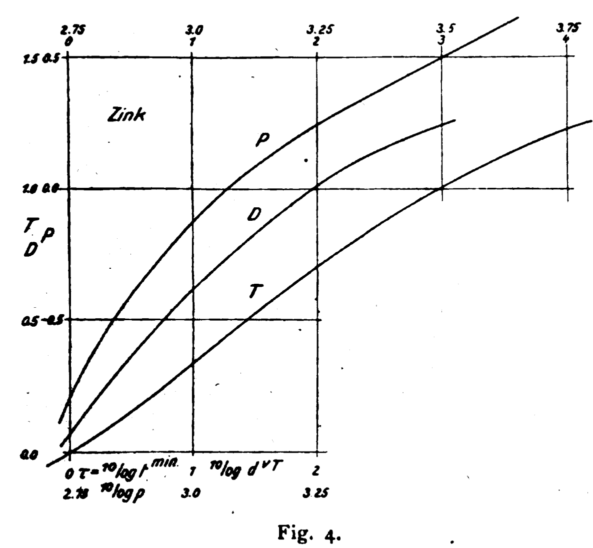


Fig. 4.

als lineare Funktion von p, so daß, bei passender Wahl der noch offenen Konstanten, $\pi = p$ gesetzt werden kann. Die dann noch verbleibende additive Konstante wurde durch die Festsetzung $T = 0$, d. h. $\vartheta = 1$, für $\tau = 0$ entfernt. Man kann auch, von (2) ausgehend, zuerst nicht ϑ, sondern $\varDelta$ durch die Gleichung bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} D(d) - D(d_0) &= \log\text{nat}\frac{\varDelta(d)}{\varDelta(d_0)} = \\ &= T'(\tau_1)\int_{d_0}^{d}\left|\frac{d\tau}{dd}\right|_p dd. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{a})$$

und im ferneren analog wie vorher verfahren. In Fig. 3 und 4 sind die Resultate von D, P und T für Kupfer und Zink wiedergegeben.

Des weiteren wurden ganz ähnliche Versuchsreihen mit Kupferdrähten angestellt, die vorher belastet und gedehnt worden waren. Zu diesem Zwecke wurde ein langer Draht einer Belastung p_0 eine Zeit t_0 lang ausgesetzt und nach dem Erreichen der Dehnung d_0 entlastet. Kurze Stücke dieses Drahtes wurden sodann verschiedenen konstanten Belastungen ausgesetzt. Im großen ganzen ergab sich auch hierbei die Gültigkeit der Formel (1), und zwar, was von besonderem Wert ist, änderten sich π und ϑ gar nicht, während $\varDelta$ eine Änderung in $\overline{\varDelta}(d)$ erfährt. Es kommen aber jetzt noch zwei besondere Umstände in Betracht. Erstens wird die Wirkung des Vordehnens mit der Zeit schwächer, der gefestigte Draht dehnt sich unter derselben Last um so rascher und stärker, je länger die Entlastungsdauer war; das $\overline{\varDelta}(d)$ verschiebt sich also mit dieser nach höherem d zu. Zweitens erwies sich der Dehnungsvorgang bei Belastungen, die unter oder wenig über der Vorbelastung liegen, nicht mehr als stetig, die Dehnung geht oft ruckweise oder mit sprunghaft sich ändernder Geschwindigkeit vor sich, und ferner ist sie auch nicht mehr homogen, die einzelnen Teile des Drahtes erfahren in der gleichen Zeit nicht ihrer Länge proportionale Dehnungen, wobei häufig ein Fortschreiten des Dehnungsprozesses von einem Drahtende zum anderen stattfindet. Für den Fall, als diese zwei besonderen Umstände sich nicht geltend machen, kann man die Funktion $\overline{\varDelta}$ durch Anwendung auf den Fall, daß die neuerliche Belastung gleich der Vorbelastung p_0 ist, bestimmen, weil der Dehnungsverlauf dann mit der Fortsetzung des vorangegangenen übereinstimmen muß. Es müssen mit den Bezeichnungen t und d für die Zeit und die Dehnung gerechnet vom Augenblick des Beginns der neuerlichen Dehnung, wenn die Belastung wieder p_0 ist, folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta(d_0 + d) &= \pi(p_0)\cdot\vartheta(t + t_0), \\ \overline{\varDelta}(d) &= \pi(p_0)\cdot\vartheta(t), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

aus denen $\overline{\varDelta}(d)$ durch Elimination von t bestimmt werden kann. Für die Dehnungsfort-

setzung durch p_1 anstatt p_0 ist die Dehnung nach der Zeit t_1 dann gegeben durch:

$$\bar{\Delta}(d) = \pi(p_1) \cdot \vartheta(t_1). \qquad (5)$$

Dieselbe Dehnung wird durch die Vorbelastung p_0 in einer Zeit t hervorgebracht, welche sich ergibt durch:

$$\pi(p_1) \cdot \vartheta(t_1) = \pi(p_0) \cdot \vartheta(t), \qquad (6)$$

oder, da meist $\pi(p) = p$ gesetzt werden kann:

$$p_1 \cdot \vartheta(t_1) = p_0 \cdot \vartheta(t). \qquad (6a)$$

t ist eine Vergleichszeit, nach welcher bei Fortsetzung durch die Vorbelastung dieselbe Dehnung erreicht wird, wie nach der Zeit t_1 nach der Belastungsänderung von p auf p_1; die Kenntnis der Funktion $\bar{\Delta}$ ist hierzu nicht erforderlich.

Ein verschwindender Einfluß der erwähnten beiden besonderen Umstände und somit die Gültigkeit der Gleichung (6) war zu erwarten für den Fall, als man während des Dehnungsprozesses eine kleine Vermehrung oder Verminderung der Belastung vornimmt, also dabei im übrigen nicht entlastet. Zur Erörterung der hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse sei in Fig. 5 der Dehnungsverlauf für eine Last p_1

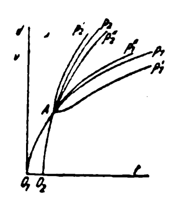


Fig. 5.

durch $O_1 p_1$ und für eine andere $p_2 > p_1$ durch $O_2 p_2$ dargestellt, wobei übereinstimmende Dehnung in A gleichzeitig erreicht sei. Wäre die Fließgeschwindigkeit bloß von der Last und Dehnung, nicht auch von der Art, wie diese erreicht worden ist, abhängig, so müßte, wenn in A von p_1 auf p_2 übergegangen wird, sich an das Stück $O_1 A$ das Stück Ap_2 anschließen und analog beim Übergang von p_2 auf p_1 das Stück Ap_1 an $O_2 A$. Dies ergibt sich aber nach Gleichung (6) nur dann, wenn ϑ von der Form Kt^n ist, d. h. wenn T linear von $\tau = \log t$ abhängt. Ist T von der τ-Achse weg gekrümmt (wie bei Kupfer, Aluminium, Blei), so sind die aus (6) folgenden Fortsetzungen Ap_1' und Ap_2', statt Ap_1 und Ap_2 bei entgegengesetzter Krümmung Ap_1'' und Ap_2''. In dieser Anwendung hat sich die Formel (6) nicht nur qualitativ, sondern auch zahlenmäßig bestätigt.

Das Versuchsgebiet deckt für ϑ etwa das Intervall $\tau = -0{,}6$ bis 5. Durch Extrapolation bis $\tau = -1$ erhält man ϑ schon für wenige Sekunden, und es ist dann ein ganz geringer Schritt zu der Annahme, daß ϑ mit t stetig abnimmt und für $t = 0$ selbst Null wird. Die ganze Dehnung verläuft dann von Anbeginn an nach einem einheitlichen Gesetz bis zur Bruchdehnung, ohne daß diese Auffassung mit den Beobachtungen in Widerspruch stünde. Damit die Anwendung auf beliebig kleine Belastungen möglich ist, braucht man nur anzunehmen, daß ϑ mit wachsendem t zugleich mit diesem unendlich wird. Hinsichtlich p decken die Versuche bei Kupfer das Gebiet abwärts bis $p = 5$ kg/mm², also fast bis zu der Elastizitätsgrenze [nach Tammann[1]) für geglühtes Kupfer 2 kg/mm²], während nach oben zunächst eine Beschränkung nicht erforderlich ist. Die Gültigkeit der Formel $\Delta = \pi \cdot \vartheta$ ist daher für den ganzen Bereich bleibender Dehnungen sehr wahrscheinlich. Dann aber verliert das übliche Spannungs-Dehnungsdiagramm für diese Metalle jede Berechtigung, dessen geringe Abhängigkeit von der Zeit, in welcher man die Belastung bis zum Bruch steigert, überdies nachgewiesen ist[2]). Das letztere bestätigen eigene Versuche und ergaben einen Zusammenhang zwischen d und p, der sich unter Benützung der früher eingeführten Größen folgendermaßen ausdrücken ließ:

$$\Delta(d) = \pi(p) \,.\, \vartheta(t_0) = p\,\vartheta(t_0). \qquad (7)$$

Für den einzelnen Versuch ist t_0 konstant und schwankt im übrigen nur wenig. Dies läßt sich durch folgende Betrachtung erklären. Nimmt bei stetig veränderter Belastung p in der Zeit

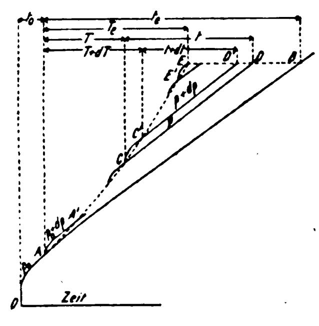


Fig. 6.

dT um dp zu, so nimmt Gleichung (6) die Form an (vgl. Fig. 6):

$$dt = -\left[dT + \frac{dp}{p} \cdot \frac{\vartheta}{\dot{\vartheta}}\right]. \qquad (8)$$

wobei t die erwähnte Vergleichszeit und

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

ist. Bei gegebener Beziehung zwischen p, t

1) Tammann, Metallographie, S. 67.

2) Mitteilungen aus dem mech-techn. Laboratorium der techn. Hochschule in München, 20. Heft, 1891.

und T findet sich nach Lösung der Gleichung (8) unter Berücksichtigung der Grenzen:

$$\text{für } t = 0 \text{ ist } T = T_e \text{ und } p = p_e$$
$$\text{„ } T = 0 \text{ „ } t = t_e \text{ „ } p = p_0$$

die jeweilige Dehnung bei p_e aus der Vergleichszeit t_e, welche jetzt ebenso wie p_e variabel zu denken ist, zu

$$\Delta(d) = p_0 \cdot \vartheta(t_0 + t_e). \tag{9}$$

Unter Heranziehung der Gleichung (7), welche nunmehr $\Delta(d) = p_e \cdot \vartheta(t_0)$ zu schreiben ist, ergibt sich für $\frac{dp_e}{dT}$ ein Ausdruck, der sich mit t_e sehr wenig veränderlich erweist, so daß die Dehnungsgeschwindigkeit annähernd konstant sein muß. Außerdem hängt t_0 nur in sehr schwachem Maße von $\frac{dp_e}{dT}$ ab, ergibt sich also in weiten Grenzen der Dehnungsgeschwindigkeit fast gleich. Hierdurch ist die nahezu unveränderliche Beziehung zwischen p und d erklärt, sie ist aber nicht die Folge einer Aneinanderreihung von Gleichgewichtszuständen zwischen Spannung und Dehnung, sondern ein zufälliges Ergebnis des durch die Zeit geregelten Ablaufs der Dehnung bei ungefähr gleichmäßiger Belastungszunahme.

Erwähnt sei noch eine Knickstelle bei $d = 8vT$ im Verlauf von d und $\left|\frac{dd}{d\tau}\right|_p$ bei Kupfer (vgl. Fig. 7). Entsprechend Gleichung (3a)

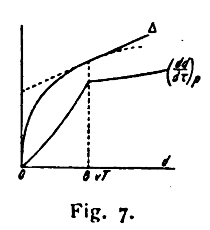


Fig. 7.

hat an dieser Stelle D und Δ einen sprunghaften Wechsel im Krümmungsradius. Auch der bestimmbare Teil von $\overline{\Delta}$ weist auf eine analoge Unstetigkeit hin. Da aber hierbei die Herleitung von $\overline{\Delta}$ aus einem im allgemeinen vollständig stetigen Teil von Δ mittels Gleichung (6) erfolgt, so läßt sich auf eine dem Δ analoge Form und Unstetigkeit bei ϑ für kleine t schließen, wofür auch sonst noch Anhaltspunkte bestehen. Bei Aluminium, Zink und Blei findet sich eine ähnliche Unstetigkeit in umgekehrtem Sinn bei großem d. Der Wechsel im Krümmungsradius, Fig. 2, bei etwa $\log d = 2{,}2$ bis $2{,}3$ verläuft nur nicht genau längs gleichem d, sondern nach einer mit τ schwach ansteigenden Linie, womit zugleich eine Verbesserungsmöglichkeit der Grundform (1) angedeutet ist.

II. Eisengruppe.

Als Beispiel dieser Gruppe ist in Fig. 8 der Dehnungsverlauf bei Eisen analog wie bei Kupfer wiedergegeben. Charakteristisch ist das Erreichen einer Grenzdehnung, anscheinend in endlicher Zeit, so daß jeder Belastung eine Dehnung ohne weiteres zugeordnet werden kann. Offenbar im Zusammenhang steht folgende zweite Eigentümlichkeit. Steigert man, nachdem eine Belastung eine bleibende Dehnung hervorgebracht und längere Zeit eingewirkt hat, die Belastung noch allmählich weiter, so tritt zunächst gar kein, dann aber ein unverhältnismäßig starker Dehnungszuwachs ein, worauf die Dehnung ungefähr so weiter wächst, wie wenn die Belastung von Null an gesteigert worden wäre. Das Spannungs-Dehnungsdiagramm zeigt also nach jeder längeren, gleich bleibenden Belastungseinwirkung jene charakteristische Unstetigkeit, wie sie beim Eisen beim Überschreiten der Streckgrenze auftritt und unter dem Namen „Inflexion" bekannt ist. Diese beiden Haupteigentümlichkeiten ergaben sich auch bei Bronze, Messing und Packfong.

Die Ursachen und Gesetzmäßigkeiten der

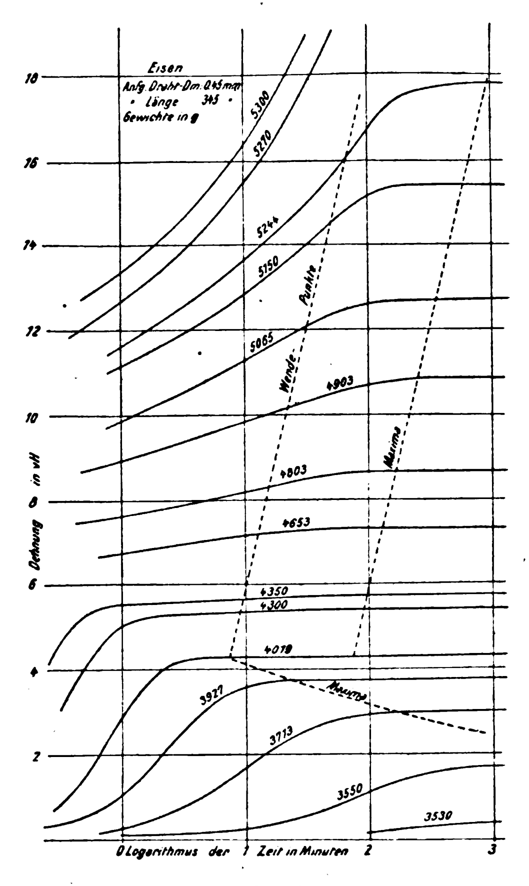


Fig. 8.

Inflexion sind noch vielfach ungeklärt. Deshalb mag folgende Versuchsreihe, die mit Bronzedrähten von 0,5 mm Durchmesser bei etwa 360 mm Anfangslänge angestellt wurde, wiedergegeben werden. Die Belastung von 7805 g wurde in 2 Stufen aufgelegt, d. h. erst wurden als Vorbelastung 7587,5 g und nach einiger Zeit 217,5 g dazu aufgelegt. Variiert wurde die Dauer der Vorbelastung von etwa 0 bis 10000 Minuten. Der Dehnungsverlauf nach der Zusatzbelastung ist in Fig. 9 im log t-d-Diagramm wiedergegeben.

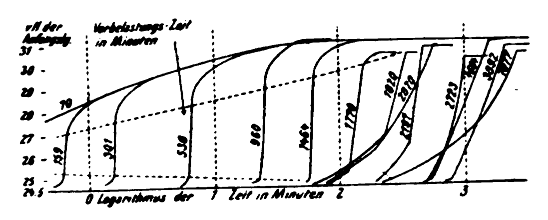


Fig. 9.

Ersichtlich ist daraus eine für diese Gruppe charakteristische Dreiteilung des Dehnungsverlaufs, nämlich zuerst ein Abschnitt fast vollständiger Ruhe, der um so länger währt, je länger die Vorbelastung gedauert hat, dann eine rasche, starke Dehnung und schließlich ein allmähliches Abklingen des Fließens in endlicher Zeit bis zur Ruhe. Nach links zu im Bilde wird der Mittelabschnitt immer kleiner und verliert sich vielleicht ganz, nach rechts wird er größer und nimmt bei etwa $\log t = 2{,}1$ die ganze Dehnung ein. Wie durch Beobachten von Zwischenpunkten außer dem untersten Punkt des Drahtes festgestellt wurde, ist in diesen Fällen die Dehnung homogen, d. h. gleichmäßig über den ganzen Draht verteilt, ausgenommen vielleicht den Mittelabschnitt, was aber belanglos ist. In denjenigen Fällen dagegen, wo der Mittelabschnitt rechts von $\log t = 2{,}1$ zu liegen käme, nimmt, von einem Endpunkt des Drahtes ausgehend, manchmal wenige Stunden, manchmal erst nach vielen Tagen nach dem Belastungszusatz, plötzlich ein Teilchen seine volle Dehnung an, etwas später das Nachbarteilchen usf. Es schreitet also gewissermaßen eine Umwandlungsstelle den Draht entlang, derart, daß hinter ihr der Draht vollständig gedehnt, vor ihr noch ungedehnt ist. In Fig. 10 ist ein Beispiel eines solchen Dehnungsverlaufs im d-t-Diagramm wiedergegeben; hierbei ist der Deutlichkeit halber der Dehnungszuwachs zehnfach übertrieben, was auf die qualitativen Verhältnisse ohne Einfluß ist. Eine derartige Dehnung könnte „progressiv" genannt werden. Der Zeitpunkt des Beginns der Umwandlung läßt keine Gesetzmäßigkeit erkennen und scheint wesentlich von Nebeneinflüssen abzuhängen, das Ende tritt ein, wenn

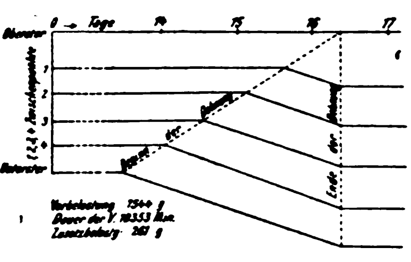


Fig. 10.

das andere Drahtende erreicht ist. Manchmal setzt noch vorher eine entgegengesetzte wandernde Umwandlung ein, und dann wird der Vorgang beendet, wenn beide Umwandlungen einander begegnen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit behält den einmal angenommenen Wert nahezu bei, schwankt aber von Fall zu Fall ziemlich bedeutend. Gleichartige Versuchsreihen unter Beibehaltung der Summe von 7805 g, jedoch mit 43,5, 87, 130,5, 174, 261, 304,5 und 348 g als Zusatzbelastung statt 217,5 g ergaben ganz ähnliches Verhalten, auch die Grenzzeit von $\log t = 2{,}1$ war ungefähr gleich. Verlängert man in Fig. 9 beim homogenen Fließen den angenähert geraden Mittelteil bis zum Schnitt mit der t-Achse, so geben die derart bestimmten Zeiten ein Maß für die Dauer des Ruheabschnitts. In Fig. 11 sind diese Zeiten in Abhängigkeit

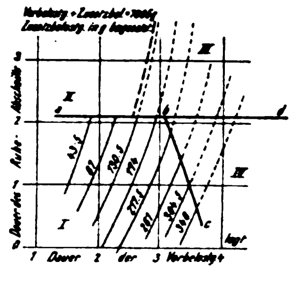


Fig. 11.

von der Dauer der Vorbelastung, beide logarhythmisch gemessen, zusammengestellt, sie bilden das mit I bezeichnete Gebiet des homogenen Fließens. Ihre Begrenzung finden sie nach oben zunächst durch eine Parallele ab zur Achse der Vorbelastungsdauer im Abstand $\log t = 2{,}1$, dann durch eine schräg verlaufende Linie bc. Bei Zusatzbelastungen unterhalb von 130 g blieb das progressive Fließen immer aus, so daß dadurch ein Gebiet II dauernder Spannungserhöhung abgegrenzt wird. Das restliche Gebiet zerfällt durch ab und die Verlängerung bd in ein Gebiet III des geschilderten progressiven Fließens und in ein solches IV, in welchem die Umwandlung sich nicht sprunghaft in einem

Punkt, sondern zeitlich und räumlich auf eine kurze Strecke ausgedehnt, vollzieht.

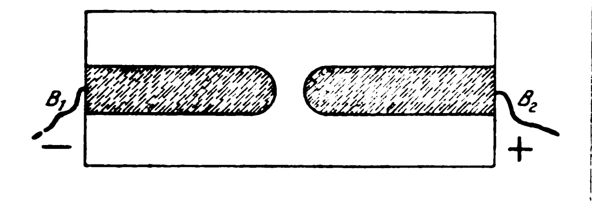
Qualitativ ganz ähnliches Verhalten wurde auch bei den andern untersuchten Metallen Messing, Packfong und Eisen gefunden, zahlenmäßig ergaben sich allerdings große Unterschiede. Bei Eisen wirkte der Umstand erschwerend, daß sich die Umwandlungsstelle allmählich verbreitert und häufig stecken bleibt.

(Eingegangen 12. Oktober 1920.)

Elektrodenlose Gleitfiguren.

Von Max. Toepler.

Man bette zwei Stanniolstreifen B_1 und B_2 (vgl. die Grundrißfigur 1a und Aufriß 1b) in Alkohol zwischen eine photographische Platte G_1 mit Schichtseite nach oben und eine Glas- oder Isolatorplatte G_2. Legt man[1]) an



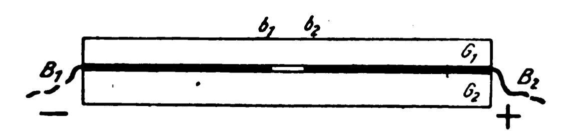


Fig. 1a u. Fig. 1b.

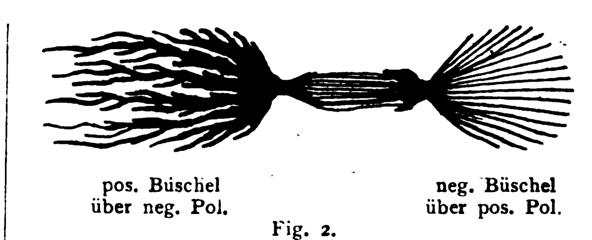
B_1 B_2 plötzlich eine möglichst hohe Spannung, aber doch nicht so hoch, daß durch den Alkohol zwischen B_1 und B_2 ein Überschlag stattfindet — welcher dann G_1 und G_2 zertrümmern würde —, so kann man mit der Spannung so hoch kommen (Zerreißspannung P_2), daß die Luft bei b_1 und b_2 elektrisch zerrissen wird.

Die Spannung sei nur wenig höher als P_2. Ein elektrodenloses Doppelbüschel aus Leuchtfäden entsteht, wie es in Fig. 2 skizziert ist[2]). Irgendein zufällig im hinreichend hochkommenden Felde zwischen b_1 und b_2 vorhandenes Ion oder Elektron leitet wohl die erste Stoßionisation ein[3]).

1) Eine Versuchsanordnung hierzu ist z. B. diese Zeitschr. **21**, 706, 1920 angegeben.

2) Genau genommen besteht dies aus zwei zusammengewachsenen Doppelbüscheln, einem bei b_1, einem bei b_2.

3) Den Beginn der Blitzbildung im Raume hat man sich ähnlich zu denken; vgl. Meteorol. Zeitschr. 1917, S. 234 u. Fig. 2.



pos. Büschel über neg. Pol. — neg. Büschel über pos. Pol.

Fig. 2.

Bei höherer Spannung bilden sich zwei regelrechte, durch einen Funkenkanal bei $b_1 b_2$ verbundene Gleitfiguren aus Ladungskanälen und Leuchtfäden nach beiden Seiten aus, also ein Doppelgleitbüschel, d. h. eigentlich ein „elektrodenloser Funken".

Zur quantitativen Orientierung: auf photographischen Platten von 0,13 cm Dicke 17 °C, 76 cm Hg) zeigte sich:

bei 0,35 cm Abstand $B_1 B_2$ mit 32 Kilovolt ein Doppelgleitbüschel von 6 cm Gesamtlänge,

bei 1,00 cm Abstand $B_1 B_2$ mit 40 Kilovolt kein Büschel,

bei 1,00 cm Abstand $B_1 B_2$ mit 41 Kilovolt ein Doppelbüschel von 4,5 cm Gesamtlänge wie Fig. 2,

bei 1,00 cm Abstand $B_1 B_2$ mit 44 Kilovolt ein Doppelgleitbüschel von 16 cm Gesamtlänge.

Die Zerreißfestigkeit der Luft ohne Metallpole ist also nicht wesentlich höher als an solchen.

Der Mechanismus der Gleitergüsse von $b_1 b_2$ aus ist der gleiche wie sonst vom negativen bzw. positiven Metallpole aus, nur wird der Elektrizitätsbedarf für die Ergüsse jetzt nicht von einer Metallzuleitung aus gedeckt, sondern wechselseitig aus dem anderen Büschel heraus. Gestalt und innere Durchbildung der Gleitbüschel unterscheiden sich in nichts von solchen von einem Metallpole aus. Insbesondere kommt es auch hier zu keiner Wachstumspause, wie sie in einer scharfen Scheidung zwischen Polbüschel (aus Leuchtfäden) und eigentlicher Gleitfigur (Leuchtfäden mit Ladungskanälen) in Erscheinung tritt, wenn $dP \cdot dt$ anfangs hinreichend groß ($> 100 \cdot 10^6$ Kilovolt: sec) ist.

Dresden, den 31. Oktober 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente. V. Die Berechnung der Rydbergschen Konstante.

Von Karl Fehrle.

Das im 1. Teil dieser Abhandlung[1]) gewonnene Zahlenmaterial gestattet weitere Schlüsse zu ziehen, deren wesentliches Ergebnis die Berechnung der Rydbergschen Konstante auf Grund einer neuen Vorstellung von der Entstehung der Serienspektren ist. Hierbei werden die Wörter „Atom" und Molekel im Sinne meiner früheren Arbeiten[2]) gebraucht.

Das schwingende „Atom" steht nicht nur mit der eigenen Molekel, sondern auch mit allen übrigen in Wechselwirkung. Da nun die Annahme, das Verhältnis der Schwingungszahlen der „Atome" zu denen der Molekeln sei dasselbe, als ob sämtliche „Atome" einer Molekel auf derselben Kugel rotierten, zu einem sehr einfachen Gesetz über die Schwingungszahlen der Molekeln der Edelgase geführt hat[3]), so mache ich auch weiterhin die Annahme, das Schwingungsverhältnis eines „Atoms" zu demjenigen des Komplexes von Molekeln, mit dem es gerade in Wechselwirkung steht, sei das Verhältnis seiner Winkelgeschwindigkeit zu derjenigen, welche die „Atome" des Komplexes hätten, wenn sie alle auf einer Kugel vereinigt wären. Diese Winkelgeschwindigkeit ist nach (2)[4])

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{R^3}} \sqrt{\frac{aNe^2}{m}} \qquad [t^{-1}]$$

oder wegen (1)

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt[4]{a r^2}} \sqrt{\frac{4\pi k e^2}{m}} \qquad [t^{-1}], \qquad (10)$$

wo a die Zahl der zu einem Komplex vereinigten Molekeln, r der Radius der Molekel und R derjenige der sämtliche „Atome" des Komplexes vereinigenden Kugelfläche ist. Wenn die ursprüngliche Molekel diese Winkelgeschwindigkeit hätte, so wäre ihr Impulsmoment

$$I = CNr^2\Omega$$

oder wegen (1) und (10)

$$I = \frac{C}{\sqrt[4]{a}} \sqrt{\frac{(4\pi k)^3 e^2}{m}} \cdot \sqrt{r^7} \qquad [l^2 m t^{-1}].$$

Dieser Ausdruck stellt, abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ das Impulsmoment der ursprünglichen Molekel dar. Dieses besteht nach der Voraussetzung aus einer ganzen Zahl von Wirkungsquanten. Sollen die Impulsmomente, welche die Molekeln hätten, wenn ihre Atome zu dem Komplex das ihnen nach (10) zukommende Schwingungsverhältnis besäßen, auch in ganzzahligem Verhältnis zueinander stehen, so muß a die 4. Potenz einer ganzen Zahl sein:

$$a = n^4, \text{ wo } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Mithin wäre die Energie der Molekel

$$U = CNr^2\Omega^2 = \frac{16\pi^2 k^2 e^2 C r^3}{m} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad [l^2 m t^{-2}].$$

n bedeutet die 4. Wurzel aus der Zahl der Molekeln, die zu einem Komplex vereinigt sind. Das „Atom" kann daher mit 1, 16, 81, 256 usw. Molekeln in Wechselwirkung treten. Ändert sich beim Wechseln des Komplexes die Zahl der Molekeln um $a_1 - a_2$, so ist die verausgabte Energie

$$U_1 - U_2 = \frac{16\pi^2 k^2 e^2 C r^3}{m} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad [l^2 m t^{-2}].$$

Sie ist in Wirkungsquanten ausgedrückt $4\pi h\nu$. Damit wird

$$4\pi h\nu = \frac{16\pi^2 k^2 e^2 C r^3}{m} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

oder

$$\nu = \frac{4\pi k^2 e^2 C r^3}{mh} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad [t^{-1}].$$

Mein Gedankengang ist nun folgender: Die frei werdende Energie rührt nicht von der Änderung der Rotationsenergie her, sondern sie ist Spannungsenergie. Sie ist aber gleich der halben Änderung der Rotationsenergie, welche nötig wäre, damit das „Atom" die Winkelgeschwindigkeit annehmen könnte, welche der Änderung des Impulsmomentes entspricht, die zur Erreichung der Resonanz mit dem Komplex, mit dem es in Wechselwirkung steht, notwendig wäre. Denn die Spannung ist die Folge der unvollkommenen Resonanz und sie würde gerade durch diese Änderung der Rotationsgeschwindigkeit aufgehoben werden. Also ist es folgerichtig, wenn man die beiden Änderungen einander gleich setzt. Der erste Summand in der Klammer ergibt die Spannungsenergie in bezug auf den bisherigen Komplex, der zweite in bezug auf den folgenden. Die Lage des Spektrums von Element zu Element, bzw. der Linienabstand für die verschiedenen Elemente hängt von r^3, also vom Radius der Molekel, auf deren Oberfläche die „Atome" sämtlicher Schalen vereinigt sind, in 3. Potenz ab.. Tatsächlich verhalten sich die

1) Diese Zeitschr. **21**, 162, 1920.
2) Diese Zeitschr. **21**, 162 u. 382, 1920.
3) Diese Zeitschr. **21**, 522, 1920.
4) Diese Zeitschr. **21**, 163, 1920.

$$\left(\sqrt{\sum_{1}^{n} r_n^2}\right)^3$$

nahezu wie die Quadrate der Ordnungszahlen. Der Radius des Wasserstoffatoms ist nach dem 1. Teil dieser Arbeit $r = 1{,}727 \cdot 10^{-8}$ cm. Die übrigen Konstanten sind:

$$k = 1{,}7 \cdot 10^{15} \qquad [l^{-2}]$$
$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10} \qquad [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$$
$$C = 0{,}451 \cdot 10^{-27} \qquad [m]$$
$$m = 0{,}902 \cdot 10^{-27} \qquad [m]$$
$$h = 0{,}655 \cdot 10^{-27} \qquad [l^2 m t^{-1}].$$

Damit ergibt sich für Wasserstoff

$$\nu = 3{,}26 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad [t^{-1}]$$

oder auf Schwingungszahl pro Zentimeter umgerechnet

$$\nu' = 1{,}09 \cdot 10^5\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad [l^{-1}].$$

Der Faktor vor der Klammer, welcher mit der Rydbergschen Konstante übereinstimmt, ist experimentell gefunden zu $1{,}09678 \cdot 10^5$.

Ich hebe besonders hervor, daß sämtliche Konstanten aus meiner früheren Arbeit übernommen sind. Daraus ist zu schließen, daß mein Atommodell dynamisch richtig ist, und daß die Serienspektren ihre Entstehung nicht dem Bau der Molekeln, sondern dem der Komplexe, mit denen das „Atom" in Wechselwirkung tritt, zu verdanken haben. Das meiner Überlegung eigentümliche Hilfsmittel, welches ich bereits in meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand angewendet habe, besteht darin, die Spannungsenergie als Änderung der Rotationsenergie darzustellen und mit letzterer so zu rechnen, als ob sie sich bei der Herstellung der Resonanz ändere. In Wirklichkeit ändert sie sich nicht. Ich nehme an, daß sie dem der gesamten Materie eigenen Energievorrat entstammt, gleich als ob die „Atome" der gesamten Materie durch eine unsichtbare Achse verbunden wären. Durch diese Verbindung wird Rotationsenergie aus dem gesamten Energievorrat in Spannungsenergie verwandelt und die Rotationsenergie der einzelnen Molekel trotzdem unverändert erhalten. Wieviel Rotationsenergie in Spannungsenergie verwandelt wird, hängt also gar nicht von dem Rotationsenergieinhalt der einzelnen Molekel für sich betrachtet ab, sondern davon, wieviel Energie bei der Herstellung oder Verbesserung der Resonanz abgegeben werden muß. Nun beruht doch die exakte Form, welche Bohr dem Rutherfordschen Atommodell gegeben hat, auf den Tatsachen, welche die Beobachtung der Energieumsetzung bei der Strahlung geliefert hat. Und diese können nur aussagen, wieviel Energie mit Hilfe des Atoms umgesetzt werden kann und nicht, wieviel ihm absolut zukommt. Hierin liegt der grundsätzliche Unterschied zwischen dieser und meiner Betrachtungsweise. Nicht: Die Spannungsenergie einer Molekel ist die von N Elektronen in bezug auf den N fach positiv geladenen Kern, sondern dies ist das Maximum von Energie, welches aus dem Energievorrat der Materie mit Hilfe dieser Molekel ausgestrahlt werden kann. Grundsätzlich kann jede Molekel jede Anzahl von Energiequanten umsetzen. Es kommt nur darauf an, mit wem sie in Resonanz steht.

Wie man sich jedoch auch zu dieser Annahme stellt, die Übereinstimmung der mit Hilfe so grundverschiedener Vorstellungen — ich weise besonders auf r und k hin — berechneten Konstante mit der Rydbergschen wird man nicht als Zufall erklären wollen. Statt der bisher gültigen Vorstellungen dürften daher die folgenden ebenso berechtigt sein:

Das „Atom" springt nicht von einer äußeren auf eine innere Quantenbahn, sondern es wechselt den Komplex, mit dem es in Resonanz steht. Der Anfang der Spannung ist im Mittelpunkte der Molekel, gleich als ob sämtliche Molekeln der Materie durch eine unsichtbare Achse verbunden wären. Ihr Ende an der Peripherie, wo die von den übrigen Molekeln auf das Atom ausgeübten Kräfte angreifen. Anfang und Ende fallen zusammen mit dem Sitz positiver und negativer Ladung. Nicht der äußere Elektronenring gibt n Elektronen ab oder nimmt solche auf, die Molekel dadurch zum Ion machend, sondern die Spannungsenergie ändert sich proportional n Wirkungsquanten $\times$ Schwingungszahl. Löst sich ein „Atom" aus dem „Atom"verbande, so geht seine Spannung um den größten möglichen Betrag zurück, und so wie man einen Körper fände, dessen Spannung noch weiter vermindert werden könnte, gäbe es auch positiv geladene Elektronen. Bei einer jeden Molekel, für sich betrachtet, kommen 2 Spannungsänderungen in Betracht, diejenige, welche ihre „Atome" in bezug auf das nächste einfache Schwingungsverhältnis (in bezug auf das des nächsten Edelgases) und diejenige, welche sie in bezug auf das Schwingungsverhältnis 1 : 1 erfahren könnten (in bezug auf das des 0ten Elementes). Die erste, bei der soviel Wirkungsquanten sich ausgleichen, als das Impulsmoment der äußersten Kugelschale von dem derjenigen des nächsten Edelgases entfernt ist, bedingt das chemische Verhalten und die Lage der sichtbaren Spektren. Die zweite, bei der sämtliche Wirkungsquanten sich ausgleichen, die Röntgenspektren. Nicht die Röntgenstrahlen wirken

auf die Elektronen um den Kern, sondern die Spannung des einzelnen „Atoms“ in bezug auf das Schwingungsverhältnis 1 : 1 ist von *Na* ab so groß, daß die Schwingungen, die es infolge dieser Spannung bei der Lösung aus dem Verbande ausführt, in Resonanz stehen mit denen der Röntgenstrahlen.

Zusammenfassung.

Die im vorstehenden vertretene neue Auffassung von der Entstehung der Serienspektren läßt sich dahin zusammenfassen:

Die Serienspektren verdanken ihre Entstehung der Spannung, welche durch die unvollkommene Resonanz zwischen den Schwingungen der „Atome“ einer Molekel und denjenigen von Komplexen einer Zahl von n^4 Molekeln verursacht ist, wo n jede ganze Zahl bedeutet. Die Spannungsenergie ist gleich der halben Differenz der Rotationsenergie der Molekel, welche entstehen würde, wenn diese ihre Winkelgeschwindigkeit um den Betrag ändern würde, der zum Eintreten der Resonanz mit dem betrachteten Komplex notwendig wäre, und die Energie der ausgesandten Strahlung gleich der Änderung der Spannungsenergie beim Wechsel des Komplexes. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ist dasselbe, wie wenn sämtliche „Atome“ des Komplexes auf einer einzigen Kugelfläche vereinigt wären. Die unter dieser Voraussetzung mit Hilfe des Atommodells und der unveränderten Konstanten meiner früheren Arbeit abgeleitete Strahlungsformel ist in ihrem für ein bestimmtes Element variablen Teil gleich der Bohrschen. Ihre Konstante, obwohl völlig andere Größen enthaltend und unter grundverschiedenen Voraussetzungen abgeleitet, ist auf 2 Dezimalen genau die Rydbergsche Konstante.

Freiburg i/B., Juli 1920.

(Eingegangen 8. Juli 1920.)

BESPRECHUNGEN.

W. Ludwig, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2 Bände. 1. Band: Das rechtwinklige Zweitafelsystem. 8°. VI, 135 S. m. 58 Fig. Berlin, Julius Springer. 1919. M. 8.— u. Teuerungszuschlag.

In knapper, aber leicht faßlicher Darstellung werden die Prinzipien und Methoden der darstellenden Geometrie in einem Umfang entwickelt, wie er an technischen Hochschulen üblich ist. Die Technik der zeichnerischen Darstellung steht im Vordergrunde des Interesses, während die Begriffe der projektiven Geometrie wenig hervortreten und als Hilfsmittel, nicht als Grundlage benutzt werden. Dem Schüler wird das nicht unlieb sein. Dagegen hätte eine Einführung der unendlich fernen Elemente die Mehrzahl der Sätze einfacher anszusprechen erlaubt. Doch ist das Geschmackssache.

Sehr wünschenswert erscheint es dagegen, den Unterricht in darstellender Geometrie in engeren Kontakt mit anderen Disziplinen der Mathematik zu bringen. Es liegt doch recht nahe, beim sogenannten Zweitafelsystem Punktkoordinaten einzuführen und damit den Anschluß an die analytische Geometrie zu gewinnen. Diese bietet erfahrungsgemäß den jüngeren Semestern die Hauptschwierigkeit durch den Mangel an räumlicher Vorstellung. Wird nun in der darstellenden Geometrie gezeigt, wie sich zahlreiche Aufgaben der analytischen Geometrie zeichnerisch anfassen und wie sich für deren Sätze richtige Figuren zeichnen lassen, so wird das nach beiden Seiten anregend wirken. Die Theorie der Krümmung ebener Kurven pflegt in der Vorlesung über Differentialrechnung behandelt zu werden. Warum setzt man in der darstellenden Geometrie die dort gewonnenen Ergebnisse nicht voraus und zeigt dabei, daß die Differentialrechnung durch den Krümmungskreis ein wertvolles Hilfsmittel für die Zeichentechnik liefert? In den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie wird statt dessen meist ganz unvermittelt der Grenzbegriff ad hoc in unbefriedigender „anschaulicher“ Weise eingeführt. Auch das vorliegende Lehrbuch macht hiervon keine Ausnahme. Sehr schade ist es, daß die Methode des sogenannten bezifferten Grundrisses nur flüchtig erwähnt wird. Sie ist besonders geeignet, Rechnung und Konstruktion miteinander zu verbinden. In der Geodäsie und Geologie ist eine Beherrschung der Methode vonnöten; in der Mathematik führt sie zur Darstellung und Diskussion von Funktionen zweier Variabeler.

Namentlich bei Benutzung des Rechenschiebers läßt diese Methode sehr bequeme Lösungen der meisten Aufgaben zu. Zeichnung und Rechnung können sich dann gegenseitig kontrollieren.

Auch der Proportionalzirkel wäre als nützliches Zeicheninstrument erwähnenswert, etwa bei der Affinität.

Den Abschluß des ersten Bandes bildet die Darstellung der Kugel. Hierbei wäre die Beleuchtung wohl noch zu behandeln. Doch ist das vielleicht dem zweiten Bande vorbehalten.

Im ganzen darf wohl gesagt werden, daß das Buch von Ludwig weder der Darstellung noch dem Inhalt nach etwas bietet, was nicht bereits in anderen Lehrbüchern zu finden ist.

Der Wunsch nach einem Lehrbuch der darstellenden Geometrie, das den systematisch-konstruktiven Standpunkt aufgibt und lebendige Wechselwirkung mit anderen Gebieten der Mathematik zu gewinnen sucht, bleibt noch unerfüllt. v. Sanden.

J. Fischer, Die Arbeit der Muskeln. gr. 8°. III u. 450 S. m. 45 Abb. Berlin-Wilmersdorf, Dr. W. Rothschild. 1919. Geheftet M. 20.—, geb. M. 23.—

Die Voraussetzungen, auf denen der Verfasser seine Lehre vom Menschen als kalorischer Maschine



aufbaut, — Erzeugung des Temperaturmaximums im Herzen, Temperaturminimum, Wirkungsgrad, — sind sämtlich durch Tatsachen widerlegbar. Den Grund zu diesen Irrtümern sieht Ref. in den vom Verfasser angewandten, in der Technik erlaubten, in der Biologie gefährlichen Denkmethoden. Hierfür einige Beispiele: Die Blutmenge der Herzgefäße ist durch Umrechnung eines Lungenstoffwechselversuchs gewonnen; das führt — wie auch in diesem Falle — bei der Verwickeltheit biologischer Vorgänge fast stets zu Fehlern. Der Verfasser, an die Gleichartigkeit von Maschinen gewöhnt, glaubt nicht an individuelle Schwankungen von 100 Proz. (S. 412); bei Giftwirkungen sind sie noch weit größer, die tödliche Karboldosis beträgt z. B. 8—60 g. Er zieht den Schluß: gleiche Struktur — gleiche Funktion (Haare, Nerven). Er macht häufig Zwecksetzungen: weil die Haare im Sommer schneller wachsen, müssen sie auch im Sommer ihre Funktion erfüllen; man denke an den Stoffwechsel mancher Winterschläfer, der innerhalb von 4 Temperaturbereichen mit steigender Temperatur 2 mal steigt, 2 mal aber fällt; oder: weil sehr stark behaarte Tiere in den Tropen leben, müssen die Haare Kühlorgane sein; in den Tropen leben bekanntlich auch die Neger; würde der Verfasser den Schluß daraus ziehen, daß Schwarz die Wärme am wenigsten absorbiert? Ins Gebiet der Zwecksetzungen gehört auch seine Wirkungsgradberechnung

$$\frac{\text{äußere Arbeit}}{\text{Energieverbrauch}},$$

während die Physiologen vom Energieverbrauch in der Arbeit den Ruhewert, d. h. den zur Erhaltung der Körpertemperatur, Herztätigkeit usw. notwendigen Energiebedarf abziehen und den so erhaltenen Wert „Nutzeffekt der Muskelarbeit" nennen. Der Verfasser vergleicht Ruhewert mit Leerlauf, ein Vergleich, der dadurch nicht besser wird, daß er spöttisch den Physiologen für einen Verbrennungsmotor mit Hilfe eines Rechenfehlers einen Wirkungsgrad von 135 Proz. vorrechnet. Der Verf. setzt als Zweck für die Maschine Mensch die Muskelarbeit. Wenn aber nicht einmal für technische Einrichtungen solche auf einen bestimmten Zweck gestützte Berechnungen den wirklichen Verhältnissen entsprechen — z. B. kann die technisch als verlorene Energie anzusehende Wärmeentwicklung der Beleuchtungsmittel unter den heutigen Verhältnissen als nutzbare Energie gelten, — so kann man erst recht solche Zwecksetzungen bei Lebewesen anfechten.

Es wäre ungerecht nach so vielen Aussetzungen, nicht auch die Verdienste des Verf. gebührend hervorzuheben. Erstaunlich ist, wie er sich in das zum großen Teil zusammenhanglose, widerspruchsreiche Tatsachenmaterial fast auf allen Zweigen der Biologie eingearbeitet hat und mit geistiger Selbständigkeit an Fragen eines fremden Gebietes herantritt; in weitem Umfange dankenswert ist die Kritik, die er übt, wenn er auch manchmal offene Türen einrennt oder die Probleme verkennt. Ist ihm trotz dieser Vorzüge die Lösung seiner Aufgabe aus den angeführten Gründen mißlungen und sein Buch infolgedessen für Nicht-Fachleute wenig geeignet, so empfängt doch der Fachmann wie so oft von Außenstehenden reiche Anregung, für die er dem Verfasser zu Dank verpflichtet ist.

Renner.

Vom Altertum zur Gegenwart. Die Kulturzusammenhänge in den Hauptepochen und auf den Hauptgebieten. 308 Seiten. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1919. Geh. M. 9.—.

Dieses Buch ist entstanden im Anschluß an die Sammlung der Meinungsäußerungen über „Das Gymnasium und die neue Zeit". Es soll die wissenschaftlichen Belege bringen für die Zusammenhänge unserer Kultur (im weitesten Sinne) mit der Kultur der Antike, d. h. der Griechen, über die Jahrhunderte hinüber und so die Notwendigkeit des Studiums der Antike erweisen. Trotz dieses Zwecks handelt es sich aber um eine Darstellung ohne jede Tendenz[1]), ein Werk, das in knappen und doch erschöpfenden Skizzen einzelner Gelehrter die allgemeinen Grundlinien der Kulturzusammenhänge auf den Gebieten der Wirtschaft, der Kunst und der Wissenschaft vor Augen stellt. Ganz gleich, wie der Leser zur Frage der humanistischen Bildung stehen mag, er wird, wenn er überhaupt Sinn für die geschichtliche Entwickelung hat, an den Skizzen gewiß viel Freude haben.

Der Stoff ist in zwei Abschnitte gegliedert, einen kürzeren, über die Zusammenhänge im allgemeinen, und einen längeren, in dem die Zusammenhänge auf den einzelnen Gebieten behandelt werden. So reizvoll gerade für den Nichtfachmann einzelne der Skizzen sind, z. B. die von E. Meyer über Staat und Wirtschaft, so möge hier doch nur über die berichtet werden, welche den Gebieten dieser Zeitschrift angehören.

C. Müller hat eine Darstellung der griechischen Mathematik beigesteuert. Wir sehen, wie bei Thales und Pythagoras die Einzelerkenntnisse zu einer Wissenschaft umgebildet werden. Eindringlich wird die Bedeutung Platos für den Übergang zum streng logischen Aufbau hervorgehoben und eine glanzvolle Schilderung der großen Trias Euklid, Archimedes, Apollonius gegeben, wobei wir überall das Fortwirken der Gedanken bis in die Neuzeit erkennen. Zeigt diese Skizze die Vollendung, welche fachmännische Beherrschung des Stoffes und Kenntnis der historischen Entwicklung in ihrer Vereinigung ergeben, so fragt man bei den folgenden Ausführungen des Philologen Goldbeck über Weltbild und Physik unwillkürlich, was wohl ein Duhem zu sagen gehabt hätte, wenn es gegolten hätte, für die Schöpfungen des Kopernikus, Galilei und Newton den Zusammenhang mit der antiken Wissenschaft aufzuzeigen. Wenn der Verf. beispielsweise die Anregung des Kopernikus in gewissen „lichtphilosophischen Spekulationen" finden will, die auf Plato zurückgehen, so dürfte er doch den Einfluß vager philosophischer Überlegungen gegenüber genauer Naturbeobachtung und ihrer mathematischen Verarbeitung unterschätzen. Selbst ein so mystisch veranlagter Forscher wie Kepler ist doch bei seinen großen Leistungen kaum durch seine mystischen Spekulationen beeinflußt.

Für den Naturforscher ansprechender ist der Artikel von Boll über die Astronomie, der in knapper, aber um so eindrucksvollerer Ausführung den Sinn und Geist griechischer Wissenschaft zu zeichnen weiß. Auch in dem anschließenden Artikel von Partsch über Geographie findet man interessante Bemerkungen einmal über Erdmessung und Kartographie, andererseits über Klimatologie und Meteorologie in der Antike.

Über die Chemie berichtet v. Lippmann. Gibt es schon in sehr früher Zeit eine chemische Technik, wenn auch keine chemische Wissenschaft, so kommt in hellenistischer Zeit die Alchemie empor, die im Mittelalter weiter entwickelt wird, und aus der doch schließlich die Wissenschaft der Chemie entsprungen ist.

---

1) Von dem Anhange und in gewissem Sinne auch von dem ersten Abschnitt ist hierbei abgesehen. Sie stehen auch mit dem eigentlichen Inhalt des Buches nur in losem Zusammenhang.



Im letzten Artikel sucht Rehm ein Bild der antiken Technik zu geben. Seine Ausführungen dürften aber interessanter für den Physiker als für den eigentlichen Techniker sein, da er mehr astronomische Instrumente und die physikalisch-technischen Spielereien des Heron als die eigentlichen großen technischen Leistungen des Altertums beschreibt. Es ist in der Tat eigenartig, wie wenig große technische Leistungen die Schriftsteller des Altertums interessiert haben, so daß die Philologen in ihren Texten darüber sehr wenig vorfinden. G. Prange.

Das Gymnasium und die neue Zeit. Fürsprachen und Forderungen für seine Erhaltung und seine Zukunft. 220 Seiten. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1919. Geh. M. 4.50.

Als einen Beitrag zum Kampfe der Meinungen um die Neugestaltung der Schule hat der Teubnersche Verlag die Ansichten von Männern aller wissenschaftlicher Berufskreise sammeln wollen, die Freunde des humanistischen Gymnasiums sind. So finden sich in diesem Buche fast hundert längere und kürzere Beiträge vereinigt. Wohl gegen den Willen der Herausgeber sind dabei die Vertreter der klassischen Philologie, der Geschichte usw. und die interessierten Schulmänner bedeutend in der Überzahl. Aus den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern und aus der Technik fehlen bekannte Namen fast gänzlich, und die Vertreter dieser Fächer, die Beiträge beigesteuert haben, bringen auch nur Gründe, die sehr wenig bedeuten für die Erhaltung des humanistischen Gymnasiums vor. Soll man daraus schließen, daß die Vertreter der exakten Wissenschaften und der Technik Gegner des humanistischen Gymnasiums seien? Ihr Schweigen erklärt sich wohl eher so, daß gerade aus den Kreisen der Schulmänner des humanistischen Gymnasiums die erbittertsten Gegner aller Forderungen der exakten Wissenschaften an die Schule erstanden sind, und daß man daher fürchtet, eine Zurückdrängung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer zu fördern, wenn man sich zugunsten des humanistischen Gymnasiums ausspreche. Versteht man unter dem humanistischen Gymnasium nur die Schule, an welcher der altsprachliche Unterricht vor allem anderen den Vorrang hat, so wird kein Vertreter der exakten Wissenschaften sich besonders dafür einsetzen wollen. Etwas anderes ist es aber, wenn man es auffaßt als die Schule der historischen Betrachtungsweise, die den Fortschritt auf dem Boden der Tradition verstehen lehrt, und so zur Schule der Methode wird. Da wird auch der Naturforscher dem zustimmen können, daß man „realistische" Studien im „humanistischen" Geiste treiben müsse, und daß die Beschäftigung mit dem Geiste der Hellenen, welche die Menschheit lehrten, was Wissenschaft sei, reiche Früchte tragen müsse. Ist es doch gerade dem Naturforscher durchaus geläufig, daß das Einzelwesen die Entwicklung der Gattung wieder durchlaufen muß.

In diesem Sinne wird selbst der Gegner des humanistischen Gymnasiums aus dem Buch reiche Anregung schöpfen. Hervorgehoben seien die längeren Ausführungen des Historikers Friedländer, und die kürzeren feinsinnigen Bemerkungen der Philosophen Riehl und Eucken, des bekannten Schulreformers Kerschensteiner und des Philologen Cauer.

G. Prange.

J. Möller, Nautik. (Aus Natur und Geisteswelt 255.) 8°. 116 S. m. 64 Fig. im Text und einer Seekarte. 2. Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.20, geb. M. 1.50.

In allgemeinverständlicher Form schildert der Verf. die wichtigsten in der Nautik verwandten Instrumente und Methoden. Dabei finden neben dem Kreiselkompaß in seiner modernsten Form auch die neuesten Errungenschaften des Krieges Erwähnung, die funkentelegraphische Peilung durch gerichtete Wellen und die Entfernungsmessung durch Doppelsignale. Ein besonders anschauliches Bild von der Verwendung der nautischen Methoden gibt die Beschreibung einer kurzen Segelschiffsreise auf der Ostsee.

Wegen seiner klaren anschaulichen Ausdrucksweise sei das Büchlein allen, die sich mit den Grundlagen der Steuermannskunst vertraut machen wollen, warm empfohlen. Dr. König.

Tagesereignisse.

Philosophische Preisaufgaben. Die neugegründete „Vereinigung der Freunde und Förderer des Positivistischen Idealismus" veröffentlicht zwei Preisausschreiben. Thema der zweiten Preisaufgabe: „Das Verhältnis der Einsteinschen Relativitätslehre zur Philosophie der Gegenwart mit besonderer Rücksicht auf die Philosophie des Als-Ob". Preis 5000 Mark. Preisrichter: Professor Dr. v. Aster in Gießen, Professor Dr. v. Laue in Berlin und Professor Dr. Schlick in Rostock. Die näheren Bestimmungen der Preisausschreiben erhalten die Interessenten kostenfrei zugesendet durch den Schriftleiter der „Annalen der Philosophie" Dr. Raymund Schmidt in Leipzig, Fichtestraße 13.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dozent Dr. med. Erik M. P. Widmark zum Professor der medizinischen und physikalischen Chemie an der Universität Lund, der bisherige Direktor des Marine-Observatoriums in Tsingtau Geh. Reg.-Rat Dr. Meyermann zum Observator an der Universitäts-Sternwarte in Göttingen, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wilhelm Meigen zum planmäßigen a. o. Professor der Chemie an der Universität Gießen, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr Erwin Schrödinger zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau, der Privatdozent an der böhmischen Universität Prag Dr. Frantisek Plzák zum ord. Professor der organischen Chemie ebenda, der Privatdozent für anorganische Chemie an der tschechischen Universität Prag Dr. Jan Stanislaw Sterba-Böhm zum ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an derselben Hochschule, der ord. Professor der Chemie an der Universität Wien Hofrat Dr. Wilhelm Schlenk in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin.

Neuer Lehrauftrag: An der Universität Marburg Dr. Krollpfeifer für technische Chemie, Privatdozent Professor Dr. Peter Rona für spezielle Kolloidchemie in ihrer Anwendung auf Biologie und Medizin an der Universität Berlin.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. | 1. Februar 1921. Redaktionsschluß für No. 5 am 10. Februar 1921. | 22. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Inversionskurve des differentialen Thomson-Joule-Effektes der Gase.

Von Max Jakob.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

I. Ziel der Untersuchung.

Für ein beliebiges Gas kann man innerhalb gewisser Temperaturgrenzen zu jeder Temperatur T einen bestimmten Druck p angeben, bei welchem der differentiale Thomson-Joule-Effekt gleich Null ist oder, was dasselbe bedeutet, das Gay-Lussacsche Gesetz

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{v}{T} \tag{1}$$

streng erfüllt ist. Die Verbindungslinie der hierdurch definierten Punkte in einem beliebigen Koordinatensystem nennt man die Inversionskurve des differentialen Thomson-Joule-Effektes oder nach dem Vorschlag von Schames[1]) die differentiale Gay-Lussac-Kurve. In einem Koordinatensystem mit T als Abszissen und p als Ordinaten ähnelt diese Kurve nach der bisherigen Anschauung einer Parabel, deren Scheitelpunkt bei ziemlich hohen Drucken liegt und deren Achse parallel oder etwas schief zur p-Achse läuft. Nun hat neuerdings Schreber[2]) einen derartigen Verlauf für ganz unmöglich erklärt. Nach seiner Ansicht soll die Inversionskurve einer Parabel nahe kommen, deren Scheitel auf der T-Achse liegt und deren Achse mit der T-Achse zusammenfällt.

Zwar hat Schames[1])[3]) bereits den allgemeinen Verlauf der Inversionskurve durch einige aus der Literatur entnommene Versuchspunkte festgelegt. Es können aber aus den Veröffentlichungen verschiedener Experimentatoren noch viel mehr Punkte berechnet werden. Der Verfasser hat sich zur Klärung der Frage, ob Schrebers Annahme über den Verlauf der Inversionskurve berechtigt ist, die Aufgabe gestellt, möglichst viele Inversionspunkte für verschiedene Gase aus den veröffentlichten Versuchsberichten zu ermitteln und in reduzierten Zustandsgrößen graphisch darzustellen.

1) L. Schames, Ann. d. Phys. (4) **57**, 321, 1918.
2) K. Schreber, diese Zeitschr. **21**, 470, 1920.
3) L. Schames, Elster- und Geitel-Festschrift (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig) S. 287, 1915.

II. Berechnung von Inversionspunkten verschiedener Gase aus den bekannten Beobachtungswerten.

Direkt ist die Inversion des differentialen Thomson-Joule-Effektes meines Wissens noch an keinem Gase beobachtet worden, auch nicht an Wasserstoff, wie vielfach geglaubt wird[1]). Dagegen finden sich in den aus Versuchen gewonnenen Tabellen über Isothermen und Isobaren der Gase viele Stellen, an denen

$$\frac{\partial\left(\frac{pv}{T}\right)_p}{\partial T} = \frac{p}{T^2}\left(T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right) = 0 \tag{2}$$

und somit Gleichung (1) erfüllt ist. Es ist nur etwas mühselig, diese Punkte aus dem Beobachtungsmaterial herauszusuchen. Ich habe früher für Luft aus je zwei möglichst benachbarten Isothermen (nach Amagat) den Inversionspunkt berechnet[2]). In ähnlicher

1) K. Olszewski (Ann. d. Phys. **7**, 818, 1902) hat vielmehr den integralen Effekt für etwa 113,5 Atm. bei $-80{,}5^0$ gleich Null gefunden.
2) M. Jakob, Forschungsarb. auf d. Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 202, S. 19, 1917.

nur etwas verbesserter Weise sind im folgenden die Inversionspunkte für Äthyläther (nach Mack[1])), für Kohlensäure, Äthylen, Sauerstoff, Luft und Stickstoff (nach Amagat[2])) und für Wasserstoff (nach Witkowski[3])) ermittelt worden, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden:

1. Wenn für einen bestimmten Druck bei mehreren Temperaturen beiderseits des Inversionspunktes der Wert von $\frac{pv}{T}$ bekannt ist, so kann man einfach die Isobare aufzeichnen und das Minimum bzw. Maximum[4]) ermitteln.

2. Wenn nicht bei genügend vielen Temperaturen Beobachtungen vorliegen, so führt der durch folgendes Beispiel gekennzeichnete Weg zum Ziel: Nach Amagats Beobachtungen erhält man für Luft von 0 und 15,7° die Zahlenwerte der Tabelle I oder in graphi-

Tabelle I.
Bestimmung eines Inversionspunktes.

p Atm	$10^6 \frac{pv}{T}$ für $T=273,1$	$10^6 \frac{pv}{T}$ für $T=288,8$	$10^6\left[\left(\frac{pv}{T}\right)_{T=288.8} - \left(\frac{pv}{T}\right)_{T=273,1}\right]$
300	4019	4065	46
350	4226	4242	16
400	4447	4444	− 3
450	4674	4661	− 13
500	4907	4886	− 21

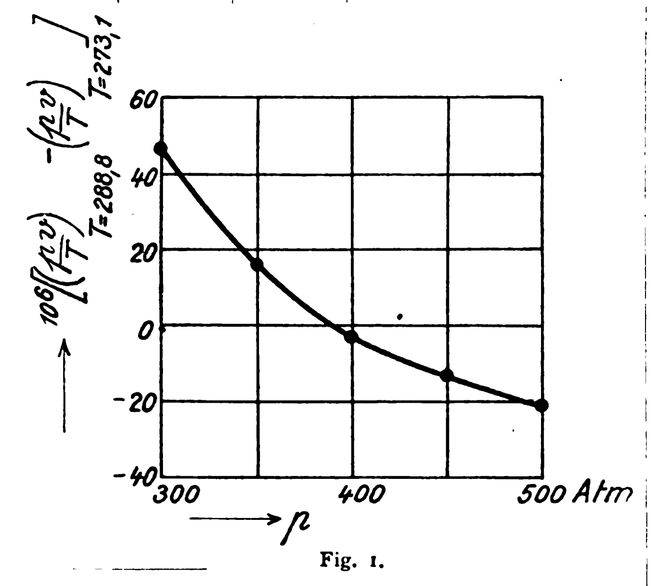


Fig. 1.

Tabelle II.
Inversionspunkte verschiedener Gase.

Gas	T	p[kg/cm²]	t	$\mathfrak{N}t$	$\mathfrak{p}$
Äthyläther	402	41	0,86	3,28	1,11
	405	83	0,87	3,30	2,26
	435	153	0,93	3,55	4,16
	455	181	0,98	3,71	4,92
	479	223	1,03	3,91	6,06
Kohlensäure	278	221	0,91	3,23	2,95
	283	279	0,93	3,29	3,73
	288	327	0,95	3,34	4,37
	298	366	0,98	3,46	4,89
	303	413	1,00	3,52	5,52
	308	440	1,01	3,58	5,88
	319	487	1,05	3,70	6,51
	329	562	1,08	3,82	7,51
	338	586	1,11	3,92	7,83
	348	615	1,14	4,04	8,22
	358	610	1,18	4,16	8,16
	369	674	1,21	4,28	9,01
	392	702	1,29	4,55	9,39
	403	723	1,33	4,68	9,67
	410	775	1,35	4,76	10,36
	440	826	1,45	5,11	11,04
Äthylen	278	194	0,98	3,36	3,75
	288	252	1,02	3,48	4,87
	298	273	1,05	3,60	5,28
	308	316	1,09	3,72	6,11
	318	336	1,12	3,84	6,50
	328	351	1,16	3,96	6,79
	338	368	1,19	4,08	7,12
	348	449	1,23	4,21	8,68
	359	463	1,27	4,34	8,95
	369	494	1,30	4,46	9,55
	392	470	1,39	4,74	9,09
	441	533	1,56	5,33	10,31
Sauerstoff	281	568	1,82	6,24	11,05
	331	607	2,15	7,35	11,81
	423	486	2,75	9,39	9,46
Luft	281	404	2,12	7,25	10,49
	331	430	2,50	8,54	11,17
	423	345	3,19	10,92	8,96
Stickstoff	281	391	2,23	7,63	11,34
	331	398	2,63	8,94	11,54
	423	296	3,36	11,50	8,58
Wasserstoff[1])	162	57	4,88	15,96	4,32
	164	62	4,94	16,15	4,70
	166	52	5,00	16,35	3,94
	173	36	5,21	17,04	2,73
	176	36	5,30	17,33	2,73
	177	26	5,33	17,43	1,97
	178	21	5,36	17,53	1,59
	180	10	5,42	17,73	0,76
	183	19	5,51	18,02	1,44
	198	5	5,96	19,50	0,38
Wasserstoff[2])	174	68	5,24	17,14	5,15
	188	33	5,68	18,57	2,50
	201	0	6,05	19,80	0

1) Nach Witkowski a. a. O.
2) Nach Dalton, s. S. 67, 1. Spalte, Fußnote 1.

1) E. Mack, Comptes rendus, **132**, 952 u. 1080, 1901.
2) E. H. Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) **29**, 68, 1893.
3) A. W. Witkowski, Anzeiger der Ak. d. Wiss. Krakau (Math.-Naturwiss. Klasse), S. 305, 1905.
4) Siehe hierüber S. 69, 1. Spalte, Fußnote 1.

scher Darstellung die Fig. 1, nach welcher der Inversionspunkt als Schnittpunkt der Kurve mit der Abszissenachse bei 391 Atm. (= 404 kg/cm²) und bei einer Temperatur zwischen $T = 273,1$ und $T = 288,8$, im Mittel bei $T = 281$ liegt.

Nach einer dieser Methoden (oder beiden) sind die zusammengehörigen Werte T und p der Tabelle II erhalten worden.

Den Schluß der Tabelle II bilden 3 nach Dalton[1]) berechnete Werte für Wasserstoff. Dieser hat den integralen Thomson-Joule-Effekt Δ aus den Werten von Virialkoeffizienten berechnet, welche die Isothermen von Kamerlingh Onnes und Braak befriedigen sollen. Aus seinen Werten Δ und der Bedingung $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial p}\right)_T = 0$ für den differentialen Thomson-Joule-Effekt kann man die Werte für $T = 174$ und $T = 188$ ableiten, aus Δ für $p = 2$ und für $p = 6$ den Wert für $p = 0$ genügend genau extrapolieren. Unmittelbar aus den von Kamerlingh Onnes und Braak[2]) veröffentlichten Beobachtungen Inversionspunkte zu gewinnen (wie aus den Versuchswerten von Witkowski), gelang nicht, da die Isothermen von 0 und von — 103,6°, die allein in Betracht kämen, einen zu großen Temperaturabstand haben[3]) und nur oberhalb 28 kg/cm² gemessen sind, während der Inversionspunkt (ihr Schnittpunkt) tiefer zu liegen scheint.

III. Einführung reduzierter Zustandsgrößen zur Darstellung der Inversionskurve.

Die Inversionspunkte für alle Gase lassen sich durch eine einheitliche Inversionskurve verbinden, wenn man nach Schames die Werte der korrespondierenden Größen $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ als Abszissen, die korrespondierenden Drucke $\mathfrak{p}$ als Ordinaten aufträgt. Zur Berechnung von

$$\mathfrak{R} = \frac{RT_k}{p_k v_k}, \quad \mathfrak{t} = \frac{T}{T_k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = \frac{p}{p_k}$$

dient die Tabelle III der kritischen Daten. (Dabei ist $R = 82{,}07 / M$, wenn M das Molekulargewicht bedeutet; p_k ist in kg/cm² ausgedrückt.)

Die Werte der Tabelle III stimmen im wesentlichen überein mit den neuerdings von

1) J. P. Dalton, Commun. Phys. Labor. Leiden Nr. 109a, S. 1, 1909.

2) H. Kamerlingh Onnes u. C. Braak, Commun. Phys. Labor. Leiden Nr. 97a, S. 1, 1906, Nr. 100a, S. 1, 1907, Nr. 100b. S. 11, 1907.

3) Insbesondere in reduziertem Maß. Dieser Abstand beträgt mehr als das Dreifache der kritischen Temperatur, während die gleiche Differenz für Sauerstoff nur 2/3, für Kohlensäure nur 1/3 der kritischen Temperatur ausmachen würde.

Tabelle III.

Kritische Daten einiger Gase.

Gas	Chemische Formel	$\mathfrak{R}$	T_k	p_k
Äthyläther	$C_4H_{10}O$	3,81	467	36,8
Kohlensäure	CO_2	3,53	304	74,8
Äthylen	C_2H_4	3,42	283	51,7
Sauerstoff	O_2	3,42	154	51,4
Luft	—	3,42	132,5	38,5
Stickstoff	N_2	3,42	126	34,5
Wasserstoff	H_2	3,27	33,2	13,2

Mollier[1]) verwendeten; sie beruhen auf den zurzeit als zuverlässigst geltenden Beobachtungen. Hiernach sind nun die Werte $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{p}$ der Tabelle II berechnet und in Fig. 2 eingetragen.

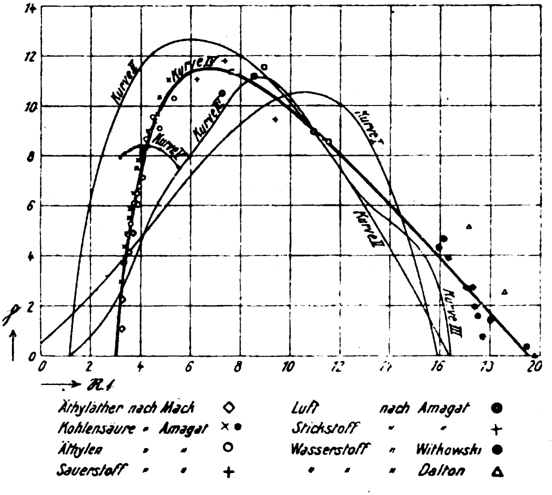


Fig. 2.

In diesem Diagramm sind ferner die Inversionskurven nach Noells[2]) Extrapolationsformel (Kurve I) für Luft, nach der früher angegebenen[3]), neuerdings als verbesserungsbedürftig erkannten[4]) Formel von Schames (Kurve II) und nach der früher von mir angegebenen Gleichung für Luft[5]) (Kurve III) eingezeichnet.

IV. Erläuterungen zur Darstellung der Inversionskurve.

Die Tabellen II und III und die Fig. 2 bedürfen noch einiger Erläuterungen:

Die meisten Punkte für Äthyläther beziehen sich auf flüssige Substanz, die übrigen Punkte

1) R. Mollier, diese Zeitschr. 17, 457, 1920.

2) F. Noell, Forschungsarb. auf d. Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 184, 1, 1916.

3) L. Schames, diese Zeitschr. 18, 30, 1917.

4) L. Schames, Ann. d. Phys. a. a. O.

5) M. Jakob, a. a. O.

des Diagramms aber auf dampf- bzw. gasförmigen Zustand. $\mathfrak{R}$ ist bei den ersten 6 Stoffen der Tabelle III mit einer Unsicherheit behaftet, die für Kohlensäure ± 3 Proz. betragen dürfte. Dies ist bei kleinen Werten $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ ohne besonderen Belang, da die Streuung der Versuchspunkte beträchtlich ist. Bei Wasserstoff ist die Unsicherheit wesentlich größer und belangreicher. Für dieses Gas hatte Schames[1]) früher $\mathfrak{R} = 2{,}67$ angenommen. Die neuen Werte der kritischen Daten des Wasserstoffes von Kamerlingh Onnes, Crommelin und Cath[2]) führen aber auf $\mathfrak{R} = 3{,}27$. Dieser Wert ist hier zugrunde gelegt. Er ergibt eine auffallend hohe Inversionstemperatur für $\mathfrak{p} = 0$, wie man aus den nach Witkowski in Fig. 2 eingetragenen Punkten für Wasserstoff ersieht[3]). Diese könnten möglicherweise auf den Wert $\mathfrak{R}\mathfrak{t} = 18$ der van der Waalsschen Gleichung führen. Es ist mir aber nicht gelungen, eine einfache Inversionskurve durch diesen Inversionspunkt und die für die anderen Gase berechneten Punkte zu legen. Eine solche Kurve müßte in wiederholten Wellen verlaufen, wie die Kurve III. Am besten werden die Versuchspunkte verbunden durch die Kurve IV, welcher die folgende einfache empirische Formel zugrunde liegt:

$$\mathfrak{p} = 23{,}37 - 1{,}174\,\mathfrak{R}\mathfrak{t} - \frac{178{,}6}{\mathfrak{R}^2\mathfrak{t}^2} \qquad (3)$$

Für $\mathfrak{p} = 0$ wäre hiernach $\mathfrak{R}\mathfrak{t} = 19{,}5$, nach Schames aber 16,2; der van der Waalssche Wert liegt also genau in der Mitte davon. Eine Entscheidung über den wirklichen Wert von $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ für $\mathfrak{p} = 0$ wird erst möglich sein, wenn die kritischen Daten des Wasserstoffes (insbesondere das kritische Volumen) und der Inversionspunkt für Wasserstoff bei $\mathfrak{p} = 0$ endgültig festliegen[4]).

1) L. Schames, Elster- u. Geitel-Festschrift a. a. O.

2) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin u. P. G. Cath, Commun. Phys. Labor. Leiden 151c, S. 23, 1917.

3) Die nach Dalton berechneten Werte sind eingezeichnet, aber als weniger sicher nicht berücksichtigt. Nach ihnen wären die Inversionstemperaturen noch höher wie nach Witkowskis Beobachtungen.

4) Es muß noch bemerkt werden, daß der Boyle-Punkt, der nach der van der Waalsschen Gleichung und nach Schames auch bei den wirklichen Gasen durch $\mathfrak{R}\mathfrak{t} = 9$ bestimmt sein soll, nach den Leidener Beobachtungen (Commun. Nr. 100a und 151c) für Wasserstoff bei $\mathfrak{R}\mathfrak{t} = 10{,}6$, also bei einem ebenfalls unerwartet hohen Wert liegen würde. Obwohl Kamerlingh Onnes, Crommelin u. Cath ihre Ermittlungen der kritischen Daten des Wasserstoffs „vorläufige" nennen, glaubte der Verfasser doch, sie als die experimentell sorgfältigsten trotz der erwähnten theoretischen Bedenken seinen Berechnungen zugrunde legen zu müssen.

Der linke Ast der Kurve IV ist zwar bis herab zu $\mathfrak{p} = 0$ nach Gleichung (3) eingezeichnet, in Wirklichkeit wird er für $p < 1$ wohl stark nach links abbiegen.

V. Schnittpunkt der Idealkurve und der Inversionskurve.

Schames[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die durch die Gleichung

$$\mathfrak{p}\mathfrak{v} = \mathfrak{R}\mathfrak{t} \qquad (4)$$

definierte „Idealkurve" in ihrem Druckmaximum durch die Inversionskurve geschnitten wird. Das gibt uns ein Kriterium für die Richtigkeit der Kurve IV an die Hand. Aus Amagats[2]) Beobachtungen an Kohlensäure erhält man die in der Tabelle IV zusammengestellten Werte für die Idealkurve. Sie sind in Fig. 2 durch die Kurve V verbunden, und man erkennt ohne weiteres, daß in der Tat die Inversionskurve die Idealkurve in deren Maximum schneidet.

Tabelle IV.

Idealpunkte der Kohlensäure.

T	p [kg/cm²]	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{t}$	$\mathfrak{p}$
273	592	0,90	3,17	7,92
283	601	0,93	3,29	8,04
293	608	0,96	3,40	8,12
303	614	1,00	3,52	8,21
313	618	1,03	3,63	8,26
323	623	1,06	3,75	8,33
333	626	1,10	3,87	8,37
343	628	1,13	3,98	8,38
353	628	1,16	4,10	8,38
363	628	1,19	4,21	8,38
373	626	1,23	4,33	8,37
410	616	1,35	4,76	8,24
471	562	1,55	5,47	7,52

VI. Folgerungen aus der Darstellung der Inversionskurve.

Aus unserer Untersuchung folgt:

1. Da die Inversionspunkte für verschiedene Gase bei Darstellung in reduzierten Koordinaten für korrespondierende Zustände praktisch zusammenfallen, für verschiedene Zustände aber sich durch die Kurve IV zwanglos verbinden lassen, kann man das Korrespondenzgesetz als mit guter Annäherung gültig bezeichnen.

2. Die Inversionskurve hat ein ausgesprochenes Druckmaximum. Die Ansicht Schrebers, daß der Inversionsdruck der Luft mit abnehmender Temperatur immer wei-

1) L. Schames, Ann. d. Phys. a. a. O.

2) E. H. Amagat, a. a. O.



ter zunehme, ist also unhaltbar[1]), da das Korrespondenzgesetz gilt. Es ist vielmehr der linke von Schreber angezweifelte Ast der Inversionskurve bis herab zum kritischen Drucke jetzt wohl sicherer bestimmt (insbesondere auch durch den Schnittpunkt mit der Idealkurve) als der rechte Ast, von dem die Versuchspunkte stärker abweichen und dessen Endpunkt für $p = 0$ noch zweifelhaft ist.

3. Das Druckmaximum der Inversionskurve liegt bei tieferer Temperatur, als ich in Annäherung an die nach Noell extrapolierte Kurve (Kurve I) und die Inversionspunkte für Luft nach Amagat (s. Tabelle II) früher angenommen hatte. Diese Punkte streuen stark, wie Schreber richtig erkannt hat[2]), ebenso die Punkte für Stickstoff und Sauerstoff. Erst durch die jetzt durchgeführte Darstellung in korrespondierenden Koordinaten, insbesondere durch den Anschluß der Kurve an die Inversionspunkte für Äthylen und Kohlensäure ist es gelungen, das Maximum schärfer zu fixieren als bisher.

4. Durch Einsetzen der kritischen Daten in Gleichung (3) erhält man den Inversionsdruck für Luft nach der Formel

$$p = 899{,}7 - 1{,}167\, T - 1102 \cdot \frac{10^4}{T^2} \qquad (6)$$

1) Schrebers Beweisführung (a. a. O.) leidet unter einer eigentümlichen Verwirrung: Er geht aus von der Gleichung des differentialen Thomson-Joule-Effektes

$$\omega = \frac{A\,T^2}{c_p \cdot p}\left(\frac{\partial \frac{pv}{T}}{\partial T}\right)_p \qquad (5)$$

und behauptet 1., daß für $\omega = 0$ auf einer Isobare $\frac{pv}{T}$ seinen Größtwert habe. Daraus schließt er 2., daß bei Kurven von der Art der in Fig. 2 dargestellten zum gleichen Wert p zwei Höchstwerte von $\frac{pv}{T}$ gehörten (einer auf dem linken Ast, einer auf dem rechten). Daraus wiederum folgert er 3., daß dazwischen ein Kleinstwert liegen müßte, so daß zu jedem Druck 3 Inversionspunkte gehören würden, was bis jetzt noch nirgends beobachtet worden sei und aller Wahrscheinlichkeit widerspreche. Hiernach ergebe sich 4., daß Kurven der in Fig. 2 dargestellten Art ganz unmöglich seien.

Im Satz 3 erkennt Schreber also, was er in Satz 1 übersehen hat, daß $\frac{pv}{T}$ für $\omega = 0$ auch einen Kleinstwert haben kann. In der Tat sind die zum linken Ast der Kurve IV gehörigen Werte $\frac{pv}{T}$ Minima, die zum rechten Ast gehörigen Maxima, wie aus den Beobachtungswerten unzweideutig hervorgeht und von einem dritten Inversionspunkt für einen bestimmten Druck ist keine Rede. Schrebers Beweisführung ist somit hinfällig.

2) Trotzdem war es völlig in Ordnung, die jeweils benachbartsten Versuchspunkte zur Bestimmung je eines Inversionspunktes zu kombinieren, wie ich dies früher und jetzt wieder getan habe, und nicht alle Versuchspunkte zu je zweien zu kombinieren, wie dies Schreber für angebracht hält.

5. Auf Grund der Gleichung (6) konnte der Verfasser empirische Gleichungen für $(\partial \Delta/\partial p)_T$ und für Δ aufstellen, die wesentlich einfacher sind als die früher veröffentlichten[1]). Eine Verbesserung der damals angegebenen Zustandsgleichung[1]), ist ihm aber auf diesem Wege bisher nicht gelungen. Daher wird auch auf die Wiedergabe der Gleichungen für $(\partial \Delta/\partial p)_T$ und Δ zunächst verzichtet[2]).

1) M. Jakob, a. a. O.

2) Nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung kommt mir der Anfang und die erste Fortsetzung der von K. Schreber (a. a. O.) angekündigten ausführlichen Abhandlung zu Gesicht. (Zeitschr. f. komprim. u. flüss. Gase **21**, 1 u. 17, 1920). Darin gibt Schreber als Gleichungen der Inversionskurve für Luft an:

$$p^2 = 510\,(680 - T) \qquad (7)$$

und

$$\left(\frac{p}{505}\right)^2 + \left(\frac{T}{620}\right)^2 = 1\,. \qquad (8)$$

Nach diesen Gleichungen würde der Inversionsdruck mit abnehmender Temperatur beständig zunehmen. Sie führen also, wie oben ausführlich dargelegt, bei tiefen Temperaturen zu der Theorie und Erfahrung widersprechenden Ergebnissen.

(Eingegangen 18. November 1920.)

Zur Frage der Verschiebung der scheinbaren Fixsternorte in Sonnennähe.

Von E. Lihotzky.

Hat Einsteins Theorie die Aufmerksamkeit auf eine systematische Verlagerung der scheinbaren Fixsternorte in Sonnennähe hingelenkt, so ist es nur natürlich und im Hinblick auf die Entwicklung der bezüglichen Anschauung durchaus verständlich, daß man eine entsprechende Berechnung auch unter Zugrundelegung der Anschauungen Newtons angestellt hat. Eddington hat bei Ausführung derselben den halben Einsteinschen Wert gefunden und man hat mehrfach bemerkt, daß die Beobachtungsergebnisse noch nicht sicher zwischen beiden Werten zu entscheiden erlauben.

Die Aufgabe selbst findet ihre Lösung in der Beantwortung der Frage: Welche Ablenkung erfährt ein mit Lichtgeschwindigkeit sich bewegender materieller Punkt unter dem Einfluß einer in der Nähe seiner Bahn befindlichen großen gravitierenden Masse?

Kurz rekapitulierend geben wir vorher Einsteins Lösung für die Ablenkung der Lichtstrahlen[1]); er findet die gesamte Biegung — also die sich infolge dieser Wirkung ergebende

1) Ann. d. Phys. **49**, 1916; auch S. A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, J. A. Barth, 1916, S. 63.

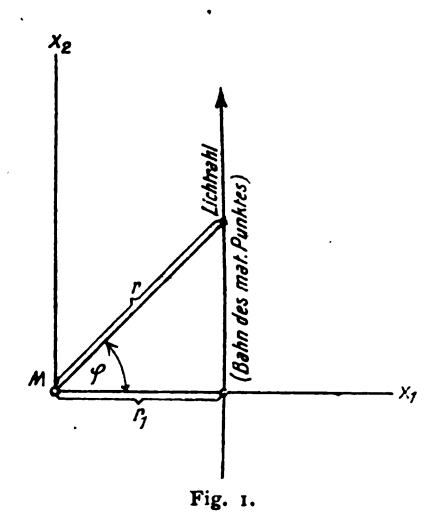


Fig. 1.

Verschiebung der Fixsternorte — in genügender Näherung (Fig. 1).

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} d x_2$$

$$\text{mit } \gamma_{(1)} = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right) \quad (1)$$

und wenn noch $\alpha = \frac{kM}{c^2}$, worin k die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist, zu

$$B_{(1)} = -\frac{2kM}{c^2 r_1}. \quad \text{(I)}$$

Vollkommen analog wollen wir die Rechnung unter der Newtonschen Annahme durchführen. Die Bahn des materiellen Punktes tritt hier an Stelle des Lichtstrahles; ihr geringster Abstand (vom Massenmittelpunkt) von M sei wieder mit r_1 bezeichnet, der Abstand irgendeines ihrer Punkte mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; in unendlich großem Abstand ($r = \infty$) sei die Geschwindigkeit des Punktes c, sonst f und für den Scheitel f_1 genannt. Das Potential von M im Außenraum ist mit der Festsetzung, daß es für $r = \infty$ verschwinde, gegeben durch

$$U = \frac{kM}{r},$$

womit

$$f^2 - c^2 = \frac{2kM}{r}$$

und mit

$$f = c + \triangle c$$

$$f = c + \frac{kM}{rc} - \frac{(\triangle c)^2}{2c};$$

mit Vernachlässigung des letzten Gliedes dem obigen Einsteinschen Ansatz entsprechend hier

$$\gamma_{(2)} = \frac{f}{c} = 1 + \frac{kM}{rc^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x_1} = -\frac{kM x_1}{c^2 r^3};$$

nach Einführung von $\cos\varphi = \frac{x_1}{r}$

$$B_{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x_1} d x_2 = -\frac{kM}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi \, d x_2}{r^2};$$

da die ganze Ableitung eine geringe Krümmung der Bahn voraussetzt, ist aber auch

$$d x_2 \cos\varphi = r \, d\varphi$$

und für die Auswertung des Integrals kann die Bahn als Gerade angesehen werden, womit sich ohne weiteres ergibt[1]):

$$B_{(2)} = -\frac{kM}{c^2 r_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{2kM}{c^2 r_1} \text{[2])} \quad \text{(II)}$$

Ohne den Einfluß der bei der Berechnung dieses Wertes eingeführten Näherungen im einzelnen genauer zu untersuchen, bemerken wir, daß die unter den Voraussetzungen der klassischen Mechanik für den betrachteten Fall leicht ausführbare strenge Rechnung mit

$$f_1 = \sqrt{c^2 + \frac{2kM}{r_1}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{B}{2} = -\frac{kM}{c f_1 r_1} \quad \text{(IIa)}$$

ergibt, was ersichtlich mit II bis auf durchaus zu vernachlässigende Abweichungen höherer Ordnung übereinstimmt, so lange $\frac{kM}{r}$ hinlänglich klein gegen c bleibt.

Im Gegensatz zu der eingangs erwähnten Rechnung ergibt sich also tatsächlich auf Grund der eingeführten Annahmen der gleiche Wert

1) Bezeichnet man dagegen den Winkel zwischen der Bahnnormalen und dem Radiusvektor mit ψ und führt den strengen Ausdruck für $B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial n} ds$ ein, so ergibt sich schließlich $B = -\frac{kM}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{r}$.

2) Denselben Wert ergibt natürlich auch die Auswertung des in der vorstehenden Anmerkung gegebenen strengen Ausdruckes, wenn man für die Bildung des Integrals auch hier wieder eine Gerade zugrunde legt.

wie der aus Einsteins Ansatz folgende. Wie dies trotz der Verschiedenheit der Ausdrücke für $\gamma_{(1)}$ (Einstein) und $\gamma_{(2)}$ (Newton) zustande kommt, wollen wir nun noch zeigen.

Bildet man nach Ausführung der oben angegebenen Substitution für α den Ausdruck $\frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x_1}$, so erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x_1} = -\frac{kM}{2c^2}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{3x_2^2}{r^4}\right]\frac{x_1}{r}$$

und somit für

$$B_{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x_1} d x_2$$

unter den gleichen Annahmen wie im vorbehandelten Fall

$$B_{(1)} = -\frac{kM}{2c^2}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{3x_2^2}{r^4}\right] r d\varphi$$

$$= -\frac{kM}{2c^2 r_1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + 3\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

was den unter I angeführten Wert für $B_{(1)}$ $(= B_{(2)} = B)$ ergibt. Lediglich die Verteilung der Krümmung entlang der Bahn ist eine andere; ersichtlich ist sie für den Scheitel ($\varphi = 0$, $r = r_1$) nur halb so groß wie nach der Newtonschen Auffassung, für $r >> r_1$, $\sin\varphi = 1$ dagegen zweimal so groß.

Da Beobachtungen wie jene anläßlich der letzten Sonnenfinsternis nur den ganzen Wert B zu liefern vermögen, können sie somit „zu einer Entscheidung zwischen diesen beiden Auffassungen“ nicht benutzt werden und eine Bestätigung bzw. Sicherstellung des berechneten Wertes beweist nur, daß die Theorie auch mit dieser Folgerung in keinen Widerspruch mit der Erfahrung gerät. Anders aber läßt sich die „Richtigkeit“, besser gesagt — Berechtigung — einer Anschauung überhaupt nicht erweisen, als durch Aufzeigen ihrer Widerspruchslosigkeit; bringt sie eine Anzahl bisher bestandener Widersprüche zum Verschwinden ohne neue einzuführen, so müssen wir ihr den höheren Wahrheitswert zuerkennen. Ein Mißerfolg in der hier besprochenen Frage könnte das Vertrauen in die Einsteinsche Theorie erschüttern; der Umstand, daß es jeweils auch andere Hypothesen gibt, die just in ein und dem anderen Fall gleiche Resultate zu errechnen gestatten, vermag es jedenfalls nicht; inwieweit er etwa geeignet ist, eine oder die andere in dem angedeuteten Sinn zu stützen, kann in diesem Zusammenhang auf geringem Raum nicht untersucht werden.

Wetzlar a. d. Lahn (Optische Werke E. Leitz), 25. Oktober 1920.

(Eingegangen 3. November 1920.)

Über ein neues Photometer zur Messung schwächster Beleuchtungsstärken, insbesondere Sternphotometrie [1]).

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Optischen Anstalt C. P. Goerz A.-G., Abt. Scheinwerferbau.)
(Referat zum Vortrag auf der Jahrestagung der Deutschen Gesellschaft für technische Physik in Nauheim, September 1920.)

Von Helmuth Schering.

Das Photometer beruht auf folgendem Prinzip: Entwirft man von einer Lichtquelle ein Bild in die Pupille des Auges, so erscheint die Linse gleichmäßig hell ausgeleuchtet. Die auf diese Weise erzielte Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut, also auch der Lichtreiz für Sehwinkel größer als 1°, ist dann proportional

$$\frac{J}{(e-f)^2} f^2/\varphi^2,$$

worin J die Intensität der Lichtquelle, e ihre Entfernung von der Linse, f die Brennweite der Linse und φ den Abstand der Netzhaut von der Augenlinse bedeutet. Die Konstruktion des Photometers ist nun so ausgeführt, daß sowohl das Bild der zu messenden Lichtquellet als auch der Vergleichslichtquelle, L_1 und L_2 in Bild I, durch die Linsen O_1 und O_2 mi,

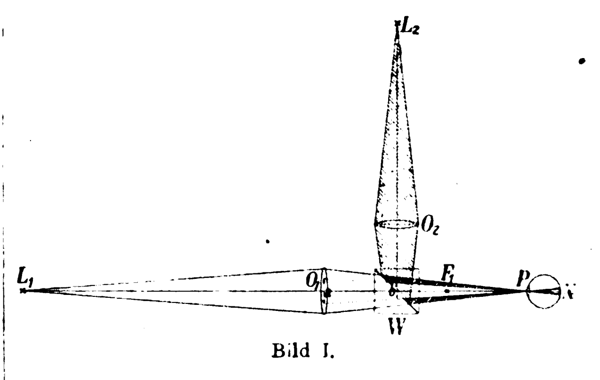


Bild I.

Hilfe eines Lummer-Brodhun-Photometerwürfels an die gleiche Stelle der Augenpupille entworfen wird. Dadurch sieht man das Gesichtsfeld des Photometerwürfels gleichmäßig hell ausgeleuchtet,

1) Ausführlichen Bericht siehe G. Gehlhoff und H. Schering, Zeitschr. f. techn. Physik I, Heft 11, S. 247.

z. B. das innere Feld des Würfels von der zu messenden Lichtquelle, das äußere Feld von der Vergleichslichtquelle. Man kann nun in der bekannten Weise, indem man die Vergleichslichtquelle meßbar verändert, etwa durch 2 gekreuzte Nikols, die beiden Felder gleich hell machen. Durch diese Anordnung wird erreicht, daß sehr schwache Beleuchtungsstärken noch mittels Vergleichs zweier ausgedehnter Flächen, also auf 1 Proz. genau photometrierbar sind. Dies war bisher nicht möglich, da zur flächenhaften Ausbreitung des Lichtes diffus zerstreuende und viel Licht absorbierende Milchglasscheiben verwandt worden sind. Die Empfindlichkeit des Instrumentes ist proportional dem Quadrate der Brennweite des Objektives, und zwar ist die untere Grenze des Meßbereiches bei 20 cm Brennweite gleich 1×10^{-7} Lux und bei 100 cm Brennweite gleich 4×10^{-9} Lux. Das Photometer wurde benutzt 1. zur Bestimmung der Absorption der Atmosphäre längs des Bodens in verschiedenen Spektralbereichen durch Photometrierung einer 10 H.-K.-Lampe durch verschiedenfarbige Farbfilter hindurch, auf 1,5 km Entfernung. Es ergab sich für Luft von mehr als 60 Proz. Feuchtigkeitsgehalt, im Roten stärkere Absorption als im Blauen, 2. zur Messung sehr schwacher Lichtquellen, z. B. radioaktiver Leuchtfarben, Phosphore und tierische Lichtquellen (Leuchtkäfer), 3. zur Sternphotometrie. Auf diesem Gebiete wurden mit einem Instrument von 1 m Objektivbrennweite auf der Sternwarte in Leipzig im August 1920 Messungen vorgenommen. Das Instrument war parallaktisch gelagert und mit Uhrwerk versehen. Es ergab sich eine Genauigkeit von 0,01 bis 0,02 Größenklassen und als untere Grenze Sterne 8ter Größe.

Da das Instrument bei Verwendung eines Lummer-Brodhun-Würfels notwendig in zwei zu einander senkrecht stehende Arme zerfällt, und demgemäß nicht einfach bei vorhandenen Fernrohren an Stelle des Okulares angebracht werden kann, sondern immer einige bauliche Veränderungen notwendig sein würden, soll speziell zur Sternphotometrie das Instrument so konstruiert werden, daß die ganze Einrichtung in einem Rohr vereinigt ist und es bei jedem Fernrohr an Stelle des Okulars eingeschoben werden kann. (Siehe Bild II.) Zu diesem Zwecke wird der Photometerwürfel ersetzt durch einen afokalen Hohlspiegel oder Linsensystem mit Versilberung 8, der das durch die Linse 7 parallel gerichtete Licht der Vergleichslichtquelle 6 mit Hilfe des Prismas 9 an die Stelle der Augenpupille 11 vereinigt. In der Mitte des Spiegels 8 ist die Versilberung ausgespart. Das vom Fernrohrobjektiv kommende Licht der

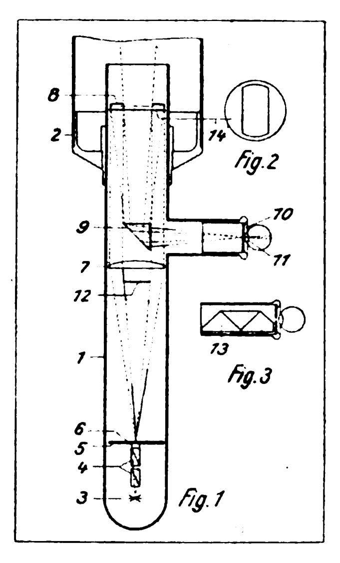


Bild II.

zu messenden Lichtquelle kann durch diese Aussparung unbeeinflußt hindurchdringen und vereinigt sich bei passend eingeschobenem Tubus ebenfalls an der Stelle 11. Zwischen dem Prisma 9 und der Blende 10 kann man, wenn man in verschiedenen Spektralbereichen messen will, ein gradsichtiges Dispersionsprisma 13 anbringen. Man muß dann die Aussparung in der Versilberung quadratisch herstellen und die Linse durch eine senkrecht stehende, rechteckige Blende 14, deren kleinere Seite gleich der Quadratseite ist, abblenden, so daß bei Auseinanderziehen des Lichtpunktes in 11 zu einem wagerechten Spektrum die einzelnen Teile des Bildes sich nicht überdecken. Die Blende 10 muß dann in wagerechter Richtung fein verstellbar sein. Der Apparat stellt in dieser Ausführung einen für jedes Fernrohr passenden Okulartubus dar, mit dem man Sterne bis auf $^1/_{100}$ Größenklasse genau bei flächenhafter Ausbreitung des Lichtes photometrieren kann. Die Empfindlichkeit ist proportional dem Quadrate der Brennweite des Fernrohrobjektives. Die untere Grenze beträgt für weißes Licht bei günstigsten Absorptionsverhältnissen bei 1 m Brennweite Sterne 10ter Größe, bei 2 m Brennweite 12ter Größe, bei 5 m Brennweite 14ter Größe, bei 10 m Brennweite 16ter Größe.

Leutzsch b. Leipzig, 11. September 1920.

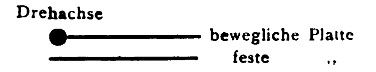
(Eingegangen 13. September 1920.)

Eine Methode zur Messung kleiner Winkeländerungen.

Von A. Pflüger.

Wenn man mit einer Kathodenröhre in Rückkoppelungschaltung in einem Schwingungskreise I ungedämpfte Schwingungen erzeugt, so ist ihre Schwingungszahl bekanntlich außerordentlich konstant. Überlagert man ihnen eine von einer zweiten Röhre erzeugte Schwingung von wenig verschiedener Schwingungszahl, so hört man im Telephon eines angekoppelten Detektorkreises den musikalischen Schwebungston. Sehr geringe Kapazitätsänderungen im Kreise I lassen sich leicht durch die Änderung dieses Schwebungstones nachweisen und mit Hilfe eines dritten, von einer dritten Kathodenröhre gespeisten „Tonfrequenzkreises", der mit dem Schwebungston akustische Schwebungen gibt, mit großer Genauigkeit messen[1]). Umgekehrt kann man bei Verwendung eines Plattenkondensators im Kreise I die Änderung des Plattenabstandes mit einer Genauigkeit von 10^{-8} cm und mehr messen[2]).

Um diese Methode auf Winkelmessungen anzuwenden, braucht man nur die bewegliche Platte des von mir angegebenen Drehkondensators[3]) mit dem Dreharm des betreffenden Instrumentes zu verbinden, und ihr die feste Platte in einem passenden Abstand gegenüber zu stellen (vgl. Figur). Je geringer dieser Abstand, und je länger die von der Drehachse aus gemessene Kante des Kondensators, um so größer die Empfindlichkeit. Für die Berechnung vergleiche man die angezogene Arbeit von Pungs und Preuner[1]). Eine Überschlagsrechnung ergibt, daß ein Kondensator von 1 cm Kantenlänge bei einer Drehung um eine Winkelsekunde und bei anfänglich 1 mm Plattenabstand eine Kapazitätsänderung von $25 \cdot 10^{-6}$; bei 1/10 mm Plattenabstand die zehnfache Änderung erleidet. Wenn die Frequenz der elektromagnetischen Schwingung 10^6, und die Frequenz des Schwebungstones 1000 beträgt, so ändert sich der Schwebungston ungefähr um eine Oktave pro Winkelminute bzw. pro 6 Sekunden. In der Tat lieferte ein Versuch mit einem Präzisionsspektrometer (eine Kondensatorplatte mit dem Tisch, die andere mit dem



1) Pungs und Preuner, diese Zeitschr. 20, 543, 1919.
2) Whiddington, Phil. Mag. 40, 634, 1920.
3) A. Pflüger, diese Zeitschr. 18, 13, 1917.

Fernrohr verbunden) bei ganz roher Einstellung eine Oktave für 7 Sekunden. Man konnte also die Sekunden ungefähr durch die Reihenfolge der ganzen Töne der Tonleiter messen. Wendet man den Tonfrequenzkreis und weitere, auf der Hand liegende Verfeinerungen an, so gelangt man zur Messung von sehr kleinen Bruchteilen einer Sekunde, denen bei dem Spektrometer sehr bald die Reibungs- und Verbiegungsfehler eine Grenze setzen.

Verbindet man die bewegliche Kondensatorplatte etwa mit dem Gehänge eines Galvanometers, so wird man die Meßbarkeit kleiner Ströme erheblich erweitern können, bis ihr die Erschütterungsbewegung des Gehänges ein Ziel setzt. Die Verringerung der Empfindlichkeit des Galvanometers durch die elektrostatischen Kräfte zwischen den Kondensatorplatten kann man bis zu einem gewissen Grade verhindern, wenn man die elektromagnetische Schwingung genügend, nötigenfalls bis zur Nichthörbarkeit des Schwebungstones schwächt, und diesen durch eine Verstärkungsanordnung verstärkt.

Die Abänderungen der Methode je nach den gegebenen Verhältnissen bedürfen keiner Auseinandersetzung. Man kann statt der Kapazität auch die Selbstinduktion des Schwingungskreises (Klapp- oder Drehvariometer) oder auch beide zugleich beeinflussen. Auch lassen sich alle Arten von Drehkondensatorformen verwenden. Doch ist die oben angegebene Form offenbar die empfindlichste.

Bonn, im November 1920.

(Eingegangen 1. Dezember 1920.)

Die Energiesätze und der kosmogonische Prozeß.

Von Alfred Schack.

Gemäß dem Energiehaltungssatze und dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik findet eine Zerstreuung der Energie des Weltalls statt, derart, daß die vorhandenen verschiedenartigen Formen der freien Energie sich allmählich in ausgeglichene Wärme umwandeln: Die Entropie des Weltalls strebt einem Maximum zu.

Kann man nun auch begründete Zweifel an der unbedingten Anwendbarkeit des 2. Hauptsatzes auf das gesamte Weltall hegen, weil unendliche Größen in das Problem eingehen und auch entropiefeindliche Faktoren auftreten, so scheint doch seine Anwendbarkeit auf ein einzelnes Sonnensystem festzustehen. Vom Urnebel bis zur erlöschenden

Sonne bildet das Sternendasein ein Schulbeispiel der Herrschaft des 2. Hauptsatzes. Der Erhaltungssatz scheint sogar in allen Fällen seine unbedingte Gültigkeit zu behalten.

Im Makrokosmos der Weltkörper herrschen die Energiesätze ohne Zweifel.

Unter bestimmten, durch die Ergebnisse der Physik und Astrophysik wahrscheinlich gemachten Annahmen aber ergibt sich, daß in dem Mikrokosmos der Atome parallel mit dem kosmogonischen Prozeß, aber energetisch entgegengesetzt ein zweiter Prozeß verläuft. Während einerseits bei der Zusammenziehung die potentielle Energie der Moleküle des Weltkörpers gemäß dem 2. Hauptsatz einem Minimum zustrebt, häuft sich andererseits gleichzeitig neue Energie in den sich entwickelnden Atomen als singulären Stellen höchster potentieller Energie an.

Zu dieser Anschauung wird man vor allem durch die Tatsache geführt, daß in den kosmischen Nebeln nur Stoffe von kleinstem Atomgewicht (Nebulium, Wasserstoff) auftreten. Wenn Arrhenius dies darauf zurückführt, daß die spezifisch schwereren Stoffe deshalb spektral-analytisch nicht nachweisbar sind, weil sie sich dem Massenmittelpunkt näher befinden, so ist dem entgegen zu halten, daß es schließlich auch Nebel geben müßte, bei denen diese Scheidung noch nicht vollendet ist, und zweitens, daß bei den fertigen Sonnen wegen ihrer viel ausgesprocheneren Gravitation erst recht keine schweren Stoffe in der Atmosphäre vorhanden sein dürften, was aber in Wirklichkeit nicht zutrifft.

Weiter scheint aus den Erscheinungen der Radioaktivität zu folgen, daß die Atome allgemein eine um so größere innere Energie besitzen, je schwerer sie sind. Wir müssen demnach weiter annehmen, daß die potentielle Energie der Atome während des kosmogonischen Prozesses steigt, wie oben schon behauptet. Dies aber steht im Gegensatz zum 2. Hauptsatz, der also anscheinend für den atomellen Mikrokosmos seine Gültigkeit verliert, wenigstens dann, wenn die neu entstehende Atomenergie E größer ist, als die Differenz der im ganzen umgesetzten potentiellen Energie U_p, der gleichzeitig ausgestrahlten U_s, und der zur Temperaturerhöhung verwendeten Energie U_w.

Die Gültigkeit des 2. Hauptsatzes ist also an die Bedingung geknüpft

$$U_p - U_s - U_w \geqq E.$$

Ist aber diese Ungleichung nicht erfüllt, so fällt nicht nur der 2., sondern gleichzeitig auch der 1. Hauptsatz der Thermodynamik und sogar ganz allgemein der Satz von der Erhaltung der Energie.

Dazu folgende Überschlagsrechnung:

Nach A. Ritter [Annalen der Physik und Chemie 1878 ff.; Band 5, 6, 7, 8] ist die Abnahme der potentiellen Energie eines Weltkörpers von der Größe der Sonne, der sich aus dem Zustande unendlicher Zerstreuung zu einer Kugel vom Sonnenradius zusammenzieht,

$$U_p \sim 1{,}02 \cdot 10^{41} \text{ cal}.$$

Hiervon werden während der Kontraktion nach A. Ritter 18,7 Proz. ausgestrahlt, so daß also der Energieinhalt der Sonnenkugel

$$U_p - U_s \sim 8{,}3 \cdot 10^{40} \text{ cal}$$

beträgt.

Macht man nun die willkürliche Annahme, daß die durchschnittliche Temperatur der Sonne 10^6 Grad, ihre spezifische Wärme gleich 0,5 ist, was beides wohl nicht zu hoch gegriffen ist, so folgt für den Energieüberschuß

$$U_p - U_s - U_w = 8{,}3 \cdot 10^{40} - 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{33} \text{ cal},$$

wobei die Masse der Sonne zu $1{,}96 \cdot 10^{33}$ g angenommen ist. Daraus folgt

$$U_p - U_s - U_w = 8{,}2 \cdot 10^{40}.$$

Nach dem 1. Hauptsatz müßte nun mindestens diese Energie ausreichen, die gesamte Entwicklung der Materie zu ermöglichen.

Ein Gramm Radium entwickelt unter Zugrundelegung der Untersuchungen von St. Meyer und Hess (Wien. Ber. **121**, 1912) während seines Zerfalls bis *Ra F* einschließlich

$$3{,}7 \cdot 10^9 \text{ cal},$$

wobei sein Atomgewicht um 19,3 Einheiten = 8,5 Proz. des ursprünglichen Atomgewichts abnimmt. Beständе also die Sonne aus Radium, so hätte zur Entwicklung dieses Stoffes aus *Ra G* = Blei folgende Energie gehört:

$$E_{ra} = 3{,}7 \cdot 10^9 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{33} = 7{,}25 \cdot 10^{42} \text{ cal},$$

dies ist der 87,7fache Betrag von U_p.

Hierzu ist nun zunächst zu bemerken, daß zwar keineswegs auch nur ein nennenswerter Bruchteil der Sonne aus Stoffen besteht, deren Atomgewicht dem des Radiums nahekommt. Dafür aber fällt ins Gewicht, daß das Radium selbst auch keineswegs bis auf Wasserstoff oder Nebulium zerfällt, um die oben erwähnte Energie freiwerden zu lassen.

Nehmen wir nämlich (willkürlich) an, daß die beim radioaktiven Zerfall entwickelte Energie proportional dem Atomgewicht der Zerfallskomponenten sei, und daß das durchschnittliche Atomgewicht der Sonne 24 betrage, so gelten folgende Beziehungen:

Die Energie des Radiums wäre

$$E_{ra}' = c \cdot 207{,}1 \cdot 19{,}3 \text{ cal},$$

wobei c den Proportionalitätsfaktor, 207,1 das Atomgewicht des $Ra\,G$ und 19,3 die Summe der Atomgewichte der sonstigen Zerfallsprodukte darstellen.

Für den Zerfall eines Stoffes vom Atomgewicht 24 gilt dann

$$E_1 = c \cdot 12 \cdot 12,$$

wenn er zunächst zur Hälfte zerfällt. Die beiden entstehenden Komponenten mit dem Atomgewicht 12 enthalten aber je wieder

$$E_2 = c \cdot 6 \cdot 6 \text{ cal},$$

jede der 4 Komponenten der E_2

$$E_3 = c \cdot 3 \cdot 3 \text{ cal}$$

und diese 8 Komponenten der E_3 endlich

$$E_4 = c \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \text{ cal}$$

Freilich kann man sich den Stoff auch nach anderen Verhältnissen zerfallen denken; das gibt dann einen nicht wesentlich verschiedenen Betrag. Der Gesamtenergieinhalt eines Stoffes vom Atomgewicht 24 beträgt demnach

$$E_{24} = E_1 + 2E_2 + 4E_3 + 8E_4 = c \cdot 270 \text{ cal}$$

Dies ist rund der siebente Teil von E_{ra}'.

Unter diesen Annahmen würde also die potentielle Energie des Urnebels trotzdem noch nicht den 12. Teil der Materie zur Entwicklung bringen können, die auf der Sonne entwickelt ist.

Als Unsicherheiten bleiben hier allerdings die beiden recht willkürlichen Annahmen, die jedoch auch nicht ganz unwahrscheinlich sein dürften.

Besonders erscheint das mittlere Atomgewicht der Sonne niedrig gegriffen, wenn man bedenkt, daß die Erde, deren Materie von gleichem Alter ist, wie die der Sonne, angesichts ihres hohen spezifischen Gewichts wohl ein erheblich über 24 liegendes mittleres Atomgewicht aufweist.

Der Fehlbetrag an Energie würde aber noch vergrößert, wenn man in Rechnung stellt, daß in den früheren Stadien der Kontraktion die Masse der Sonne noch nicht so groß war wie heute, da sich ja die Materie noch nicht so weit entwickelt hatte, und demgemäß die umgesetzte potentielle Energie einen kleineren Wert hat.

Auf diese Weise könnte man sich schließlich auch die ganze Energie

$$U_p - U_s$$

zur Temperaturerhöhung der Sonne verbraucht denken, ohne zu phantastisch hohen Temperaturen von der Größenordnung 10^8 zu gelangen, zu denen A. Ritter naturgemäß gelangen mußte.

Vielleicht ist in dieser Entwicklung der Materie auch der Grund für das anfängliche ausgesprochene Fehlen der gravitierenden Kräfte zu suchen, das F. Nölke [Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems, S. 96 ff. Berlin 1908] nach seiner Theorie des kosmogonischen Prozesses fordern zu müssen glaubt.

Wenn also die gemachten Annahmen zutreffen, und es ist zu betonen, daß sie teilweise mehr oder weniger willkürlich sind, so bleibt nichts übrig, als die Entwicklung der Materie selbst außerhalb der Hauptsätze der Energie zu stellen; es entsteht dann die Aufgabe, neue Gesetze aufzustellen, die die alten, in ihrem Bereich zweifellos gültigen Energiesätze als Sonderfälle enthalten. Dazu aber wird notwendig sein, die Anschauung vom Wesen der Energie und damit wohl der Materie wesentlich zu vertiefen, vielleicht zu einem der Energie übergeordneten Begriff zu kommen und so vielleicht den Schleier, der auf der Urentstehung der kosmischen Nebel und ihrer Energie ruht, ein wenig zu lüften, dann aber auch das Problem von der Entropie des Weltalls endgültig zu entscheiden.

(Eingegangen 15. November 1920.)

Bemerkung zur Anwendbarkeit des Quadrantelektrometers.

Von Gerhard Kirsch.

In der Literatur zum Quadrantelektrometer findet sich unseres Wissens allgemein als äußerste Grenze der Empfindlichkeit, bis zu welcher man dieses Instrument verwenden kann, zwei- bis viertausend Skalenteile pro Volt angegeben. Der Versuch, durch Vergrößerung des Nadelpotentiales die Empfindlichkeit zu steigern, scheitert meist daran, daß die Nadel nicht ganz genau symmetrisch gebaut ist und labil wird, während bei Verringerung der Direktionskraft sich die Nadel kriechend der Gleichgewichtslage nähert und darum die Angaben des Instrumentes unzuverlässig werden.

Diese Erfahrungen beziehen sich aber nur auf die Anwendung des Quadrantelektrometers zum Messen von Potentialen. Mißt man dagegen Ladungen, z. B. Ionisationsströme, also wachsende Ladungen, so kann man die Empfindlichkeit durch Verringern der Direktionskraft um etwa eine 10-Potenz steigern. Bei einer solchen Messung, bei welcher man also die Bewegungsgeschwindigkeit der Nadel mißt,

ist ja das Meßquadrantenpaar isoliert. Führt man diesem isolierten System eine Ladung zu, so daß sich die Nadel in Bewegung setzt, um sich in die neue Gleichgewichtslage zu begeben, so ist die Kraft, welche an der Nadel bei einer gewissen Entfernung von der Ruhelage angreift, viel größer, als wenn das Meßquadrantensystem von vornherein auf das der neuen Gleichgewichtslage entsprechende Potential gebracht und auf diesem konstant gehalten wird, denn, da sich bei Bewegung der Nadel ja die Kapazität des Meßquadrantensystems ändert, so bewirkt die zugeführte Ladung zunächst vor Erreichung der neuen Gleichgewichtslage eine größere Erhöhung des Potentials in dem Maße, als

$$\frac{\partial W}{\partial q} \text{ bei konstantem } e > \frac{\partial W}{\partial q} \text{ bei konstantem } V$$

ist (W Gesamtenergie des Systems: Nadel + Quadranten, q eine die Lage des Systems angebende Koordinate, e und V Ladung und Potential des Meßquadrantensystems).

Der Unterschied der Kraft, die bei bestimmter Elongation auf die Nadel wirkt, einerseits, wenn das Meßquadrantensystem auf konstantem Potential gehalten wird, andererseits, wenn es isoliert ist, scheint nun tatsächlich recht bedeutend zu sein. Es wurde eine Nadelladung von ca. 100 V (Krügerbatterie von 100 Elementen) bei einer Suspension an 6 cm langem Quarzfaden in Anwendung gebracht. Zur Beurteilung der Direktionskraft sei angegeben: Die Torsionsschwingungsdauer eines gewöhnlichen Aluminiumhäkchens an diesem betrug 1½ sec für jede Halbschwingung. Die schließlich erreichte Empfindlichkeit betrug 34 000 Skalenteile pro Volt. Während sich die Nadel bei Potentialmessungen sehr träge bewegte, reagierte sie bei Strommessung sehr flink. Ein Versuch, das Verhältnis der beiden Kräfte zu bestimmen, wurde so ausgeführt, daß durch momentanes Schließen des Kontaktes das Meßquadrantensystem auf ein bestimmtes Potential gebracht wurde. Die Nadel bewegte sich dann im ersten Moment gerade so schnell, wie bei dauerndem Schluß, kam aber schon bei einem 8mal kleineren Ausschlag ins Gleichgewicht. Die Ladung also, die einem Ausschlag q entsprach, bewirkte bei Nullstellung der Nadel die 8fache Potentialerhöhung gegenüber der dem Ausschlag q entsprechenden. Da sich die Nadel bei Strommessung somit der konstanten Geschwindigkeit nicht kriechend nähert, dürfte in einem Empfindlichkeitsbereich, wo das Quadrantelektrometer als Potentialmeßinstrument nicht mehr verwendbar ist, dasselbe als Strommeßinstrument doch noch verwendbar sein.

Eingehendere Erfahrungen in dem erwähnten Meßbereich wurden nicht gemacht, da die ursprünglich beabsichtigte Arbeit, eine Untersuchung der Eigenaktivität sog. nicht aktiver Elemente, wegen abnorm großer natürlicher Zerstreuung im hiesigen Institut aufgegeben werden mußte. Die NZ betrug 40 bis 50 Ionen pro cm³sec, und hatte ihre Ursache hauptsächlich, wie durch verschiedene Versuche festgestellt wurde, in entsprechendem Emanationsgehalt der Luft, der etwa 3- bis 4mal so groß war als im Durchschnitt in Mitteleuropa. Ein Grund ist vielleicht, daß beim Bau des Institutes zum Betonmischen Granitgrus als Sand Verwendung fand, in dem die gegen Verwitterung widerstandsfähigen Uranmineralien des Urgebirges sehr angereichert sind; solchen Umständen könnte man künftig bei Errichtung von Gebäuden für physikalische Zwecke Aufmerksamkeit schenken.

Uppsala, Physikalisches Institut der Universität, im September 1920.

(Eingegangen 15. November 1920.)

Die kritische Temperatur des Quecksilbers.

Von G. Meyer.

Eine Bestimmung der kritischen Temperatur des Quecksilbers läßt sich auf Beobachtungen der Oberflächenspannung α zwischen den Temperaturen 20° und 367° gründen, welche von Hagemann[1]) ausgeführt sind. Diese an schwingenden Strahlen im Vakuum gemachten Beobachtungen (Tab. I), welche die Oberflächenspannung gegen Quecksilberdampf liefern, werden durch den Ausdruck

Tabelle I.

t	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
20°	472,6	471,6
74,5	463,8	461,8
99	456,5	456,7
146	444,4	445,7
195	432,2	432,7
252	415,7	415,6
295	401,3	401,2
353	378,6	379,5
367	373,8	373,9

$$\alpha = 474{,}7 - 0{,}148\,t - 0{,}000344\,t^2 \ \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \quad (1)$$

1) Hagemann, Über die Oberflächenspannung geschmolzener Metalle, Diss. Freiburg i. Br., 1914.

Tabelle II.

1		2	3	4	5	6	7	8	9
t^0 C	T abs.	α $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	$\alpha\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3}$	$\frac{d}{dt}\left(\alpha\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3}\right)$	y	Anzahl Doppelmol. in Proz.	x	K	$RT^2\frac{d\log\text{nat}k}{dT}$
20	293	471,6	2838,0	— 0,62	1,133	13,3	0,765	0,338	1431
40	313	468,2	2824,2	— 0,81	1,118	11,8	0,789	0 398	1491
60	333	464,4	2807,5	— 0,75	1,105	10,5	0,811	0,468	1790
80	353	460,5	2790,9	— 0,99	1,091	9,1	0,833	0,557	2121
100	373	456,2	2771,3	— 0,86	1,079	7,9	0,854	0,667	2885
120	393	452,0	2752,4	— 1,04	1,066	6,6	0,875	0,815	2380
140	413	447,2	2730,0	— 1,29	1,056	5,6	0,892	0,977	3838
160	433	442,0	2704,4	— 1,29	1,047	4,7	0,911	1,233	3855
180	453	436,8	2679,4	— 1,25	1,037	3,7	0,928	1,574	7750
200	473	431,2	2652,4	— 1,53	1,029	2,9	0,946	2,168	3315
220	493	425,2	2621,2	— 1,62	1,023	2,3	0,955	2,648	5890
240	513	419,0	2588,8	— 1,58	1,017	1,7	0,966	3,572	7310
260	533	412,7	2556,5	— 1,57	1,012	1,2	0,977	5,382	18490
280	553	406,4	2523,0	— 1,87	1,006	0,6	0,988	10,515	15190
300	573	399,5	2485,3	— 1,80	1,004	0,4	0,994	21,200	—
320	593	392,3	2417,2	— 2,99	1,0009	0,09	0,999	—	—
340	613	384,6	2405,0	— 2,14	1,0014	0,14	0,997	—	—
360	633	376,8	2362,2	—	1,0003	0,00	1,000	—	—

so dargestellt, daß die größte Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung 0,4 Proz. beträgt. Mit Hilfe der Gleichung (1) sind von 20^0 zu 20^0 fortschreitend die in Tabelle II Kol. 2 wiedergegebenen Oberflächenspannungen berechnet; Kol. 3 enthält die molekularen Oberflächenenergien und Kol. 4 deren Temperaturkoeffizienten. Dieser nimmt von $-0,62$ bei $t=20^0$ ab bis $-2,14$ für $t=340^0$. In bekannter Weise folgt aus diesen Daten, daß bei $t=340^0$ das Hg aus Molekülen vom Molekulargewicht 200 besteht, während bei niedrigeren Temperaturen eine teilweise Assoziation zu Doppelmolekülen stattgefunden hat. Bezeichnet man den Assoziationsfaktor mit y, so gilt für alle Temperaturen

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\left(\frac{yM}{\varrho}\right)^{2/3}\right)=-2,121\,,$$

wo 2,121 der an vielen Flüssigkeiten beobachtete Mittelwert des Temperaturkoeffizienten der molekularen Oberflächenenergie ist und y von der Temperatur abhängt. Aus dieser Gleichung folgt

$$\alpha\left(\frac{yM}{\varrho}\right)^{2/3}=C-2,121\,t. \qquad (2)$$

Für $t=340^0$ ist $y=1$ und ergibt sich mit Benutzung des Wertes aus Tab. II.

$$C=\alpha\left(\frac{M}{y}\right)^{2/3}+2,121\times 340=2405,0+720,0$$

$$C=3125\,.$$

Bei der kritischen Temperatur t_k ist $\alpha=0$ und 2 geht über in

$$C=2,121\,t_k$$

und

$$t_k=\frac{3125}{2,121}=1474^0.$$

Aus (2) folgen für jede Temperatur die in Kol. 5 zusammengestellten Werte von y, und wenn man annimmt, daß Hg aus einfachen und Doppel-Molekülen besteht, die in Kol. 5 aufgeführten Werte von

$$y-1=\frac{n_1}{n_1+n_2}\,,$$

wo n_1 und n_2 die Zahl der Doppelmoleküle und der einfachen bedeuten (Kol. 6). Geht man von einem Doppelmolekül aus, so sind die einfachen Moleküle durch Dissoziation entstanden; die Dissoziationsgrade $x=\frac{2-y}{2}$ sind in Kol. 7 zusammengestellt. Zwischen den einfachen und Doppel-Molekülen besteht ein Gleichgewicht, dessen Konstanten bei den verschiedenen Temperaturen nach der Formel

$$K=\frac{4x^2}{1-x}\,\frac{\varrho}{400}$$

berechnet sind, wo ϱ die Dichtigkeit des Hg bedeutet. Die Werte von K sind in Kol. 8 zusammengestellt. Aus diesen Zahlen folgen schließlich die in Kol. 9 enthaltenen Dissoziationswärmen mittelst der Beziehung

$$U=RT^2\,\frac{d\log\text{nat}\,K}{dT}\,.$$

Aus den Zahlen ist ersichtlich, daß das Hg einen mit wachsender Temperatur abnehmenden Gehalt von Doppelmolekülen besitzt, daß das Fortschreiten der Dissoziation mit einem mit

der Temperatur steigenden Aufwand von Wärme verbunden ist, und daß in der Nähe des Siedepunktes das flüssige *Hg* einatomig ist wie der *Hg*-Dampf. Für die kritische Temperatur folgt aus dem kapillaren Verhalten des *Hg* der Wert $t_k = 1474^0$. Diese Zahl ist in naher Übereinstimmung mit der Angabe von Frl. Julie Bender[1]), welche auf Veranlassung von Prof. Königsberger *Hg* in geschlossenen Quarzröhren erhitzte und fand, daß die kritische Temperatur höher als 1430^0 sei und in der Nähe von 1500^0 liege. Erwägungen theoretischer Natur haben für die kritische Temperatur niedrigere und höhere Werte als den vorstehenden ergeben. Happel[3]) findet $t_k = 1097^0$, während nach Davies[4]) u. Thorpe und Rücker[5]) diese Größe gleich 2600^0 ist und Walden[6]) die kritische Temperatur des *Hg* zu 1087^0 berechnet.

Aus den Zahlen der Kol. 4, 5, 9 erhellt, daß die auf Veranlassung des Schreibers dieser Zeilen von Herrn Hagemann ausgeführten Messungen noch nicht die wünschenswerte Genauigkeit besitzen. Die Ursache ist in Unvollkommenheiten des Apparates und der Aufstellung zu suchen, welche bei den ersten derartigen Versuchen unvermeidlich waren. Beide konnten dank den von der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft zur Verfügung gestellten Mitteln beseitigt werden, so daß eine Wiederholung der Versuche mit wesentlich besseren optischen Hilfsmitteln und einem aus Quarzglas hergestellten Apparat ermöglicht ist.

1) Julie Bender, diese Zeitschr. **16**, 246, 1915; **19**, 410, 1918.
2) Allen W. Menzies, Journ. of Amer. Chem. Soc. **35**, 1065, 1913.
3) Happel, Ann. d. Phys. (4), **13**, 340, 1904.
4) Davies, Phil. Mag. (6), **23**, 657, 1912.
5) Thorpe u. Rücker, Journ. Chem. Soc. **35**, 1065, 1913.
6) Walden, Zeitschr. f. anorg. Chemie **112**, 225, 1920.

Freiburg i. B., Physikalisch-chemisches Institut, 19. November 1920.

(Eingegangen 3. Dezember 1920.)

Unterseitige (sekundäre) Figuren und das Wachsen oberseitiger (primärer) elektrischer Gleitfiguren.

Von Max. Toepler.

Zusammengehörige primäre Gleitspur und ihre sekundäre Figur[1]) erhält man folgendermaßen: Zwei photographische Platten G_1 und G_2 werden mit den Schichtseiten nach außen durch Zwischengießen von Alkohol oder dergleichen dielektrisch aufeinander gedichtet und dann unter Belassung einer schmalen Luftzwischenschicht *L*, vgl. Fig. 1 (*g* Glimmerklötzchen) auf eine ebene Metallplatte *B* gelegt; bei plötzlichem Anlegen hoher Spannung an den Gleitpol *P* und an *B* erhält man dann in bekannter Weise auf der Oberfläche von G_1 um *P* die gewöhnliche Büschelspur mit ihren Leuchtfäden und Ladungskanälen, gleichzeitig aber auch auf der Unterseite von G_2 die sekundäre Figur. Letztere zeigt Kurven. S. Mikola fand, „daß die Linienelemente der sekundären Kurven überall senkrecht auf der Richtung der primären Radialstreifen stehen. Die sekundären Linien sind also Trajektorien der primären", diese Sätze sind noch zu ergänzen und zu erweitern.

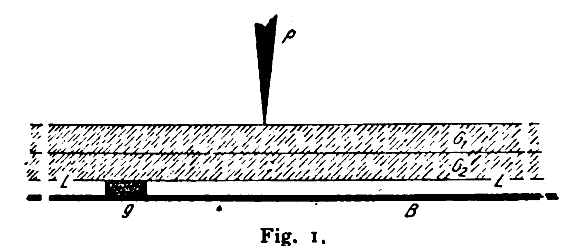


Fig. 1.

Stände dem Pole *P* auf der Unterseite statt der Metallplatte *B* ein einziger Punktpol gegenüber, so würde bei kleinem Abstande des letzteren von G_2 eine einzige zusammenhängende Büschelspur auf G_2 entstehen, bei größerem Abstande einige wenige getrennte Büschel um die Fußpunkte dicker Leuchtfäden vom Gegenpole nach G_2 hin. Bei Versuchsanordnung Fig. 1 mit Platte *B* gilt: Die sekundäre Figur wird aus Reihen von Büschelchen gebildet, die von *B* nach der Unterseite von G_2 (deren Schichtseite) gingen und sich hier jedes etwas ausbreitete. Negative Büschelchen bilden runde oder elliptische Flecke, positive Sternchen und Kometen. Diese Büschelchen können getrennt voneinander bleiben, so meist an allen Rändern sekundärer Figuren und besonders unter positiven oberseitigen Ergüssen. Negative Büschelchen schließen sich leicht zu zusammenhängenden Trajektorien des Systems der Leuchtfäden der oberseitigen Figur zusammen. Positive Büschelchen können sich je nach Ausbildung ihrer Leuchtfäden auf G_2 trajektoriell oder senkrecht dazu zusammenschließen, oder auch nach be-

1) S. Mikola, diese Zeitschr. **18**, 158, 1917 gibt in Fig. 8, 9 u. 10 Photogramme neg. u. pos. sekundärer Figuren.



den Richtungen; die gleiche sekundäre Figur kann alle drei Typen des Zusammenreihens nebeneinander zeigen. In Fig. 2 ist ein Stück

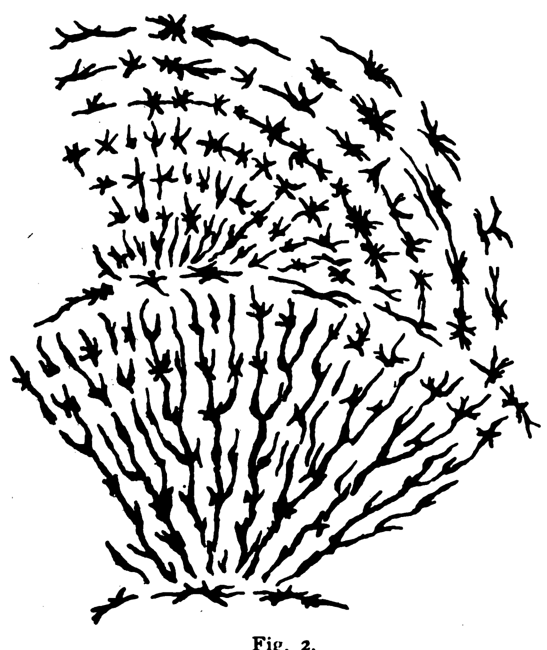


Fig. 2.

Sekundärfigur aus positiven Büschelchen unter einem negativen scharf geruckten oberseitigen Ergusse skizziert, die Büschelchen sind etwas vergrößert dargestellt[1]).

Das Entstehen der Büschelreihen der sekundären Spuren ist nach den von mir entwickelten Vorstellungen über das Wesen der Gleitprozesse[2]) leicht zu erklären. Man denke sich der Einfachheit halber die Dielektrizitätskonstante der Platten G_1 und G_2 gleich eins, wie die des Luftraums L; dann wird das elektrische Feld leicht vorstellbar, es stammt (solange seine Stärke in $L < 30$ Kilovolt: cm) ausschließlich von den Ladungen in P, im Büschel um P auf G_1 und vom Spiegelbilde beider in B. Überschreitet aber die Feldstärke senkrechts B im Spalte L den Wert 30 KV: cm, so entstehen fadenförmige Büschel durch L von B nach der Unterseite von G_2. Jedes dieser Büschel gleicht das Feld an seinem Orte in L aus und sucht es noch weiterhin seitlich auszugleichen, indem es der durch es selbst geänderten Feldrichtung an seinem Fußpunkte auf G_2 folgend von letzterem (also auf der photographischen Schicht von G_2) Leuchtfäden seitlich nach allen Richtungen hin vortreibt. Mit dem Verwachsen des primären Büschels auf der Oberseite von G_1 rückt der geometrische Ort der Feldstärke 30 KV: cm in L vor; unterhalb des Randes der primären Figur entsteht demnach überall in L ein Kranz von Büschelchen. Schiebt nun die primäre Figur das Feld unter ihrem Rande schneller vor, als die seitlichen Fortsetzungen des schon gebildeten Kranzes von Büschelchen längs der Unterseite von G_2 feldausgleichend in L folgen können, so bildet sich unter dem voreilenden Rande der primären Figur ein neuer Kranz von Büschelchen in L senkrecht zum Spalte L und es wiederholt sich dasselbe Spiel; immer neue Kränze von Büschelchen entstehen und so bildet sich die Schar von trajektoriellen Kurven der sekundären Figur. Also gilt: Die Tangente an irgendeine Kurve trajektorieller Aneinanderreihung steht senkrecht zur durchschnittlichen Wachstumsrichtung der oberseitigen Figur in dem Augenblicke, in dem deren Fadenköpfe sich oberhalb des Berührungspunktes der Tangente befanden. Kleiner Abstand der Kurven voneinander (im Spalte konstanter Dicke) folgt aus schnellem Vorrücken des oberen primären Büschels, großer Abstand aus langsamerem.

Die unter dem voreilenden Rande der Primärfigur gebildeten Büschelchen besitzen wie alle aus Büschelfäden zusammengesetzten Gebilde nur sehr kleine Hysterese erhöhter Leitfähigkeit[1]). Mit zunehmender Ausdehnung der primären Figur steigt die Ladung an jeder Stelle dieser weiter an, also steigt auch das Feld in L nach raschem Erlöschen der Büschelkränze erneut an. Dies kann zu erneuter Büschelbildung in L nach G_2 hin führen; eine zweite Serie von Büschelchen entsteht. Sie wird sich, wie leicht einzusehen, besonders leicht nachträglich in den Zwischenräumen der ersten Kranzserie bilden. Die schönen Aufnahmen von S. Mikola, Fig. 9 und 10, zeigen sehr deutlich solche zweite Büschelserien als getrennte Punktreihen oder auch wieder zu zwischen den ersteren liegenden Parallelkurven vereint. Solche Stellen der sekundären Figur bestehen dann aus abwechselnd stärkeren und schwächeren (nachträgliche Zwischenserie) Kurven. Zur Beurteilung der Wachstumsverhältnisse der primären Figur ist natürlich nur

1) In den Originalen stört etwas die diffuse Lichtwirkung der prim. und sek. Figuren aufeinander.
2) Vgl. z. B. diese Zeitschr. 21, 706, 1920.

1) Vgl M. Toepler, l. c. Abschn. III.

die erste Serie von Büscheln der sekundären Figur heranzuziehen.

Einige Messungen mit gut geruckten ausgedehnten negativen Gleitprozessen um P herum (mit Polbüschel und bis zu sechs hintereinander gereihten gleichen Ruckstufen aus fächerförmigen Teilbüscheln) mit gleichzeitig aufgenommener Sekundärfigur ließen erkennen, daß hier jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit des Vorwachsens aller Teilbüschel konstant blieb, daß aber jeder einzelne Teilerguß anfangs rascher erfolgte als an seinem Ende. Ein bestimmt quantitativer einfacher Zusammenhang zwischen Wachstumsgeschwindigkeit der primären Figur und Kurvenabstand in der sekundären besteht aber nicht; zur Bestätigung des auf andere Weise gefundenen (noch nicht veröffentlichten[1]) Gesetzes: „Die Wachstumsgeschwindigkeit von Gleitfiguren ($df:dt$ in cm:sec) ist proportional und numerisch angenähert gleich der Geschwindigkeit des Spannungsanstieges ($dP:dt$ in Kilovolt:sec) am Gleitpole" konnte die sekundäre Figur also nicht dienen.

1) Im Drucke, Archiv für Elektrotechnik, 1921.

Dresden, den 30. Oktober 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

Farbe und Brownsche Bewegung ultramikroskopischer Metallpartikel.

Von Reinhold Fürth.

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

F. Ehrenhaft[1]) und eine Anzahl seiner Schüler (D. Konstantinowsky, G. Laski[2]), I. Parankiewicz[3]) haben es mit Erfolg versucht, die Miesche Theorie der Farben des von einzelnen ultramikroskopischen Teilchen abgebeugten Lichtes zur Größenbestimmung solcher Teilchen heranzuziehen, indem sie für Teilchen aus verschiedenen Materialien (*Au*, *Ag*, *Hg*, *S*, *Se*) nach der von Mie angegebenen Methode die spektralen Ausstrahlungskurven berechneten unter der Annahme, daß die Energie des einfallenden Lichtes von der Wellenlänge unabhängig sei und die Farbe des Partikels mit dem Maximum der Ausstrahlungskurve identifizierten. Da die Farbe sich ziemlich rasch mit der Wellenlänge verändert, waren sie so imstande, aus der im Ultramikroskop beobachteten Farbe den Radius der Partikel abzuschätzen und mit anderweitigen Größenbestimmungen (Fallgeschwindigkeit und Stokes-Cunninghamsches Gesetz, Brownsche Bewegung, Lichtdruck) zu vergleichen.

1) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914; **16**, 227, 1915.
2) G. Laski, Ann. d. Phys. **53**, 1, 1917; Wiener Ber. **126** (2a), 601, 1917.
3) I. Parankiewicz, diese Zeitschr. **18**, 567, 1917; Ann. d. Phys. **57**, 489, 1918.

Wesentlich einwandfreier wurde die Methode, als G. Laski[1]) den Versuch machte, einerseits die Ausstrahlungskurven unter Zugrundelegung der spektralen Energieverteilung des zur Beleuchtung verwendeten Bogenlichtes umzurechnen, andrerseits die Farbe nicht nach dem Maximum der Kurve zu schätzen, sondern unter Verwendung der Young-Helmholtzschen Farbentheorie bzw. der von König und Dieterici beobachteten und von Exner verbesserten Grundempfindungskurven den Gehalt an den drei Grundempfindungen in dem von den Partikeln ausgestrahlten Licht zu bestimmen und die resultierende Farbe nach Farbton und Sättigung mit Hilfe des Maxwellschen Farbendreiecks festzulegen. Wie kürzlich E. Norst[2]) gezeigt hat, sind dieser Berechnung allerdings einige Versehen unterlaufen, die die berechneten Partikelgrößen systematisch verfälschten, was jedoch der Methode an und für sich keinerlei Abbruch tut.

Da jedoch bis jetzt infolge unserer mangelhaften Kenntnis der Dynamik kleiner Teilchen in einem Gase alle hierauf gegründeten Größenbestimmungen zweifelhaft sind, können selbst bei bester Übereinstimmung der oben beschriebenen Versuche die Resultate der Ehrenhaftschen Schule kaum als eine Verifikation der Mieschen Theorie angesehen werden. Ich habe daher getrachtet, von anderer Seite her diese für die Physik der Kolloide so wichtige Frage zu lösen, und zwar auf zwei ganz verschiedenen Wegen.

Der eine wurde in einer früheren Veröffentlichung des Verfassers[3]) beschritten durch die Konstruktion eines als „Spektralphotometer für Ultramikroskopie" bezeichneten Apparates, mit dem es, in allerdings zunächst ziemlich roher Weise, gelang, das von einem ultramikroskopischen Einzelteilchen abgebeugte Licht spektral zu photometrieren, und zwar sowohl für Teilchen, die in einem Gase, als auch solche, die in einer Flüssigkeit eingebettet sind. Das Ergebnis der Untersuchung an Gold- und Silberteilchen in Luft und Wasser war die Aufnahme der Strahlungskurven solcher Teilchen verschiedener Größe, die im großen und ganzen den von der Mieschen Theorie vorhergesagten Verlauf

1) G. Laski, diese Zeitschr. **19**, 369, 1918.
2) F. Norst, Wien. Ber. **129** (2a), 1920.
3) R. Fürth, Wiener Ber. **127** (2a), 119, 1918.



aufwiesen, sowie auch die Feststellung des charakteristischen Farbenwechsels beim Übergange von Luft zu Wasser als umgebendem Medium an einem und demselben Partikel in der von der Theorie vorausgesagten Größe[1]).

Diese, wie ich glaube, noch einer wesentlichen Verfeinerung fähige Methode liefert nun zwar die Gestalt der Ausstrahlungskurve, läßt aber, da die Teilchen zur Vornahme der Photometrie festsitzen müssen, zunächst nicht die Möglichkeit, auch ihre Größe bzw. den Radius dynamisch festzustellen und damit den Vergleich zwischen Experiment und Theorie erst vollständig zu machen.

Der zweite Weg, der in der vorliegenden Arbeit beschritten wird, ist dem Ehrenhaft-Laskischen sehr ähnlich, jedoch insofern, wie ich glaube, übersichtlicher, als die Beobachtung nicht an gasförmigen, sondern an flüssigen Suspensionen, Hydrosolen von *Au* und *Ag* in Wasser angestellt wurden, was den Vorteil mit sich bringt, das in Flüssigkeiten und Teilchen der verwendeten Größenordnung völlig einwandfrei gültige Stokessche Widerstandsgesetz benützen zu können.

Um einen exakten Vergleich der optischen und dynamischen Größenbestimmungen durchführen zu können, ist es notwendig, Beobachtungen an Einzelteilchen anzustellen, wie ja heute allgemein anerkannt wird, weil es sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich ist, kolloide Metalle mit sehr nahe konstanter Partikelgröße herzustellen. Da es nun aber kaum möglich sein dürfte, das Herabfallen eines Teilchens der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6} cm Durchmesser infolge seiner eigenen Schwere im Wasser zu beobachten, da diese äußerst langsame Bewegung durch die Brownsche vollständig überdeckt wird, wurde der Ausweg getroffen, an einem und demselben ultramikroskopischen Partikel gleichzeitig die Farbe und die Größe der Brownschen Bewegung für verschiedene Teilchengröße und verschiedenes Teilchenmaterial zu messen und aus der letzteren vermittels der Einsteinschen Theorie, die man wohl als gesichert ansehen kann, die Beweglichkeit und damit die Teilchengröße zu bestimmen.

2.

Um die exakten Bedingungen der Mieschen Berechnungen herzustellen (Beobachtung senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl) wurde als Ultramikroskop das Siedentopf-Zsigmondysche Spaltultramikroskop in der Anordnung von Zeiß benützt. In den Strahlengang wurde zur Vermeidung der Erwärmung des Präparates eine 20 cm lange Wasserkühlung eingeschaltet. Der Spalt wurde weit geöffnet, was zwar eine Verminderung der Kontrastwirkung und daher schwache Sichtbarkeit der Teilchen hervorrief, andrerseits aber gestattete, ein Teilchen längere Zeit zu verfolgen, ohne daß es aus dem beleuchteten Raum heraustritt.

Zur Auflösung wurde anfangs die Wasserimmersion D^* in Verbindung mit dem orthoskopischen Okular $f = 15$ cm von Zeiß verwendet, in das zum Zwecke der Messung der Brownschen Bewegung ein Okularraster mit quadratischer Netzteilung von $20 \cdot 20$ Feldern eingesetzt war. Die Vergrößerung dieses optischen Systems betrug 650fach lin. die Num. Ap. 0,75, einem Teilstrich des Mikrometers entsprach die objektive Länge $1{,}36 \cdot 10^{-3}$ cm.

Da jedoch, wie bereits Siedentopf[1]) hervorgehoben hat und der Verfasser[2]) bestätigen konnte, zur einwandfreien Erkennung der Farben die Benützung von Apochromaten mit hoher Apertur nötig ist, wurde später zu dem apochromatischen Trockensystem 4 mm Äquiv. Brennweite N. A. O. 95, in Verbindung mit dem Komp. Okular 18 von Zeiß übergegangen, welches optische System etwa 1125fach vergrößert. Das verwendete Okularrastrum hatte $50 \cdot 50$ Teile von 0,1 mm Länge, denen die objektive Größe $3{,}72 \cdot 10^{-4}$ cm entsprach.

Die Verwendung des letztgenannten Objektivs bot überdies noch den Vorteil, vermittels der Korrektionsfassung immer genau sphärisch korrigieren zu können (eine ebenfalls zur Erlangung brauchbarer Bilder unbedingt nötige Forderung). Trotz Verwendung sehr dünner Deckgläser gelang es jedoch anfangs nicht, richtig zu korrigieren, das Siedentopfsche Kriterium (l. c.) deutete immer auf zu große Deckglasdicke, was dem Umstande zuzuschreiben war, daß sich dem Objekt immer noch eine Wasserschicht endlicher Dicke vorlagerte. Dies verschlechterte die empfindliche Korrektion des Objektivs so stark, daß selbst das von Siedentopf (l. c. S. 19) vorgeschlagene Mittel, nämlich Verkürzung des Tubus, wegen zu großer Länge des äußeren Tubusrohres versagte. Durch Konstruktion eines kürzeren Rohres gelang es schließlich, das Okular genügend tief zu verlegen, um die Korrektion vollständig zu machen.

Eine weitere Schwierigkeit bestand darin,

1) Was die Gestalt der Teilchen betrifft, konnte ich a. a. O. zeigen, daß sich durch Polarisationsbeobachtungen Abweichungen von der Kugelgestalt leicht feststellen lassen.

1) H. Siedentopf, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 6, 1910.

2) R. Fürth, Wiener Ber. **127** (2a), 128, 1918.



für das Kolloid eine geeignete Kuvette ausfindig zu machen, welche es gestattete, die bei dem kleinen freien Objektabstand des Objektivs nötige Führung des Beleuchtungskegels in unmittelbarer Nähe des Objektivs vorzunehmen. Eine solche wurde schließlich in der Zeißschen Kuvette für Ultramikroskopie gefunden, die aus einem auf einen Objektträger gekitteten Halbring aus Quarz besteht, der durch ein Planfenster seitlich abgeschlossen ist und die mit einem halbkreisförmig geschnittenen sehr dünnen Deckglas mit einer Spur Fett als Bindemittel von oben so abgeschlossen war, daß den gestellten Anforderungen genügt werden konnte. Diese Kuvette war mit geeigneten Klammern an einem kleinen, genau horizontal justierten Hartgummitischchen befestigt, dessen Fuß in die Kondensorfassung des Mikroskopes paßte, von dem Objekttisch und Kondensor vorher entfernt worden waren. Auf diese Weise konnte das Tischchen durch die mikrometrische Höhenverstellung des Kondensors gehoben und gesenkt und dadurch der Lichtkegel im Präparat in geeigneter Entfernung von der Deckplatte eingestellt werden.

3.

Die Metallkolloide wurden durch Zerstäubung im elektrischen Gleichstromlichtbogen, zwischen Gold- bzw. Silberelektroden unter Wasser nach der Bredigschen Methode hergestellt, ohne Zusatz von Alkali, um völlig definierte Substanz zu haben. Das so hergestellte *Ag*-Sol hatte im durchfallenden Lichte eine gelbbraune, das *Au*-Sol eine blauviolette Farbe und enthielt Teilchen aller möglichen Größen, die sich im Ultramikroskop durch ihre verschiedene Farbe, Intensität und Lebhaftigkeit der Brownschen Bewegung zu erkennen gaben. Zur Beobachtung wurden die Sole stark mit Wasser verdünnt, um nur wenige Teilchen im Gesichtsfeld zu haben.

Zur objektiven Festlegung der Farben der Partikel wurde neben dem Mikroskop ein König-Martenssches Spektralphotometer aufgestellt, dessen Okularnikol durch eine Lupe ersetzt worden war, so daß im Gesichtsfelde ein monochromatischer Streifen zu sehen war, dessen Farbe der des beobachteten Teilchens möglichst gleich gemacht wurde. Die zu dieser Farbe gehörige Wellenlänge ließ sich dann an der Skala des Instrumentes direkt ablesen. Der Spalt des Photometers empfing hierbei das Licht durch Vermittlung eines Spiegels von der Bogenlampe des Ultramikroskops. Diese Art der Festlegung des Farbtones dürfte eine größere Genauigkeit bieten als die von der Ehrenhaftschule angewendete Vergleichung mit einer Farbentafel.

Die Messung der Brownschen Bewegung erfolgte nach der vom Verfasser angegebenen[1]) und bereits wiederholt beschriebenen[2]) Methode der Messung „doppelseitiger Erstpassagezeiten", indem eine Anzahl von Passagen durch eine der Scharen von Parallellinien des Rasters abgezählt und die dazu benötigte Zeit T mit der Stoppuhr gemessen wurde. Dann ist die sogenannte „mittlere doppelseitige Erstpassagezeit" $\vartheta = \frac{T}{n}$, und aus ihr berechnet sich der Diffusionskoeffizient D nach der Formel

$$D = \frac{b^2}{\vartheta} \quad (1)$$

wo b die Gitterkonstante des Rasters bedeutet.

Aus D läßt sich dann die Beweglichkeit B nach der Einsteinschen Formel entnehmen

$$D = \frac{R}{N} T \cdot B \quad (2)$$

(R: absolute Gaskonstante, N: Loschmidtsche Zahl, T: absolute Temperatur)
und aus B folgt der Partikelradius nach dem Stokesschen Gesetz

$$B = \frac{1}{6\pi\zeta a} \quad (3)$$

(ζ: Koeffizient der inneren Reibung des Wassers).

Eine schwer zu vermeidende Störung bestand in der leichten Entstehung von Konvektionsströmungen in der Kuvette, obzwar deren Volum so klein als möglich gemacht worden war. Offenbar entstehen sie durch äußerst kleine Temperaturunterschiede, die nach Tunlichkeit dadurch vermieden wurden, daß nach Einfüllung der Kuvette immer erst eine Zeitlang gewartet und auch dann immer nur gemessen wurde, wenn keine Konvektionsströmung zu bemerken war. Das Auftreten einer solchen verrät sich nämlich sofort durch ein entschiedenes Wandern der Teilchen nach einer Richtung, das jede Messung nach unserem Verfahren illusorisch macht. Es ist nicht ganz ausgeschlossen, daß sich manchen Messungen dennoch eine schwache Konvektion überlagert haben sollte, jedoch ist gegenüber einer solchen die Formel (1) sehr wenig empfindlich, was einen weiteren Vorteil bei ihrer Anwendung bedeutet. Erwähnung möge schließlich noch finden, daß in der Regel die Brownsche Bewegung senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl beobachtet wurde, da sich in der Richtung des Strahles Konvektion viel schwerer vermeiden ließ.

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. **53**, 183, 1917.
2) R. Fürth, Ann. d. Phys. **59**, 409, 1919; Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **16**, 327, 1919; Zeitschr. f. Phys. **2**, 251, 1920.

4.

Die Ermittlung der Mischfarbe des von den Teilchen seitlich ausgestrahlten Lichtes erfolgte nun auf folgende Weise. Nach den Messungen von Lummer[1]) nach der Methode der logarithmischen Isochromaten und denen von Senftleben und Benedikt[2]) aus den optischen Konstanten der Kohle ergibt sich, daß die Strahlung des Kraters der Bogenlampe eine sogenannte „graue" Strahlung ist, d. h. eine solche, die dem Verlaufe der Strahlungskurven nach, nicht aber ihrem Absolutwerte dem Strahlungsgesetze des schwarzen Körpers gleichkommt.

Senftleben und Benedikt geben eine der Planckschen Formel nachgebildete Formel für die Strahlung des Graphits an, welche Modifikation der Kohle wahrscheinlich im positiven Bogenkrater vorliegt, die so lautet

$$\varepsilon = a c_1 \lambda^{-4} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} + b c_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \qquad (4)$$

mit folgenden Werten für die Konstanten

$a = -312{,}2$, $b = 0{,}651$, $c = 3{,}72 \cdot 10^{-5}$,
$c = 1{,}44$.

In dem von uns verwendeten Wellenlängenbereich

$$\lambda = 350 \quad \text{bis} \quad \lambda = 750\ \mu\mu$$

und für die wahre Temperatur des positiven Kraters der Bogenlampe von 4200° abs. folgt hieraus, daß man mit einem Fehler von rund 2 Proz. im Mittel das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen kann, was bei der ohnehin unsicheren Schätzung der Temperatur und des Einflusses der Koronastrahlung keinen wesentlichen Fehler hereinbringt. Die demnach aus dem 2. Gliede von (4) allein berechnete Strahlungsverteilung der Bogenlampe findet man in willkürlichem Maße in Tab. I und graphisch in Fig. 1 dargestellt.

Diese Energieverteilungskurve ist nun zunächst, da die Grundempfindungskurven das normale Sonnenspektrum zugrunde legen, auf dieses zu beziehen. Die Energieverteilung im Normalspektrum der Sonne wurde der Untersuchung von Langley[3]) entnommen, die ebenfalls für den benützten Wellenlängenbereich in willkürlichem Maßstabe in Fig. 1 und Tab. I eingetragen ist, welche Kurve der Energieverteilung auf der Erdoberfläche, ohne Berücksichtigung der Absorption in der Atmosphäre entspricht.

Der Quotient beider Verteilungen gibt die benötigte Beziehung der Energiestrahlung des Bogenlichtes bezogen auf die Sonne; auch diese findet man in Tabelle und Figur verzeichnet. Die Kurve steigt, wie von vornherein zu erwarten war, gegen Rot und Violett ein wenig an und hat im Grün ein Minimum, was bewirkt, daß das Bogenlicht gegenüber dem Sonnenlicht einen rötlichvioletten Stich hat.

Tabelle I.

λ	Kohlebogen	Sonne	$\frac{\text{Kohlebogen}}{\text{Sonne}} \cdot 10$
350	10,6		
375	14,6	11,3	12,9
400	18,4	23,5	7,80
450	26,6	42,3	6,30
500	34,0	57,0	5,92
550	39,1	62,5	6,25
600	42,8	62,9	6,80
650	44,5	60,2	7,38
700	44,8	55,3	8,10
750	43,9	46,8	9,38

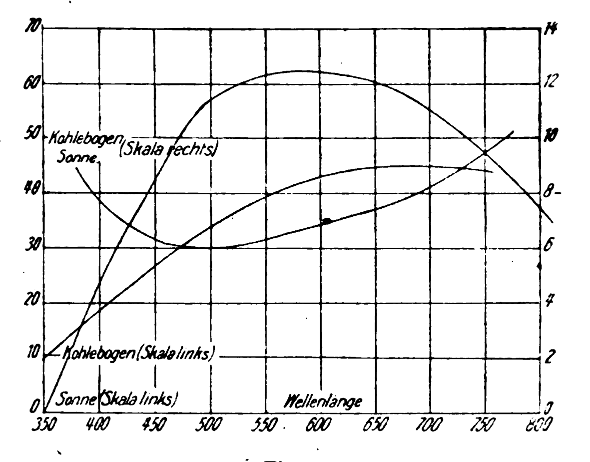


Fig. 1.

Die drei Grundempfindungskurven wurden der bereits erwähnten Arbeit von F. Exner[1]) entnommen, die in der Folge mit R (rot), G (grün) und B (blau) bezeichnet werden. Da diese auf das normale Sonnenspektrum bezogen sind, rechnen wir sie auf das Spektrum der Bogenlampe durch Multiplikation mit den Zahlen der letzten Spalte von Tab. I bzw. Benützung der Figur um. Die so umgerechneten Grundempfindungsintensitäten findet man für eine Anzahl Wellenlängen in der folgenden Tabelle II in willkürlichem Maße eingetragen.

1) O. Lummer, Verflüssigung der Kohle, Sammlung Vieweg 9/10, S. 55ff.

2) Senftleben und Benedikt, Ann. d. Phys. **54**, 65, 1917.

3) S. P. Langley, Ann. d. Phys. **19**, 226, 1883. Die verwendete Kurve entspricht Kurve I der Tafel III dieser Arbeit.

1) F. Exner, Wiener Ber. **111** (2a), 857, 1902.

Tabelle II.

λ	R	G	B
720	0,26	0,09	0,00
685	1,90	0,32	0,00
650	12,82	3,10	0,00
630	29,2	8,72	0,00
620	37,4	—	0,00
600	49,1	30,25	0,14
590	53,4	40,5	0,20
580	54,8	50,8	0,33
577	55,0	55,0	0,46
560	51,6	70,4	1,27
550	47,2	71,0	1,94
525	27,5	52,3	5,57
510	10,82	30,8	9,21
500	7,10	19,95	12,42
490	5,98	13,02	22,7
480	6,30	7,80	49,8
475	6,35	6,35	63,5
460	8,30	2,46	82,0
450	8,50	1,58	86,3
440	8,44	0,13	85,8
420	6,33	0,00	60,5
410	4,44	0,00	41,4
400	2,26	0,00	21,5

5.

Liegt nun die spektrale Energieverteilung der gegebenen Mischfarbe vor, so kann man sie zunächst durch Multiplikation mit den Zahlen der Tabelle II in die drei Grundempfindungen zerlegen, zeichnet diese in Kurvenform auf und planimetriert sie. Die so gewonnenen drei Flächeninhalte geben den Gehalt der Mischfarbe an Grundempfindung in relativem Maße. Denkt man sie sich als Gewichte in den drei Ecken des Maxwellschen Farbendreiecks angebracht, so gibt ihr Schwerpunkt den Ort der Mischfarbe im Farbendreieck, dessen Mittelpunkt das neutrale Weiß bezeichnet. In das gleiche Farbendreieck hat man ferner noch die aus Exners Tabellen folgende Kurve der Spektralfarben einzuzeichnen, wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Verbindet man nun den auf die oben beschriebene Methode gewonnenen Farbpunkt durch eine Gerade mit dem Weißpunkt, so ergibt deren Schnittpunkt mit der Kurve der Spektralfarben die Wellenlänge jener Spektralfarbe, die der vorgelegten Mischfarbe nach ihrem Farbton gleich ist[1]).

Zunächst kann man sich nun überzeugen, ob die in Tab. I durchgeführte Reduktion des Bogenlichtes auf das Normalspektrum der Sonne den wirklichen Verhältnissen entspricht, indem man den Ort der Bogenlichtfarbe im Farbendreieck aufsucht. Das geschieht durch Benützung von Tab. II durch Aufzeichnung der den Werten von R, G, B entsprechenden Kurven und deren nachheriges Planimetrieren. Auf diese Weise erhält man für die Koordinaten des Bogenlichtpunktes (Seitenlänge des Farbendreiecks 50 cm) $x = 25,0$, $y = 14,13$, in der Fig. 2 als Bo eingezeichnet. Der Punkt liegt in der Tat sehr nahe dem W-Punkte, jedoch mit einer etwas geringeren Beimischung von Grün, bzw. einem Stich ins Purpurviolette, was den wirklichen Verhältnissen, wie der Augenschein lehrt, tatsächlich entspricht.

Nunmehr kann an die Bestimmung der Mischfarben des von den Teilchen seitlich abgebeugten Lichtes geschritten werden, indem man die den verschiedenen Teilchengrößen entsprechenden Ausstrahlungskurven mittels Tab. II in die Grundempfindungen R, G, B zerlegt und nach der obigen Anweisung ihre Lage im Farbendreieck aufsucht. Zugrunde gelegt wurden die nach der Mieschen Theorie berechneten Ausstrahlungen von Au-Teilchen in Wasser nach Mie[1]) und von Ag-Teilchen in Wasser nach Müller[2]). Die Details der umfangreichen Rechnung übergehend, teile ich ihre Resultate in den folgenden beiden Tabellen III u. IV mit, die in der ersten Spalte die Teilchenradien, in der 2., 3. und 4. Spalte die relativen Gehalte an Grundempfindung, in der 5. und 6. die Koordinaten im Farbendreieck und in der 7. die aus Fig. 2 nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren ermittelten äquivalenten Wellenlängen, schließlich in der 8. Spalte die gebräuchlichen Farbenbezeichnungen nach der Helmholtzschen Terminologie enthält.

Um die Tabelle interpolieren zu können, ist es zweckmäßig, sich die Abhängigkeit der λ

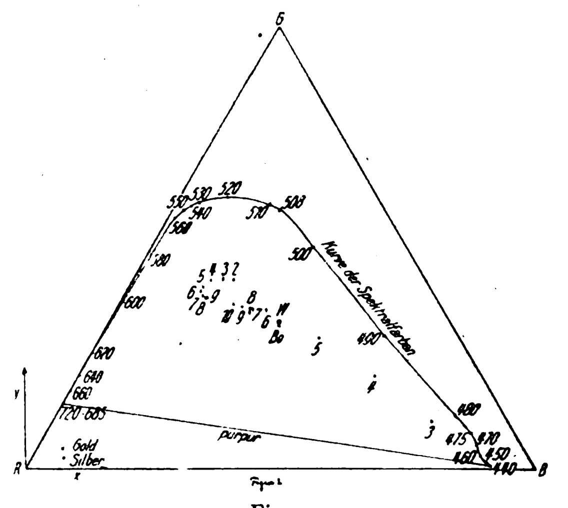


Fig. 2.

1) Eine sehr eingehende und klare Darstellung der Methode findet man bei K. W. F. Kohlrausch, diese Zeitschr. 21, 396, 1920.

1) G. Mie. Ann. d. Phys. 25, 423, 1908.
2) E. Müller, Ann. d. Phys. 35, 508, 1911.



von a graphisch darzustellen, was in Fig. 3 durchgeführt erscheint. Diese Darstellung bietet auch den Vorteil, die sich aus den Ungenauigkeiten des Verfahrens ergebenden Fehler ausgleichen zu können (siehe die ausgezogene Kurve in Fig. 3). Auch diese ausgeglichenen, bzw. inter- und extrapolierte Werte sind in den Tabellen aufgenommen.

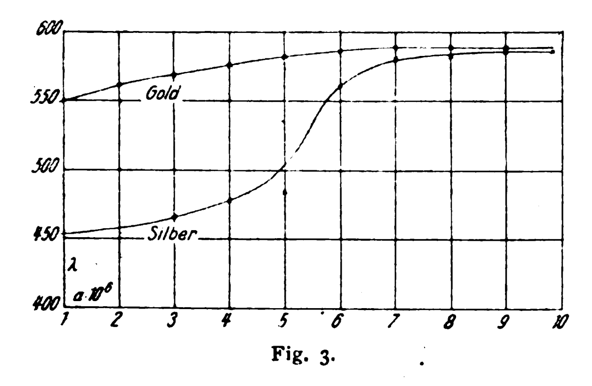


Fig. 3.

Tabelle III.
Gold in Wasser.

$a \cdot 10^6$	R	G	B	x	y	λ	Farbe
9	445	391	164	17,96	16,95	588	goldgelb
8	452	389	159	17,70	16,84	588	
7	452	395	153	17,48	17,11	588	
6	453	403	144	17,35	17,43	585	
5	442	413	145	17,55	17,89	582	gelb
4	419	429	152	18,30	18,60	575	gelb m. Stich ins Grün
3	396	429	175	19,50	18,62	568	gelbgrün
2	373	431	196	20,55	18,68	562	

Tabelle IV.
Silber in Wasser.

$a \cdot 10^6$	R	G	B	x	y	λ	λ (ausgegl.)	Farbe
10	402	376	222	20,50	16,26	585	585	
9	389	369	242	21,32	15,95	585	585	
8	377	363	260	22,10	15,78	582	584	gelb (sehr
7								ungesättigt)
	371	364	265	22,40	15,78	580	580	
6	344	361	295	23,79	15,63	560	560	gelbgrün
5,5	aus Fig. 3 interpoliert						536	„
5	273	297	430	28,90	12,89	484	503	blaugrün
4	207	213	580	34.32	9,21	477	477	cyanblau
3	150	108	742	39,89	4,68	465	465	indigoblau
2	aus Fig. 3 extrapoliert						459	„

6.

Ich gebe nun im folgenden die Beobachtungsresultate an Gold- und Silberteilchen in Wasser in den folgenden Tabellen V, VI, VII u. VIII wieder, von denen sich die beiden ersten auf die primitivere Optik (Objektiv D^*) und die beiden letzteren auf die vollkommenere (Apochromat 4 mm) beziehen. Es sind darin jeweils Messungen an einer größeren Anzahl m von Einzelteilchen, die in ein gewisses Farbenintervall fallen, zusammengefaßt, wie aus den Zahlen der ersten Spalte ersichtlich ist, die zweite Spalte enthält dann die Gesamtzahl aller Passagen Σn und die dritte die Summe aller $T:\Sigma T$, woraus sich die mittleren doppelseitigen Erstpassagezeiten ϑ (4. Spalte) ergeben aus

$$\vartheta = \frac{\Sigma T}{\Sigma n}.$$

Die 5. Spalte enthält die aus Formel (3) hierzu berechneten Werte der Partikelradien aus der Brownschen Bewegung a_{Br}, während die 6. Kolonne die aus den Ablesungen am Spektralphotometer durch Benützung der Tabellen III u. IV folgenden Radien aus der Farbe a_F enthält.

Tabelle V.
Gold in Wasser (Objektiv D^*).

m	Σn	ΣT	ϑ	$10^6 \cdot a_{Br}$	$10^6 \cdot a_F$
36	200	3580	17,90	4,0	1 — 2
11	65	1412	21,72	4,9	2 — 3
14	85	2143	25,21	5,7	3 — 4
20	94	2434	25,90	5,9	4 — 5
10	33	1190	36,06	8,2	5 — 6
6	27	1048	38,81	8,8	6 — 7
3	11	558	50,73	11,5	7 — 10

Tabelle VI.
Silber in Wasser (Objektiv D^*).

m	Σn	ΣT	ϑ	$10^6 \cdot a_{Br}$	$10^6 \cdot a_F$
8	33	336	10,18	2,3	1 — 3
12	64	856	13,38	2,9	3 — 4
38	233	3239	13,90	3,1	4 — 5
30	148	3493	23,63	5,2	5 — 6
24	113	2748	24,32	5,4	6 — 7
7	27	1052	38,96	8,9	7 — 10

Tabelle VII.
Gold in Wasser (Apochromat).

m	Σn	ΣT	ϑ	$10^6 \cdot a_{Br}$	$10^6 \cdot a_F$
3	74	66	0,894	2,9	1 — 2
16	472	583	1,237	4,0	2 — 3
18	373	635	1,705	5,5	3 — 4
18	367	703	1,918	6,2	4 — 5
15	312	695	2,225	7,2	5 — 6
16	350	1120	3,20	10,4	6 — 7
14	168	514	3,07	9,9	7 — 10

Tabelle VIII.
Silber in Wasser (Apochromat).

m	Σn	ΣT	ϑ	$10^6 \cdot a_{Br}$	$10^6 \cdot a_F$
15	255	175	0,685	2,2	2 — 4
15	382	379	0,995	3,2	4 — 5
31	1168	1290	1,11	3,6	5 — 6
17	617	821	1,33	4,3	6 — 7
15	611	1467	2,40	7,8	7 — 10

Wie man sieht, ist im ganzen und großen die Übereinstimmung eine gute; jedenfalls ist zunächst deutlich sichtbar, daß die beiden Reihen von Teilchenradien a_{Br} und a_F monoton einander zugeordnet sind. Genauer betrachtet fällt jedoch an beiden Paaren von Tabellen eine systematische, wenn auch nicht sehr große Abweichung der beiden Reihen in die Augen, indem durchweg für die Goldteilchen $a_{Br} > a_F$ und für die Silberteilchen $a_{Br} < a_F$ ist. Besonders deutlich wird dies, wenn man sich die Tabellen VII und VIII graphisch darstellt (Fig. 4).

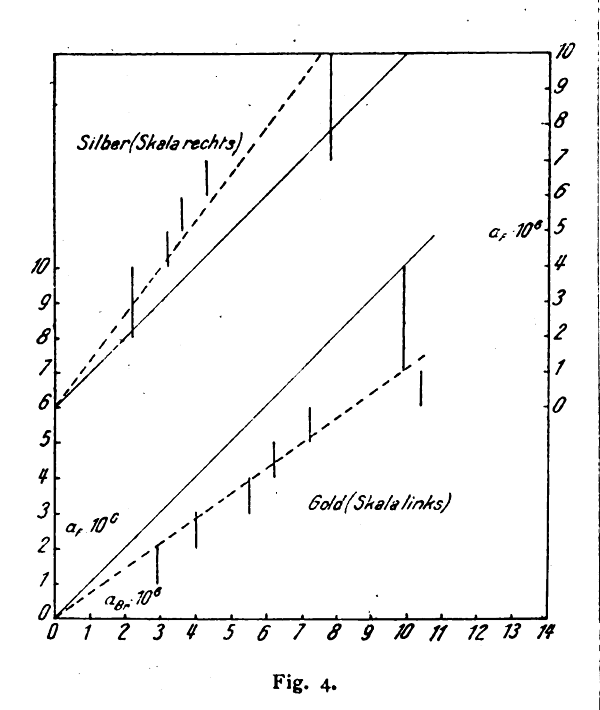


Fig. 4.

Es ist nun kaum anzunehmen, daß diese Diskrepanz auf ein Versagen der Formel für die Brownsche Bewegung zurückzuführen sei schon aus dem Grunde, weil die Abweichung bei den beiden Materialien in der entgegengesetzten Richtung liegt. Abgesehen davon ist auch durch die so präzisen Untersuchungen von Westgren[1]) an Goldteilchen gezeigt worden, daß die Einsteinsche Formel für Teilchen dieser Größenordnung mit großer Genauigkeit gilt. Es scheint also, als ob die Radienbestimmung aus der Farbe zu etwas verfälschten Resultaten führen würde, was möglicherweise auf folgende Umstände zurückgeführt werden könnte:

1. Geschieht die Berechnung der Ausstrahlungskurven durch nicht sehr gut konvergierende Reihenentwicklungen, insbesondere werden bloß die sog. ersten elektrischen Partialschwingungen benützt.

2. Sind die optischen Konstanten der Teilchen nicht so genau bekannt und überhaupt zweifelhaft, ob sie mit denen des kompakten Materials völlig übereinstimmen.

3. Spielt die Beschaffenheit der Bogenkohlen, die Koronastrahlung und die Absorption in den optischen Gläsern eine schwer zu übersehende Rolle, die aber einen nicht unerheblichen Einfluß auf die Radienschätzung haben dürfte.

4. Ist es möglich, daß die Teilchen nicht genau kugelförmig waren, was entweder auf unregelmäßige Überzüge von Oxyd oder Hydroxyd (s. später) oder auf Komplexbildung durch Koagulation aus kleineren Teilchen zurückgeführt werden könnte, obzwar gerade der letztere Fall nicht sehr wahrscheinlich ist, da sich solche Komplexe durch ihr ultramikroskopisches Bild meist charakteristisch von kompakten Teilchen unterscheiden[2]).

5. Können die Teilchen einen oberflächlichen Überzug von Oxyd oder Hydroxyd annehmen, was nach der Beugungstheorie sowohl auf die Intensität als auch auf die Farbe einen wesentlichen Einfluß haben müßte, obzwar stets frisch hergestellte Sole zur Beobachtung verwendet wurden.

Die unter 4 und 5 aufgestellten Vermutungen werden nun durch den Umstand gestützt, daß außer den beschriebenen Partikeln auch solche beobachtet werden konnten, die entweder nach Farbe oder nach Intensität mit der Mieschen Theorie nicht übereinstimmten, und zwar gelbliche und grünliche Teilchen an *Au* mit wesentlich kleinerer Intensität als ihnen nach ihrer Größe zukommen sollte und ferner purpurrote bis orangerote Teilchen an *Ag*, mit kleinerer Intensität als die gelblichweißen, welche Farben nach der Beugungstheorie an metallischem

1) A. Westgren, Zeitschr. f. Phys. Chem. **89**, 63, 1914; Zeitschr. f. anorg. Chem. **93**, 231, 1915.

2) Daß bei Silbersolen Abweichungen der Teilchenform von der Kugelgestalt vorkommen können, ist an subultramikroskopischen Teilchen von R. Gans, Ann. d. Phys. **62**, 331, 1920 und T. Isnardi, Ann. d. Phys. **62**, 573, 1920 gezeigt worden.



Silber überhaupt nicht auftreten sollten. Ähnliche Farbenanomalien werden auch schon in der bereits zitierten früheren Arbeit des Verfassers beschrieben und nach dem beobachteten Dichroismus im polarisierten Lichte als unregelmäßige Oxydschichten am Partikel gedeutet.

Ich habe auch von solchen Teilchen die Brownsche Bewegung gemessen und daraus den Radius berechnet, welche Messungen mit Beifügung der Farbe in der Tabelle IX wiedergegeben sind.

Tabelle IX.

Metall	m	Σn	ΣT	ϑ	$10^6 \cdot a_{Br}$	Farbe
Au	16	138	305	2,21	7,2	gelblich
	4	35	60	1,71	5,5	grünlich
Ag	12	151	174	1,15	3,7	purpurrot
	13	164	196	1,20	3,9	orangerot
	9	98	159	1,62	5,2	orangegelb

Vergleicht man mit den Tabellen VII u. VIII, bzw. III u. IV, so sieht man, daß die Zuordnung der Brownschen Radien zu den Farben bei *Au* die gleichen sind wie früher, so daß es sich also wahrscheinlich bloß um eine Schwächung der Intensität infolge dünner oberflächlicher nichtmetallischer Schichten handelt, wie solche bei Goldsolen schon von Siedentopf[1]) vermutet worden sind. Bei den *Ag*-Teilchen hätte man nach ihrer Brownschen Bewegung Farben von Blaugrün bis Grüngelb zu erwarten gehabt. Es scheint sehr wahrscheinlich, daß auch hier Oberflächenschichten die Farbe verfälscht haben dürften, um so mehr, als es einige Male unzweifelhaft beobachtet werden konnte, wie ein solches purpurrotes Teilchen im intensivem Lichtkegel während der Beobachtung seine Farbe in Gelb veränderte, was als ein direkter photochemischer Prozeß gedeutet werden kann. Ähnlich wurde einmal die Umwandlung der Farbe eines blauen *Ag*-Teilchens in ein gelbes beobachtet. Der Prozeß vollzog sich binnen wenigen Sekunden. Ob es sich hier um Reduktions- oder Oxydationsvorgänge handelt, muß dahingestellt bleiben, sie sind jedenfalls den von Siedentopf beobachteten photochemischen Effekten des Ausbleichens metallischer Silbersole im Kardioidkondensor (l. c.) an die Seite zu stellen.

1) H. Siedentopf, a. a. O. S. 39ff.

Nach den hier vorgebrachten Gründen muß man jedenfalls sagen, daß die beobachteten Abweichungen der Radienbestimmungen nach den beiden Methoden voneinander kaum einem prinzipiellen Fehler einer dieser Methoden zugeschrieben werden können, vielmehr auf Rechnung der angeführten Unsicherheiten gesetzt werden müssen.

Zusammenfassung.

Es werden gemäß der Beugungstheorie der Farben ultramikroskopischer Metallteilchen die bei der Beobachtung im Spaltultramikroskop zu erwartenden Mischfarben von *Au*- und *Ag*-Teilchen in Wasser unter Zugrundelegung der spektralen Energieverteilung des zur Beleuchtung verwendeten Bogenlichtes nach der Helmholtzschen Theorie der Grundempfindungen als Funktionen der Partikelradien berechnet.

Es werden für eine große Anzahl von Einzelteilchen Farbe und Brownsche Bewegung beobachtet und aus beiden einerseits nach dem obigen Verfahren, andererseits nach der Einsteinschen Theorie ihre Radien berechnet. Zwischen beiden Reihen von Radienzuordnungen ergeben sich kleine systematische Abweichungen im Sinne von $a_{Br} > a_F$ bei Gold und $a_{Br} < a_F$ bei Silber.

Es wird eine Reihe von Gründen für eine solche systematische Verfälschung aufgezählt, wahrscheinlich werden die kleinen Abweichungen auf Rechnung nichtmetallischer dünner Überzüge der Teilchen zu setzen sein, was einerseits durch Beobachtung von Teilchenfarben, die nach der Theorie nicht auftreten sollten, andererseits durch beobachtete Farbänderung im Lichtkegel während der Messung von offenbar photochemischem Charakter gestützt wird.

Prag, im November 1920.

(Eingegangen 25. November 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Fortschritte der Farbenlehre. II.

Von Wilhelm Ostwald.

Seit meinem ersten, vor 3 Jahren erstatteten Bericht [1]) haben die Forschungen auf dem Gebiete der Farbenlehre einen stetigen Fortgang genommen. Sie ist auf das beschränkt geblieben, was ich allein zur Sache tun konnte; eine Aufnahme, Prüfung oder Weiterentwicklung der dort und anderweit mitgeteilten Ergebnisse durch andere Forscher ist bisher fast vollständig ausgeblieben. Doch hat sich immerhin in letzter Zeit ein besseres Verständnis der erzielten Fortschritte feststellen lassen.

Ich berichte nachfolgend über die Hauptergebnisse der neueren Arbeiten.

Farbton und Wellenlänge. Diese merkwürdig wechselnde Zuordnung von Farbton und Wellenlänge homogener Lichter ist bereits im ersten Bericht (I, 355) kurz dargestellt worden. Inzwischen sind die damals gemachten Beobachtungen erweitert und verbessert worden. Insbesondere wurde berücksichtigt, daß, wie schon Helmholtz betont hatte, der Farbton mit der absoluten Lichtstärke wechselt. Indessen ist dieser Wechsel

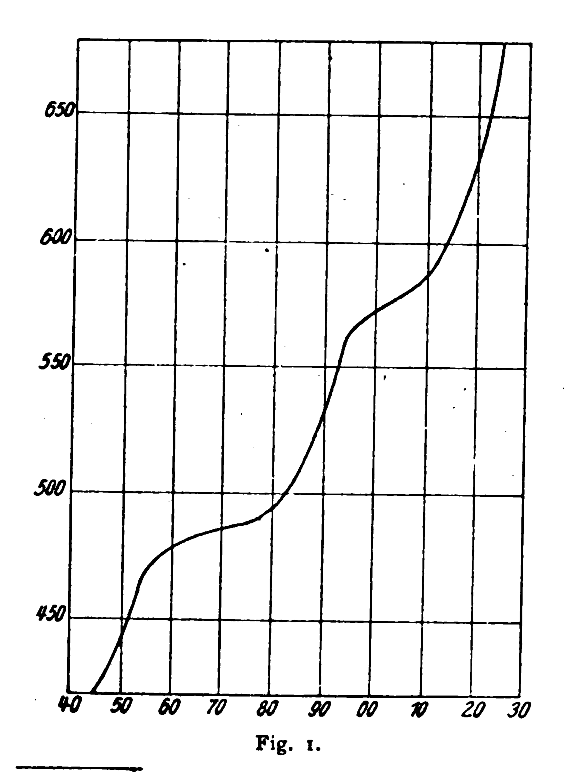


Fig. 1.

[1]) Diese Zeitschr. 17, 322 u. 352, 1916. Weiterhin zitiert als I.

auf sehr große und sehr geringe Lichtstärken beschränkt; dazwischen gibt es ein großes Gebiet „normaler“ Helligkeiten, in denen er praktisch Null ist. Für solche gelten die nachstehenden Darlegungen.

Man kann im Spektrum drei unempfindliche Gebiete und zwei empfindliche unterscheiden; in den ersten ändert sich der Farbton nur langsam mit der Wellenlänge, im zweiten schnell. Unempfindlich sind Ublau [1]), Laubgrün [2]) und Rot, empfindlich Seegrün [3]) und Gelb. Fig. 1 stellt den Zusammenhang in Parallelkoordinaten dar; die Farbtonnummern sind wagerecht, die Wellenlängen senkrecht aufgetragen. Eine in mancher Beziehung anschaulichere Darstellung ist in Fig. 2 gegeben. Hier sind die

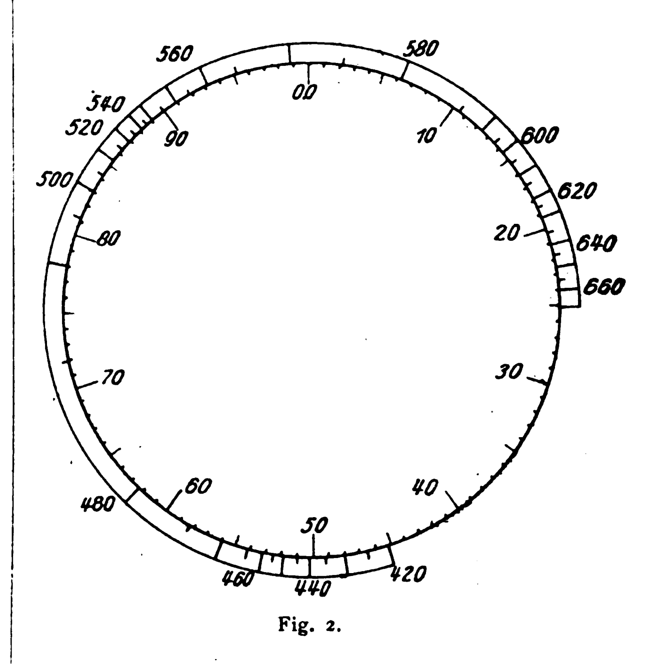


Fig. 2.

Farbtöne im Inneren des Kreises gleichabständig eingetragen und außen die zugehörigen Wellenlängen. Man sieht, daß die unempfindlichen Gebiete, wo sich die Wellenlängen drängen, etwa um 120 Grad auseinander liegen; ebenso die empfindlichen. Dabei sind die im Spektrum fehlenden Purpurtöne als empfindliches Gebiet zu rechnen. Dadurch wird gleichzeitig bedingt, daß sich stets je ein empfindliches und ein unempfindliches Gebiet gegenüberliegen; je zwei Gegenfarben liegen also immer in entgegengesetzten Gebieten. Die

[1]) Für Ultramarinblau.
[2]) Oder Gelbgrün.
[3]) Oder Blaugrün.

ganze Ordnung deutet auf das Vorhandensein von drei psychologischen Hauptstellen im Spektrum hin, entsprechend der Theorie von Young-Helmholtz.

Unterschiedsempfindlichkeit im Spektrum. Man kann zunächst vermuten, daß dies Ergebnis mehr zufällig als notwendig ist, da es ganz und gar von der Teilung des Farbkreises abhängt, die ihrerseits wieder auf der Voraussetzung beruht, daß die Reinheitsmessungen der Farben durch Bestimmung des Weiß- und Schwarzgehaltes richtig sind. Ist eines der Glieder dieser Schlußkette falsch, so ist es auch das Endergebnis.

Nun lassen sich aber mehrere ganz unabhängige Nachweise erbringen, daß jene bemerkenswerte Beziehung zwischen Farben und Wellenlängen nicht zufällig ist. Einer der unmittelbarsten findet sich in der Untersuchung von König und Dietrici[1]) über die Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für die Spektralfarben. Es wurden durch das ganze Spektrum die mittleren Einstellungsfehler auf Farbengleichheit bestimmt, wobei sich ein ungemein starkes Auf und Ab dieses Fehlers mit der Wellenlänge ergab. Fig. 3 stellt in der Kurve I

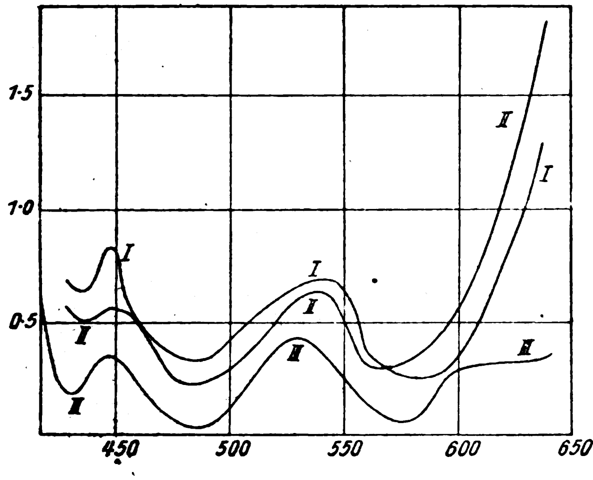


Fig. 3.

die Ergebnisse von Dieterici, unter II die von König dar.

Dazu ist unter III eine Kurve gezeichnet, die folgendermaßen erhalten wurde. Es wurden (in beliebigem Maßstabe) als Ordinaten die Unterschiede der Wellenlängen eingetragen, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Farbtönen des 100teiligen Farbkreises bestehen. Da der Farbkreis nach dem Prinzip der inneren Symmetrie geteilt ist (I, 352) entsprechen seine Stufen psychologisch gleichen Schritten. Die angegebenen Unterschiede der Wellenlängen sind somit gleichfalls ein Ausdruck für die psychologische Empfindlichkeit des Auges im Spektrum.

Nun bedarf es nur eines Blickes, um die Wesensgleichheit der Kurve III mit I und II zu erkennen. Die Unterschiede sind nicht größer, als die zwischen I und II. Selbst das kleine Maximum im Veil bei 450 ist vorhanden. Die einzige Abweichung ist die am roten Ende, an dem jene Beobachter eine geringere Verschiedenheit mit der Wellenlänge gefunden haben, als ich. Das kann sehr gut durch persönliche Verschiedenheiten bedingt sein.

Wir dürfen also aus dieser bemerkenswerten Übereinstimmung schließen, daß alle Glieder der oben erwähnten Schlußkette, die zur Einteilung des Farbkreises geführt haben, grundsätzlich richtig sind.

Der Farbmischer. Die stärkste Abweichung von der traditionellen Farbenlehre war seinerzeit durch die Auffassung gegeben, daß jene Erscheinung, die man an den Körperfarben als reine oder gesättigte Farbe bezeichnet, nicht durch homogenes Licht bedingt ist, sondern durch das Zusammenwirken aller Lichter, welche zwischen zwei Gegenfarben des Farbenkreises liegen. Da das Spektrum nur $^4/_5$ des Farbenkreises umfaßt, bedeutet dies, daß durchschnittlich mehr als die Hälfte aller sichtbaren Lichter sich zu einer solchen Farbe vereinigen. Eine solche Gruppe von Lichtern wurde ein Farbenhalb genannt. Um diese neuartig definierten Farben unzweideutig zu bezeichnen, sollen sie künftig nicht reine oder gesättigte Farben genannt werden, sondern Vollfarben.

Um diese Lehre einer grundsätzlichen Prüfung zu unterwerfen, habe ich einen Apparat, den Farbmischer, gebaut, welcher die Herstellung jeder vorgeschriebenen Mischung von Wellenlängen gestattet. Der Grundgedanke rührt von Maxwell her; dieser hat ihn aber nur zur Mischung von drei homogenen Lichtern (der Grundfarben nach der Theorie von Young) verwertet.

Der Apparat kann kurz als ein umgekehrt benutztes Spektroskop bezeichnet werden. Man läßt das Licht dort einfallen, wo bei gewöhnlicher Anwendung das Spektrum erscheint, und bringt das Auge an den Spalt, in den gewöhnlich das Licht einfällt. Tritt weißes Licht von allen Stellen ein, wo das Spektrum erscheinen würde, so sieht das Auge durch den Spalt die Prismenfläche in weißem Licht. Blendet man einen Teil des Spektralgebietes ab, z. B. wo die kürzeren Wellen von F abwärts hinfallen

1) Wied. Ann. **22**, 579, 1884.

würden, so sieht man die Prismenfläche buntfarbig, und zwar im angegebenen Falle schwefelgelb, Farbton 00.

Die Ausführung des Gedankens wurde mit einfachsten Mitteln bewerkstelligt. Fig. 4 stellt

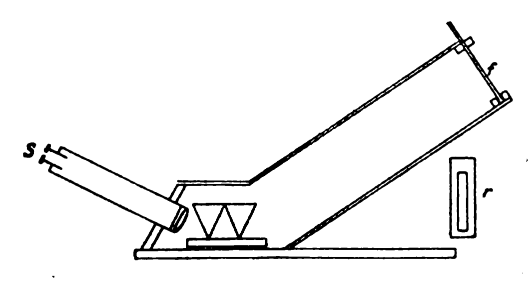


Fig. 4.

ein aus Holz und Pappe gefertigtes Gehäuse dar, in welchem ein stark zerstreuendes Prisma und eine achromatische Linse an einem Sehrohr mit Spalt *s* den optischen Anteil bilden. An dem anderen Ende ist ein Falz *f* angebracht, in welchen wie die Kassetten einer Kamera Rahmen *r* aus Pappe geschoben werden können, deren Ausschnitt dem sichtbaren Spektrum entspricht. Man läßt zunächst Sonnenlicht durch den Spalt einfallen, bestimmt an einer an einem Rahmen angebrachten Millimeterteilung die Lage der wichtigsten Spektrallinien und stellt sich darnach eine Wellenlängenskala her. Legt man einen leeren Rahmen in richtiger Stellung auf die Skala, so kann man durch Aufkleben von schwarzem Papier alle Gebiete abblenden, die man ausschließen will, und nur die gewünschten durchlassen. Schiebt man eine derart hergerichtete Blende in den Falz und richtet den Apparat gegen den Himmel oder eine weiße Fläche, so sieht das an den Spalt gebrachte Auge die Mischung der durchgelassenen Lichter.

Man kann auf solche Weise u. a. die Farben solcher Stoffe erzeugen, welche bestimmte Absorptionsspektren aufweisen. Es ist eine angenehme Überraschung, zu sehen, mit welcher Genauigkeit die Farben der Lösungen von Hämoglobin, Praseodym- und Neodymsalzen, Permanganaten usw. nachgebildet werden können, wenn man deren Absorptionsspektren gemäß der Wellenlängenskala schwarz auf durchscheinendes Pauspapier zeichnet und in den Falz schiebt.

Mit Hilfe dieses Apparates habe ich mich überzeugt, daß tatsächlich alle Vollfarben durch die Mischung von Farbenhalben hervorgerufen werden. Die Mischfarben erscheinen im allgemeinen ebenso „gesättigt", wie homogene Lichter gleichen Farbtons und gleicher Helligkeit. Eine Ausnahme bilden die grünen Farben, welche etwas blaß erscheinen. Dies liegt an ihrer konstitutionellen Unreinheit, die unter allen Umständen vorhanden ist (s. u.). Bei den Körperfarben besteht aber ihr unbunter Anteil vorwiegend aus Schwarz, das sich psychologisch nur sehr wenig geltend macht, im Farbmischer dagegen ausschließlich aus Weiß, dessen psychologische Wirkung sehr groß ist. Versucht man grüne Aufstriche mit möglichst wenig Schwarz herzustellen, so überzeugt man sich, daß die Farben im Apparat denen der Aufstriche an Reinheit überlegen sind.

D i e H a u p t p r ü f u n g. Der Farbmischer kann ferner benutzt werden, um festzustellen, ob sich das Hauptgesetz bewahrheitet, das der Lehre vom Farbenhalb zugrunde liegt. Dieses geht dahin, daß der Farbton der aus jedem Farbenhalb entstehenden Vollfarbe in der Mitte zwischen den Farbtönen der beiden Grenzen liegen muß. Sind also a und a' die Farbtöne der homogenen Lichter, die das Farbenhalb begrenzen, so muß der Farbton der Vollfarbe gleich

$$\frac{a \pm a}{2}$$

sein. Bei dem 100teiligen Farbtonkreise stehen a und a' um 50 voneinander ab; der Farbton f der Vollfarbe muß also $f = a \pm 25$ sein. Hierbei gelten die Zeichen + und — je nachdem die eine oder die andere Gruppe der Lichter gemischt werden, die zwischen den Gegenfarben a und a' liegen.

Bedenkt man die ungemein stark wechselnde Zuordnung zwischen den Farbtönen des rationell geordneten Kreises und denen des Spektrums, so erkennt man, daß diese Forderung sehr weitgehende Ansprüche bedingt. Denn beim Fortschreiten durch den Kreis wandern die drei Punkte a, f und a' mit verschiedener und stets wechselnder Geschwindigkeit; sie müssen also einer sehr bestimmten Gesetzmäßigkeit unterworfen sein, um dabei stets die beiden Bedingungen

$$f = \frac{a \pm a'}{2}$$

zu erfüllen.

Das Ergebnis meiner Untersuchungen ist, daß diese Bedingungen tatsächlich erfüllbar, bzw. erfüllt sind, daß also die Lehre vom Farbenhalb zu Recht besteht. Auf die Einzelheiten dieser Arbeit einzugehen, würde an dieser Stelle zu weit führen; man findet sie in dem Band 2 meiner Farbenlehre[1]).

1) Physikalische Farbenlehre, Leipzig 1919, Verlag Unesma.

Absolute Definition der 100 Farbtöne. Eine wichtige Anwendung dieses allgemeinen Ergebnisses ist die zur Definition der 100 Farbtöne durch Wellenlängen. Früher ist eine solche durch die Angabe der entsprechenden homogenen Lichter gegeben worden; sie mußte aber wegen des Fehlens der Purpurfarben im Spektrum unvollständig sein. Diesen Mangel haben die durch Farbenhalbe definierten Vollfarben nicht, denn sie enthalten auch alle Purpurfarben. Außerdem sind sie mit den Körperfarben viel besser vergleichbar, da sie von gleicher Zusammensetzung sind wie diese.

Nachstehend ist eine tabellarische Übersicht der so definierten Vollfarben gegeben. Zu jeder Farbe gehören zwei Wellenlängen, die das Farbenhalb begrenzen. Von diesen kann eine im Ultrarot bzw. Ultraveil liegen, also unbestimmt sein. Dabei definiert jedes Paar Wellenlängen zwei Vollfarben, die im Verhältnis der Gegenfarben stehen. Wo in der Tabelle zwei Wellenlängen angegeben sind, werden die Vollfarben daher entweder von den Wellen gebildet, die zwischen beiden Werten liegen (grüne Farben) oder von denen, die zwischen Ultrarot und dem niedrigeren Werte plus denen, die zwischen dem höheren Werte und Ultraveil liegen (Rot und Purpur). Im ersten Falle ist das Farbenhalb zusammenhängend, im zweiten besteht es aus zwei Stücken von beiden Enden des Spektrums.

Wo in der Tabelle nur eine Zahl angegeben ist, liegt die andere gleichsam im Unendlichen, nämlich im Ultrarot bzw. im Ultraveil. Die eine Vollfarbe besteht daher aus allen Wellen, die größer sind als die Zahl (Gelb und Kreß), die andere aus denen, welche kleiner sind (Blau). In diesen Fällen sind also die Wellengebiete gleichfalls zusammenhängend, sie liegen aber nur einerseits im Endlichen, andererseits im Unendlichen.

Beide Gruppen grenzen beim Farbton 20 bzw. 70 aneinander.

Nr.	Ultrarot bis	bis	bis Ultraveil	Nr.
0		487		50
1		500		51
2		507		52
3		513		53
4		518		54
5		522		55
6		526		56
7		530		57
8		534		58
9		538		59
10		541		60
11		545		61
12		548		62
13		551		63
14		554		64
15		557		65
16		559		66
17		561		67
18		563		68
19		564		69
20	420	565		70
21	423	566		71
22	427	568		72
23	431	569		73
24	435	571		74
25	440	572		75
26	446	574		76
27	453	575		77
28	459	576		78
29	464	578		79
30	468	579		80
31	471	580		81
32	473	581		82
33	475	582		83
34	477	583		84
35	478	585		85
36	479	587		86
37	480	589		87
38	481	593		88
39	482	598		89
40	482	604		90
41	483	610		91
42	483	616		92
43	484	622		93
44	484	628		94
45	484	634		95
46	485	641		96
47	485	648		97
48	486	655		98
49	486	662		99

Graphische Darstellung der Farbenhalbe. Eine anschauliche Übersicht der ziemlich verwickelten Verhältnisse, die in der vorstehenden Tabelle dargestellt sind, wird durch Fig. 5 gegeben. Hier sind wieder die Wellenlängen als Abszissen, die Farbtonnummern als Ordinaten eingetragen. Die starken Linien geben die Grenzen der Farbenhalbe, die punktierten die homogenen Lichter gleichen Farbtons, also gleichsam die resultierenden Wellenlängen an. Der Inhalt der Figur ist bereits in der unteren Hälfte zwischen 00 und 50 erschöpft, da die Farbtöne 50 bis 99 als Gegenfarben durch die gleichen Grenzen definiert sind. Doch ist die obere Hälfte als Wiederholung der unteren hinzugefügt worden (nur mit anderer Lage der punktierten Linien), um die Übersicht vollständiger zu machen.

Die drei ausgezogenen Kurven grenzen vier Felder ab, die schräg nach rechts aufsteigen. Um die Blende zu finden, die einem bestimmten Farbton zugehört, zieht man die zugehörige Wagerechte. Wo sie im dunklen Gebiet verläuft, ist sie zuzudecken, im weißen ist sie

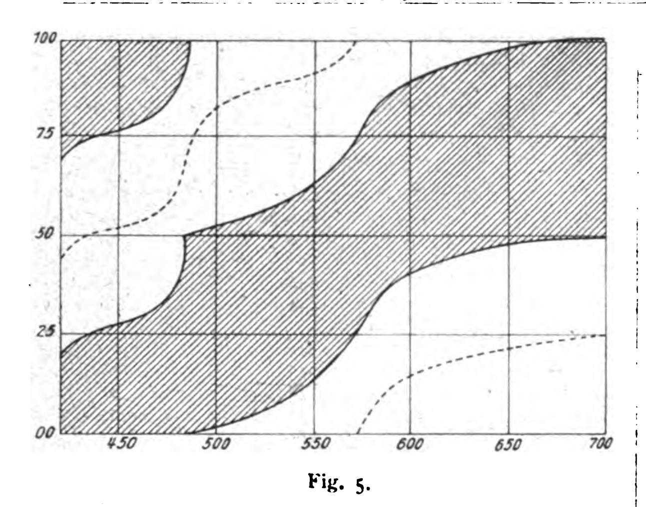


Fig. 5.

freizulassen. So erkennt man, daß das Gelb 00 entsteht, wenn man das blaue Ende des Spektrums (das links liegt) bis etwa 490, genauer 487, zudeckt und alles andere Licht durchläßt. Umgekehrt gibt das kurzwellige Ende bis 472, bei zugedecktem langwelligen, das Blau 50. Um das Rot 25 zu erhalten, muß man die kurzen Wellen bis 440 durchlassen, von dort bis 572 abblenden und die langen Wellen von 572 ab wieder durchlassen. Läßt man umgekehrt die Wellen 440 bis 572 durch, so entsteht das gegenfarbige Grün 75.

(Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß man zur Messung des Schwarzgehaltes mit Lichtfiltern bei den Farben 20 bis 50 mit zwei Filtern messen muß. Nämlich einem, welches das rote, und einem anderen, welches das veile Ende ihres Spektrums durchgehen läßt. Die beiden so erhaltenen Zahlen sind im allgemeinen verschieden; man vereinigt sie zu einem Mittel gemäß der Lage des Farbtons zwischen jenen Grenzen.)

Die Helligkeit der Vollfarben. Eine andere, sehr schlagende Bestätigung der Lehre vom Farbenhalb ist durch die Messung der spezifischen Helligkeit gegeben. Es ist auf diese Möglichkeit bereits früher (I, 363) hingewiesen worden; auch wurden die ersten Ergebnisse mitgeteilt, welche den eigentümlich terrassenförmigen Gang der zugehörigen Kurve ergeben hatten. Die fortgesetzte Untersuchung des Gegenstandes ergab folgende Beziehungen.

Besteht eine Vollfarbe aus allen Lichtern eines Farbenhalb, so muß ihre Helligkeit sich ergeben, wenn man die Helligkeiten der zugehörigen Lichter summiert (oder integriert). Da ferner ihre Gegenfarbe aus allen Lichtern besteht, die in der ersten fehlen, so muß deren Helligkeit die der ersten zu der des weißen Lichtes, d. h. zu Eins ergänzen.

Die Verteilung der Helligkeit im Sonnenspektrum hat bereits Fraunhofer in seiner grundlegenden Arbeit[1]) gemessen und für die zwischen seinen Hauptlinien liegenden Räume berechnet. Summiert man diese Werte, setzt die Summe gleich Eins und berechnet die Bruchteile der Gesamthelligkeit von einem Ende des Spektrums bis zu den einzelnen Linien, so kann man eine Kurve zeichnen, welche die Gesamthelligkeit vom Ende des Spektrums bis zu jeder Wellenlänge abzulesen gestattet. Der Unterschied zweier solcher Werte, die zu den zwei Grenzen eines Farbenhalbs gehören, ergibt dann die Helligkeit der entsprechenden Vollfarbe. Diese kann man dann mit der spezifischen Helligkeit derselben Vollfarbe vergleichen, die sich aus der unmittelbaren Helligkeitsmessung irgendeines Aufstriches von gleichem Farbton nach der Formel

$$h_0 = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2}$$

ergibt (I, 363).

Das Ergebnis eines solchen Vergleichs ist in Fig. 6 dargestellt, wo die volle Linie die aus

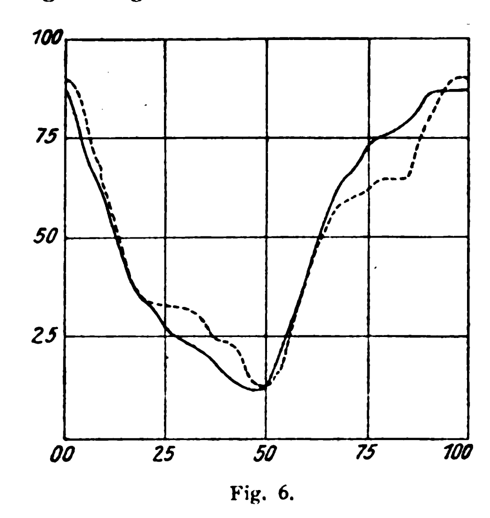


Fig. 6.

den Farbenhalben, die punktierte die aus Helligkeitsmessungen an Aufstrichen berechnete spezifischen Helligkeiten der Vollfarben in Abhängigkeit vom Farbton darstellt; die Farbtonnummern sind Abszissen, die Helligkeiten Ordinaten. Es besteht kein Zweifel, daß es sich um dieselben Größen handelt. Die Abweichungen um 25 und 75 hängen damit zusammen, daß die benutzten Helligkeitsmessungen, die vor mehreren Jahren zu Beginn meiner Arbeiten ausgeführt wurden, noch mit Versuchsfehlern behaftet sind, die ich inzwischen zu vermeiden gelernt habe. Doch hat der Zustand meiner

1) Ostwalds Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 150, S. 23.

Augen mir nicht gestattet, die Messungen zu wiederholen.

Das Fechnersche Gesetz in der Farbenlehre. Während für die unbunte Reihe Schwarz-Grau-Weiß das Fechnersche Gesetz seit seinen ersten Anfängen als gültig bekannt ist, war bisher seine Anwendung auf das bunte Gebiet dadurch ausgeschlossen, daß hier quantitative Bestimmungen nicht ausgeführt werden konnten. Seit der Fortschritt zu solchen hier erreicht wurde, war auch für die Anwendung des Fechnerschen Gesetzes der Weg frei.

Die Notwendigkeit, hier die grundlegenden Verhältnisse festzulegen, trat gelegentlich der Bearbeitung des eben vollendeten großen Farbatlas von 2500 Farben[1]) ein, wo die Aufgabe zu lösen war, psychologisch gleichabständige Stufen zu finden, in denen die Farben anzuordnen waren. Daß solche durch analytisch gleich abständige Stufen nicht gegeben sind, stellte sich bereits bei den ersten Versuchen heraus. Stuft man z. B. eine hellklare Reihe (I, 359) derart ab, daß jede Stufe von der anderen um $^1/_{10}$ Vollfarbe absteht, so ergibt sich eine Reihe, die der entsprechend gebildeten Schwarz-Weiß-Reihe ganz ähnlich sieht: die hellen Stufen sind viel zu reichlich vertreten, die dunklen viel zu spärlich. Stuft man die hellklare Reihe dagegen als absteigende geometrische Reihe gemäß dem Fechnerschen Gesetz ab, so erhält man den Eindruck der Gleichabständigkeit. Daraus folgt:

Bunte Vollfarben verhalten sich in der Mischung mit Weiß ebenso wie Schwarz und das Fechnersche Gesetz gilt für hellklare Reihen in solchem Sinne.

Wie genau und innerhalb welcher Grenzen die Gültigkeit des Fechnerschen Gesetzes hier in Anspruch genommen werden kann, habe ich nicht feststellen können, da mir die Ausführung der erforderlichen zahlreichen Messungen nicht möglich ist.

Wiederholt man den gleichen Versuch für irgendeine dunkelklare Reihe, so ergibt sich folgendes. Analytisch gleich abständige Stufen geben eine Reihe, deren Glieder am vollfarbigen Ende viel zu eng, am schwarzen viel zu weit abstehen. Um psychologisch gleich abständige Stufen zu erhalten, muß man wieder eine absteigende geometrische Reihe, und zwar derart bilden, daß die Vollfarbe die Stelle des Weiß in der entsprechenden Schwarz-Weiß-Reihe einnimmt.

Bunte Vollfarben verhalten sich in der Mischung mit Schwarz ebenso wie Weiß und das Fechnersche Gesetz gilt für dunkelklare Reihen in solchem Sinne.

Auch hier habe ich mich auf die Feststellung der allgemeinen Verhältnisse beschränken müssen; die genauere Untersuchung bleibt anderen Forschern überlassen.

Die psychologische Ordnung der Farben. Die dritte Veränderliche der bezogenen Farben, der Farbton, zeigt keinen derartigen Unterschied zwischen den analytischen und den psychologischen Stufen. Denn die Einteilung des Farbkreises geschah vermöge des Prinzips der inneren Symmetrie bereits auf psychologischer Grundlage und die oben dargelegte Übereinstimmung der Unterschiedsempfindlichkeit im Spektrum mit den so erhaltenen Stufen bestätigt deren Richtigkeit. Hier bleibt also die vorhandene Teilung in 100 Farbtöne bestehen.

Um daher zu prüfen, welche Veränderung der Farbkörper erfahren muß, wenn man in ihm den psychologischen gleich abständigen Stufen räumlich gleich abständige Punkte zuordnet, genügt es, in einem farbtongleichen Dreieck die erforderlichen Änderungen festzustellen. Die derart abgeänderten Dreiecke werden dann wie früher zu einem Doppelkegel geordnet.

Die logarithmische Grauleiter. Wir beginnen mit der Umgestaltung der unbunten Reihe. In konsequenter Anwendung der dekadischen Ordnung haben wir zwischen 100 (Weiß) und 10 (beginnendes Schwarz) zehn Stufen einzuordnen, die den Antilogarithmen der Zahlen 90, 80, 70 usw. entsprechen; es sind die Werte 79, 63, 50, 40, 32, 25, 20, 16, 13, 10. Darauf folgen zwischen 10 und 1 wieder 10 Stufen, deren Breite $^1/_{10}$ der angegebenen sind, nämlich 7,9, 6,3, 5,0, 4,0 usw. Die dritte Gruppe geht von 1 bis 0,1 mit den Werten 0,79, 0,63, 0,50 usw.

Es wäre nötig, solche Gruppen unbegrenzt zu bilden, wenn nicht das Gesetz der Schwelle eine Grenze setzte. Allerdings ist es hier nicht ganz einfach anwendbar. Denn bei den bezogenen Farben, von denen hier die Rede ist, hängt die Schwelle sekundär noch von der Lichtstärke ab. Zwar wird deren Haupteinfluß durch die Adaption der Netzhaut ausgeschaltet; dies gilt aber auch nur bis zu einer untersten Grenze.

Praktisch hat sich ergeben, daß die gewöhnlichen Körperfarben nur selten bis zum Ende der zweiten Gruppe gelangen; es ist also kaum je nötig, die dritte in Anspruch zu nehmen.

Um diese psychologischen Stufen auf den

1) Leipzig 1918 bis 1919, Verlag Unesma.

ersten Blick von den analytischen zu unterscheiden, bezeichne ich sie mit Buchstaben statt Zahlen. Demgemäß bedeutet vorläufig *a* Weiß 100, *b* Grauweiß 70, *c* 63 usw. Zufolge der eben gemachten Bemerkung wird man kaum je in die Nähe von *z* gelangen. Eine aus praktischen Gründen etwas abgeänderte Zuordnung wird später dargelegt werden.

Auf der analytischen Graureihe ordnen sich die psychologischen Stufen wie die Teilstriche auf einem logarithmischen Rechenschieber. Daher können wir die Teilung auch die logarithmische nennen. Bestände die Schwelle nicht, so müßten unendlich viele solche logarithmische Teilungen, deren Endpunkte sich wie 1 : 10 verhalten, aufeinander folgen. Praktisch sind nur zwei erforderlich, wie bei der oberen Teilung der gewöhnlichen Rechenschieber.

Das logarithmische Dreieck. Im farbtongleichen Dreieck (I, 328) wird eine Seite von der unbunten Reihe gebildet. Zum Zweck der psychologischen Ordnung muß diese Seite mit einer logarithmischen Teilung versehen werden. Die Frage ist, wie die beiden anderen Seiten geteilt werden müssen.

Die Antwort ergibt sich aus den beiden oben ausgesprochenen Gesetzen über die Beziehungen zwischen Vollfarbe, Weiß und Schwarz. Auch die beiden anderen Seiten erfordern logarithmische Teilung. Und zwar wird die Dreieckseite Vollfarbe-Weiß vom Weißpunkt aus, die Seite Vollfarbe-Schwarz vom Vollfarbenpunkt aus zu teilen sein.

Bei dieser dritten Seite ist allerdings zu bemerken, daß sie theoretisch im Unendlichen liegt, gemäß der Tatsache, daß absolut dunkelklare Farben nicht herstellbar sind. Das bezügliche Gesetz ist deshalb auch nicht an solchen, sondern an einer weißgleichen Reihe mit sehr wenig Weiß (04) geprüft worden. Wir haben oben gesehen, daß wir praktisch über die Weißgleichen 01 nicht hinauszugehen brauchen und werden daher diese an Stelle der absoluten Dunkelklaren benutzen.

Betrachten wir ein Dreieck[1]) mit solchen Teilungen, Fig. 7, so erkennen wir, daß die Verbindung entsprechender Punkte wie im analytischen Dreieck Parallelen zu den Seiten *vw* und *vs* ergibt. Die Weißgleichen und die Schwarzgleichen behalten somit ihre Bedeutung auch im psychologischen Dreieck bei. Dagegen ergeben die entsprechenden Punkte der Seiten *vw* und *vs* keine Parallelen zu *ws*.

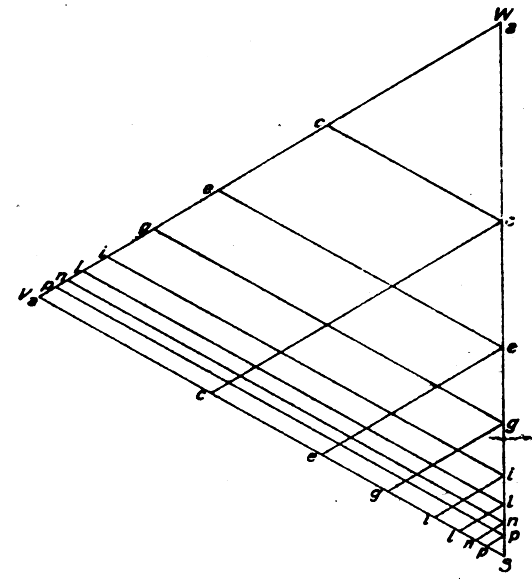


Fig. 7.

Daraus ist zu schließen, daß die Reingleichen keine psychologische Bedeutung haben.

Die Schattenreihen. Zieht man die Diagonalen der Rauten, wie sie durch die Scharen der logarithmischen Weiß- und Schwarzgleichen gebildet werden, von oben nach unten, so bilden diese ungeknickte Gerade, die alle in der Schwarzecke *s* zusammenlaufen. Zeichnet man ein „psychologisches" Dreieck, in welchem die logarithmischen Abstände gleich gemacht sind, so werden die Rauten gleich und die Diagonalen richten sich parallel zu *ws*, entsprechend dem Umstande, daß nun ihr Durchschnittspunkt *s* nach unten ins Unendliche gerückt ist. Der Parallelismus zu *ws* zeigt, daß diesen Diagonalen eine besondere Bedeutung zukommt, indem sie innerhalb des bunten Feldes der Graureihe analog sind. Sie stellen das psychologische Äquivalent der Reingleichen dar. Ihre analytische Definition ergibt sich daraus, daß sie im analytischen Dreieck nach der *S*-Ecke zusammenlaufen. Das bedeutet, daß in den zugehörigen Farben das Verhältnis Vollfarbe : Weiß konstant ist, während der schwarze Anteil von 0 bis 1 wechseln kann.

Wir sind mit derartigen Reihen durch tägliche Erfahrung wohlbekannt. Sie bilden sich, wenn man irgendeine Farbe beschattet, d. h. ihren Schwarzanteil vermehrt, während die beiden anderen Bestandteile in gleichem Verhältnis vermindert werden. Jeder gleichfarbige Körper, dessen verschiedene Seiten ungleich stark beleuchtet sind, zeigt solche Reihen. Wir nennen sie deshalb Schatten-

1) Die Zeichnung ist der Einfachheit wegen auf jeden zweiten Teilpunkt und acht solcher Stufen beschränkt worden.

reihen. Sie spielen in der Farbenpsychologie und der Farbkunst eine äußerst wichtige Rolle. Für jene stellen sie, wie bereits erwähnt, die psychologischen Reingleichen dar. In dieser bilden sie die Ton-in-Ton-Abstufungen, die bisher fast immer falsch definiert und ausgeführt worden sind.

Der psychologische Farbkörper. Wollen wir im farbtongleichen Dreieck die Farben so ordnen, daß überall gleichen räumlichen Abständen psychologisch gleiche Stufen zugeordnet sind, so brauchen wir, wie erwähnt, nur die logarithmische Teilung der Fig. 7 durch eine gleichabständige zu ersetzen, Fig. 8,

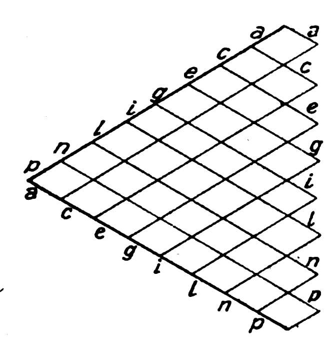


Fig. 8.

und die Farben Raute für Raute zu übertragen. In einem solchen Dreieck liegt die Seite *vs* theoretisch im Unendlichen, es ist also nach unten offen und wird nur durch eine praktische Festlegung abgeschlossen.

Führt man ein solches Dreieck in Farben aus, so gewinnt man einen ungemein starken und schönen Eindruck. Jedes Feld steht zu jedem anderen in streng gesetzmäßiger Beziehung. Noch eindringlicher und schöner wird der Anblick, wenn man zwei solche Dreiecke in Gegenfarben, entsprechend einem Hauptschnitt durch den ganzen Farbkörper, zu einer Raute vereinigt, Fig. 9. Solche Hauptschnitte zeigen zum ersten Male die wirklichen gesetzmäßigen Zusammenhänge der Farben. Obwohl in ihnen die kräftigsten Gegenfarben vertreten

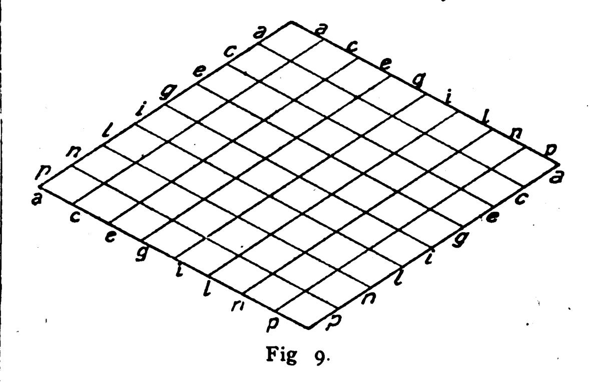


Fig 9.

sind, die somit den denkbar stärksten Kontrast bilden, wirken sie mit vollendeter Ruhe und Harmonie. Sie bilden einen Schlüssel zur Bestimmung aller farbigen Harmonien, deren Grundgesetze weiter unten kurz dargestellt werden sollen.

Stellt man alle 50 Hauptschnitte, die sämtliche Stufen des Farbkreises enthalten, so ineinander, daß sie eine gemeinsame unbunte Mittelachse haben, so gewinnt man den psychologischen Farbkörper, der für alle psychologischen Zwecke, mit Einschluß der künstlerischen, an die Stelle des analytischen zu treten hat[1]). Er hat die Gestalt eines Doppelkegels, ist aber theoretisch gesprochen nach unten unbegrenzt.

1) Zwölf solche Hauptschnitte, entsprechend den vierundzwanzig wichtigsten Punkten des Farbtonkreises, je vierundsechzig Farben enthaltend, sind hergestellt und unter der Bezeichnung: Der Farbkörper, vom Verlag Unesma, Leipzig, in den Verkehr gebracht worden.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

L. Holborn, K. Scheel, F. Henning, Wärmetabellen. Ergebnisse aus den thermischen Untersuchungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. 72 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1919. Kart. M. 7.—.

Es ist eine verdienstvolle Arbeit in dieser Zusammenstellung der Ergebnisse der zahlreichen über viele Jahre sich erstreckenden thermischen Untersuchungen der Reichsanstalt geleistet. Die Resultate — es handelt sich im wesentlichen um Neubestimmungen der von Regnault gemessenen thermischen Konstanten, der Hauptaufgabe, die Helmholtz der Reichsanstalt bei ihrer Gründung auf dem Gebiete der Wärmephysik stellte — sind hier (u. a. auch auf den neuen Wert des Wärmeäquivalentes 1 cal_{15} = 4,1842 Wattsekunden) bezogen im Gegensatz zu den Originalarbeiten, denen nicht durchweg die gleiche Temperaturskala zugrunde gelegt werden konnte, da diese selbst mit der Zeit erst eine genauere Fixierung erfahren hat, auf einheitliche Grundlagen. Den Tabellen gehen in den 5 Kapiteln: Thermometrie, Zu-

standsgröße, Spezifische Wärme, Wasserdampf, Wärmeleitung, kurze Erläuterungen der Tabellen mit den Literaturnachweisen voraus. S. Valentiner.

G. Jäger, Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. 2. Aufl. (Die Wissenschaft. Bd. 12.) IX u. 158 S. Mit 11 Abb. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1919. Geh. M. 7.—, geb. M. 9.—.

Die neue Auflage dieses einfach und klar geschriebenen Bändchens ist gegenüber der ersten vom Jahre 1906 (vgl. diese Zeitschr. **7**, 430, 1906) nur wenig verändert. Einige neue Abschnitte über Gase hoher Verdünnung und über Lösungen und Emulsionen sind eingefügt. Was die Behandlung der verdünnten Lösungen betrifft, so hat sich der Verf. eng angeschlossen an seine in den Ann. d. Phys. veröffentlichten Arbeiten (1913 und 1918). Es handelt sich dabei um die Ableitung der Gesetze des osmotischen Druckes, wobei von dem Begriff der „Förderung der Bewegungsgröße" Gebrauch gemacht wird. Das ist der Anteil des Druckes in komprimierten Gasen, der zu dem Druck in idealen Gasen hinzukommt, weil bei der Übertragung der Bewegungsgröße während des Zusammenstoßes auf Grund der Annahme vollkommen elastischer Kugeln immer Wegstrecken gleich dem Durchmesser σ einer Molekel übersprungen werden, die Bewegungsgröße also schneller von einem Punkt zum andern übertragen werden kann. (Diese Förderung der Bewegungsgröße spielt dann, wenn die freie Weglänge beträchtlich ist gegenüber σ, also bei idealen Gasen, natürlich keine Rolle.) Ferner handelt es sich um die Besprechung der Dampfspannung in verdünnten Lösungen und daran anschließend die Formel der Siedepunktserhöhung und der Gefrierpunktserniedrigung. In den beiden Abschnitten „Emulsionen" und „Brownsche Bewegung" bringt der Verf. die Berechnung der Loschmidtschen Zahl.

Die Behandlung der hochverdünnten Gase in den drei Abschnitten: „Der Temperatursprung bei der Wärmeleitung", „Gase bei hoher Verdünnung", „Thermische Molekularströmung" ist, allerdings wohl dem ganzen Umfang des kleinen Bändchens entsprechend, etwas kurz ausgefallen. S. Valentiner.

G. Berndt, Kompendium der Experimentalphysik. 2., verbess. u. vermehrte Auflage. (Kollegienhefte Bd. II.) 8⁰. XII u. 211 S. Mit 59 Figuren. Leipzig, S. Hirzel. 1920. Geb. M. 22.50 und mit Schreibpapier durchschossen M. 28.—.

Für den Hörer der Experimentalphysik bestimmt, will das sehr empfehlenswerte Werk das Nachschreiben der Vorlesung ersparen und ein intensiveres Zuhören ermöglichen. Wenn es auch nicht für eine Spezialvorlesung bestimmt ist, so wird das Berndtsche Kompendium nicht nur dem Mediziner oder Chemiker von Nutzen sein, sondern auch dem angehenden Physiker eine wertvolle Hilfe darbieten und ihn zu einem Nacharbeiten der Vorlesung befähigen, um so mehr, als fast auf jeder Seite sich die nötigen Literaturnachweise vorfinden. Auch zur letzten Repetition vor einem Examen dürfte sich das Buch, das den neuesten Anschauungen folgt und alle Gebiete der modernen Experimentalphysik berührt, empfehlen. Die Grundgesetze der Physik werden auch in elementarer-mathematischer Sprache dargestellt, die Ableitungen derselben nur angedeutet. Behrendsen.

Tagesereignisse.

Ausstellung für chemisches Apparatewesen (Achema). Anläßlich der in der Pfingstwoche zu Stuttgart stattfindenden Hauptversammlung des Vereins Deutscher Chemiker veranstaltet die Fachgruppe für chemisches Apparatewesen eine Ausstellung für chemisches Apparatewesen (Achema). Die erste Achema fand im September 1920 anläßlich der Hauptversammlung des Vereins Deutscher Chemiker in Hannover statt. Durch die rege Beteiligung und noch mehr durch den großen geschäftlichen Erfolg der Aussteller, sowie durch die Anregung auf die gesamte Fachwelt wurde man veranlaßt, jährlich zur Hauptversammlung des V. D. Ch. eine Achema zu veranstalten. Anfragen und Anmeldungen sind zu richten an den Vorsitzenden der Fachgruppe für chemisches Apparatewesen des Vereins Deutscher Chemiker Herrn Dr. Max Buchner, Hannover-Kleefeld, Schellingstr. 1.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München für Chemie Professor Dr. Karl Freudenberg (bisher in Kiel).

Ernannt: Der tit. ord. Professor der Physik an der Universität Wien Dr. Felix Ehrenhaft zum ord. Professor der Physik und zum Vorstande des III. physikalischen Instituts der Universität Wien, der Professor der Chemie an der Universität St. Andrews J. C. Irvine zum Rektor dieser Universität, der Forschungschemiker des Forest Products Laboratory in Madison Dr. Samuel A. Mahood zum ord. Professor für organische Chemie an der Universität New Orleans, der Privatdozent an der Universität München Dr. Walter Kossel zum ord. Professor der Physik an der Universität Kiel, die a.o. Professoren an der Universität Greifswald Dr. Adolf Siewerts (physikalische Chemie), Dr. Theodor Posner (Chemie) und Dr. Peter Dankwortt (pharmazeutische Chemie), die a.o. Professoren für Chemie an der Universität Königsberg Dr. Fritz Eisenlohr und Dr. Adolf Sonn zu ord. Professoren an derselben Hochschule, der ord. Professor an der Universität Wien Dr. Jean Fischer zum ord. Professor für organische Chemie an der Technischen Hochschule München.

Neuer Lehrauftrag: Der Assistent am Physikalischen Institut der Universität Leipzig Dr. Franz Rother für photographische Optik und photographische Chemie an der Akademie für Buchgewerbe und graphische Künste in Leipzig.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Hannover Geh. Regierungsrat Dr. Karl Seubert.

Gestorben: Der ord. Honorarprofessor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Aachen Geheimer Regierungsrat Dr. Otto Grotrian, der frühere Dozent für Chemie und Mineralogie an der Forstlichen Hochschule Aschaffenburg Professor Dr. Max Conrad, der emer. Professor der Chemie am Amherst College Elijah Paddock Harris, der frühere ord. Professor der Astronomie an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Wilhelm Foerster.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. | 15. Februar 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 6 am 20. Februar 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Lichtelektrische Photometrie des Nachleuchtens von aktivem Stickstoff.

Von E. v. Angerer.

Mit Tafel I.

1. Problemstellung. Das Physikalische Institut der Technischen Hochschule besitzt eine besonders kräftige Anordnung zur Demonstration des elektrodenlosen Ringstromes. (Vgl. den nachstehenden Bericht von Herrn Zenneck.) Auf Wunsch von Herrn Prof. Zenneck füllte ich im Frühjahr 1914, um die Leuchterscheinung des Ringstromes noch zu steigern, die benützte Thomson-Kugel von 47 cm Durchmesser mit reinem Stickstoff.

Der Stickstoff wurde[1]) durch Erwärmen einer Mischung von gleichen Teilen Ammonchlorid, Kaliumnitrit und Kaliumbichromat in der 9fachen Menge Wasser hergestellt, passierte dann in langsamem Strom eine große Waschflasche mit angesäuerter Ferrosulfatlösung, eine weitere mit augesäuerter Kaliumpermanganatlösung, eine dritte mit konzentrierter Kalilauge und eine vierte mit reiner Schwefelsäure. Weiter wurde er über glühendes Kupfer in einem Verbrennungsrohr geleitet und endlich durch eine Glasrohrspirale, die sich in flüssiger Luft befand.

Die vorher mit Chromsäure gereinigte Thomsonkugel war zunächst in einem teilweise mit Wasser gefüllten Eisenkessel montiert. Das Wasser wurde zum Sieden gebracht und der Kolben durch den Dampf auf etwa 100° erhitzt, während er durch eine rotierende Gaede-Quecksilberpumpe evakuiert wurde. Die Vakuumleitung führte gleichfalls durch die Spirale in flüssiger Luft. Das Auspumpen und Spülen mit Stickstoff wurde einige Tage fortgesetzt. Dann entfernte man den Kessel, klebte zwei große, mit einem kleinen Induktor verbundene Stanniolbelegungen auf den Kolben, wählte den Gasdruck so, daß der Kolben am besten leuchtete und schmolz ihn ab.

Wenn somit — infolge der Größe des Kolbens — auch nicht die äußerste Sorgfalt bei der Füllung angewandt worden war, so dürfte die Stickstoff-Füllung doch einen erheblichen Grad von Reinheit besitzen. In der Tat erschien bei der beschriebenen Anordnung die elektrodenlose Entladung in diesem Kolben als hellglänzendes, schmales, dem herumgelegten Drahtring benachbartes Band. Nach Abstellen des Stromes aber leuchtete der ganze Gasinhalt der Kugel nach, hell genug, um in großer Nähe den Sekundenzeiger einer Taschenuhr etwa 15 Sekunden lang verfolgen zu können. Bei stärkster Erregung war das Leuchten erst nach $2^1/_2$ Minuten abgeklungen. Die Farbe war anfangs orangegelb, später grünlichgelb, vielleicht eine Folge des Purkinje-Phänomens. Das Nachleuchten des Gases ließ sich auch in dem Hals des Kolbens und sogar bis in die Kapillare der Abschmelzstelle erkennen.

Die Vermutung, daß es sich hierbei um den von Strutt beschriebenen „chemisch aktiven Stickstoff“[1]) handle, konnte durch Spektralaufnahmen des Verfassers bestätigt werden. Es wurde dabei abwechselnd bei verdecktem Spektrographenspalt der Kolben erregt und während des Nachleuchtens die Platte belichtet.

1) Vgl. E. v. Angerer, Ann. d. Phys. **32**, 549, 1910.

1) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. London A. **85**, 219, 377, 1911; **86**, 56, 262, 1911/12; **87**, 179, 1912. Vgl. auch F. Compte, diese Zeitschr. **14**, 74, 1913 und A. König u. E. Elöd, diese Zeitschr. **14**, 165, 1913.

Herr Kossel machte damals darauf aufmerksam, daß man aus der Abhängigkeit der Intensität des Nachleuchtens von der Zeit Schlüsse auf die Konstitution des chemisch aktiven Stickstoffes ziehen könnte und stellte einige Versuche mit einem Martensschen Polarisationsphotometer an, die jedoch keine sicheren Resultate ergaben. Es schien erforderlich, nach einer einmaligen Anregung des Kolbens die Intensität womöglich von Sekunde zu Sekunde messend zu verfolgen.

Nach den grundlegenden Untersuchungen von Elster und Geitel[1]) versprach dazu die Anwendung einer lichtelektrischen Zelle den wahrscheinlichsten Erfolg. Zu Bedenken gab dagegen die Nachwirkung der Zellen Anlaß, d. h. die Erscheinung, daß der Photostrom beim Belichten der Zelle erst allmählich seinen konstanten Wert erreicht, nach dem Verdunkeln nicht momentan, sondern allmählich auf 0 abnimmt. Besonders Herr P. P. Koch hatte bei seinem registrierenden Mikrophotometer mit dieser Fehlerquelle zu kämpfen[2]). Nach längerer Dunkelheit war 5 Sekunden nach Beginn der Belichtung seiner Zelle die Stromstärke noch 10 Proz. von ihrem Endwert entfernt, 5 Sek. nach dem Verdunkeln (nach langer Belichtung) noch 1,6 Proz. Eine derartige Trägheit hätte die geplanten Versuche vereiteln müssen.

Elster und Geitel sind der Ansicht[3]), daß diese Nachwirkung, die nur bei geringen Lichtstärken, bei Beobachtung mit dem Elektrometer aufzutreten scheint, von einem unsichtbaren Hauch von Kalium herrührt, das sich auf die innere Vorderfläche der Zelle niedergeschlagen hat, das beim Belichten Elektronen abgibt und im Dunkeln seine negative Ladung allmählich wieder verliert. Daher war zur Durchführung der vorliegenden Untersuchung die Konstruktion einer Spezialzelle beabsichtigt, bei welcher der Einfluß der Glaswand durch einen die Auffangelektrode umgebenden Käfig und durch Erwärmung eines Teiles der Glasoberfläche vermieden werden sollte. — In ihrer letzten Arbeit[4]) zeigen Elster und Geitel, daß mindestens ein Teil der Nachwirkung von einer Phosphoreszenz des Kaliumhydrids herrührt. Diese Störung könnte sich durch keine Neukonstruktion vermeiden lassen, sondern höchstens durch Verzicht auf die große, durch das Kaliumhydrid bedingte Empfindlichkeit.

1) Elster u. Geitel, diese Zeitschr. **12**, 758, 1911 und **14**, 741, 1913.
2) P. P. Koch, Ann. d. Phys. **39**, 704, 1912.
3) l. c. S. 744, 1913.
4) Elster und Geitel, diese Zeitschr. **21**, 361, 1920.

Glücklicherweise war aber bei der benützten Versuchsanordnung unter Verwendung einer mit Argon gefüllten Kalium-Uviolglas-Zelle (ein Geschenk von den Herren Elster und Geitel an Herrn Geheimrat Ebert) die Nachwirkung so klein, daß sie nicht berücksichtigt zu werden brauchte (vgl. S. 100).

In Verfolg der Elster- und Geitelschen Ansicht wurde die benützte Zelle auf Phosphoreszenz untersucht, und zwar mittels der Lehmannschen Anordnung[1]) mit Nitrosodimethyl-Anilin-Filter, mit der auch geringe Spuren von Fluoreszenz und Phosphoreszenz stark hervortreten. Das Glas der Zelle fluoreszierte im ultravioletten Licht schwach grünlich, dagegen war keine Spur eines Nachleuchtens des Glases, der Kaliumfüllung oder der Montierung zu bemerken. — Es wäre möglich, daß sich verschiedene Exemplare von Zellen je nach ihrer Herstellung (der Menge des gebildeten Kaliumhydrids) in bezug auf Phosphoreszenz und ebenso in bezug auf Nachwirkung verschieden verhalten.

2. Prinzip der Versuchsanordnung. Ursprünglich war beabsichtigt, das Elektrometer mit einem parallel geschalteten hohen Widerstand als Strommesser zu verwenden und mittels eines Registrierapparates direkt die Abklingungskurve aufzunehmen. (Abszisse: Zeit; Ordinaten: Ausschläge = Stromstärken = Intensitäten.) Größere Lichtempfindlichkeit erreicht man aber nach der Methode der Aufladung des Elektrometers, das hierbei in kurzen Zwischenräumen, etwa alle Sekunden, zur Erde abgeleitet werden möge. Da es bei dieser Methode außerdem viel weniger stört, wenn Proportionalität zwischen Spannung und Elektrometerausschlag nur für kleine Ausschläge vorhanden ist, wurde sie trotz geringerer Übersichtlichkeit gewählt. Man legt also eine hohe negative Spannung an die Kaliumelektrode der lichtelektrischen Zelle und verbindet ihre Platinelektrode mit der Elektrometersaite. Dieses System liegt in Ruhe an Erde. Wenn es isoliert wird, lädt es sich durch die Zelle hindurch negativ auf, und die Geschwindigkeit der Aufladung ist der auf die Zelle fallenden Lichtintensität proportional. Registriert man die Stellung der Saite auf einem bewegten Film, so wird man folgende Kurven erhalten:

Ist die Lichtintensität während einer Sekunde merklich konstant, die Ablenkung der Saite der elektrischen Spannung proportional und die Einstelldauer der Saite sehr kurz, so besteht die Zickzacklinie (Fig. 1) aus geraden Stücken.

1) H. Lehmann, diese Zeitschr. **11**, 1039, 1910; Verhandl. d. D. Phys. Ges. **12**, 890, 1910.



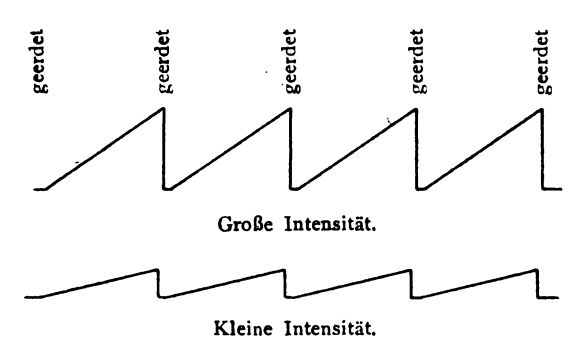


Fig. 1.

Die Lichtintensität wird durch die Neigung der ansteigenden Linien oder durch die Höhe der Zacken gemessen.

3. Beschreibung des Aufbaues. Es lag in der Problemstellung, daß Kaliumzelle und Elektrometer in der Nähe des Hochfrequenzkreises aufgebaut werden mußten. Um induzierte Spannungen, die sowohl der Elektrometersaite gefährlich werden als auch in der Zelle leuchtende Entladung auslösen konnten, nach Möglichkeit zu verhindern, wurde die ganze Meßanordnung einschließlich der Batterien in einem Blechwürfel von 1 m Kantenlänge untergebracht. Abstand der Zelle vom Mittelpunkt der Thomsonkugel 1,30 m. Vor der Zelle befand sich eine Öffnung in der Kastenwand, die durch einen photographischen Verschluß geschlossen werden konnte, vor diesem zwei große Kondensoren, welche die Beleuchtungsintensität erheblich vergrößerten. — Die Schaltung ist aus Fig. 2 ersichtlich. KZ bedeutet

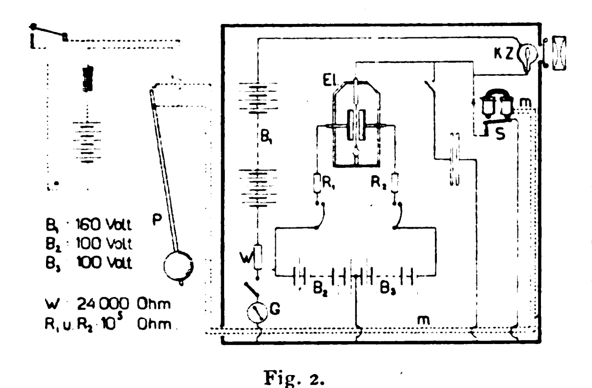


Fig. 2.

die Kaliumzelle, deren Kaliumelektrode mit dem — Pol der Batterie B_1 von 160 Volt verbunden ist, deren + Pol durch einen Graphitwiderstand W von 24000 Ohm, einen Hg-Ausschalter und ein von außen ablesbares Zeigergalvanometer G geerdet ist. Die Platinelektrode von KZ ist mit der Saite des Elektrometers El und dem automatischen Schalter S in Verbindung, der in Ruhestellung diese Leitung erdet. Beim Versuch wird der Erregerstrom von S geschlossen (Leitung $m\,m$) und dadurch die Leitung KZ-El isoliert. Das Pendel P schließt die Wickelung des Magneten von S alle 0,8 Sekunden kurz, so daß er den Anker losläßt und die Leitung erdet. Ein Kohlrausch-Kondensator, der dem Elektrometer parallel geschaltet werden konnte, gestattete die Stromempfindlichkeit meßbar zu verringern.

Das Elektrometer El ist das neue Modell von Lutz-Edelmann[1]). Die Platinsaite hatte 2 μ Durchmesser. — Sämtliche Isolatoren des Systemes KZ-El waren aus Bernstein. Die Batterien bestanden aus im Institut hergestellten Reagenzglas-Akkumulatoren. Alle „Erdleitungen" waren mit dem großen Schutzkasten verlötet.

Die Beleuchtung der Elektrometersaite erfolgte durch eine mit 5 Amp. betriebene Weulelampe in einem großen Projektionsgestell von Zeiß. Das Licht wurde durch einen aplanatischen Kondensor parallel gerichtet, durchsetzte eine mit verdünnter ammoniakalischer $CuSO_4$-Lösung gefüllte Cuvette und wurde durch ein 2 m langes Rohr zum Elektrometer geleitet. Vor dessen Eintrittsöffnung befand sich ein kurzbrennweitiger kleiner Kondensor, der das Licht auf die Saite konzentrierte. Über Abbildung der Saite siehe unten. Es erforderte einige Sorgfalt, die Lampe so vollständig abzublenden, daß die Zelle nicht auf Spuren von Streulicht reagierte. Die durchscheinenden Bernsteinisolatoren im Gehäuse der Zelle waren z. B. durch eine mehrfache Lichtfalle geschützt.

Die Bewegung der Elektrometersaite wurde mittels eines photographischen Registrierapparates aufgezeichnet, der nach den Angaben von Herrn Dr. Wolff und dem Verfasser (für andere Zwecke) von der Firma Edelmann-München gebaut war und an anderer Stelle ausführlich beschrieben werden soll. Er trägt eine Kassette, in welcher der auf eine Rolle aufgewickelte photographische Papierstreifen von 75 m Länge und 3 cm Breite enthalten ist. Ein kräftiges, sehr gleichmäßig laufendes Grammophon-Uhrwerk mit Zentrifugalregulator zieht den Streifen, der im folgenden „Film" genannt wird, mit einer Geschwindigkeit von 4,6 cm pro Sekunde hinter dem horizontalen Spalt vorbei, durch den die Belichtung erfolgt. Der Abstand vom Okular des Elektrometermikroskopes bis zu diesem Spalt betrug 1,50 m.

Weil das etwas improvisierte Pendel nicht sehr exakt arbeitete, wurde noch eine (gleichfalls für andere Zwecke ausgearbeitete) Zeit-

1) Lutz, diese Zeitschr. **13**, 954, 1912.



markierung angewandt: Eine elektromagnetisch angetriebene Stimmgabel von Edelmann unterbricht 50mal pro Sekunde den Primärstrom eines kleinen Induktors, dessen Sekundärwickelung mit einer Heliumröhre verbunden ist. Die Kapillare der Heliumröhre befindet sich — dicht unter dem einfallenden Strahlenbündel der Bogenlampe — 9 cm vor dem oben erwähnten Spalt und wird durch zwei als Kondensor geschaltete Zylinderlinsen von zusammen 12 mm Brennweite als feine Lichtlinie auf dem Film abgebildet. Unter unseren Versuchsbedingungen dauert das Leuchten der Röhre bei jeder Entladung 6×10^{-4} Sekunden, das Bild der Kapillare wird also auch durch schnellere Bewegung des Films nicht merklich verbreitert. Infolgedessen erscheint ein Film, den man mit der Heliumröhre allein exponierte, von feinen, schwarzen, einigermaßen äquidistanten Linien durchzogen — „Zeitmarken" — deren Zeitabstand $^1/_{50}$ Sekunde beträgt. Über diese Teilung lagert sich die von der Bogenlampe herrührende Schwärzung[1]).

Die Lichtlinie, die von den Strahlen Bogenlampe — Elektrometer herrührt, befindet sich wenige Zehntel mm über der der Heliumröhre und ist durch eine dunkle Stelle, den Schatten der Saite, unterbrochen. Der Schatten der Saite erschien zwar bei Projektion auf einen Schirm aus einiger Entfernung betrachtet schwarz und scharf, mit einer Einstellupe in der Durchsicht zeigte er sich aber stark gefärbt und unscharf. Die Farbe wechselte mit der Einstellung des Mikroskopes (Feinverstellung zum Platz des Beobachters). Da die Exaktheit der Messung durch scharfe Abbildung natürlich sehr vermehrt werden kann, wurde mit gutem Erfolg versucht, die Optik zu verbessern. Das beim Saitenelektrometer meist benützte Zeiß-Objektiv *A*[2]) wurde durch Objektiv *AA* ersetzt, dessen Apertur um die Hälfte größer ist, durch den oben erwähnten kleinen Kondensor dafür gesorgt, daß das Objektiv mit Licht gefüllt war und durch die ammoniakalische Kupfersulfatlösung das Licht einigermaßen monochromatisch gemacht. Als Okular erwies sich von den mir zur Verfügung stehenden das Projektionsokular 4 als bestes. — Die Vergrößerung bei der beschriebenen Anordnung war 250fach.

4. Die Versuche.

a) Die Dämpfung der Elektrometersaite. Die Dämpfung, die bei den Versuchen 28 u. 29 vorhanden war, ist aus Bild 1, Tafel 1 zu erkennen. Bei dieser Aufnahme wurde das Elektrometer abwechselnd auf 1,3 Volt geladen und entladen. Wie man sieht, ist die Einstellung hier in etwa $^1/_{30}$ Sekunde erfolgt. Leider ist bei dieser (starken) Spannung die Empfindlichkeit ziemlich gering und Proportionalität zwischen EMK. und Ablenkung nur für kleine EMK. vorhanden. Die Eichung ergab: $^1/_3$ Volt: 8 mm, $^2/_3$ Volt: 15 mm, 1 Volt: 21 mm, $1^1/_3$ Volt: 26 mm.

b) Nachwirkung der Zelle. An die Stelle der Thomsonkugel brachte man eine kleine Glühlampe und dicht vor diese einen photographischen Schlitzverschluß. Wenn das Rouleaux desselben eben die Kaliumzelle beschattete, trennte es zwei Kontaktfedern, die den Strom eines Induktors unterbrachen. Die Sekundärspule dieses Induktors war mit der oben erwähnten Heliumröhre verbunden, die also im Moment der Verdunkelung aufblitzte und auf dem Film diesen Moment durch eine schwarze Linie bezeichnete. Die Zeit vom Beginn bis zur Vollendung der Verdunkelung der Zelle wurde zu etwa $^1/_{5000}$ Sekunde berechnet, die Verdunkelung erfolgt also praktisch momentan. — Zum Versuch wurde die Glühlampe durch einen Vorschaltwiderstand auf geeignete Helligkeit eingestellt, einige „Zacken" registriert und dann der Verschluß betätigt. Bild 2 Tafel 1 zeigt eine dieser Aufnahmen, bei der die Beleuchtung der Zelle 0,029 Meterkerzen betrug. Die Ausmessung mehrerer derartiger Aufnahmen ergab, daß bei den hier in Frage kommenden Intensitäten nach wenigen hundertstel Sekunden keine merkliche Nachwirkung vorhanden ist.

c) Abklingung der Leuchterscheinung in der Stickstoffkugel. Der Gang der eigentlichen Versuche ergibt sich nach dem Vorstehenden von selbst: Zuerst wurde durch Steigerung der Intensität der Entladungen der Kolben zu kräftigem Nachleuchten erregt, während man sich durch Beobachtung des Zeigergalvanometers *G* überzeugte, daß keine leuchtende Entladung durch die Zelle ging. Hierauf prüfte man die Bogenlampe auf Lichtdichtheit, setzte Pendel und Stimmgabel in Gang, öffnete den Verschluß vor der Zelle und registrierte den „Dunkeleffekt". Dann wurde der Kolben bei geschlossenem Verschluß erregt und so schnell wie möglich (etwa $^1/_2$ Sekunde) nach Öffnung des Erregerstromes der Verschluß geöffnet und mit der Registrierung des Nachleuchtens begonnen. Die Bewegung der Saite konnte während der Aufnahme beobachtet werden. Wenn die Ausschläge klein geworden

1) Auf den beiliegenden Reproduktionen ist zur Erhöhung der Kontraste der Grund so dunkel kopiert, daß die Zeitmarken verschwinden. Vgl. die Abbildungen in der Arbeit von R. Ladenburg, Zeitschr. f. techn. Physik 1, 197, 1920, die mit einem unserer Apparate erhalten wurden.

2) P. P. Koch. l. c. S. 713. Koch erwähnt auch (S. 744) die farbigen Ränder der Saite.

waren, wurde der Versuch abgebrochen. Auf Bild 3 Tafel 1 ist Film 33 reproduziert. Man erkennt deutlich, wie die Aufladegeschwindigkeit entsprechend der abnehmenden Lichtstärke immer kleiner wird.

Bei Versuch 4 wurde die Höhe der Zacken auf der Teilmaschine ausgemessen und die Änderung der Elektrometerempfindlichkeit berücksichtigt. Später baute ich eine Auswertvorrichtung, um die Winkel der Anstiege zu messen. Sie besteht aus einer Kreisteilung (Wert eines Intervalles: 10′) und einer Alhidade, mit der eine Glasplatte mit einigen auf der Unterseite eingeätzten parallelen Strichen verbunden ist. Der Film wird unter die Platte gelegt, die ihn mit sanftem Druck auf die Unterlage preßt. Während die Alhidade auf 0 steht, richtet man den Film so, daß seine Nulllinie mit einem Strich auf der Glasplatte zusammenfällt und dreht dann die Alhidade so weit, daß der Strich die Spur der Saite in der Nähe ihrer Nullage tangiert. Einstellgenauigkeit: $\pm 10'$. Die Tangenten dieser Winkel, die als Maß für die Lichtintensität dienen, wurden aufgesucht und an jedem Wert die Korrektion für den Dunkeleffekt angebracht.

Die Versuche teilen sich in drei Gruppen: Bei Aufnahme 4 war die (optische) Vergrößerung des Elektrometerausschlages viel geringer, die Schneidenladung nur 40 Volt, dafür die Saite schlaffer. Wie erwähnt, wurde dieser Versuch auch auf andere Weise ausgewertet. Die zweite Gruppe — Versuch 28, 29a und 29b — wurde im Anschluß an die unter a) beschriebenen Aufnahmen gemacht. Bei der dritten Gruppe endlich, von der Versuch 32, 33 und 35 ausgewertet wurden, hatte sich die Saite spontan im Feld verlagert, die Empfindlichkeit war kleiner, die Einstellgeschwindigkeit noch größer geworden. Außerdem wählte man bei diesen Versuchen die Amplitude des Pendels so klein, daß das System jedesmal 0,2 Sek. mit der Erde verbunden blieb und die Saite vollständig zur Ruhe kam (vgl. Tafel 1, Bild 3).

5. Ergebnis. Alle ausgewerteten Versuche sind in Figur 3 graphisch dargestellt. Abszisse ist die Zeit, Ordinate die Intensität in willkürlichem Maße, und zwar ist ein logarithmischer Maßstab für die Intensitäten angewandt. Die Streuung der Beobachtungspunkte ist befriedigend gering; gegen das Ende der Kurven wird sie naturgemäß stärker. Augenscheinlich sind die Kurven keine Geraden. Die Abklingung erfolgt also nicht nach einer e-Funktion. (Wegen der verschiedenen Empfindlichkeiten lassen sich die

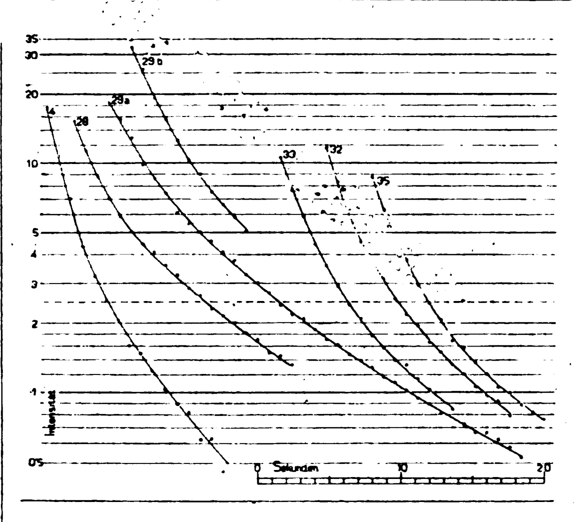


Fig. 3.

Intensitäten einer Gruppe nicht mit der einer andern vergleichen.)

Trägt man dagegen als Ordinaten die reziproken Wurzeln aus den Intensitäten auf (Fig. 4), so erhält man nahezu gerade

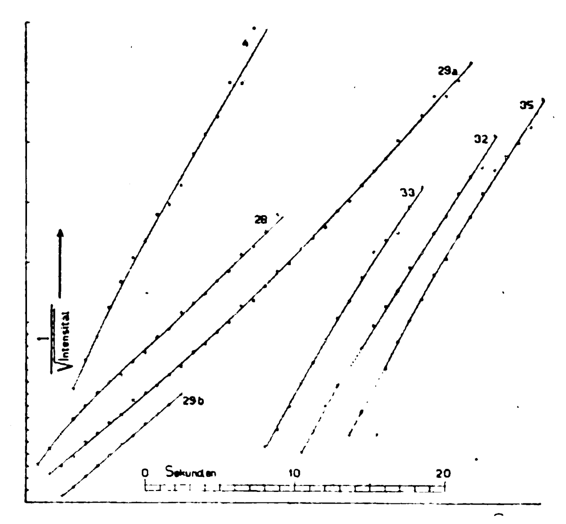


Fig. 4.

Linien. Dies läßt auf den bimolekularen Charakter der Reaktion schließen. Nur bei sehr großen Intensitätsunterschieden sind diese Kurven merklich gekrümmt, aber bei verschiedenen Versuchen bald konvex, bald konkav. Um zu entscheiden, ob diese Krümmung etwa durch einen systematischen Fehler bei der Auswertung verursacht werde, wurde die Empfindlichkeit bei Versuch 32 und 35 während der ersten Sekunden durch einen parallel zum Elektrometer geschalteten Kondensator im Verhältnis 1 : 2,60 herabgedrückt (gestrichelte

Linie). Die Kurve läuft jedoch nach Abschalten der Kapazität glatt weiter.

Die Ursache dieser schwachen Krümmung, der kaum große Bedeutung zukommen dürfte, konnte zunächst nicht festgestellt werden. Es wird das Ziel weiterer Versuche sein, die Abhängigkeit des Nachleuchtens von Druck und Temperatur des Stickstoffes messend zu verfolgen, andere nachleuchtende Gase zu untersuchen und außerdem auf dem beschrittenen Wege noch schneller veränderliche Leuchtvorgänge der Messung zugänglich zu machen.

Herrn Professor Zenneck möchte ich auch an dieser Stelle für viele gute Ratschläge herzlich danken.

6. Zusammenfassung. 1. Es wurde eine Methode angegeben, um mittels der lichtelektrischen Zelle eine schwache, zeitlich veränderliche Lichtintensität von Sekunde zu Sekunde zu messen.

2. Die Nachwirkung der benützten Zelle konnte dabei vernachlässigt werden.

3. Die Anwendung auf die Abklingung des Nachleuchtens von chemisch aktivem Stickstoff ergab, daß $\frac{1}{\sqrt{\text{Intensität}}}$ der Zeit nahe proportional ist.

Physikalisches Institut d. Techn. Hochschule, München.

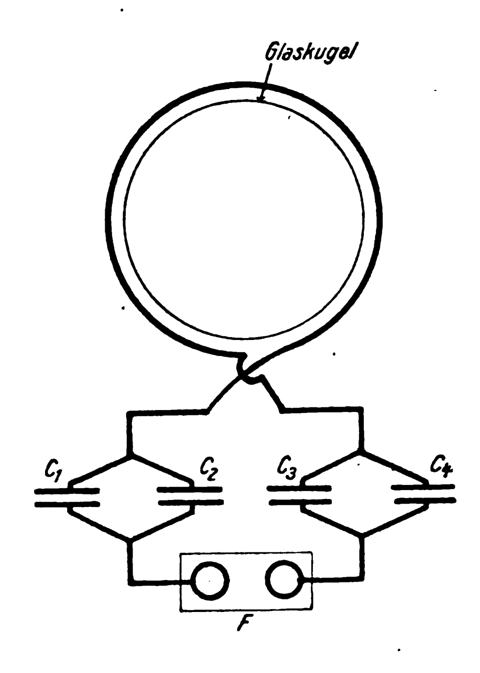
(Eingegangen 13. Dezember 1920.)

Die Demonstration des Nachleuchtens von aktivem Stickstoff mit Hilfe des elektrodenlosen Ringstromes.

Von J. Zenneck.

1. Seit 1914 zeige ich in der Experimentalvorlesung den bekannten Hittorfschen Versuch mit dem sogenannten elektrodenlosen Ringstrom[1]) in der folgenden Form, die für einen großen Hörerkreis sich sehr gut bewährt hat.

Die Glaskugel (bezogen von E. Gundelach, Gehlberg i. Thür.), in welcher der Ringstrom zustande kommen soll, hat einen Durchmesser von 46,5 cm. Sie ist mit sehr gut gereinigtem Stickstoff[2]) gefüllt. Der Kondensatorkreis (Fig. 1),



dessen Schwingungen das magnetische Hochfrequenzfeld im Innern der Kugel liefern, besitzt 4 große Boassche Leidener Flaschen (C_1—C_4) von je ca. 10000 cm Kapazität in der Schaltung von Fig. 1 und eine in einen Kasten eingeschlossene Funkenstrecke (F) mit Magnesiumkugeln von ca. 2 cm Durchmesser und einem Abstand von ca. 3,5 cm. Die Strombahn des Kondensatorkreises besteht, abgesehen von den möglichst kurzen Verbindungsleitungen, aus einem einfachen Drahtkreis von ca. 47,5 cm Durchmesser, der um die Glaskugel gelegt und durch Korkscheiben von der unmittelbaren Berührung mit der Glaswand abgehalten wird. Gespeist wird der Kondensatorkreis durch einen Boasschen Resonanzinduktor für 50 periodigen Wechselstrom. Die 4 Sekundärspulen desselben sind in Serie geschaltet, die Koppelung zwischen den Primär- und Sekundärspulen ziemlich lose. Die Frequenz der speisenden Wechselstrommaschine wird so eingestellt, daß man im Resonanzinduktor eine möglichst hohe Sekundärspannung und nur wenige Funken pro Sekunde erhält.

2. Wenn die Anordnung im Gange ist, bekommt man die bekannte Erscheinung: man sieht in der Glaskugel einen mit der Strombahn des Kondensatorkreises koaxialen leuchtenden Ring mit einer gegen das Innere der Kugel abnehmenden Intensität[1]). Er gibt ein

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21, 137, 1884. — Literatur über Versuche mit dem elektrodenlosen Ringstrom bei A. Hartmann, Diss., Basel 1919.

2) Herr Dr. E. v. Angerer war so freundlich, die Darstellung des Stickstoffes und Füllung der Glaskugel zu übernehmen (vgl. die vorstehende Arbeit). — Soll nur der elektrodenlose Ringstrom in möglichst glänzender Form demonstriert werden, so empfiehlt es sich, in die vorher stark evakuierte Kugel einige Jodkristalle zu bringen. Die Kugel läßt sich dann auch für die Demonstration der Fluoreszenz des Joddampfs verwenden.

1) Photographische Abbildung z. B. bei J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Stuttgart, Ferd. Enke 1905, S. 481.



sehr anschauliches Bild von dem induzierten elektrischen Feld im Innern der Kugel[1]).

Wird der Speisestrom unterbrochen, so leuchtet das ganze Innere der Kugel orangegelb nach. Das Leuchten ist so intensiv und klingt so langsam — und zwar mit allmählichem Übergang in eine mehr grünlich-gelbe Färbung — ab, daß nach ungefähr einer halben Minute das Spektrum in einem Taschenspektroskop noch gut sichtbar ist. Es ist von demselbem Charakter wie es von den Herren A. Fowler und R. J. Strutt[2]) bei dem Zerfall von „aktivem Stickstoff" beobachtet wurde. Die Anordnung ist also besonders geeignet, um diesen „aktiven Stickstoff" in einer Experimentalvorlesung vorzuführen.

3. Auf die Vorteile, welche der elektrodenlose Strom für das Studium von Gasentladungen und deren Spektren bietet, ist in neuerer Zeit von W. A. Hagenbach und W. Frey[3]) hingewiesen worden.

Zum Vergleich der Anordnung mit anderen ist es vielleicht nicht uninteressant, sich zu überlegen, welche Feldstärken man bei einer Anordnung wie der beschriebenen im Innern der Kugel erhält. Die Anfangsspannung im Kondensatorkreis, wie sie sich aus der Schlagweite ergibt, ist ungefähr 50000 Volt, die mit dem Wellenmesser gemessene Wellenlänge 375 m, entsprechend einer Frequenz von 800000/sec. Daraus und aus der wirksamen Kapazität von 10000 cm berechnet sich eine Anfangsamplitude des Stroms im Kondensatorkreis von 2510 Ampère. Betrachtet man in der Glaskugel einen mit der Strombahn des Kondensatorkreises konzentrischen Kreis von 45,5 cm Durchmesser — ein solcher würde an der inneren Glaswand nahezu anliegen —, so findet man für die längs dieses Kreises induzierte elektromotorische Kraft eine Anfangsamplitude von 11750 Volt oder für die Feldstärke eine solche von 82 Volt/cm.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 14. Dezember 1920.)

1) Herr E. Lecher (diese Zeitschr. 4, 811, 1902/3) hat darauf hingewiesen, daß bei Anordnungen, bei denen die erregende Strombahn aus einer Spule mit mehreren Windungen besteht, die ringförmige Leuchterscheinung nicht von dem induzierten elektrischen Feld im Innern der Kugel herzurühren braucht, sondern durch die hohen Spannungen bedingt sein kann, die in diesem Falle zwischen den einzelnen Windungen, insbesondere den beiden äußersten herrschen. Bei der beschriebenen Anordnung, bei der die Strombahn aus einer einzigen Windung besteht und trotzdem eine vollkommen gleichmäßig ringförmige Leuchterscheinung zustande kommt, fällt dieses Bedenken weg.

2) A. Fowler und R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. Series A 85, 377—88, 1911. — In einer etwas späteren Arbeit Proc. Roy. Soc. Series A 86, 262 ff., 1911 wird der elektrodenlose Ringstrom zur Darstellung des aktiven Stickstoffs benützt.

3) W. A. Hagenbach und W. Frey diese Zeitschr. 18, 544—47, 1917. Sie beschreiben auch das Nachleuchten bei Verwendung von Stickstoff.

Über ein mechanisches Modell zur Darstellung gasmechanischer Zustandsänderungen und der Entropie.

Von Richard v. Dallwitz-Wegner.

Mit der in Fig. 1 schematisch dargestellten Maschine kann man nicht nur alle Zustandsänderungen, umkehrbare und nicht umkehrbare eines Gases und die gasmechanischen Gesetze durch Bewegungen von Massen sichtbar veranschaulichen, das Modell zeigt auch „Entropie", und erläutert diesen Begriff in mechanischer Weise. Das Modell, das bei A. Pfeiffer in Wetzlar zu haben ist, zeigt auch, daß die Gasgesetze gültig bleiben, wenn die Molekeln gar keine fortschreitenden, sondern nur Rotationsbewegungen um Kraftzentren ausführen würden, und liefert dadurch Anklänge an die Vorgänge im Bohrschen Atommodell.

In einem genau horizontal ausgerichteten Arm B, der um die Welle W in der horizontalen Ebene rotiert, befindet sich eine Rinne, in der eine Masse M in radialer Richtung reibungslos rollen kann. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird angenommen, daß der Arm B und die Welle W masselos sind, auch von der Reibung wird hier ganz abgesehen. Die Masse M bewegt sich mit der Umlaufsgeschwindigkeit u in der Pfeilrichtung im Kreise herum, in einem Abstand r vom Mittelpunkt der Bewegung. Die Masse M besitzt die Energie

$$E = M\frac{u^2}{2}, \qquad (1)$$

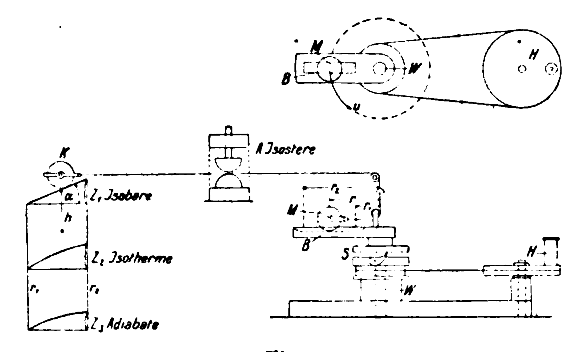


Fig. 1.

und strebt mit der Kraft

$$G = M\frac{u^2}{r} \tag{2}$$

nach außen. Die Masse M wird auf dem Radius r aber festgehalten durch eine Kraft

$$K \operatorname{tg} \alpha = G, \tag{3}$$

die entweder durch ein Gewicht K erzeugt wird, das sich auf einem Zinkenblech Z_1 oder Z_2 oder Z_3 mit dem jeweilig passenden Steigungswinkel α der schiefen Ebene gegen die Horizontale in Verbindung mit M durch einen Schnurlauf bewegen kann, oder durch Arretierung der Verbindungsschnur bei A. Die Kraft $K \operatorname{tg} \alpha$ vertritt die die Masse M anziehende Zentralkraft. Die „innere" Energie E der Masse M bleibt konstant, da ja Reibung von der Betrachtung ausgeschlossen ist, so lange M nicht irgendwie von außen beeinflußt wird. Durch die Handkurbel H kann nun der Masse M die Energie e zugeführt werden (oder entzogen werden, solche Fälle seien aber nicht verfolgt), indem durch entsprechende Bewegung von H ein Gesperre S betätigt wird, das der rotierenden Rinne einen Impuls e erteilt. Dadurch wird im allgemeinen nicht nur die „innere" Energie E der Masse M, sondern auch die „äußere" Energie

$$E' = K \cdot h \tag{4}$$

des Systems geändert. Ist der Impuls e unendlich klein, gleich de, so wird allgemein

$$de = dE + K\,dh = dE + G\,dr. \tag{5}$$

Nun seien verschiedene Bewegungsarten der Masse M untersucht und dabei sei die Masse M fortlaufend mit einer gleich großen Gasmasse verglichen, die an Stelle der Umlaufsgeschwindigkeit die fortschreitende (Molekel) Geschwindigkeit u besitzt, und deren Volumen V bei den Anfangsbedingungen stets gleich r sei, etwa in der Weise, daß das Gas einen Zylinder füllt vom Querschnitt 1 und der jeweiligen Länge r. Es sei die Gastemperatur

$$T = \frac{Mu^2}{3R} = \frac{0{,}667}{R}\frac{Mu^2}{2} = \frac{0{,}667}{R} \cdot E \tag{6}$$

(nach Gleichung [1]),

nach der bekannten Beziehung der kinetischen Gastheorie. Das u der Gase und der Masse M des Modells sei also stets identisch. Das Gasvolumen war bei den Anfangsbedingungen

$$V = r, \tag{7}$$

infolge davon wird der Gasdruck

$$P = 0{,}333\frac{Mu^2}{r} = \frac{G}{3} \text{ (nach [2]).} \tag{8}$$

Die allgemeine Wärmegleichung der Gase in Parallele zu (5) ist, wenn unter M die Masse eines kg-Gewichts verstanden wird:

$$dq = c_v dT + P dv = c_v dT + RT\frac{dv}{v}. \tag{9}$$

Zur Erläuterung dieser Festsetzungen seien einige Zustandsänderungen vergleichsweise verfolgt:

α) Isostere Zustandsänderung: Die Masse M rotiere mit der Umlaufsgeschwindigkeit u_1 auf der Kreisbahn mit dem Radius r_1. Es ist nach (1)

$$E_1 = M\frac{u_1^2}{2} \tag{10}$$

und nach (2)

$$G_1 = M\frac{u_1^2}{r}. \tag{11}$$

Dem Streben G_1 der Masse M nach außen halte das Gewicht K mit der Kraft $K \operatorname{tg} \alpha$ gerade das Gleichgewicht. Wird nun die K und M verbindende Schnur bei A festgeklemmt, und der Masse M durch Bewegung der Kurbel H ein Bewegungsimpuls e erteilt, so kann sich E' nach (4) nicht ändern, die „äußere" Energie muß konstant bleiben, und in (5) ist $dE' = 0$. Durch die Energie e kann nur die „innere" Energie E_1 der Masse M nach (1) geändert werden. Es ist deshalb in (5)

$$de = dE. \tag{12}$$

Steigt durch die Energiezufuhr e die Umlaufsgeschwindigkeit der Masse M von u_1 auf u_2, so ist nach dem Impuls

$$E_2 = E_1 + e = M\frac{u_2^2}{2}; \quad G_2 = M\frac{u_2^2}{r_1},$$

und es ist

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{G_2}{G_1}, \quad r_1 = r_2. \tag{13}$$

In Fig. 2 ist ab die „Isostere" der Maschine in einem Gr-Zinken. Wird ein Gas in ein Gefäß eingeschlossen, so daß trotz Zuführung der Wärmemenge dq sein Volumen sich nicht ändern kann, so wird nach den Analogien 6, 7, 8 und 9 und nach (12) und (13)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{G_2}{G_1}, \quad dq = c_v dT. \tag{14}$$

Die Gas-Isostere ist in Fig. 2 durch ef im Gr- bzw. Pv-Achsenkreuz wiedergegeben, die Ordinaten sind nur ein Drittel so hoch, als die Modellordinaten, nach (8).

Nach (12) wird der Impuls

$$e = \int_1^2 dE = \frac{M}{2}(u_2^2 - u_1^2), \tag{15}$$

nach (14) wird aber die zugeführte Wärmemenge

$$q = c_v\int_1^2 dT = c_v(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{c_v \cdot 0{,}667}{R}\frac{M}{2}(u_2^2 - u_1^2). \tag{16}$$

Wie sich leicht nachweisen läßt, ist aber ganz allgemein

$$c_v = \delta \cdot 1{,}5 \cdot R = \frac{\delta \cdot R}{0{,}667}, \qquad (17)$$

worin δ den Faktor bedeutet, der bei einer Temperaturerhöhung eines Gases von T_1 (mit einer Fluggeschwindigkeit u_1) auf T_2 (mit einer Fluggeschwindigkeit der Molekeln u_2, angibt) wievielmal größer die Zunahme der Gesamtenergie der Molekeln,

$$= c_v (T_2 - T_1) \cdot 427 \text{ kgm/kg}$$

geworden ist, als die Zunahme der Flugenergie,

$$= M \cdot (u_2^2 - u_1^2) : 2 \text{ kgm/kg},$$

δ bemißt also die Gesamtenergiezunahme als Vielfaches der Flugenergiezunahme, was hier berücksichtigt werden muß, da der Masse M des Modells nur Flugenergie gegeben wird.

$$c_v (T_2 - T_1) = \delta \cdot \frac{M}{2} (u_2^2 - u_1^2). \qquad (18)$$

(c_v in mechanischem Maß).

Man findet den Wert von δ leicht durch numerische Feststellung dieser Beziehung mit irgendeinem Gas. Der Energieüberschuß steckt bei den zweiatomigen Gasen nach der allgemeinen Annahme in ihrer Zunahme an Drehenergie mit der Flugenergie, bei den zweiatomigen Gasen ist $\delta = 1{,}66$ bei gewöhnlicher Temperatur. Bewertet man nach (6) die Temperatur numerisch genauer, und setzt man c_v nach (17) ein, so wird also (16)

$$q = c_v \int_1^2 dT = \delta \cdot \frac{M}{2} (u_2^2 - u_1^2), \qquad (19)$$

ein Wert, der sich von dem für e in (15) nur durch den Faktor δ unterscheidet. Würde man die Masse M des Modells ebenfalls entsprechend und in Abhängigkeit von der Umlaufsgeschwindigkeit u rotieren lassen können, so würde in (15) ebenfalls ein Faktor δ auftreten, der unter Umständen auch ebenso groß sein kann. Im Faktor 5 können aber auch noch andere Energien als Drehenenergien stecken. Aber bei den einatomigen Gasen, bei denen nach den neuen Atomanschauungen keine Drehenergien auftreten können, findet man faktisch $\delta = 1$, bzw. $\varkappa =$ ca. 1,68.

Um nun auch den Begriff der Entropie in diese Betrachtung einzuführen, ist zu beachten, daß die allgemeine Gleichung (5) durch Einführung des integrierenden Faktors $1/E$ zu einem vollständigen Differential wird. Die entstehende Größe sei σ genannt. Es ist nach (1) und (2)

$$\frac{de}{E} = d\sigma = \frac{dE}{E} + \frac{G}{E} dr = 2 \frac{du}{u} + 2 \frac{dr}{r}. \qquad (20)$$

Die Entropiegleichung der Gase nach (9)

$$\frac{dq}{T} = dS = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

kann durch Einführung der Bedeutung von T aus (6) und durch Zerlegung von c_v nach (17) auf die analoge Form gebracht werden

$$\frac{dq}{E} = dS = 2\delta \frac{du}{u} + 0{,}667 \frac{dv}{v}. \qquad (21)$$

Bei isosteren Zustandsänderungen ist dr/r wie $dv/v = 0$. Es wird nach (20)

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_1^2 \frac{dE}{E} = l_n \frac{E_2}{E_1} = l_n \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2, \qquad (22)$$

und bei Gasen nach (21)

$$S_2 - S_1 = \delta \int_1^2 \frac{dE}{E} = \delta\, l_n \frac{E_2}{E_1} = \delta\, l_n \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2. \qquad (23)$$

Die isostere Entropie der Modellmasse M und des Gases von der Masse M ist also gleich, bis auf den Faktor δ beim Gas, der, wie schon gesagt, bei einem entsprechend verbesserten Modell auch auftreten kann. Zunächst mag auffallen, daß $d\sigma$ in (22) und dS in (23) gar keine Größe mehr enthält, die von der Masse M abhängt. Das liegt aber daran, daß E, der Divisor von de und dq die Größe der Masse enthält. E ist nicht wie T eine reine Zahl, und die Masse erscheint deshalb erst in der Energiegleichung für e und q, die Entropie $d\sigma$ und dS ist hier eine Zahl, die sich auf die Masseneinheit bezieht, ein Energieverhältnis, das Verhältnis der zugeführten Energie zur Energie E, die die bewegte Masse schon besitzt. Und σ oder S ist das logarithmische Verhältnis der Energie E_2 nach der Energiezufuhr zur Energie E_1 vor der Energiezufuhr. Es wird sich zeigen, daß das Gleiche bei allen Zustandsänderungen der Fall ist, und am Schlusse wird sich diese Erscheinung näher kennzeichnen lassen.

Nach der Energiezufuhr e bzw. q ist das Gleichgewicht zwischen M und außen (K), bzw. zwischen dem erwärmten Gasquantum und außen gestört, die Masse M ist gegen K jetzt arbeitsfähig, ebenso ist das Gas durch die isostere Zustandsänderung arbeitsfähig gegen außen geworden, wenn es vorher gegen außen im Gleichgewicht stand.

β) Adiabatische Zustandsänderung: Nach (11) betrug die Zentrifugalkraft vor dem isosteren Impuls $G_1 = M u_1^2/r_1$, der durch die Kraft $K \operatorname{tg} \alpha$ auf dem Zinkenblech Z_1 das Gleichgewicht gehalten wurde. Nach dem Impuls e betrug die Zentrifugalkraft $G_2 = M u_2^2/r_1$. Würde die Arretierung A der Schnur nun gelöst, so würde die Masse M beschleunigt nach außen wandern. Dabei würde r zunehmen, G ab-

nehmen. Bei einem gewissen Wert r' wäre dann wieder die Zentrifugalkraft $G = G_1$, und M würde nach Schwingungen um r' zur Ruhe bei r' kommen.

Diese Zustandsänderung von r_1 nach r' wäre aber nicht „umkehrbar", um sie „umkehrbar" zu machen, muß das Gewicht K vor Entarretierung der Schnur auf den Zinken Z_3, (Fig. 1) placiert werden, der an der Stelle, an der das Gewicht K zu lagern kommt, den Neigungswinkel α_2 besitzt, der der Bedingung genügt

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{G_2}{G_1},$$

so daß nun $K \operatorname{tg} \alpha_2 = G_2$ ist. Im Sinne der in der Wärmemechanik üblichen Stipulationen muß G_2 unendlich wenig größer sein, als $K \operatorname{tg} \alpha_2$, damit sich die Masse M nach Entarretierung der Schnur bei A nun „umkehrbar" nach außen in Bewegung setzt. Hierbei leistet die Masse M die Arbeit $\int G\,dr = \int K\,dh$ auf Kosten ihrer eigenen Energie $E = Mu^2/2$ in einer adiabatischen Zustandsänderung, da eine andere Energiequelle nicht vorhanden ist, und die Zentrifugalkraft G nimmt infolge der entsprechenden Verminderung von u sowohl, als durch fortschreitende Vergrößerung von r schnell ab. Entsprechend muß der Neigungswinkel α des Zinkens Z_3 abnehmen, so daß stets $G = K \operatorname{tg} \alpha$ ist (abgesehen von dem notwendigen unendlich kleinen Überschuß für G, den man ja nicht zu beachten pflegt). Das Zinkenblech Z_3 läßt die Kurve für α erkennen. Bei einer gewissen Stellung der Masse M über einen Radius r_3 soll die Kraft $G = G_1$ geworden sein, wie vor der isosteren Zustandsänderung. Entsprechend ist die Kurve des Zinkens Z_3 als Bahn für K zu formen. Die energetischen Verhältnisse und die Bahngleichung erhält man (vorausgesetzt, daß die wechselnde Neigung der Schnur gegen die Horizontale zu vernachlässigen ist), wie folgt:

Wenn ein Gas vom Zustand T_1P_1 (die Modellmasse M vom Zustand $Mu_1^2/2$, G_1) isoster in den Zustand T_2P_2 ($Mu_2^2/2$, G_2) versetzt, und adiabatisch in den Zustand T_3P_1 ($Mu_3^2/2$, G_1) entspannt wird, so ist $V_3/V_1 = T_3/T_1$. Entsprechend ist hier

$$\frac{Mu_3^2}{Mu_1^2} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{Mu_3^2}{r_3} = G_1,$$

also

$$u_3^2 = r_3 \frac{u_1^2}{r_1}. \tag{24}$$

Ferner ist bei adiabatischer Zustandsänderung

$$K\,dh = G\,dr = M\frac{u^2}{r}\,dr = -Mu\,du,$$

oder (20) $dr/r = -du/u$,

also nach (24)

$$u_3^2 = u_2^2\left(\frac{r_1^2}{r_3^2}\right) = r_3\frac{u_1^2}{r_1} \tag{25}$$

und

$$r_3 = r_1\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{2/3}. \tag{26}$$

Allgemein ist aus (24)

$$u^2 = u_2^2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2,$$

oder

$$G = \frac{Mu^2}{r} = \frac{Mu_2^2}{r_1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 = G_2\left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$

Es ist also

$$G_2/G = r^3/r_1^3, \tag{27}$$

die Zentralkraft nimmt mit der dritten Potenz von r ab (mit einer Volumendimension).

Aus (27) folgt

$$\frac{Mu_2^2}{Mu^2} = \frac{r^2}{r_1^2} \tag{28}$$

und

$$G = K \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{G_2}{K}\frac{r_1^3}{r^3} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dr},$$

und daraus wird die Bahngleichung des Zinkens Z_3

$$h - h_2 = 2\frac{Mu_2^2}{2K}\left(1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right) = r - r_1.$$

Das ist auch das Anziehungsgesetz der Masse M in bezug auf das Zentrum der Bewegung.

Die geleistete „äußere Arbeit" bei der adiabatischen Zustandsänderung wird (28)

$$\left.\begin{aligned} K(h - h_2) &= 2\frac{Mu_2^2}{2}(1 - r_1^2/r^2) = \\ &= 2\frac{M}{2}(u_2^2 - u^2). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Arbeit $K(h_2 - h_3)$ ist in Fig. 2 unter der Kurve bc abgebildet.

Die entsprechende adiabatische Gasarbeit wäre (vgl. [6] und [17])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{RT_2}{\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\varkappa - 1}\right) = c_v(T_2 - T_3) = \\ &= 0{,}667\frac{M}{2}(u_2^2 - u_3^2) = \delta\frac{K(h_3 - h_2)}{3} \end{aligned}\right\} \tag{29a}$$

Was seinen Grund darin hat, daß $P = G/3$ ist, alle Gasordinaten sind in Fig. 2 für gleiche Werte von u nur ein Drittel so groß, wie die Modellordinaten (vgl. [8]). Wegen der Drehenergie der Molekeln tritt aber wieder der Drehfaktor δ auf, und r_3-Gas wird größer als r_3-Modell. Hätten die Gasmolekeln anstatt der fortschreitenden Geschwindigkeit u eine Rotationsgeschwindigkeit u, so wären die Arbeiten beim Gas und beim Modell gleich groß, bis auf den Faktor δ.

Da in (5, 9, 20, 21) de bzw. $dq = 0$ ist, so ist in (20)

$$-dE/E = 2dr/r,$$

woraus das Volumengesetz (27) ohne weiteres hervorgeht.

γ) Isobare Zustandsänderung: Die Umlaufsgeschwindigkeit der Masse M betrage wie am Anfang der Betrachtungen im Absatz (α) vor der isosteren Zustandsänderung u_1, und die Zentrifugalkraft $G_1 = M u_1^2/r_1$. Soll nun der Zustand der Masse M „isobar" geändert werden, so muß wie bei einem isobar erwärmten Gas bei Energiezufuhr der Druck, hier der Zentrifugaldruck

$$\frac{M u_1^2}{r_1} = G_1 = \frac{M u^2}{r} = \text{Konstans} = \operatorname{tg} \alpha \quad (30)$$

sein. Das Gewicht K ist also auf dem Zinkenblech Z_1 mit konstantem Neigungswinkel α zu lagern. Wird der Masse M nun durch Bewegung der Handkurbel H die Energie e zugeführt, so daß die Umlaufsgeschwindigkeit u_1 der Masse M auf u_3 steigt, so wird wegen (30)

$$\frac{M u_1^2}{M u_3^2} = \frac{r_1}{r_3}, \text{ entsprechend } \frac{T_1}{T_3} = \frac{V_1}{V_3} \quad (31)$$

bei isobaren Gas-Zustandsänderungen.

Im Gr- bzw. PV-Zinken (Fig. 2) bildet ac bzw. eg die Isobare ab.

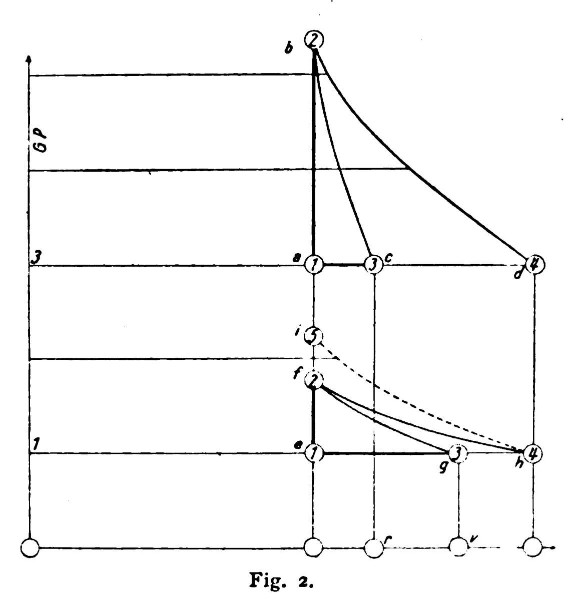


Fig. 2.

Die zugeführte Energie ist nach (5) und (9)

$$e = \int_1^3 dE + \int_1^3 G\,dr = \frac{M}{2}(u_3^2 - u_1^2) + G(r_3 - r_1) \quad (31)$$

und mit Berücksichtigung von (6), (17) und (8)

$$q = c_v \cdot \int_1^3 dT + \int_1^3 P\,dV = c_v(T_3 - T_1) + $$
$$+ P(V_3 - V_1) = \delta \frac{M}{2}(u_3^2 - u_1^2) + \frac{G}{3}(r_3 - r_1). \quad (32)$$

Nach Gleichung (20) und (21) wird

$$\left.\begin{aligned} \sigma_3 - \sigma_1 &= \int_1^3 \frac{dE}{E} + 2\frac{dr}{r} = \\ &= \int_1^3 \frac{r\,dE + 2E\,dr}{Er} = l_n \frac{E_2}{E_1} + l_n \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} S_3 - S_1 &= \int_1^3 \delta \frac{dE}{E} + 0{,}667 \frac{dV}{V} = \\ &= \delta \int_1^3 \frac{V\,dE + (\varkappa - 1) E\,dV}{EV} = \\ &= \delta \left[l_n \frac{E_3}{E_1} + l_n \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} \right], \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

(letztere Umformung nach [17]). Es ist aber nach (28) und allgemeinen Beziehungen der Wärmemechanik

$$\left.\begin{aligned} l_n \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 = l_n \frac{E_2}{E_3}, \text{ bzw. } l_n \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} = \\ = l_n \frac{T_2}{T_3} = l_n \frac{E_2}{E_3}. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Hierin bedeutet nach Absatz (β) die Energie E_2 diejenige Energie, die die Masse M nach der isosteren Zustandsänderung vor Beginn der adiabatischen Bewegung besaß. Es ist also

$$E_2 = E_3 + \varDelta, \quad (36)$$

worin $\varDelta$ diejenige adiabatische Arbeit bedeutet, die die Masse des Modells oder des Gases leisten würde, wenn sie vom Zustand $r_1 G_2$ bzw. vom Zustand $V_1 P_2$ in den Zustand $G_3 r_3 E_3$ bzw. $V_3 P_3 E_3$ expandieren würde, oder, die aufgewendet werden müßte, wenn die Masse vom Endzustand E_3 auf das Anfangsvolumen V_1 bzw. r_1 adiabatisch zurückgebracht werden würde. Jedenfalls bedeutet $\varDelta$ eine Arbeit, eine Energie, und darauf kommt es hier an. Es wird nun nach (33), (34), (35), (36)

$$\sigma_3 - \sigma_1 = l_n \left[\left(\frac{E_3}{E_1}\right) \cdot \left(\frac{E_2}{E_3}\right) \right] = l_n \frac{E_3 + \varDelta}{E_1} = \int_1^3 \frac{dE}{E},$$

$$S_2 - S_1 = \delta\, l_n \frac{E_3 + \varDelta}{E_1} = \delta \int_1^3 dE/E. \quad (37)$$

Die isobare Entropie bedeutet beim Modell und beim Gas also wieder ein Verhältnis von

Energien, die dem Körper, der Masse M angehören, oder sich auf sie beziehen, ohne jede dunkle Beziehung auf etwas, das außerhalb dieses Arbeitssystems sich befindet.

δ) Isotherme, polytrope und nicht umkehrbare Zustandsänderung: Die Umlaufsgeschwindigkeit der Masse M betrage u_2 und die Zentrifugalkraft $G_2 = M u_2^2/r_1$, wie bei Beginn der adiabatischen Zustandsänderung im Absatz (β), entsprechend dem Punkt b im Gr-Zinken (Fig. 2). Nun soll der Masse durch Bewegung der Handkurbel H Energie so zugeführt werden, daß M nach außen wandert, das Gewicht K anhebend, ohne daß die Umlaufsgeschwindigkeit u_2 sich ändert. Bei Gasen ist bei isothermer Expansion $P_2/P = V/V_2$, entsprechend soll beim Modell sein

$$\frac{M u_2^2}{r_1} : \frac{M u^2}{r} = \frac{G_2}{G} = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_2},$$

oder

$$G = G_2 \frac{r_1}{r} = E \operatorname{tg} \alpha,$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G_2}{K} \frac{r_1}{r} = \frac{dh}{dr} = \frac{M u_2^2}{K} \frac{1}{r}.$$

Dieser Bedingung muß das Zinkenblech genügen, auf dem das Gewicht K in Verbindung mit der Masse M gleitet. Es wird daraus als Bahngleichung von K

$$h - h_1 = \frac{M u_2^2}{K} l_n \frac{r}{r_1}. \qquad (38)$$

In Fig. 1 veranschaulicht Z_2 das Zinkenblech der Isothermen. Wird die isotherme Zustandsänderung fortgesetzt, bis $G_4 = G_1$ bei $r = r_4$ geworden ist, so wird die isotherme Arbeit oder der Impuls

$$e = K(h_4 - h_1) = 2 \frac{M u_2^2}{2} l_n \frac{r_4}{r_1}. \qquad (39)$$

Die Gleichung ergibt sich auch ohne weiteres aus (5). Für Gase wird aus (9) und (6)

$$q = RT l_n \frac{V_3}{V_1} = 0{,}667 \frac{M u_2^2}{2} l_n \frac{V_4}{V_1} = \frac{e}{3}. \qquad (40)$$

Zu Gleichung 29a wurde schon der Divisor 3 in den Arbeitsgleichungen besprochen. In Fig. 2 ist bd die gleichseitige Hyperbel des Modells, fh die des Gases. In Gleichung (20) und (21) wird, da E konstant bleibt, (vgl. [17])

$$\left.\begin{aligned} \sigma_4 - \sigma_1 &= \int_1^4 2\, dr/r = l_n \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2, \quad S_4 - S_1 = \\ &= \int_1^4 0{,}667\, dV/V = \delta\, l_n \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\varkappa - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Hierin ist wieder, wie zu (33, 34, 35) ausgeführt wurde,

$$l_n \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 = l_n \left(\frac{E_5}{E_4}\right), \quad \text{bzw. } l_n \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} = l_n \frac{E_5}{E_4}, \qquad (42)$$

worin

$$E_5 = E_4 + \Delta'. \qquad (43)$$

eine Energie bedeutet, die die Masse M des Modells oder des Gases erlangen würde, wenn sie vom Zustand E_4 rückwärts auf das Volumen r_1 bzw. V_1 adiabatisch unter einem adiabatischen Arbeitsaufwand Δ' gebracht würde. Es wird demnach die istotherme Entropie, bis auf den Faktor δ gleichartig beim Modell und beim Gas:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_4 - \sigma_1 &= l_n \frac{E_4 + \Delta'}{E_4}, \quad \text{bzw. } S_4 - S_1 = \\ &= \delta\, l_n \frac{E_4 + \Delta''}{E_4} = c_v l_n \frac{E_4 + \Delta''(T)}{T_4}. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

In Fig. 2 ist fh die Isotherme des Gases und unter ih ist die adiabatische Arbeit Δ'' veranschaulicht, die auf das Gas angewendet werden müßte, wenn es vom Zustand $V_4 E_4$ auf das Volumen V_1 mit der Energie $E_5 = E_4 + \Delta''$ verdichtet werden würde. Es würde also in i die Energie E_5 besitzen, und Gleichung (44) bewertet die Entropie so, als wäre es isoster von f nach i erhitzt worden, von wo es dann adiabatisch ohne weitere Wärmezufuhr in den Zustand h mit der Energie E_4 gelangen kann. Wird das Gas umgekehrt von h nach f isotherm verdichtet, so ist entsprechend die Entropie der Masse M des Modells,

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_4 &= -(\sigma_4 - \sigma_1) = -l_n \frac{E_4 + \Delta}{E_4} = \\ &= l_n \frac{E_4}{E_4 + \Delta}, \end{aligned}$$

und entsprechend beim Gas.

Ebenso war es bei der isobaren Entropie nach (37), und ebenso ist es überhaupt bei jeder beliebigen polytropen Zustandsänderung, die man durch entsprechende Zinkenbleche auch mit dem Modell darstellen kann. (Dies gilt auch für nicht umkehrbare Zustandsänderungen [vgl. Absatz β.]) Erfährt ein Stoff ganz allgemein eine Zustandsänderung von einem Anfangsvolumen zu einem Endvolumen V_n und V_{n+1}, wobei auch $V_n = V_{n+1}$ sein kann, bei Volumenänderungen aber V_{n+1} aber stets das größere Volumen bedeuten soll, unter einer beliebigen Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr, und ist entsprechend der meßbare End-Energiegehalt des Stoffes E_n und E_{n+1}, so ist die Entropie beim Modell und bei Gasen (bis auf δ)

$$\left.\begin{aligned} \int dS = \int dE/E = \pm\, \delta\, l_n \frac{E_{n+1} + \varDelta}{E_n} = \\ = \pm (S_{n+1} - S_n), \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

wobei bei Ausdehnungen das Plus-, bei Verdichtungen das Minuszeichen gilt; bleibt das Volumen konstant, so ist $\varDelta = 0$; beim Modell und den einatomigen Gasen ist $\delta = 1$. Nach Gleichung (37) im Absatz (β) und den allgemeinen wärmemechanischen Beziehungen erhält man zur eventuellen Berechnung der ideellen Arbeit $\varDelta$ nach (29, 29a)

$$G_{n+1} = G_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^3, \quad P_{n+1} = P_n \left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)^{\varkappa}. \quad (46)$$

ε) Kreisprozesse. Mit dem Modell kann man auch jeden beliebigen gasmechanischen Kreisprozeß rein mechanisch veranschaulichen. Zur Darstellung des Carnot-Prozesses z. B. ergibt sich dann folgendes: Die erste (Expansions)-Isotherme wird mit einem isothermen Zinkenblech erzeugt, auf der das Gewicht K gleitet, es wird dabei um eine Höhe h_1 angehoben. Bei der darauf folgenden Adiabate auf einem entsprechenden Zinkenblech steigt das Gewicht K weiter um eine Höhe h_2. Die positive Gesamtarbeit beträgt $K \cdot (h_1 + h_2)$. Nun erfolgt Entziehung von Energie durch die Handkurbel E, und dann adiabatischer Rückgang der Masse M auf den Ausgangsradius r_1 beim Beginn des Prozesses auf entsprechenden Zinkenblechen, wobei das Gewicht K um die Höhen h_3 und h_4 herabsinkt. Die negative Gesamtarbeit beträgt $K \cdot (h_3 + h_4)$, und die Nutzarbeit $A_n = K \cdot [(h_1 + h_2) - (h_3 + h_4)] = K \cdot (h_1 - h_3) = K \cdot h_n$. Um die Höhe h_n steht am Schlusse des Kreisprozesses das Gewicht K höher, als am Beginn. (Die Verbindungsschnur ist so lang anzunehmen, daß sie bei allen Höhenänderungen von K als horizontal angesehen werden kann, oder die Abweichung davon ist bei der Formung der Zinkenbleche in Rechnung zu setzen.) Die Entropie ist nach (45) am Schlusse des Prozesses dieselbe, wie am Beginn. Den Wirkungsgrad und alles übrige ergibt das Modell, wie es sich auch bei Gasen berechnet, worauf hier nicht näher eingegangen zu werden braucht.

Durch Wiederholung des Prozesses vermag man das Gewicht K immer höher zu heben, durch $n$malige Wiederholung wird es um $n \cdot h_n$ angehoben. Die Nutzarbeit der n-Kreisprozesse beträgt demnach $n \cdot K \cdot h_n$. Der Arbeitsaufwand $n \cdot K \cdot h_1$ an der Handkurbel H ist aber bedeutend größer, als die Nutzarbeit, im Maße des Wirkungsgrades des Prozesses

$$\eta = \frac{u_1^2 - u_3^2}{u_1^2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

wie die Gasmechanik ihn stipuliert. Die vom Arbeitsaufwand $n \cdot K \cdot h_1$ abgehenden Bremsarbeiten $n \cdot K \cdot h_3$, die „isothermen Kompressionsarbeiten" können aber beim Modell nutzbar gemacht werden, da es sich um eine rein mechanische Vorrichtung handelt, zum Unterschied von der Kreisprozeßarbeit eines Gases.

Zusammenfassung.

Es wird ein mechanisches Modell beschrieben, an dem sich die gasmechanischen Gesetze qualitativ und quantitativ demonstrieren lassen. Bei dem Modell leistet eine rotierende Bewegung von (atomistischen) Massen um Zentralkräfte qualitativ dasselbe, wie die fortschreitende Bewegung der Gasmolekeln, eine Erscheinung, die vielleicht für eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten und festen Körper (der Elastizität) fruchtbar werden kann. Bei tiefen Temperaturen sollen ja auch die Bestandteile der Gase rotatorische Bewegungen und Kraftzentren ausführen (Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes, S. 164), wie die Masse M hier um die Welle W. Dabei wäre dann die veränderte Bedeutung der Bewegungsgeschwindigkeit u für das Maß des Druckes nach Gleichung (8) zu beachten. Das mechanische Modell zeigt auch Entropie, wie Gase, als logarithmisches Verhältnis der jeweiligen energetischen Zustände der bewegten Massen.

(Eingegangen 22. November 1920.)

Über die Grundlagen der Relativitätstheorie.

Von Ed. Guillaume und Ch. Willigens.

1. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einen neuen Standpunkt in der Relativitätstheorie, der von einem der Verfasser bereits im Jahre 1917[1]) eingeführt worden ist, bekannt zu machen. Es sind seither darüber mehrere Abhandlungen erschienen[2]). Vorausgesetzt wird, daß es eine empfindbare Zeit und einen empfindbaren Raum gibt. Unsere Algorithmen sind

1) Ed. Guillaume, Les bases de la physique moderne. Archives des sciences physiques et naturelles (4) **43**, 5, 89, 185, 1917.

2) Ed. Guillaume, La théorie de la relativité en fonction du temps universel. Ibid. (4) **46**, 281, 1918. Représentation et mesure du temps. Ibid. (5) **2**, 125, 1920. Sur l'impossibilité de considérer comme des périodes les paramètres représentant le temps dans la théorie de la relativité restreinte. Ibid. (5) **2**, 248, 1920. Les bases de la théorie de la relativité: Revue générale des sciences, 15 avril 1920.

Ch. Willigens, Représentation géométrique du temps universel dans la théorie de la relativité restreinte. Arch. des sc. phys. et nat. (5) **2**, 289, 1920.



nur Darstellungsmittel, die sorgfältig von der Wirklichkeit zu unterscheiden sind. Diese Auffassung hat seinerzeit Poincaré in seinen Betrachtungen über die euklidische und nichteuklidische Geometrie vertreten. Beide können zur Darstellung des Raumes dienen, ebensogut wie kartesische, Polar- oder pentasphärische Koordinaten. Um vorliegende Abhandlung, mit Rücksicht auf die Verhältnisse, kurz zu fassen, setzen wir die spezielle Relativitätstheorie (S. R. T.), als dem Leser wohl bekannt voraus.

Diese wollen wir in der Hauptsache hier besprechen.

2. Die S. R. T. läßt sich, wie bekannt, auf die Untersuchung der Lorentz-Transformation (L. T.) zurückführen. Diese schreiben wir in der bekannten Form:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \beta(x_2 + \alpha c_0 \tau_2);\; c_0 \tau_1 = \beta(c_0 \tau_2 + \alpha x_2) \\ y_1 &= y_2 \;\; z_1 = z_2 \;\; \alpha = v : c_0 \;\; \beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Frage, welche wir uns stellen, ist folgende: Welches ist der „Sinn" der L. T., oder welchem „Bilde" entspricht sie? — Man kann unendlich viele Korrespondenzen zwischen den Werten einer Veränderlichen und den Punkten eines Kontinuums aufstellen (Cantor-Dedekindsches Postulat). Es gibt also unendlich viele Bilder, die der L. T. entsprechen.

Wir nehmen wie gewöhnlich an, daß x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die kartesischen Koordinaten zweier rechtwinkliger Systeme S_1 (x_1, y_1, z_1) und S_2 (x_2, y_2, z_2) bedeuten. Diese bewegen sich gleichförmig und geradlinig mit der Geschwindigkeit v längs der Achsen Ox_1, Ox_2, welche zusammenfallen. Der Nichtrelativist bemerkt aber sofort: „Ist eine solche Bewegung nicht durch die Formeln:

$$x_1 = x_2 + vt \quad y_1 = y_2 \quad z_1 = z_2 \qquad (2)$$

dargestellt?" — Wir wollen also untersuchen, wie (1) zu deuten ist, damit die Formeln (2) zulässig sind.

3. Zuerst eine Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit c_0. Diese Zahl ist willkürlich, und wir werden als Haupteinheit der Zeit die „Lichtsekunde" einführen, welche dadurch definiert ist, daß die Geschwindigkeit eines jeden Lichtstrahls in einem Systeme gemessen (z. B. mit dem Fizeauschen Zahnrad) = 300000 km/Lichtsek. Die „Lichtsekunde" ist von der irdischen wenig verschieden. In dieser Zeit durchläuft nämlich das Licht eine Strecke von 300000 km. Wir wollen aber bereits jetzt hervorheben, daß wir dazu geführt werden, die Zahl $c_0 = 300000$ mit einer Zeiteinheit, die von der soeben definierten verschieden ist, zu gebrauchen. (Vgl. Absatz 5.) Die Gleichungen kennen nur Zahlen und die physikalischen Bedeutungen, welche wir diesen beilegen, kommen mathematisch nicht in Betracht.

4. Ein erster Vergleich zeigt, daß in den Formeln (2) die Zeit durch einen einzigen Parameter t in den 2 Systemen S_1 und S_2 dargestellt ist. In den Formeln (1) dagegen ist sie für jedes System S_i durch einen neuen Parameter τ_i ausgedrückt. Daraus wollen die Relativisten den Schluß ziehen, daß jedes System S_i eine „eigene" Zeit besitze, daß die Zeit also ein vielfacher Begriff sei, der unter unendlich vielen Formen erscheinen kann. Wir dagegen setzen voraus, die Zeit sei ein einfacher Begriff, daß es aber unendlich viele Arten gibt, dieselbe auszudrücken. Die einparametrische Darstellung (t) kann durch eine mehrparametrische ersetzt werden. Beide sind natürlich gleichwertig, da es sich darum handelt eine und dieselbe Zeit darzustellen.

Um zu zeigen, daß es sich wirklich so verhält, bemerken wir zuerst, daß vor jedem τ der Faktor c_0 steht, welcher die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Da die Formeln homogen sein müssen, kann es nicht anders sein. Setzen wir also:

$$c_0 \tau_1 = u_1 \quad c_0 \tau_2 = u_2. \qquad (3)$$

u_1 und u_2 sind Werte des „Lichtweges", welche in S_1 und S_2 in km gemessen werden. Nehmen wir nun an, der Beobachter im System S_1 stelle fest, daß in einer unendlich kleinen Zeit der Lichtweg um du_1 zunimmt. Für die Beobachter im Systeme S_2 hat diese Zunahme den Wert du_2. Man wird ganz von selbst dazu geführt anzunehmen, daß die Zunahmen du_1 und du_2 **gleichzeitig** stattfinden. Dies bedeutet, daß es einen Parameter t geben muß, so daß

$$du_1 = c_1\,dt;\; du_2 = c_2\,dt. \qquad (4)$$

Wir werden diese physikalische Gleichzeitigkeitsdefinition ganz allgemein annehmen und voraussetzen, daß sich alle Zunahmen dx, dy, dz, du, gleichzeitig vollziehen.

Integrieren wir die Gleichungen (4), in welchen wir c_1 und c_2 als von t unabhängig voraussetzen:

$$u_1 = c_1 t + r_1;\; u_2 = c_2 t + r_2. \qquad (5)$$

Bestimmen wir die Konstanten c_1, c_2, r_1, r_2 durch Einsetzen in die zweite Gleichung (1), indem wir die symmetrische Rolle der Systeme beachten. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_0\tau_1 = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_2 = \frac{c_0}{\beta}\, t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_1 \\ u_2 &= c_0\tau_2 = \frac{c_0}{\beta}\, t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_2 = c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Durch Einsetzen von u_2 in die erste Gleichung (1) erhält man sofort:

$$x_1 = x_2 + vt,\; v = \alpha c_0. \qquad (2a)$$

Dadurch werden unsere Annahmen bestätigt; man sieht ohne weiteres, daß bei der Darstellung der Zeit durch einen einzigen Parameter t sich beide Systeme fortbewegen, wie wenn sie starre Ganze wären, den Voraussetzungen entsprechend.

Die Formel

$$u_1 = \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1$$

läßt ohne weiteres eine Deutung in den Minkowskischen Diagrammen zu.

Läßt man t unverändert und α alle möglichen Werte durchlaufen, so hüllt die Gerade im Achsensysteme (x_1, u_1) eine Kurve ein. Ändert sich nun t, so erhält man eine Schar von ähnlichen Kurven, mit dem Ursprung als Ähnlichkeitszentrum und t als Ähnlichkeitsverhältnisse. Behält man für α und c_0 die reellen Werte bei, sind diese Kurven dreispitzige Hypozykloiden. Für das Weitere verweisen wir auf die in der Literaturangabe erwähnte Arbeit von Ch. Willigens.

5. Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daß

$$\frac{du_1}{c_0} = d\tau_1 \quad \frac{du_2}{c_0} = d\tau_2 \tag{7}$$

verschiedene Maße der gleichen Dauer sein müssen. Erläutern wir dies an einem Beispiele. Nehmen wir an, es würde an einer Uhr die Zeit abgelesen, einerseits am großen, anderseits am kleinen Zeiger, auf der Minutenteilung des Zifferblattes. Für eine Dauer haben wir zwei Maße τ_g und τ_k, welche durch die Gleichung

$$\tau_g = 12\,\tau_k \tag{8}$$

miteinander verbunden sind. Für eine Stunde ist z. B.

$$\tau_k = 5 \qquad \tau_g = 60.$$

Die Umlaufszeiten Θ_g und Θ_k der Zeiger genügen dagegen der Gleichung

$$12\,\Theta_g = \Theta_k. \tag{9}$$

Durch Multiplizieren von (8) mit (9) erhält man

$$\Theta_g \tau_g = \Theta_k \tau_k. \tag{10}$$

das heißt, wenn eine Dauer mit Uhren verschiedener Perioden Θ_g, Θ_k... gemessen wird, so verhalten sich die erhaltenen Maße umgekehrt wie die Umlaufszeiten. Man wird aber vielleicht einwenden: Wenn c_0 die Lichtgeschwindigkeit in km/Lichtsek. bedeutet, so können $d\tau_1$ und $d\tau_2$ nur in Sekunden die Zeit angeben, welche das Licht braucht, um die Strecken du_1 und du_2 zu durchlaufen. Dies stimmt, wir sind aber nicht gezwungen immer die im Abschnitte 3 definierte Lichtsekunde beizubehalten. Die Zahl 300000 bleibt, aber wir können annehmen, daß c_0 in der ersten Gleichung in km/sec ausgedrückt ist, in der zweiten dagegen in km mit einer anderen Zeiteinheit. Wir bestimmen diese, indem wir einfach bemerken, daß, wenn τ_1 und τ_2 wirklich dieselbe Dauer darstellen, es möglich sein muß in der R. T eine Invariante der Form (10) erscheinen zu lassen. Man erhält diese, indem man beachtet, daß τ_1 und τ_2 Lichtwege geteilt durch c_0 sind. Die Lichtwellen geben einen Dopplereffekt, der durch die bekannte Formel gegeben ist

$$\Theta_1 = \frac{\Theta_2}{\beta(1 + \alpha\cos\varphi_2)}, \tag{11}$$

wobei die Θ stets in Lichtsek. gemessen werden. Drücken wir die Lichtbewegung aus, indem wir in die zweite Gleichung (1) setzen

$$x_1 = c_0\,\tau_1 \cos\varphi_1;\ x_2 = c_0\,\tau_2 \cos\varphi_2$$

und wir erhalten

$$\tau_1 = \tau_2\,\beta(1 + \alpha\cos\varphi_2) \tag{12}$$

aus (11) und (12) folgt durch Multiplikation

$$\Theta_1 \tau_1 = \Theta_2 \tau_2 = J(\Theta\tau), \tag{13}$$

was unsere Voraussetzungen bestätigt. Man kann dieser Invariante noch andere Formen geben.

$$\Theta_1 c_1 = \Theta_2 c_2 = \Lambda \tag{14}$$

$$\lambda_1 u_1 = \lambda_2 u_2 = J(\lambda u). \tag{15}$$

Wir raten dem Leser die Figuren zu zeichnen für einen ebenen Wellenzug, parallel zu xOy Man kann z. B.

$$\alpha = \frac{3}{5};\ v = 180000\ \text{km/sec};\ \beta = \frac{5}{4};$$

$$c_2 = c_0 = 300000\ \text{km/sec};\ \cos\varphi_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{300000}\ \text{sec},\ u_2 = 10\ \text{km}$$

setzen, und man sucht wie diese verschiedenen Größen von S_1 aus erscheinen. Es ist zu bemerken, daß (14) und (15) nicht zur selben Figur führen, wenn man annimmt, daß λ_1 und λ_2 verschiedene Längen darstellen, in km ausgedrückt. Die grundlegende Frage der Wahl der Einheiten wollen wir übrigens jetzt erörtern.

6. Untersuchen wir zuerst die wahre Bedeutung der berühmten Lorentz-„Kontraktion". Findet die Bewegung von S_1 und S_2 nach den Gleichungen (2) statt, so kann von einer physischen Kontraktion nicht die Rede sein. Dieser Teil der Frage ist also gelöst. Es kann sich also nur um eine „fiktive" Kontraktion handeln, die ihren Grund in einer besonderen Art die Längen zu messen findet. Wir wollen ein Zahlenbeispiel behandeln, wobei wir für α, β, v, c_0, die oben angeführten Werte einsetzen. Wir bedienen uns einer Uhr, deren Zifferblatt in Lichtsekunden eingeteilt ist.

Betrachten wir auf S_1 im Zeitpunkte 3 sec die Punkte $x'_1 = 200000$ km; $x''_1 = 800000$ km.

Wir haben die beiden Punktereignisse

E'_1 (200000 km, 3 sec); E''_1 (800000 km, 3 sec).

a) Machen wir zuerst von der einparametrischen Darstellung der Zeit Gebrauch, d. h. von der ersten Gleichung (2). Wir erhalten sofort für die entsprechenden Punktereignisse

E'_2 (— 340000 km; 3 sec); E''_2 (260000 km, 3 sec)

Sie liegen in derselben Raumdistanz voneinander, wie E'_1 und E''_1, d. h. 600000 km. Wir berechnen die Zeit τ aus den Formeln (6). Denken wir uns den Beobachter auf S_1 und betrachten wir den ruhenden Punkt mit der Abszisse x_2 auf S_2. Da dieser Punkt ruhend ist, so muß $\Delta x_2 = 0$ sein, also $\Delta \tau_1 = \Delta t$.

Denken wir uns in jedem Punkte von S_1 „Lokaluhren" aufgestellt, welche die Werte von τ_1 angeben, so sehen wir, daß diese Uhren gleich rasch laufen, wie unsere Uhr, d. h. sie zeigen auch Sekunden an. Ihre Angaben sind aber um

$$\frac{\beta - 1}{\alpha \beta c_0} x_2$$

verschoben, je nach dem auf S_2 betrachteten Punkte. In unserem Falle ist z. B.

$$\tau'_1 = t + \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} \frac{x'_2}{c_0} = 3 - \frac{1}{3} \times \frac{340000}{300000} = 2{,}622.$$

Die Verschiebung beträgt also — 0,378 Sek.

b) Benützen wir jetzt die mehrparametrische Zeitdarstellung, d. h. die Gleichungen (1). Wir müssen setzen:

$$\tau'_1 = \tau''_1 = 3 \text{ sec.}$$

und wir finden dann:

$$\tau'_2 = 3{,}25; \quad \tau''_2 = 1{,}75$$
$$x'_2 = -425000 \quad x''_2 = 325000.$$

Die Frage der zu wählenden Einheiten tritt hier besonders scharf hervor, und man muß sich nur wundern, daß sich die Relativisten nie dieselbe gestellt haben. Hier ist jedenfalls der Grund der unentwirrbaren Schwierigkeiten zu suchen, auf die man in der Relativitätstheorie gestoßen ist. Setzen wir, wie die Relativisten, voraus, daß man die Zeit in Sekunden und die Längen in km ausdrücken muß. Dann müssen den Punktereignissen E'_1 und E''_1 (siehe oben) folgende entsprechen:

$\mathfrak{E}'_2$ (— 425000 km; 3,25 sec);
$\mathfrak{E}''_2$ (325000 km; 1,75 sec),

deren Raumdistanz 750000 km beträgt.

Was bedeutet, daß den Punkten mit den Abszissen 200000 km und 800000 km im Augenblicke 3 sec. auf S_1, die Punkte mit den Abszissen — 425000 km und 325000 km zu den Zeiten 3,25 sec. und 1,75 sec. auf S_2 entsprechen? — Hier äußert sich Einstein in einer wirklich seltsamen Art. Einstein hat einfach angenommen, daß die Kilometer und die Sekunden auf S_2, von S_1 aus beurteilt, von dem verschieden erscheinen, was sie in S_1 sind. Die km von S_2 erscheinen kürzer, und zwar um gerade genug, damit die 750000 km auf S_2 sich mit den 600000 km auf S_1 decken. Einstein „erklärt" so die berühmte „Kontraktion", welche von Lorentz und Fitzgerald eingeführt worden ist, um das negative Resultat der Versuche von Michelson und Morley zu erklären. Anstatt also die Zahl 750000 als ein verschiedenes Maß (mit einer anderen Einheit als km gemessen) der Länge, die auf S_1 600000 km beträgt, zieht es Einstein vor, die km beizubehalten, sie aber gewissermaßen als „zusammenziehbar" zu betrachten, um im Raume das zur Deckung zu bringen, was sich sonst nicht decken könnte. Diese Konvention kommt darauf hinaus in verkappter Weise anzunehmen, daß die Zahl 750000 ein anderes Maß der Länge 600000 darstellt. Bezeichnen wir die neue Einheit mit $\Delta_{2,1}$, so ist

$$\Delta_{2,1} = \frac{1}{\beta} \text{km} = \frac{4}{5} \text{km}.$$

Die Indizes bedeuten, daß es sich um eine Strecke auf S_2, von S_1 aus beurteilt handelt. Da die beiden Systeme vollkommen gleichwertig sind, so hätte man

$$\Delta_{1,2} = \frac{1}{\beta} \text{km} = \frac{4}{5} \text{km}.$$

7. Nun stellt sich dieselbe Frage für die Zeit. Gehen wir vor wie Einstein, und denken wir uns eine Uhr, die auf S_2 mitgeführt wird. Da sie auf S_2 ruht, behauptet er, muß man $\Delta x_2 = 0$ setzen und es folgt so aus der zweiten Gleichung (1)

$$\Delta \tau_1 = \beta \Delta \tau_2. \tag{16}$$

Für die Relativisten sind $\Delta \tau_1$ und $\Delta \tau_2$ von verschiedener Dauer, in Sekunden ausgedrückt und sie ziehen aus dieser Gleichung den Schluß, daß wenn die Uhr die Sekunde angibt

$$\Delta \tau_2 = 1 \text{ sec.}$$

diese Dauer von S_1 aus beurteilt etwas länger erscheint und $^5/_4$ sec. dauert. Will Einstein damit sagen, daß wenn die Uhrperiode 1 sec. ist, ($\Theta_2 = 1$ sec.) die scheinbare Dauer von S_1 aus beurteilt (eine Art von Dopplereffekt)[1]) $\Theta_1 = {}^5/_4$ sec. wäre? — Dies ist aber ausgeschlossen. Man kann nämlich schreiben:

$$\Delta n_1 \Theta_1 = \beta \Delta n_2 \Theta_2$$

wo Δn_1 und Δn_2 reine Zahlen sind. Setzt man

$$\Delta n_2 = 1 \quad \Theta_2 = 1,$$

1) Der Gedanke Einsteins ist durchaus unklar. Vgl. A. Einstein, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrb. d. Radioakt. und Elektr. **4**, 422, 1907, Zeile 10—15.

so ist

$$\Delta n_1 \Theta_1 = \beta \text{ sec.}$$

und man kann daraus für die scheinbare Periode Θ_1 keinen Schluß ziehen. Die Sache wird aber ohne weiteres klar, wenn man annimmt, daß $\Delta\tau_1$ und $\Delta\tau_2$ verschiedene Maße der gleichen Dauer sind, denn dies bedeutet, daß die betrachteten Perioden der Gleichung genügen.

$$\Theta_1 \Delta\tau_1 = \Theta_2 \Delta\tau_2$$

also

$$\Theta_1 = \frac{1}{\beta}\Theta_2 .$$

Man hat sofort den Dopplereffekt für den besonderen Fall des auf Ox_2 senkrecht auffallenden Lichtstrahles, denn es ist:

$$\Delta x_2 = c_0 \Delta\tau_2 \cos\varphi_2 = 0 ,$$

also

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} .$$

8. Die vorhergehenden Bemerkungen sind von grundlegender Bedeutung, denn in der Frage der Verschiebung der Spektrallinien in der A. R. T. macht Einstein von einer Relation der Form (16) Gebrauch. Man sieht aber, daß sich aus einer solchen kein Schluß ziehen läßt über die scheinbare Periode einer Lichtquelle. Übrigens hat Professor Julius bewiesen, daß die Beobachtungen die Behauptungen Einsteins nicht bestätigen[1]).

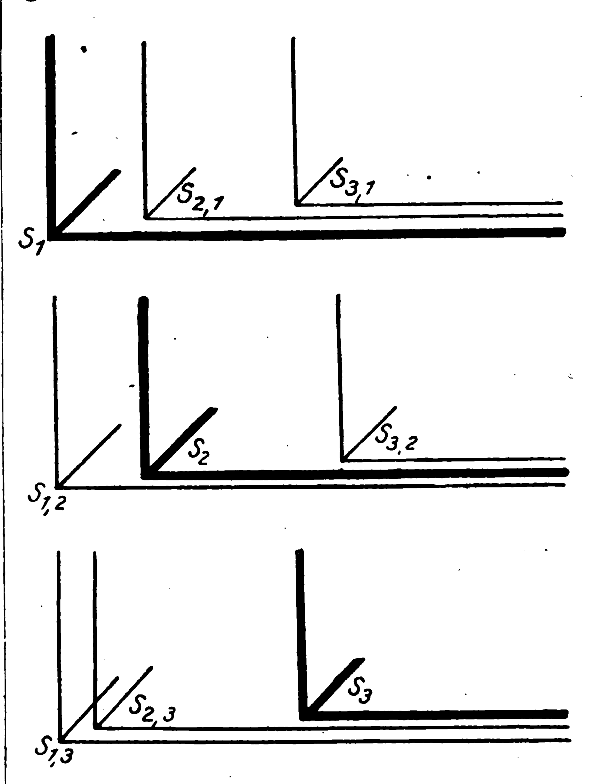
9. Zum Schlusse bringen wir noch einiges über die physikalische Bedeutung der S. R. T.[2]). Betrachten wir 3 Systeme und suchen wir die neue Regel für die Zusammensetzung der Geschwindigkeit abzuleiten. Betrachten wir zuerst den Geschwindigkeitsbegriff. In der Mechanik ist die Geschwindigkeit eines Punktes proportional dem Verhältnis der Wegzunahme Δs zur gleichzeitigen Zunahme $\Delta\varrho$ der Erdumdrehung. Dies kann man schreiben $\frac{\dot s}{\dot\varrho}$, wo $\dot s$ und $\dot\varrho$ die Ableitungen nach einem Parameter t sind, welcher die Zeit darstellt. Wir sagen, die Erde sei die „Zentraluhr" der mechanischen Vorgänge. In der *R. T.* ist in jedem Bezugssystem das Licht die Zentraluhr, und die Geschwindigkeit ist nach Definition $\frac{\dot s}{\dot u}$. Wir leiten also die Gleichungen (1) nach t ab und dividieren die erste durch die zweite, wie bei homogenen Koordinaten. Beschränken wir uns auf den Fall einer Parallelverschiebung und setzen wir:

$$\frac{\dot x_1}{\dot u_1} = v_{13} \qquad \frac{\dot x_2}{\dot u_2} = v_{23} \qquad a = v_{12} \qquad c_0 = 1 ,$$

wir gelangen zur gleichen Form wie Einstein

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12} v_{23}} , \; (v_{ik} = v_{ki}) . \tag{17}$$

Der einzige Unterschied ist, daß wir infolge der Simultaneität, die durch den Parameter t eingeführt ist, eine Figur zeichnen können (s. Fig.



Man muß drei Fälle unterscheiden, je nachdem sich der Beobachter auf S_1, S_2 oder S_3 befindet. Paarweise betrachtet, bewegen sich die Systeme wie starre nicht deformierte Körper, und ihre Bewegung kann durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$X_{1,2} = X_{2,1} + v_{12} t ; \quad X_{2,3} = X_{3,2} + v_{23} t ;$$
$$X_{1,3} = X_{3,1} + v_{13} t \cdot (X_{i,k} \neq X_{k,i}) . \tag{18}$$

Wir drücken dies so aus, daß die S. R. T. Bewegungen mit Aberrationen darstellt. Mathematisch wird dies ausgedrückt durch die „homogenen Differentialquotienten", die den homogenen Koordinaten ähnlich sind.

10. Die soeben untersuchten Bewegungen können natürlich nur scheinbar sein. Welche sind nun die „wahren" Bewegungen? — Aus der Gleichung (17) ersieht man, daß die Ab-

1) W. H. Julius u. P. H. van Cittert, De algemeene relativiteitstheorie en het zonnespektrum. Königl. Akademie der Wissenschaften. Amsterdam, Mai 1920.

2) Dank der Einführung des Parameters t läßt sich die Optik bewegter Körper in durchaus einfacher und anschaulicher Weise darstellen. Vgl. hierüber die Vorträge von E. Guillaume an der Universität Lausanne: „La théorie de la relativité". Verlag F. Rouge & Cie., Lausanne.

erration daher rührt, daß v_{13} nicht gleich $v_{12} + v_{23}$ ist, d. h. die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten wird nicht durch eine geschlossene Figur dargestellt.

Anderseits kann die wahre relative Geschwindigkeit zweier Systeme nur ausschließlich von der scheinbaren Geschwindigkeit v_{ik} abhängen. Bezeichnen wir nun mit Ω_{ik} die wahren Geschwindigkeiten, so müssen diese der Funktionalgleichung

$$\Omega_{13}(v_{13}) = \Omega_{12}(v_{12}) + \Omega_{23}(v_{23}) \qquad (19)$$

genügen. Die Funktion, die dieser Gleichung entspricht, ist aber arg. tg hyp. v. Der Fall der Lichtgeschwindigkeit entspricht $v = 1$, also $\Omega = \infty$. Demnach wäre die wahre Lichtgeschwindigkeit unendlich groß. Man hat also Grund anzunehmen, daß in Wirklichkeit eine Art Betriebsgeschwindigkeit beobachtet wird, die kleiner ist als die wirkliche Geschwindigkeit.

11. Die Definition der physikalischen Simultaneität, die wir im Abschnitte 4 gegeben haben, läßt sich sofort auf die A. R. T. erstrecken, indem man bemerkt, daß in der allgemeinen quadratischen Form

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + \cdots + 2g_{12}\,dx\,dy + \cdots + g_{44}\,du^2$$

die Zunahmen dx, dy, dz, du gleichzeitig stattfinden. Man kann also die Form durch dt^2 teilen. Man sieht, daß ein Lichtsignal keine sphärische Elementarwelle mehr, wie in der S. R. T, sondern eine ellipsoidenförmige Welle gibt. In jedem Punkte liegen die Endpunkte der Vektoren, welche die Lichtgeschwindigkeiten in den verschiedenen Richtungen darstellen, auf einem ähnlichen Ellipsoid, dessen Gleichung man erhält, indem man

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$$

setzt.

Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf die erwähnten Abhandlungen. Wir hoffen hiermit die Leser von der Berechtigung unserer Anschauungen überzeugt zu haben.

Bern, November 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

Periodisches System, Atombau und Radioaktivität.

Von Franz Urbach.

Die im folgenden entwickelte Theorie basiert auf den Vorstellungen der Rutherford-Bohrschen Atomtheorie. Sie bezieht sich hauptsächlich auf die Anordnung der Elektronen in den äußern Ringen der Atome und steht auf ganz anderer Grundlage, als die von E. Kohlweiler in dieser Zeitschrift und der Zeitschrift für physikalische Chemie gegebenen Theorie[1]). Was ihren valenztheoretischen Teil anbelangt (§ 9), stimmt sie mit der von W. Kossel[2]) entwickelten Theorie in den Grundlagen völlig überein, ist aber, wenn auch zeitlich viel später, ganz unabhängig von dieser entstanden und geht übrigens in den meisten Punkten viel weiter als diese. Die Isotopenlehre ist fast gar nicht berücksichtigt, da die Ringstruktur isotoper Elemente nahezu identisch sein muß.

I.

1. Das „Atombild". Es soll im folgenden kein eigentliches Atommodell entwickelt werden, sondern nur ein Bild der Atomstruktur. Unter den vielen, nach den hier verwendeten Angaben möglichen Lösungen der Frage nach der Atomstruktur wird willkürlich eine herausgegriffen; vielleicht ist es die richtige, aber wenn sie es auch nicht ist, so wird doch jede andere Lösung dieselben Bedingungen erfüllen müssen, so wird dieses „Bild" jedenfalls neue Anhaltspunkte für die Konstruktion eines „Modells" geben.

2. Eigenschaftsursachen; Atomgewicht. Die primäre Ursache der Eigenschaften des Atoms ist wohl die Struktur des Kerns, denn sie bestimmt auch die Struktur der Elektronenringe, welche selbst wieder für viele Eigenschaften maßgebend ist. Für die Kernstruktur haben wir aber nur sehr wenig Anhaltspunkte, so daß wir vor allem die Struktur der Ringe betrachten müssen. Was das Atomgewicht betrifft, so werden sich die Unregelmäßigkeiten zum größten Teil darauf zurückführen lassen, daß es nicht nur von der Zahl und Ruhmasse der Bestandteile, sondern auch von ihrem Bewegungszustand[3]) abhängt. Daß hinreichend große Geschwindigkeiten im Atom vorhanden sind, beweisen die schnellsten β-Strahlen.

3. Ringeigenschaften. Der Einfachheit halber betrachten wir die Elektronenringe als konzentrische Kreise (sie sind nach Sommerfeld in Wirklichkeit elliptisch). Bestimmend für eine große Anzahl Eigenschaften ist vor allem die Struktur des äußersten Ringes. Betrachten wir die Elemente in der Reihenfolge der Ordnungszahl (= positive Kernladung), so muß, damit das Atom neutral bleibt, ein Elektron nach dem andern ins Ringsystem treten und sich so ein Ring nach dem andern bilden. Ein einmal gebildeter Ring bleibt im allgemeinen

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **92**, 714, 694, 1918; **93**, 1113, 1918; diese Zeitschr. **21**, Heft 8 u. 12, 1920.
2) Ann. d. Phys. **49**, 229, 1916; Die Naturwissenschaften **7**, 339, 1919.
3) A. Smekal, Naturwissenschaften **8**, 206, 1920.

beim Hinzutreten weiterer Ringe unverändert. Eine Änderung nehmen wir nur an, wenn wir einen bestimmten Anhaltspunkt dafür haben. Aus diesen Annahmen resultiert bereits die Notwendigkeit der periodischen Wiederkehr aller jener Eigenschaften der Elemente, die sich aus der Struktur des äußersten Ringes erklären.

4. Valenz. Die Valenz ist einzig und allein abhängig vom äußersten Ring (dem „Valenzring").

Für jeden äußersten Ring ist eine bestimmte Konstitution (d. h. eine bestimmte Zahl und Anordnung der Elektronen) bevorzugt, welche der Valenzring irgendeines neutralen Atoms, das diesen Ring bereits besitzt, bei der Ionenbildung annimmt[1]). Nur bei gewissen Elementen ist die Struktur des äußersten Ringes eben diese bevorzugte (nach Kossel „stabilste"), so daß diese Elemente der Fähigkeit, Ionen zu bilden und Verbindungen einzugehen, beraubt sein werden. (Edelgase!) Die Plätze solcher Elemente im periodischen System bezeichnen wir als „Stabilitätspunkte" mit dem Symbol S. Außer diesen wird es noch Atome geben, deren Valenzringstruktur relativ zu den andern, in diesem Ringe möglichen Strukturen sehr stabil ist, die also ebenfalls bei der Ionenbildung bevorzugt werden, deren absolute Stabilität aber nicht sehr groß ist, so daß sie selbst ohne weiteres Ionen bilden können (Elemente der 8. Gruppen). Ihre Plätze bezeichnen wir mit (S). Schließlich gibt es Ringstrukturen von noch geringerer Stabilität, die aber trotzdem bei manchen Ionenbildungen in Betracht kommen. Die Plätze der Elemente, deren neutrale Atome solche Ringe besitzen, erhalten das Symbol s.

5. Die „Wechselpunkte". Die S und (S), sind im Bilde des Atoms dadurch charakterisiert, daß nach ihnen beim Element mit nächst höherer Ordnungszahl ein neuer Ring beginnt. Solche Punkte, nach denen neue Ringe beginnen, bezeichnen wir als „Wechselpunkte" mit dem Zeichen W. Im periodischen System kommen folgende Arten von Punkten vor:

W bei B und Al (oder bei C und Si),
$S—W$ „ den Edelgasen,
$(S)—W$ „ den 8. Gruppen,
s „ vielen schweren Metallen, vor allem der 5., 6., und 7. Gruppe.

Auf der bisher gegebenen Grundlage basiert die folgende Theorie.

6. Physikalische Eigenschaften der a- und b-Elemente. Am Ende jeder Reihe sind $(S)—W$, am Ende der Perioden $S—W$, d. h. beim Übergang von a- zu b-Gruppen sind $(S)—W$, beim Übergang von b- zu a-Gruppen $S—W$. Beim Übergang von a- zu b-Gruppen sind allmähliche Übergänge, beim Übergang von b- zu a-Gruppen treten große Sprünge in den Eigenschaften auf. Dies drücken wir im Atombild so aus, daß der äußerste Ring der Elemente einer a-Reihe (kurz a-Ring) vom nächsten b-Ring nicht weit entfernt, daß die Differenz der Radien gering ist, so daß der vollständig gebildete a-Ring die Eigenschaften der nächsten Elemente mit b-Ring noch stark beeinflußt, insbesondere solange der b-Ring erst wenig Elektronen besitzt, d. h. bei den ersten Elementen der b-Reihen. Bei den späteren Elementen der b-Reihen verschwindet der Einfluß des a-Ringes vollständig. Dieses Bild gibt das Verhältnis der a- zu den b-Gruppen in bezug auf ihre physikalischen Eigenschaften vollständig wieder[1]).

Das letzte Element der b-Gruppe ist ein Edelgas; es ist ein S-Punkt erreicht, ein Stadium der „Entwicklung" beendet; der nächstfolgende a-Ring hat bedeutend verschiedenen, und zwar größeren Radius, in Eigenschaften tritt ein vollständiger Sprung ein, es beginnt eine neue, von der vorhergehenden so gut wie unabhängige „Entwicklungs"-Phase.

Hiermit sind die Zusammenhänge der physikalischen Eigenschaften klargelegt, keineswegs aber

7. Die Valenz der a- und b-Gruppen. Um darzustellen, daß trotz der großen „Nähe" der a- und b-Ringe der a-Ring bei b-Elementen für die Valenz von sehr geringer Bedeutung ist, nehmen wir an, daß diese a- und b-Ringe in verschiedenen, sich schneidenden Ebenen liegen. Jedoch können auch Ringe von ähnlichen Radien auch in einer Ebene liegen. In diesem Falle werden sich die physikalischen Eigenschaften der Elemente verhalten, wie die der a- zu denen der b-Elemente, die Wertigkeit aber wird beim Übergang von dem einen (α)- zum nächsten (β)-Ring (siehe Tabelle!) nicht den durch die Lage in verschiedenen Ebenen erklärten Sprung machen, der beim Übergang von a- zu b-Gruppen stattfindet. Dieser Fall tritt nun tatsächlich in den beiden ersten Perioden ein, in denen die Elemente in physikalischer Hinsicht anfangs deutlich den Typus von a-, später den von b-Elementen tragen, ohne daß ein Sprung in der Valenz einträte. (Die Annahmen dieses Absatzes sind übrigens nicht unbedingt notwendig; sie machen die Theorie aber viel anschaulicher und klarer.)

1) Näheres über die Prinzipien dieser Valenztheorie, die in ihrer hier gegebenen Form alle Valenzerscheinungen zu erklären gestattet, findet man in den Arbeiten von Kossel (siehe Einleitung, Anm. 2). Vor allem ergeben sich aus der Theorie ohne weiteres die + und — Normal- und Kontravalenzen (nach Abegg).

1) Ich erinnere hier an die Einordnung, die Mendelejeff ursprünglich den Elementen *Cu*, *Ag* und *Au* gab.



Das periodische System.

Gruppennummer Normalvalenz Kontravalenz			I +1 −7		II +2 −6		III +3 −5		IV ±4		V −3 +5		VI −2 +6		VII −1 +7		VIII (O_0) (±) 8	
Große Periode	Reihe	Type	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
	0	β?	1 *H*															2 *He*
1	1	α	3 *Li*		4 *Be*		5 *B*											
	2	β								6 *C*		7 *N*		8 *O*		9 *F*		10 *Ne*
2	3	α	11 *Na*		12 *Mg*		13 *Al*											
	4	β								14 *Si*		15 *P*		16 *S*		17 *Cl*		18 *H*
3	5	a	19 *K*		20 *Ca*		21 *Sc*		22 *Ti*		23 *Vd*		24 *Cr*		25 *Mn*		26 *Fe* 27 *Co* 28 *Ni*	
	6	b		29 *Cu*		30 *Zn*		31 *Ga*		32 *Ge*		33 *As*		34 *Se*		35 *Br*		36 *Kr*
4	7	a	37 *Rb*		38 *Sr*		39 *Y*		40 *Zr*		41 *Nb*		42 *Mo*		43 —		44 *Ru* 45 *Rh* 46 *Pd*	
	8	b		47 *Ag*		48 *Cd*		49 *In*		50 *Sn*		51 *Sb*		52 *Te*		53 *I*		54 *X*
5	9_1	a	55 *Cs*		56 *Ba*		57 *La*		58 *Ce*									
	9′	a!	59 *Pr*	60 *Nd*	61 —	62 *Sm*	63 *Eu*	64 *Gd*	65 *Tb*	66 *Dy*	77 *Ho*	68 *Er*	69 *Tu* I	70 *Yb*	71 *Lu*	72 *Tu* II		
	9_2	a									73 *Ta*		74 *W*		75 —		76 *Os* 77 *Ir* 78 *Pt*	
	10	b		79 *Au*		80 *Hg*		81 *Tl*		82 *Pb*		83 *Bi*		84 *Po*		85 —		86 *Nt*
6	11	a	87 —		88 *Ra*		89 *Ac*		90 *Th*		90 *Pa*		92 *U*					

8. **A-System und B-System** (Zusammenfassung). Die *B*- (d. h. *b*- und *β*)-Elemente sind dadurch charakterisiert, daß ihre äußerste Zone ein Doppelring ist, der aus 2 Ringen von nur wenig verschiedenen Radien besteht, während der äußerste Ring der *A*- (d. h. *a*- und *α*)-Elemente einfach ist. Daraus erklärt sich die Tatsache, daß alle *a*-Elemente einerseits, alle *b*-Elemente andererseits zwei Systeme bilden, die viel strengere Gesetzmäßigkeiten zeigen, als das gewöhnliche periodische System und daß die Gesetzmäßigkeiten, die die *b*-Elemente miteinander verbinden, komplizierter sind, als die der *a*-Elemente[1]).

9. **Der Übergang von *α* zu *β*** wurde in der Tabelle nach *Al* und *B* angenommen, und zwar weil *Al* und *B* in manchen Eigenschaften (z. B. Atomvolum, Atomrefraktion) eine ähnliche Stellung zeigen, wie die der 8. Gruppen. Nach andern Eigenschaften (z. B. Schmelzpunkt) müßte man diesen Übergang nach *C* und *Si* annehmen. Diese Frage kann vorläufig nicht mit Sicherheit entschieden werden, ist aber auch unwesentlich.

10. **Größenverhältnisse.** Über die Größenverhältnisse in dem bisher entworfenen Atombild ist folgendes zu sagen: Wenn wir jeden Ring einzeln betrachten (wir rechnen hier die „Doppelringe" wegen ihrer geringen „Breite" als einen Ring), so würden die Radien des ersten, zweiten usw. Ringes etwa dieselben sein wie die der ein-, zwei- usw. quantigen Bahn eines Bohrschen *H*-Atoms. Diese Annahme trifft aber in Wirklichkeit nicht zu, da sie nur möglich ist, wenn man die (sehr bedeutenden!) Abstoßungskräfte der Elektronen untereinander vernachlässigt. Wir werden das Ergebnis dieser Rechnung trotzdem in einem Falle brauchen können, in dem derselbe Fehler gemacht wird.

1) O. Körnei fand z. B. in einer unveröffentlichten Arbeit eine annähernd gültige Beziehung für das spezifische Gewicht der Elemente aus ihrer Ordnungszahl und ihrer Stellung im System, und zwar eine einfachere Formel für die *a*-Elemente und eine bedeutend kompliziertere für die *b*-Elemente.



11. Die 8. Gruppen und die seltenen Erden. Mit den wesentlichen Annahmen der vorhergehenden Abschnitte läßt sich das periodische Gesetz mit einer großen Zahl von Einzelheiten, große, kleine Perioden, doppelte Periodizität A und B, Systemunterschied von a und b gegenüber α- und β-Gruppen; valenzchemisches Verhalten, Übergänge und Sprünge in den Eigenschaften, Edelgase usw. sehr leicht erklären. Es bleibt noch die sonderbare Rolle zu erklären, die die Elemente der 8. Gruppen und die seltenen Erden im System spielen.

Auf Grund der Kosselschen Valenztheorie gewinnen wir leicht einen Anhaltspunkt: Sowohl die seltenen Erden, als auch die Elemente der 8. Gruppen [zusammengefaßt als „Kaskadenelemente" (nach Kohlweiler)] verhalten sich, wenn sie im System nacheinander stehen, zueinander ebenso, als wenn sie untereinander stünden. (Daß ihre Ähnlichkeiten sogar noch größer sind, wird sich daraus erklären lassen, daß ihre Atomgewichte näher beieinander liegen.) Es muß also das, was den Elementen, die im System (genau!) untereinander stehen, gemeinsam ist, also ihre Ähnlichkeit in gewissen Punkten bedingt, auch bei den Kaskadenelementen, die einander ähnlich sind, gleich sein. Dieses gemeinsame Merkmal ist aber nach der im vorstehenden entwickelten Theorie die Struktur des äußersten Ringes. Diese ist aber auch bestimmend für die Wertigkeit, welche ja auch wirklich bei den Kaskadenelementen gleich ist. (In der Tabelle sind die seltenen Erden dem *La* und nicht dem *Ce* angeschlossen, weil sie gleiche Wertigkeit und also gleichen Valenzring nicht mit *Ce*, sondern mit *La* haben.) Wenn also innerhalb einer „Kaskade" die Ordnungszahl um 1 steigt, so tritt das neu hinzukommende Elektron nicht in den Valenzring wie sonst, sondern in einen der inneren Ringe. Eine sehr einfache Deutung dieses sonderbaren Ergebnisses werden wir später kennen lernen.

II.

Wir können auch die radioaktiven Zerfallsvorgänge vom Standpunkt der bisher gewonnenen Theorie betrachten.

12. Die β-Strahlenumwandlung. Bei einer β-Strahlung tritt ein Elektron aus dem Kern aus und erhöht dadurch die Kernladung um eine +-Einheit, so daß das Element nach der Fajansschen Verschiebungsregel um eine Stelle nach rechts rückt. Damit aber das Element neutral bleibt, muß auch in einen Ring ein neues Elektron eintreten, und zwar in den äußersten, damit die Wertigkeit die dem neuen Platz des Elementes im System entsprechende werde. Dieses Elektron wird meist aus der Umgebung aufgenommen. — Um die Tatsache zu erklären, daß die β-Strahlen sehr verschiedene Geschwindigkeiten haben können, machte ich die Annahme, daß die β-Elektronen nicht aus dem Kern, sondern, mindestens in den meisten Fällen, aus den Ringen stammen. Entsprechend den verschiedenen Ringradien müßten verschiedene Gruppen von Geschwindigkeiten auftreten können [7! (14—15)]. Geringe Differenzen oder Übergänge erklären sich aus der Tatsache, daß die Elektronenbahnen nicht genau kreisförmig, sondern elliptisch sind. Dabei müßte aber doch, um der Fajansschen Verschiebungsregel zu genügen, ein Elektron aus dem Kern austreten.

Der Vorgang der β-Strahlung spielt sich nach dieser Theorie im allgemeinsten Falle folgendermaßen ab:

Ein Elektron tritt (aus uns noch unbekannten Gründen) aus dem Kern in die „Elektronenhülle" aus, in welcher infolgedessen eine Störung der Gleichgewichtsverhältnisse eintritt, so daß die Elektronen aus ihren Bahnen in andere übertreten und eines von ihnen wird dabei (vielleicht direkt durch das austretende Kernelektron) ausgestoßen und fliegt etwa mit seiner bisherigen kreisenden Geschwindigkeit geradlinig weiter. In den Valenzring tritt außerdem (aus der Umgebung) ein Elektron ein.

Durch die obengenannten Bewegungen der Elektronen in den innern Ringen müssen Strahlungserscheinungen hervorgerufen werden: die γ-Strahlung. Gewissen γ-Strahlen kommt nach dieser Theorie dieselbe Wellenlänge zu, wie den charakteristischen Linien der Röntgenspektren der betreffenden Elemente; diese Folgerung aus der Theorie fand eine glänzende Bestätigung durch die Untersuchungen Rutherfords und Andrades über die γ-Strahlung des *RaB*. Es können nun nach dieser Theorie

13. besondere Fälle eintreten. 1. Das austretende Kernelektron kann unter Umständen keine Störung in den Elektronenringen hervorbringen und vielleicht direkt vom Kern wegfliegen (als β-Strahl). Das wäre die γ-strahlenlose β-Strahlung.

2. Vielleicht kann es vorkommen, daß ein Elektron aus einem Ring wegfliegt, ohne daß ein Kernelektron austritt. Dieser Fall wird vielleicht durch die Strahlung des *K* und *Rb* dargestellt. (Diese Hypothese ist natürlich ganz unwesentlich!)

3. Der ganze Vorgang kann sich stark vereinfachen: Das Kernelektron veranlaßt kein Ringelektron zum Austritt aus dem Atomverband, sondern bloß zum Übertritt in den äußersten (Valenz)-Ring. Vielleicht auch „springt" das Kernelektron selbst als Valenzelektron in den



äußersten Ring. So ein Vorgang wäre eine β-Strahlenumwandlung, aber ohne Strahlung. Dieser Fall tritt nun wirklich bei *Ac*, *AcC* und *MesTh* ein! Diese Tatsache ist neben der Wellenlänge der γ-Strahlen die stärkste Stütze für die Grundanschauungen dieser Theorie.

4. Auch dieser Vorgang kann noch vereinfacht werden, wenn das Kernelektron nur in einen der inneren Ringe eintritt und so die Kernladung ändert und das Atom neutral erhält, ohne die Valenz zu ändern.

Dieser Fall scheint bei der Bildung der 8. Gruppen tatsächlich einzutreten.

Damit ist das am Ende des § 11 erhaltene Ergebnis erklärt.

14. Atomradien. Eine quantitative Bestätigung scheinen die im ersten und zweiten Teil dieser Arbeit ausgesprochenen Ansichten auf folgendem Wege zu erfahren:

Aus der Geschwindigkeit der langsamsten β-Strahlen (v) wurde die Zentrifugalkraft eines Elektrons im äußersten Ring berechnet, aus dem nach dem in § 12 Gesagten diese Strahlen stammen müssen. Die Zentrifugalkraft wurde gleichgesetzt der Anziehungskraft zwischen dem Kern des *Ra*-Atoms und dem Elektron: $\frac{88 e \cdot e}{\varrho^2}$, wobei e die Elementarladung und ϱ den unbekannten Radius bezeichnet und so $\varrho = \frac{88 e^2}{m v^2}$ (wobei m die Masse des Elektrons $= \frac{1}{1835}$ der Masse des *H*-Atoms ist) erhalten. Bei dieser Rechnung blieb aber die Abstoßungskraft der Elektronen untereinander unberücksichtigt.

Da aber in § 10 derselbe Fehler gemacht wurde, so müssen die beiden Resultate, wenn sie auch absolut falsch sind, übereinstimmen. Ich erhielt nach der Methode des § 10: **2,7** $\cdot$ **10**$^{-7}$ cm, nach der β-Strahlen-Methode: **2,5** $\cdot$ **10**$^{-7}$ cm, also die geforderte Übereinstimmung.

15. α-Strahlung. Bei α-Strahlung müssen, da die Kernladung um zwei Einheiten sinkt, auch zwei Ringelektronen austreten, und zwar aus dem Valenzring, so daß die Wertigkeit von selbst den von der Theorie geforderten Wert annimmt. Das Verhalten eines Atoms bei gleichzeitiger α-, β- (und γ-)Strahlung ist aus dem bisher Gesagten ohne weiteres abzuleiten.

16. Die seltenen Erden[1]). Die bei der β-Strahlung vor sich gehenden Änderungen in den innern Atomringen schaffen die Vorbedingung dafür, daß es eine Reihe von Elementen geben kann, bei denen sich diese Änderungen gewissermaßen ausgleichen oder überhaupt Änderungen in den inneren Ringen stattfinden, ohne daß sich der Valenzring ändert. Diese Elemente wären die seltenen Erden. Hier sei nur auf eine Tatsache hingewiesen, die die Annahme eines genetischen Zusammenhangs zwischen β-Strahlung und seltenen Erden zu bestätigen scheint: Wenn man von den Verzweigungen der radioaktiven Zerfallsreihen absieht, gibt es gerade 14 β-Strahler, ebensoviel, als seltene Erden. Übrigens schließen die seltenen Erden im periodischen System nicht an das *Ce* sondern an das *La* an, weil sie gleiche Wertigkeit, also auch gleichen Valenzring wie dieses haben.

1) Siehe auch § 11.

Näheres über die Theorie der seltenen Erden, sowie über die genaue Konstitution der Elektronenringe mit Rücksicht auf die Arbeiten Debyes und Vegards und die Theorie der Spektren werde ich vielleicht in einer nächsten Arbeit bringen können.

Was die Prüfung der im 1. Teil entwickelten Theorie an einzelnen Eigenschaften der Elemente anbelangt, so stößt sie vorläufig noch auf sehr große Schwierigkeiten, weil hierbei Kräfte in Betracht kommen, die zwischen den einzelnen Atomen und Molekülen im festen und flüssigen Zustand wirken. Über diese Kräfte wissen wir aber bisher nur sehr wenig. Vielleicht bringen die auf der Gittertheorie der Kristalle fußenden Arbeiten von Born Licht in diese Fragen. Von der Gittertheorie können wir übrigens auch wertvolle Anhaltspunkte bezüglich der Symmetrieverhältnisse im Atom erwarten.

Zusammenfassung.

Auf Grund einer genauen Analyse der Zusammenhänge, die sich im periodischen System offenbaren, wird ein „Atombild“ aufgestellt, das es gestattet, alle Regelmäßigkeiten im System ungezwungen zu erklären.

Eine Betrachtung der radioaktiven Zerfallserscheinungen auf Grund der Valenztheorie von Kossel führt im Verein mit der Deutung anderer Erscheinungen der Radioaktivität zu einer Erklärung der 8. Gruppen und zu einer Erklärungsmöglichkeit für die seltenen Erden.

Im Laufe der Erörterung ergeben sich noch einige andere fruchtbare Hypothesen.

Nachtrag: Es ist wahrscheinlich, daß unter den Anordnungen der *S* diejenigen stabiler sein werden, die einfacher sind, d. h. geringere Ordnungszahl haben. Daher muß die Neigung neutraler Atome zur Bildung von +Ionen im Durchschnitt größer sein als zur Bildung von —Ionen. Dies erklärt die Tatsache, daß es mehr Metalle als Nichtmetalle gibt und die Ver-

teilung dieser beiden Körperklassen im periodischen System.

Wien, im Juli 1920.

(Eingegangen 5. September 1920.)

Ein neues Thermoelement für Strahlungsmessungen im Spektrum.

Von W. Voege.

In einer früheren Arbeit[1]) „Neue Apparate zur Strahlungsmessung" wurde unter anderen eine Thermosäule mit 10 in einer Geraden angeordneten Thermoelementen der Firma Carl Zeiß beschrieben, welche speziell für Messungen im Spektrum gedacht war. Beim Vergleich dieser Säule mit einem einfachen Element derselben Firma hatte ich ausgeführt, daß das einzelne Element wesentlich besser ausgenutzt werden kann, wenn es möglich ist, die Apparatur so anzuordnen, daß das Spektrum in der Höhe verkürzt und dadurch die Intensität entsprechend gesteigert wird[2]). Die Firma Carl Zeiß hat nun ein neues Thermoelement für Spektralmessungen (Fig. 1 u. 2) hergestellt, bei welchem es möglich ist, die gesamte Energie einer Spektrallinie von 25 mm Höhe und einer Breite bis zu 3,5 mm auf ein einziges Element zu konzentrieren, und zwar geschieht dies durch einen hinter dem Element angeordneten vergoldeten Hohlspiegel von 25 mm Höhe.

Das Thermoelement (1) selbst entspricht den früher beschriebenen Zeiß-Elementen, es hat einen Widerstand von 2 bis 3 Ohm und eine ausnutzbare geschwärzte Fläche von etwa 2,5×3,5 mm. Das Ganze ist in ein Metallgehäuse mit Steinsalzplatte (3) und verstellbarer Spaltvorrichtung (6) eingeschlossen, welches wie die Säule mit 10 Elementen auf einem Stativ (11) oder eingeschaltetem Kreuzschlitten (S. 293, Fig. 4—6) montiert werden kann. An dies Gehäuse ist ferner ein kleines schwach vergrößerndes Mikroskop (5) angebaut, mit dem durch eine kleine Bohrung im Hohlspiegel hin-

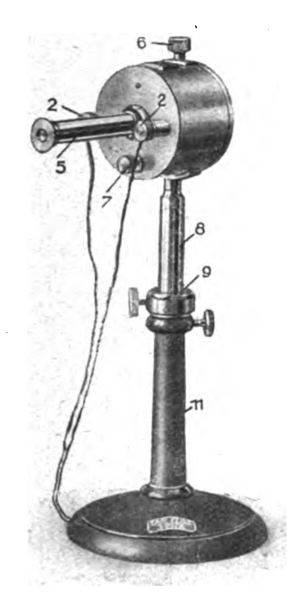


Fig. 1.

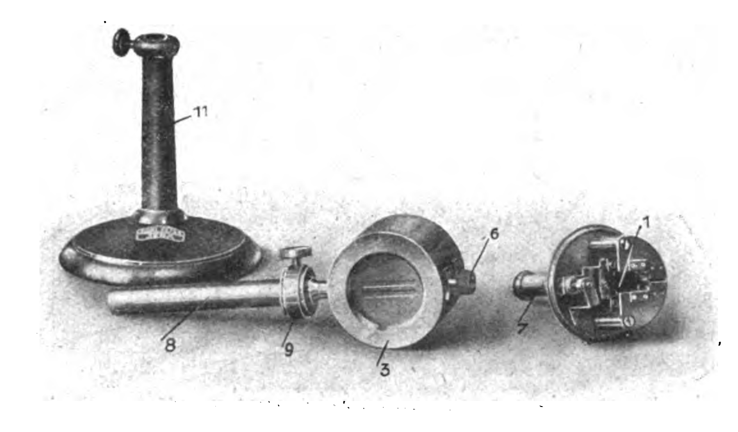


Fig. 2.

durch die Rückseite des Thermoelements beobachtet werden kann. Der Hohlspiegel wird mit der Schraube (7) zum Thermoelement solange verstellt, bis auf der Rückfläche des Elements durch das Mikroskop (5) betrachtet, ein möglichst scharfes Bild der Objektivöffnung vom Kameraobjektiv des Spektrographen sichtbar ist. Sobald dies erreicht ist, hat man die Gewähr, daß das ganze Licht der Spektrallinie, in der die Einstellung vorgenommen wird, auf das Thermoelement konzentriert ist. Das Optimum der Einstellung kontrolliert man am einfachsten durch vorsichtige Drehung des Elements bei gleichzeitiger Beobachtung des Galvanometerausschlages. Ich habe diese neue Vorrichtung für Spektralmessungen mit der Rubens-Säule und mit der erwähnten Zeiß-Säule mit 10 Ele-

1) Diese Zeitschr. **21**, 288, 1920.

2) E. S. Johansen empfiehlt zur Verkürzung der Spektrallinie und damit Konzentration der Strahlung auf wenige Elemente die Einschaltung einer Zylinderlinse; Ann. d. Phys. (4) **33**, 525, 1910.

menten in folgender Weise verglichen. Von einem durch eine Nernstlampe beleuchteten verstellbaren Spalt wurde mittelst einer Linse auf der Thermosäule ein scharfes Bild entworfen, dessen Breite mit Hilfe eines Meßmikroskops gemessen werden konnte; dann wurde der betreffende Strahlungsmesser solange gedreht oder seitlich verschoben, bis der Ausschlag des angeschlossenen Spiegelgalvanometers (Hartmann & Braun 5 Ω, $1^0 = 2 \times 10^{-8}$) seinen Maximalwert erreichte. Für die drei verschiedenen Apparate ergaben sich hierbei nachstehende Resultate:

Dimensionen des Spaltbildes		Ausschlag des Galvanometers ($w = 5\ \Omega$)			Verhältnis	
Breite	Höhe	Rubens-Säule mit 20 Elem $w = 5.2\ \Omega$	Zeiß-Säule mit 10 Elem. $w = 38\ \Omega$	Neues *Zeiß*-Element $w = 2\ \Omega$	Zeiß-Element: Rubens-Säule	Zeiß-Element: Zeiß-Säule
0,05 mm	> 30 mm	7,0⁰	—	90⁰	12,8	—
0,18 mm	> 30 mm	22⁰	—	396⁰	18,0	—
2,0 mm	> 30 mm	120⁰	767⁰	2090⁰	17,4	2,7
0,09 mm	20 mm	13,5⁰	32,8⁰	164⁰	12,2	5,0
0,05 mm	20 mm	7,2⁰	—	81⁰	11,2	—

Der Verlust durch Absorption in der Steinsalzplatte, welcher bei der Rubens-Säule fortfällt, ist in den Zahlenwerten entsprechend berücksichtigt. Das neue Element mit Kugelspiegel leistet demnach nicht nur das Gleiche wie die Säule mit 10 Einzelelementen, sondern es ist dieser sogar noch erheblich überlegen. In erster Linie ist diese Überlegenheit natürlich auf die günstigeren Widerstandsverhältnisse des einfachen Elements zurückzuführen. Daß der Vorteil besonders bei sehr engem Spalt in die Erscheinung tritt, wird daran liegen, daß sich die 10 Elemente praktisch nie so genau in einer Geraden anordnen lassen, als daß die Lötstellen der sämtlichen 10 Elemente maximal ausgenutzt werden können, wie dies bei einem einzigen Element mit Spiegel der Fall ist.

Das neue Element dürfte also in allen Fällen, in denen nicht etwa die selektive Reflexion des vergoldeten Spiegels störend wirkt, in jeder Beziehung der Säule vorzuziehen sein: es ist einfacher, haltbarer, strahlungsempfindlicher und auch entsprechend billiger. Gegenüber der Rubens-Säule erhält man mit ihm in günstigen Fällen eine 18 mal, im Durchschnitt eine 13 mal höhere Empfindlichkeit, während die Trägheit gleichzeitig nur etwa halb so groß ist. Vor Bolometern und ähnlichen Apparaten hat es den Vorzug der Einfachheit, sowohl im Bau wie auch in der Bedienung, ferner den großen Vorzug der absoluten Ruhelage des Nullpunktes.

Hamburg, Physikal. Staatslaboratorium.

(Eingegangen 28. Dezember 1920.)

Ein Quecksilber-Destillierapparat.

Von Alberto Eliçabe.

(Mitgeteilt von Richard Gans.)

Von den vielen Quecksilber-Destillierapparaten, die verwendet werden, ist der Weinholdsche[1]) sehr verbreitet und wurde bisher auch im hiesigen Institut gebraucht.

Dieser Apparat hat den Nachteil, daß eine große Menge des *Hg*-Dampfes, der aus der erhitzten Kugel in das innere Glasrohr eintreten und sich dort verflüssigen sollte, sich bereits in der Glaskugel kondensiert und zum nicht destillierten *Hg* zurückfließt. Das kann man durch eine Asbestkappe, die man über die Glaskugel stülpt, nur zum Teil vermeiden.

Ferner braucht man, um die Destillation beginnen zu können, wenigstens 123 cm³, und ebensoviel bleibt übrig, wenn man aufhört, die „schädliche Quecksilbermenge".

Deshalb habe ich einen neuen Apparat konstruiert. Da derselbe sich sehr gut bewährt hat, will ich ihn kurz beschreiben.

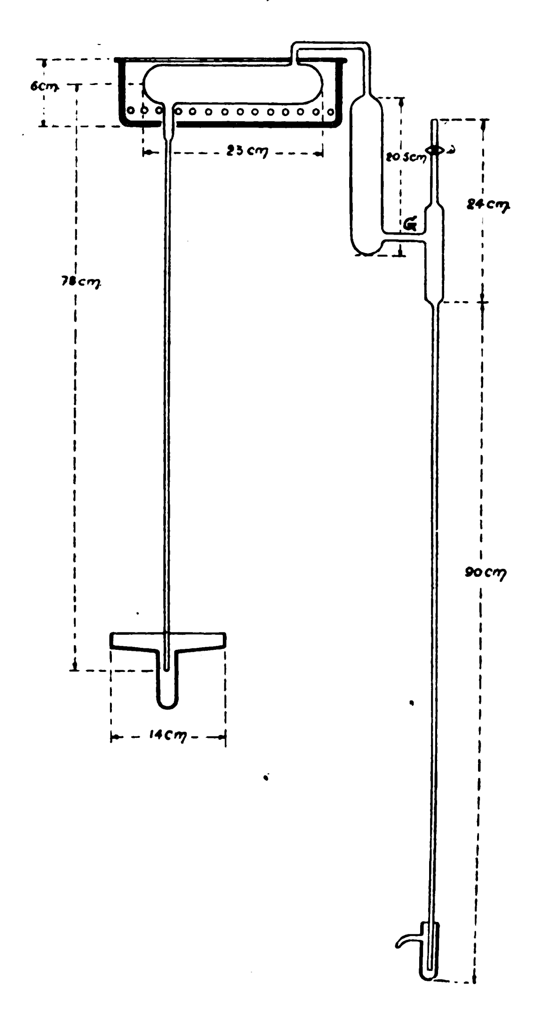
An einem vertikalen Holzbrett ist der in beistehender Figur wiedergegebene Glasapparat angebracht. Das unreine *Hg* befindet sich in dem Holzgefäße *A*, das in vertikaler Richtung etwas verschiebbar ist. *F* enthält etwas reines *Hg*. Erzeugt man bei *E* mittels einer Luftpumpe ein gutes Vakuum, so steigt das unreine *Hg* im linken Steigrohr von $2^1/_2$ mm lichter Weite und füllt etwa die untere Hälfte des horizontalen Glasrohrs *B*. Das kann man, gemäß dem jeweiligen Barometerstande, durch die Vertikalverschiebung des Holzgefäßes *A* leicht erreichen. Gleichzeitig füllt sich das rechte Steigrohr (auch von $2^1/_2$ mm Durchmesser) aus

1) Siehe z. B. J. Frick, Physikal. Technik. 7. Aufl. Herausgegeben von O. Lehmann, Braunschweig 1904, Band 1, S. 582.



F mit reinem *Hg*. Dann schließt man den Hahn *D*.

Das Rohr *B* ist von einem elektrischen Ofen umgeben, einem asbestverkleideten Blechkasten, in dem sich eine Spirale Widerstandsdraht befindet. Verbindet man ihre Enden mit der städtischen Leitung von 220 Volt, so entsteht eine Temperatur von ungefähr 155°. Das Quecksilber destilliert dann vom heißen Rohr *B* in das kalte *C*, und wenn der untere



Teil desselben sich gefüllt hat, stürzt es durch das Verbindungsrohr *G* ins rechte Steigrohr, etwaige geringe Luftmengen mit sich reißend.

Auf diese Weise habe ich in 10 Stunden 2450 g destilliert, während der Weinholdsche Apparat in derselben Zeit nur 1080 g lieferte.

Die schädliche *Hg*-Menge, die nach der Destillation übrigbleibt, beträgt nur 15 ccm, von denen die Hälfte unreines (links), die andere Hälfte reines *Hg* (rechts) ist, im Vergleich zu der schädlichen Menge von 125 ccm beim Weinholdschen Apparat ein großer Vorzug in Anbetracht der *Hg*-Teuerung.

Der Apparat arbeitet sehr billig. Das von mir konstruierte Exemplar braucht nur 103 Watt, doch ist die Wärmeisolierung meines Ofens noch mangelhaft. Würde man sie verbessern, ließe sich der Wattverbrauch leicht weiter herunterdrücken.

Ist alles *Hg* destilliert, so hat sich das Rohr *B* entleert, und es bleibt das unreine *Hg* im kalten linken Steigrohr. Dabei ist keine Gefahr vorhanden, daß das Glasrohr *B* springt, im Gegensatze zum Weinholdschen Apparate; mein Apparat braucht also keine Wartung. Die Heizspirale ist nämlich so abgeglichen, daß der leere Apparat sich höchstens auf 250° erhitzt.

Der Apparat erlaubt, die Röhre *B*, welche nach mehrfachen Destillationen etwas Rückstand enthält, in einfacher Weise zu reinigen, ohne ihn abzumontieren. Man entferne die Gefäße *A* und *F*, ersetze sie durch Gefäße mit Säure und sauge bei *E*. Ebenso verfahre man dann mit Wasser und trockne schließlich mittels Durchsaugens trockener Luft.

La Plata, Instituto de Física, 9. November 1920.

(Eingegangen 18. Dezember 1920.)

Über die Ergebnisse von laufenden Messungen radioaktiver Quellen in Brambach.

(Aus dem Radium-Institut der Bergakademie Freiberg i. S.)

Von P. Ludewig.

Über die Änderung des Emanationsgehalts einer radioaktiven Quelle in Abhängigkeit vom Niederschlag ist bisher nur wenig veröffentlicht worden. Im folgenden sollen die Ergebnisse von laufenden Messungen mitgeteilt werden, die während der Monate August, September und Oktober 1920 an Brambacher Quellen von Frl. I. Kochinke ausgeführt worden sind[1]).

Von den vielen radioaktiven Quellen, die in Brambach zur Verfügung stehen, wurde während der drei Monate besonders die Eisenquelle gemessen. Einige Messungen wurden auch an der Wettin-Quelle gemacht. Die Messungen wurden an jedem Tag außer Sonntags im Laufe des Vormittags ausgeführt.

Die Lage der Eisenquelle geht aus der Fig. 1 hervor. Sie liegt zwischen der Sprudel- und

1) Auch an dieser Stelle sei der Badeverwaltung in Brambach und besonders Herrn Direktor Diefenbach für das gütige Entgegenkommen und die Unterstützung bei diesen Messungen der beste Dank ausgesprochen.

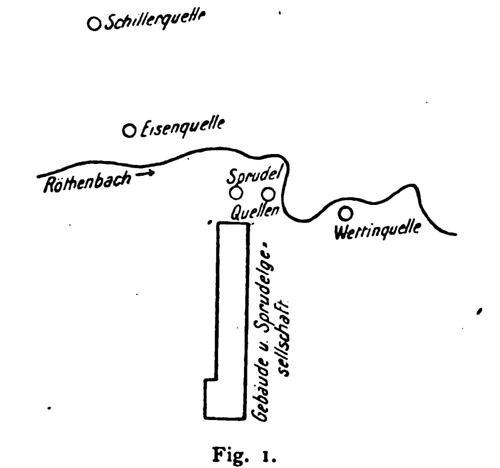


Fig. 1.

der Schiller-Quelle nahe am Bach und etwa 70 m von der Wettin-Quelle entfernt. Die Fassung der Quelle zeigt Fig. 2. Auf den Granit, aus

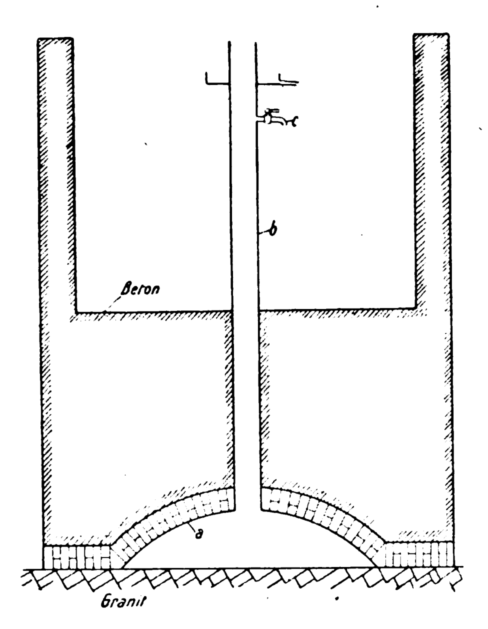


Fig. 2.

dessen Spalten das emanationshaltige Wasser aufsteigt, ist die Ziegelsteinhaube *a* aufgemauert, die oben in das Steigrohr *b*, das ungefähr $4^1/_2$ m lang ist, endigt. Das obere Ende des Steigrohres liegt etwa $^1/_2$ m unter der Erdoberfläche. Das aufsteigende Wasser fließt in ein Überlaufbecken und von da in die Schleuse. Im Steigrohr ist ein Hahn *c* angebracht, der zur Entnahme des Wassers dient. Das zu den Messungen benutzte Wasser wurde nach einigem Ablaufenlassen diesem Hahn entnommen. In dem Steigrohr perlt wie bei allen Brambacher Quellen Kohlensäure auf. Es ist unzweifelhaft, daß dadurch eine unkontrollierbare und veränderliche Entemanierung des Quellwassers eintritt und eine beträchtliche Fehlerquelle in die Messungen hineinkommt.

Die Messungen wurden morgens zwischen 9 und 11 Uhr ausgeführt, und zwar mit dem Fontaktoskop von Engler und Sieveking gewöhnlicher Form. Das Elektrometer war vor Beginn der Messungen im Freiberger Radium-Institut neu geeicht worden. Der Normalverlust betrug ca. 100 Volt pro Stunde. Der Eisenquelle wurden zur Messung 250 ccm Wasser im Meßzylinder entnommen und diese mit inaktivem Bachwasser auf 1000 ccm ergänzt. Die Messung erfolgte immer in der gleichen Weise: Der Normalverlust wurde mit 1000 ccm Bachwasser bestimmt, beim Hauptversuch wurde 1 Minute lang geschüttelt, dann der Überdruck durch Ablassen von Wasser ausgeglichen, hierauf das Elektrometer aufgesetzt und sogleich aufgeladen. Das Elektrometer wurde immer negativ aufgeladen und der Anstieg der Strahlung in den ersten 30 Minuten durch 5—6 Messungen verfolgt. Die erste Messung wurde aus bekannten Gründen erst 5 Minuten nach Schüttelende ausgeführt. Die zu bestimmten Zeiten nach dem Schütteln gemessenen Sättigungsstromwerte wurden nach den Schmidtschen Korrekturfaktoren auf die Zeit des Schüttel-Endes zurückgerechnet. Die gemessenen Werte sind in das Kurvenbild (Fig. 3) eingetragen worden.

Die oberste Kurve zeigt den Verlauf des Niederschlags. Vor dem Beginn der Messungen hatte längere Zeit niederschlagfreies, warmes Sommerwetter geherrscht. Am 20. August setzte dann ein 3 Wochen dauernder Regen ein, der von ungewöhnlicher Stärke war. Um die Mitte des Septembers war es wieder trocken und Ende September folgte dann eine zweite Regenperiode von geringerer Stärke, während der Oktober fast ganz niederschlagfrei blieb.

Aus den anderen Kurven ist der zeitliche Verlauf des Emanationsgehalts im Liter, der Ergiebigkeit und der Temperatur zu ersehen. In das Kurvenbild sind nicht Mache-Einheiten eingetragen, sondern nur Relativwerte. Die Stärke der Quelle ist etwa 150 Mache-Einheiten im Liter. Die Ergiebigkeit der Quelle wurde in der Weise bestimmt, daß das aus dem Überlauf abfließende Wasser während 10 Minuten aufgefangen und abgemessen wurde. Daraus ist der Durchschnittswert der Liter pro Minute berechnet worden. Die Quellfassung ist so gebaut, daß die Quelle bis zum äußersten natürlichen Auftrieb angestaut ist.

Aus dem Vergleich der Kurven ersieht man, daß die erste große Regenperiode die Ergiebigkeit der Quelle beträchtlich erhöht hat und daß

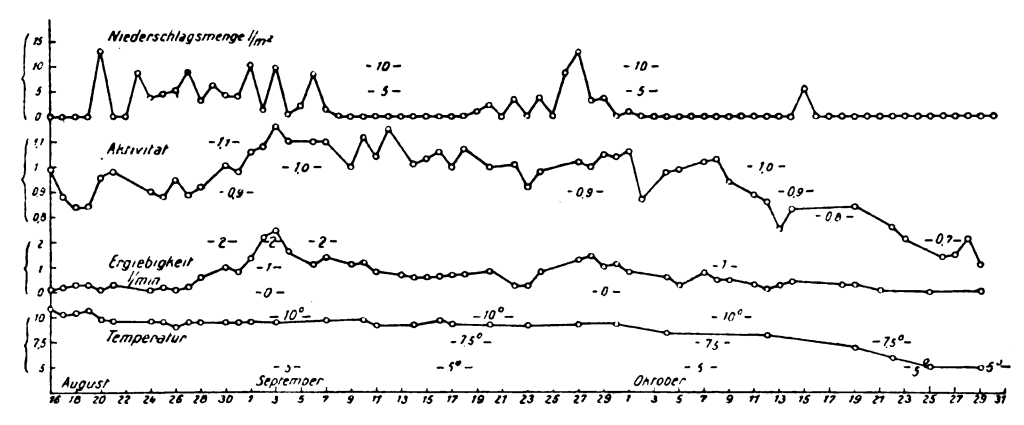


Fig. 3.

mit der Ergiebigkeit der Quelle auch ihr Emanationsgehalt angestiegen ist. Bemerkenswert ist, daß die Quelle auf den Regen erst nach etwa einer Woche reagierte. Während die Ergiebigkeit dann im September wieder etwas abfiel, blieb der Emanationsgehalt ungefähr auf der gleichen Höhe und beide Kurven erfuhren einen neuen, wenn auch nicht beträchtlichen Anstieg durch die zweite Regenperiode. Die Trockenheit des Oktobers hatte auf die beiden Kurven dann die Wirkung, daß sowohl Ergiebigkeit als Emanationsgehalt wieder abfielen.

Die Messung der Temperatur des Wassers wurde in der Weise ausgeführt, daß ein genaues Thermometer etwa 1 m tief in das Steigrohr hineingelassen wurde, wo es einige Minuten verblieb; es wurde dann schnell hochgezogen und abgelesen. Die Temperatur blieb anfangs konstant und nahm dann im Oktober entsprechend der einsetzenden Kälte ab.

Aus den Kurven ersieht man, daß mit dem Niederschlag nicht nur die Ergiebigkeit, sondern auch der Emanationsgehalt angestiegen ist. Man könnte bei der geringen Ergiebigkeit und dem langsamen Reagieren der Quelle auf Niederschläge den Grund dafür darin suchen, daß der Weg, den das Wasser vom Orte der Emanationsaufnahme bis zum Steigrohr zurücklegt, so lang ist, daß die Emanation bei dem Transport auf diesem Wege zu einem um so größeren Teil zerfällt, je geringer die Wassergeschwindigkeit ist. Andererseits wird wahrscheinlich bei langem Stehen des Wassers im Steigrohr eine stärkere Entemanierung des Wassers durch die aufsteigende Kohlensäure eintreten, als bei schnellem Fließen der Quelle.

Die Messungen an der Wettin-Quelle zeigen, daß ihre Ergiebigkeit und ihr Emanationsgehalt beim Beginn der ersten Regenperiode gleichfalls stark anstiegen, und zwar die Ergiebigkeit um ca. 20 Proz., der Emanationsgehalt um mehr als 30 Proz. Es ist bemerkenswert, daß diese Quelle auf den Beginn des großen Niederschlags fast unmittelbar reagierte.

(Eingegangen 14. Dezember 1920.)

Über Umkehrungen der Gleichstromkomponente bei geblasenen Funkenstrecken.

Von M. Wolfke.

Vor einigen Jahren (1918) habe ich die Gleichrichterwirkung einer Funkenstrecke Spitze—Platte, und zwar speziell die Wirkung eines Luftstromes auf derartige Hochspannungsgleichrichter, näher untersucht. Es sind mir bei dieser Gelegenheit eigentümliche Umkehrungen der Stromrichtung unter dem Einfluß des Luftstromes aufgefallen. Da, meines Wissens nach in der Literatur diese Erscheinung bis jetzt noch nicht erwähnt worden ist, so sei mir gestattet, hier kurz darüber zu berichten.

Als Funkenstrecke habe ich eine Platte von ca. 50 mm Durchmesser und eine stumpfe Spitze, beide aus Messing, benutzt. Der Luftstrom wurde mittels einer, die Spitze umhüllenden Düse in der Achsenrichtung der Funkenstrecke mit einem Fußgebläse geblasen. Als Stromquelle für den hochgespannten Wechselstrom diente ein mit 50 periodigem Wechselstrom betriebenes Induktorium. In Serie zu der Funkenstrecke befand sich ein Hitzdrahtmilliampèremeter zur Messung des gesamten Stromes und ein Drehspulmilliampèremeter zur Messung der Gleichstromkomponente. Die Spannung an der Funkenstrecke wurde mittels eines statischen Voltmeters bestimmt. Bei den Versuchen habe ich die Länge der Funkenstrecke, die Belastung und die Stärke des Luftstromes variiert. Die Resultate aus einer Reihe solcher Messungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefaßt.

Abstand Spitze — Platte	Ohne Luftstrom			Mit steigender Luftstromstärke			
	Spannung	Stromstärke		Strommaxima			
mm	≌ Volt	≌ mA	= mA	≌ mA	= mA	≌ mA	= mA
5	1830	24	+ 0,5	24,0	— 1,5	—	—
„	2940	17	+ 1,0	32,0	— 3.5	—	—
„	2580	12	+ 2,0	32,0	— 6,0	—	—
„	3820	17	0	32,0	— 5,0	—	—
„	8000	39	0	45,8	— 6,5	—	—
„	11150	60	0	60 0	— 7,0	—	—
10	3650	17	+ 2,0	17,0	— 3,0	—	—
„	2470	17	+ 3.0	42,0	— 7,0	—	—
„	3900	20	0	45,8	— 16,0	—	—
„	8000	39	0	52,7	— 7,0	—	—
„	11450	60	0	63,0	— 7,5	—	—
15	7400	17	— 8.0	20.0	+ 5.0	—	—
„	4870	20	— 1,0	32,0	— 12,0	—	—
„	8310	39	0	49,2	— 13,0	52,7	+ 31,5
„	11800	60	+ 0,5	63,0	— 10,0	74,0	+ 16,0
20	2880	20	— 11,0	20,0	+ 5 0	—	—
„	5850	20	— 2,0	20,0	— 4,0	25,0	+ 12.0
„	9000	39	+ 0,5	49.2	— 25,0	52,7	+ 30,0
„	12100	60	+ 1,0	66,3	— 12.0	66,3	+ 41,0
30	8300	31	0	32.0	— 6 0	39,0	+ 16,0
„	13200	58	+ 2,0	63,0	— 25,0	63,0	+ 35,0
40	10700	39	+ 1,0	39,0	— 10,0	45,8	+ 18,0
„	13800	58	+ 2,0	58,0	— 5,0	59,6	+ 30,0
50	14800	58	— 3,0	58,0	— 3 0	63,0	+ 25,0

In der Tabelle bedeuten: das Zeichen ≌ den gesamten Strom, = die Gleichstromkomponente, + die Richtung der Gleichstromkomponente von Spitze zur Platte und — die Richtung von der Platte zur Spitze.

Ganz allgemein gesprochen, lassen sich beim Anblasen des Funkens drei verschiedene Entladungszustände unterscheiden.

Ohne Luftstrom, oder nur mit sehr geringem Anblasen, hat der Funke ein Aussehen, das an den Hochspannungslichtbogen erinnert: der Funke ist dick und von einem hellen Schein umgeben. Die Gleichrichterwirkung ist in diesem Falle außerordentlich gering, wie man das aus der vierten Kolonne der Tabelle sieht, und verschwindet sogar oft. Die Richtung der Gleichstromkomponente kann dabei, je nach Funkenlänge und Belastung, beliebig von Spitze zur Platte, oder umgekehrt sein.

Bei schwachem Luftstrom verändert der Funke sein Aussehen: der lichtbogenartige Kern ist zwar noch erhalten, jedoch reichlich von ganz feinen prasselnden Funkenfäden umgeben. Die Gleichrichterwirkung ist in diesem Falle, wie man das aus der sechsten Kolonne der Tabelle ersehen kann, etwas besser. Die Richtung der Gleichstromkomponente kehrt in den meisten Fällen gegen diejenige ohne Luftstrom um und ist vorzugsweise von Platte zur Spitze gerichtet.

Bei starkem Luftstrom zerfällt der Funke in einen Regen von feinen prasselnden Funkenfäden. Die Gleichrichterwirkung ist in diesem Falle eine außerordentlich gute, wie das die sechste Kolonne der Tabelle zeigt. Die Gleichrichterkomponente erreicht über 60 Proz. der gesamten Stromstärke und ist durchweg von Spitze zur Platte gerichtet. Allerdings tritt dieser Entladungszustand erst bei längeren Funkenstrecken (über 15 mm) auf.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Funkenstrecke Spitze — Platte nur bei starkem Anblasen, in der Funkenrichtung von Spitze zur Platte, als zuverlässiger Hochspannungsgleichrichter mit der Gleichstromrichtung Spitze — Platte wirken kann. Ohne Luftstrom, oder mit schwachem Anblasen, ist die Gleichrichterwirkung sowohl der Stärke nach, als auch der Richtung nach, vollkommen unzuverlässig. Die Gleichstromkomponente kehrt mit steigender Luftstromstärke ihre Richtung einmal bzw. zweimal um.

Ich habe auch den Einfluß eines transversalen Magnetfeldes auf die Gleichrichterwirkung einer Funkenstrecke untersucht. Die Resultate waren jedoch nicht so eindeutig wie diejenigen beim Anblasen. Trotzdem ließen sich auch hierbei mit steigender Feldstärke

analoge Umkehrungen der Gleichstromkomponente nachweisen.

Zürich, im Dezember 1920.

(Eingegangen 18. Dezember 1920.)

Bemerkung zu dem Artikel von M. J. Huizinga: „Die Gleichrichterwirkung von Kristalldetektoren".

Von Günther-Schulze.

In dieser Zeitschrift **21**, 91, 1920 findet sich auf Seite 95, linke Spalte, Mitte, der Satz: „Die Ventilwirkung der Aluminiumzelle schreiben Schulze und Taylor einem dünnen Sauerstoffhäutchen zu....." In der Fußnote steht: 1) A. H. Taylor, Wied. Ann. **30**, 984, 998, 1016.

Über meine Untersuchungen findet sich weder an dieser, noch an einer anderen Stelle der Arbeit von Huizinga eine Literaturangabe. Da ich über die elektrolytische Ventilwirkung bisher im ganzen 17 Arbeiten veröffentlicht habe, und insbesondere in der ohne Widerspruch gebliebenen Veröffentlichung: „Bemerkungen zur Untersuchung der Wechselstromvorgänge in Aluminiumzellen", Ann. d. Phys. **4**, 31, 1053, 1910 nachgewiesen zu haben glaube, daß die Arbeit von Taylor infolge ungeeigneter Versuchsanordnung wissenschaftlich wertlos ist, möchte ich hiermit gegen das von Huizinga geübte, eigentümliche Verfahren der Literaturberücksichtigung Verwahrung einlegen.

(Eingegangen 18. Dezember 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Fortschritte der Farbenlehre. II.

Von Wilhelm Ostwald.

(Schluß.)

Bezeichnung. Um die psychologisch geordneten Farben zu bezeichnen, ist ein Buchstabensystem entwickelt worden, das auf den gleichen Grundlagen beruht, wie die Bezeichnung der unbunten Reihe. Für die Weißgehalte 100, 79, 63, 50 usw. gelten gleichfalls die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* usw. Und da die Schwarzgehalte der unbunten Farben *a*, *b*, *c*, *d* folgeweise 00, 21, 37, 50 usw. sind, so bedeutet auch $a = 00$ Schwarz, $b = 21$ Schwarz usw. Die Bezeichnung der Farbtöne von 00 bis 99 bleibt unverändert, da diese bereits psychologisch geordnet sind.

Wir unterscheiden daher in der Folge von den analytischen Kennzahlen die psychologischen Farbzeichen. Die ersten bestehen aus drei Ziffernpaaren, die zweiten aus einem Ziffernpaar und zwei Buchstaben. Während die ersten für alle wissenschaftlichen Fragen grundlegend sind, haben die zweiten eine maßgebende Bedeutung für alle Anwendungen der Farbe zu technischen wie künstlerischen Zwecken.

In den Fig. 7 und 8 ist diese Bezeichnungsweise bereits in leicht verständlicher Weise angedeutet. Verfolgt man von irgendeiner Raute aus die anschließende Reihe bis zum nächsten Rande, so findet man aufsteigend das Zeichen für den Weiß-, absteigend das für den Schwarzgehalt. Sind beide Buchstaben gleich, was für die axialen Rauten der Hauptschnitte, oder die *ws*-Seiten der Dreiecke zutrifft, so handelt es sich um ein Grau. In allen anderen Fällen ist der zweite Buchstabe kleiner (d. h. früher im *abc*) als der erste.

Farbnormen. Um sich innerhalb der allseits stetigen Farbübergänge des Farbkörpers zurechtzufinden, ist es notwendig, bestimmte Punkte in ihm auszuwählen und ihnen systematische Zeichen zuzuordnen. Wählt man diese Punkte so, daß sie gegenseitig im einfachsten gesetzmäßigen Zusammenhang stehen (wie das u. a. mit den Tonhöhen in der Musik geschehen ist), so gewinnt man gleichzeitig das Material, um die so lange vergeblich gesuchten harmonischen Beziehungen der Farben grundsätzlich und allgemein festzustellen. Um dies in allseitig brauchbarer Weise durchzuführen, muß man von den eben gegebenen Darlegungen, die die Aufgabe bereits zu lösen scheinen, etwas abgehen. Die bisher definierten Punkte sind Ideale, die z. T. nicht praktisch erreichbar sind. Für den wirklichen Gebrauch dienen statt der Ideale Mittelwerte, denen sich die Praxis genügend annähern kann, ohne durch grundsätzliche Hindernisse gehemmt zu werden.

Solche Mittelwerte findet man, wenn man sich innerhalb jeder Raute, welche die psychologische Teilung des stetigen Farbtondreiecks ergeben hatte, die vorhandenen etwas verschiedenen Farben gleichförmig gemischt denkt und die so entstandene Farbe als Norm für das Gebiet bestimmt. So hat z. B. die oberste un-

bunte Raute in ihrer oberen Ecke das Weiß 100, in ihrer unteren 79. Um den psychologischen Mittelwert zu finden, muß man das geometrische Mittel (den Antilogarithmus von 95) wählen, nämlich 89. Demzufolge bedeutet von hier ab das Zeichen *a* nicht mehr das Weiß 100, sondern 89. Ebenso kommen den anderen Buchstaben abgeänderte Werte zu, nämlich

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
89	71	56	45	35	28
g	*h*	*i*	*k*	*l*	
22	18	14	11	8,9	

Von 1 bis *u* wiederholt sich die Reihe auf $^1/_{10}$ verkleinert.

In derselben Weise wird der Weiß- und Schwarzgehalt der trüben Farben bezeichnet. Für den Weißgehalt werden die obigen Zuordnungen ohne weiteres übernommen. Für den Schwarzgehalt bedeutet *a* die Ergänzung des Weiß *a*, nämlich 11; ebenso $b = 100 - 71 = 29$, $c = 100 - 56 = 44$ usw. Wir haben also für den Schwarzgehalt

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
11	29	44	55	65	72
g	*h*	*i*	*k*	*l*	
78	82	86	89	91,1 usw.	

Die dergestalt festgelegten Farben sind als Normen aufzufassen, nach denen das ganze Farbwesen, soweit es willkürlich ist, geregelt werden soll. Dadurch wird erreicht, daß an die Stelle unzähliger zufälliger Farben eine begrenzte Anzahl bestimmter tritt, die eine feste Zusammensetzung und Bezeichnung haben, mit denen sich also genau und zuverlässig arbeiten läßt. Insbesondere bestehen zwischen ihnen überall harmonische Beziehungen, so daß sich mit ihrer Hilfe die Aufgaben der angewandten Kunst, soweit es sich um Farben handelt, leicht und sicher lösen lassen.

Da es im allgemeinen nicht leicht ist, eine Farbe genau auf die Norm einzustellen, so soll als allgemeine Regel gelten, daß jeder gegebenen Farbe das Farbzeichen der Norm gegeben wird, dem ihre Zusammensetzung am nächsten kommt. Dabei sind positive wie negative Abweichungen möglich. Es soll aber ganz allgemein angestrebt werden, die Abweichungen so klein als möglich zu machen.

Anzahl der Normalfarben. Nimmt man an, daß Aufstriche bis zum Weißgehalt 009 herstellbar sind, entsprechend dem Buchstaben *u*, so sind das 20 Stufen. Das zugehörige farbtongleiche Dreieck würde also

$$\frac{20 \times 21}{2} = 210$$

Rauten enthalten, und alle 100 Dreiecke des Farbkreises demgemäß 21000 Farben. Das überschreitet weit die praktischen Möglichkeiten. Es sind also Einschränkungen erforderlich. Solche können beim Farbton und beim Weiß- und Schwarzgehalt erfolgen.

Der Farbtonkreis wird folgendermaßen eingeschränkt. Es gibt nach Hering 4 Urfarben, dazu kommen noch 4 andere, zwischenliegende Farben, die als besondere empfunden werden und z. T. eigene Namen haben. Diese 8 Hauptfarben sind

Gelb	Ublau[1])
Kreß[2])	Eisblau
Rot	Seegrün
Veil[3])	Laubgrün

Innerhalb jeder der 8 Hauptfarben unterscheidet man bequem je 3 Stufen. Das gibt 24 Farbtöne, die unter Abrundung der Brüche folgendermaßen im Farbkreise verteilt sind

Gelb	00, 04, 08	Ublau	50, 54, 58
Kreß	13, 17, 21	Eisblau	63, 67, 71
Rot	25, 29, 33	Seegrün	75, 79, 83
Veil	38, 42, 46	Laubgrün	88, 92, 96

Das sind die praktischen Normen der Farbtöne.

Was die Einschränkung der Weiß- und Schwarzstufen anlangt, so hat es sich als zweckmäßig erwiesen, jede zweite Stufe auszulassen. Wir haben daher für beide die Reihe *a c e g i l n p r t v x z*, von denen die letzten Glieder nur selten in Frage kommen. Schließen wir mit *p* ($w = 035$), so sind es 8 Stufen. Das gibt für jedes Dreieck 36 Rauten, von denen 8 unbunt und 28 bunt sind. Für die 24 Dreiecke haben wir somit $28 \times 24 = 672$ bunte Farben, zu denen noch die 8 unbunten kommen, also insgesamt 680 Farben. Das reicht für die meisten Zwecke aus und ist technisch erreichbar. Die oben erwähnten Farbkörperhauptschnitte sind nach diesem Schema geordnet.

Warme und kalte Farben. Die Künstler unterscheiden seit langem warme und kalte Farben und für Goethe war dieser Gegensatz ein willkommenes Beispiel der von ihm angenommenen allgemeinen Polarität. Die Farbmessung hat auch hier zum ersten Male eine Aufklärung gebracht. Die kalten Farben unterscheiden sich von den warmen durch ihre konstitutive Unreinheit. Während es leicht ist warme Farben mit der Reinheit 90 herzustellen, kommt man bei kalten nur selten bis 60 und der große unbunte Anteil läßt sich auf keine Weise weiter einschränken.

1) Für Ultramarinblau.
2) Für Orange.
3) Für Violett.

Dieser Umstand gestattet, die beiden Gebiete genauer gegeneinander abzugrenzen. Ganz dem warmen Teil gehören die Farben von 96 bis 30 an, ganz dem kalten 46 bis 80; die Zwischengebiete von 30 bis 46 und von 80 bis 96 bilden schnelle Übergänge, deren Mitten 38 und 88 als die Grenzpunkte zwischen warm und kalt gelten können.

Die Ursachen dieses Gegensatzes liegen auf physiologischem Boden. Im Sinne der Dreifarbentheorie kann man z. B. sagen, daß die Grünempfindung nicht ohne gleichzeitige Rot- und Ublauempfindung zustande kommt, deren Betrag etwa die Hälfte jener ausmacht und sich als unbunte Beimischung betätigt. Doch ist dies natürlich nicht die einzige Möglichkeit einer physiologischen Erklärung. Ich gehe auf diese Fragen nicht näher ein, da ich keine eigenen Untersuchungen hierüber angestellt habe.

Für die hier behandelten Fragen ist wesentlich, daß dieser konstitutionelle unbunte Anteil sich bei den bezogenen Farben als Schwarz betätigt, welches gemäß dem Fechnerschen Gesetz den Eindruck der Reinheit am wenigsten beeinträchtigt. Stellt man nun weißgleiche Farben mit gleichem Schwarzgehalt aus beiden Gebieten her, so überzeugt man sich, daß sie nicht als gleichwertig empfunden werden; die warme Farbe erscheint deutlich unreiner. Um beide gleichwertig zu machen, muß man den Schwarzgehalt der kalten Farbe bedeutend vermehren, und zwar um etwa soviel, als jenem konstitutiven Anteil entspricht. Man muß mit andern Worten den Betrag der warmen Vollfarbe im kalten Gebiet zu $^2/_3$ aus Vollfarbe, zu $^1/_3$ aus Schwarz herstellen und dazu noch die gleiche Menge Schwarz fügen, die in der warmen Farbe enthalten ist, um psychologische Gleichwertigkeit zu erzielen. Doch gilt dies nur für die reinen Farben; bei den trüberen steigt der unentfernbare Schwarzgehalt noch darüber hinaus.

Diese verwickelten Fragen fordern eine eindringendere Aufklärung, als ich bisher imstande war ihnen zuzuwenden. Ich habe sie wegen ihrer praktischen Wichtigkeit berührt, da sie wenigstens annähernd geregelt sein müssen, wenn es sich um Farbharmonien handelt. Eine solche annähernde Regelung[1]) ist auf Grund umfassender Messungen rein erfahrungsmäßig ermittelt worden und kann bis auf weiteres benutzt werden. Während also bei warmen Farben die Buchstaben für den Schwarzgehalt die oben angegebene analytische Bedeutung haben, sind ihnen bei den kalten durchgängig größere Schwarzwerte zugeordnet. Der Unterschied ist indessen im psychologischen Sinne nicht so groß, obwohl er an manchen Stellen analytisch so erscheint; er beträgt eine bis zwei Stufen, also z. B. *c* statt *d* oder *l* statt *n*.

1) Physikalische Farbenlehre, S. 253.

Die Harmonie der Farben. Auch dieses Problem, um dessentwillen Goethe seine ganzen Farbarbeiten unternommen hatte, konnte mit Hilfe der neuen Lehre grundsätzlich gelöst werden. Harmonisch wirken solche Farben, zwischen denen eine nahe (psychologische) Beziehung besteht.

Der Grundfehler bei den bisherigen Lösungsversuchen, die bekanntlich zu sehr unzulänglichen und widersprechenden Ergebnissen geführt haben, liegt darin, daß man immer geglaubt hat, der Farbton sei das einzige Element der farbigen Harmonie, ebenso wie die Schwingungszahl das einzige Element der tönenden ist. Da aber die Farben eine dreifaltige Gruppe sind, so sind die beiden anderen Veränderlichen gleichfalls maßgebend für das Zusammenwirken und die Verhältnisse werden demgemäß viel verwickelter.

Stellt man Farben gleichen Weiß- und Schwarzgehalts, also mit gleichen Buchstaben zusammen, so bilden sie sehr leicht Harmonien. Zunächst sind es die Gegenfarben, deren Farbtonnummern um 50 entfernt sind, sodann die Dreier mit 33 Abstand, von denen auch je zwei unter Fortlassung der dritten sehr bemerkenswerte Harmonien geben. Auch die Vierer, Fünfer, Sechser und Achter mit 25, 20, $16^2/_3$ und $12^1/_2$ Abstand, so wie die aus ihnen durch Fortlassungen entstehenden unvollständigen Harmonien wirken vielfach überzeugend. Unter gewissen Bedingungen kann man irgend zwei oder drei Farben desselben Kreises (mit gleichen Buchstaben) wirksam zusammenstellen. Bringt man eine Farbe aus einem anderen Kreise dazu, so fällt sie als fremd auf.

In jeder der genannten Harmonien kann man mit Erfolg eine gegebene Farbe durch eine andere gleichen Farbtons ersetzen, wenn sie derselben Schattenreihe angehört. Die Schattenreihen sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre beiden Buchstaben gleichen Abstand haben; so bilden z. B. *ca*, *db*, *ec*, *fd*, *ge* usw. eine Schattenreihe.

Sehr wichtig ist, daß Schwarz und Weiß, um harmonisch zu gegebenen Farben zu stehen, den Buchstaben des benutzten Kreises entsprechen müssen. Haben wir z. B. eine Harmonie aus dem Kreise *lg* gebildet, so ist *l* das tiefste Schwarz und *g* das hellste Weiß, das dazu paßt. Dies ist ein harmoni-

sches Gesetz, welches zurzeit noch fast immer verletzt wird; hat man aber einmal aufmerksam solche Dissonanzen mit den entsprechenden harmonischen Anordnungen verglichen, so wird man sie nicht mehr erträglich finden.

Wie es bei dem primitiven Zustande dieses Gebietes nicht anders sein kann, wo unsicheres gefühlsmäßiges Tasten bisher das einzige Hilfsmittel war, besteht eine große Verwilderung in der Verwendung der Farbe und harmonische Zusammenstellungen, welche die Regel sein sollten, bilden eine seltene Ausnahme. Mit Hilfe von Tünchen oder Buntpapieren, die auf die oben beschriebenen Normen eingestellt sind, wird es aber künftig leicht sein, harmonische Farbgruppen zu bilden, ebenso wie es leicht ist, auf einem Klavier Tonharmonien zu finden. Der künstlerischen Betätigung wird dadurch ebensowenig ein Zwang angetan, wie etwa der Musik durch die Existenz der Tonleiter und die Beschränkung ihres Materials auf deren Töne.

Von dem weiten Gebiet, das sich hier der Forschung auftut, konnte an dieser Stelle nur weniges angedeutet werden. Eine eingehende methodische Darstellung findet sich in des Verfassers „Harmonie der Farben" (Leipzig 1918, Verlag Unesma. 2. Aufl. 1921).

Großbothen, März 1919.

(Eingegangen 22. März 1919.)

BESPRECHUNGEN.

Alfred Stettbacher, Die Schieß- und Sprengstoffe. gr. 8°. VI Teile u. 326 S. m. 141 Abbildungen. 1. Auflage. Leipzig, J. A. Barth. 1919. Geheftet M. 32.—

Der erste Teil des Werkes enthält neben einem kurzen geschichtlichen Überblick und einer knappen allgemeinen Charakteristik der Sprengstoffe die für den Physiker besonders wichtige und interessante Besprechung der Detonationsgeschwindigkeit, der Explosionswärme, des Gasvolumens und der Explosionstemperatur. Der zweite Teil behandelt die Schwarzpulver und die Nitratsprengstoffe, der dritte Teil die Nitrosprengstoffe. Den Inhalt des vierten Teiles bildet Chemie und Technik der Zündsprengstoffe mit Einschluß der Zündschnüre. Im fünften Teile wird die Eigenart und die Herstellung der Ammonsalpetersprengstoffe, der schlagwettersicheren Sprengstoffe, der Chloratsprengstoffe und des Oxyliquids geschildert. Der sechste Teil bespricht dann die Prüfungsverfahren sowie die militärische und ziviltechnische Verwendung der Sprengstoffe.

Der Verfasser hat nur gesicherte wissenschaftliche Ergebnisse aufgenommen und die Herstellung sowie die praktische Verwendung der Sprengstoffe aus eigener Erfahrung anschaulich beschrieben. Das Werk ist so übersichtlich und faßlich gehalten, daß der gebildete Laie es ohne Schwierigkeit lesen kann. Jedem Physiker, der sich einen klaren Überblick über das Gesamtgebiet der Sprengstoffkunde verschaffen will, ohne tiefer eindringen zu müssen, kann das im besten Sinne populär geschriebene Werk von Nutzen sein.

H. Müller.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

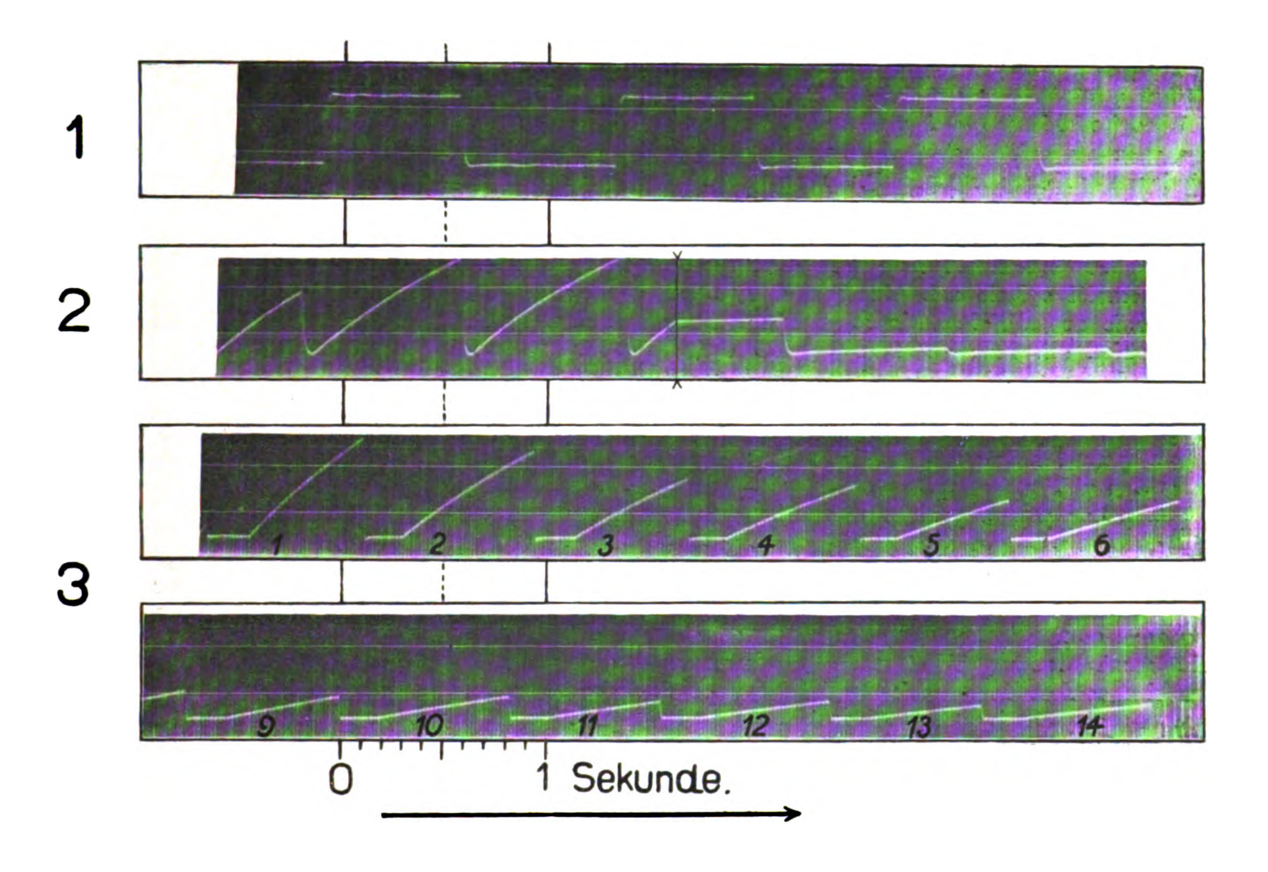
Habilitiert: Für Chemie der Nahrungs- und Genußmittel an der Technischen Hochschule Darmstadt Professor Dr. Adolf Kreutz (von der Universität Straßburg).

Ernannt: Der ord. Professor der anorganischen und Experimentalchemie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Dr. Julius v. Braun in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt a. M., der Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Berlin Dr. phil. Dr.-Ing. Leon Lichtenstein zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der anorganischen Chemie am Polytechnikum und an der höheren Schule für Ackerbau in Mailand Dr. Pietro Corbetta, der Leiter der meteorologischen Station in Winterthur Professor Dr. Friedrich Krebs, der ord. Professor der angewandten Physik an der Technischen Hochschule München Dr. Ernst Voit.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig



E. v. Angerer, Lichtelektrische Photometrie des Nachleuchtens von aktivem Stickstoff.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. — 1. März 1921. Redaktionsschluß für No. 7 am 10. März 1921. — 22. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte.

Von W. H. Keesom.

§ 1. Der wichtige Artikel von Debye über das in der Überschrift genannte Thema[1]) veranlaßt mich, in dieser Zeitschrift einen Auszug zu geben aus einigen in der Amsterdamer Akademie publizierten Verhandlungen, die sich mit der Ableitung und Prüfung der Zustandsgleichung für nicht zu stark komprimierte Gase befaßten.

Es sind dabei für den Bau und die Kraftwirkung der Moleküle ganz präzise vereinfachende Annahmen gemacht worden, um die Rechnung zu Ende führen zu können. So werden wir annehmen, daß die Moleküle gegeneinander stoßen wie harte glatte Kugeln mit bestimmtem Durchmesser, mit dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt zusammenfällt. Weiter werden wir in diesem Auszug unser Augenmerk besonders richten auf zweiatomige Moleküle und für diese — weil wir nach der klassischen Dynamik rechnen wollen — annehmen, daß sowohl die Massenverteilung im Molekül, wie das Kraftfeld desselben symmetrisch ist um eine und dieselbe bestimmte Achse im Molekül. Für das Kraftfeld werden wir weiter nacheinander zwei verschiedene Voraussetzungen machen, und zwar 1., daß die Kraftwirkung des Moleküls äquivalent ist mit der eines elektrischen Dipols, 2., daß sie äquivalent ist mit der eines elektrischen, achsensymmetrischen Quadrupols. Die erste Voraussetzung wird, wie besonders von Debye hervorgehoben ist, geeignet sein für Stoffe, welche man als assoziierend anzusehen pflegt, die zweite für nichtassoziierende Stoffe. Weil wir die erhaltene Zustandsgleichung in erster Linie an den zuletzt genannten Stoffen prüfen werden, so werden wir uns besonders mit den Quadrupolmolekülen zu befassen haben.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

§ 2. Allgemeiner Ausdruck für den zweiten Virialkoeffizienten für kugelförmige achsensymmetrische Moleküle.

Wir werden uns die Zustandsgleichung in der nach Potenzen von v^{-1} entwickelten Form denken[1]):

$$pv = RT\left\{1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots\right\}, \qquad (1)$$

in der die Temperaturfunktionen B, C usw. von Kamerlingh Onnes Virialkoeffizienten genannt worden sind. Und zwar ist B der zweite, C der dritte Virialkoeffizient, usw.

Wir werden in diesem Artikel nur solche sehr wenig komprimierte Zustände des Gases ins Auge fassen, in denen wir uns auf die zwei ersten Terme:

$$pv = RT\left\{1 + \frac{B}{v}\right\} \qquad (2)$$

beschränken können.

Die van der Waalssche Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \qquad (3)$$

kann für solche Zustände in die Form (2) gebracht werden. Es ist dann

$$B = b - \frac{a}{RT}. \qquad (4)$$

Unsere Aufgabe lautet dann für die genannten Voraussetzungen bezüglich Bau und Kraftwirkung der Moleküle, die Temperaturfunktion B zu bestimmen.

Dabei wird man darauf zu achten haben, daß in einem gewissen Moment im Gase eine bestimmte Anzahl Paare von Molekülen sich so nahe aneinander befinden, daß sie merkliche Kräfte aufeinander ausüben. Fälle, daß drei Moleküle sich so nahe aneinander befinden,

1) Vgl. H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung, Math. Enz. V. 10, Leiden, Comm. Suppl. Nr. 23, § 36.

brauchen für die Berechnung von B nicht in Betracht gezogen zu werden.

Wir können die oben angedeuteten Paare von Molekülen kennzeichnen durch die Größen r, Θ_1, Θ_2 und φ, vgl. Fig. 1, in der A und B

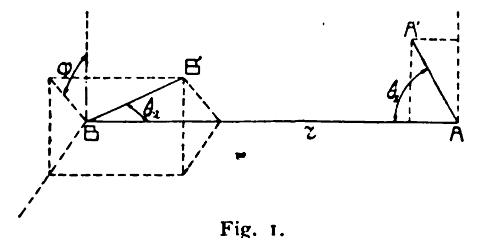


Fig. 1.

die Mittelpunkte, AA' und BB' die Achsen der Moleküle darstellen.

Man findet dann für B folgenden allgemeinen Ausdruck[1]):

$$B = \tfrac{1}{2} n \left(\tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 - P\right), \tag{5a}$$

wenn

$$P = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\sigma}^{\infty} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} (e^{-hu} - 1)\, r^2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \, dr\, d\Theta_1\, d\Theta_2\, d\varphi, \tag{5b}$$

und n die Zahl der Moleküle bedeutet, auf welche sich das Volum v bezieht.

Hierin bedeutet u die potentielle Energie des Molekülpaares, das durch r, Θ_1, Θ_2, φ gekennzeichnet ist, wobei die potentielle Energie $= 0$ angesetzt ist für $r = \infty$.

Weiter ist

$$h = \frac{1}{kT} \tag{6}$$

gesetzt, wobei k die bekannte Plancksche Konstante ist.

§ 3. Der zweite Virialkoeffizient für kugelförmige Moleküle mit festen Dipolen.

Die potentielle Energie eines Molekülpaares, von denen jedes in ihrem Mittelpunkte einen Dipol mit Moment μ_1 trägt, oder deren gegenseitige Kraftwirkung äquivalent ist mit der Kraftwirkung solcher Dipole, ist

$$u = \frac{\mu_1^2}{r^3} (2 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \varphi). \tag{7}$$

Um P nach Gl. (6) zu berechnen, schreiben wir

$$2 \cos \Theta_1 = g \cos \psi \quad \text{und}$$
$$\sin \Theta_1 = g \sin \psi \qquad (g \geq 0,\ 0 < \psi < \pi),$$

so daß

$$2 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \varphi =$$
$$= g (\cos \psi \cos \Theta_2 + \sin \psi \sin \Theta_2 \cos \varphi).$$

Wir zeichnen in der Ebene, welche die Gerade BA und die Achse des Dipols in A ent-

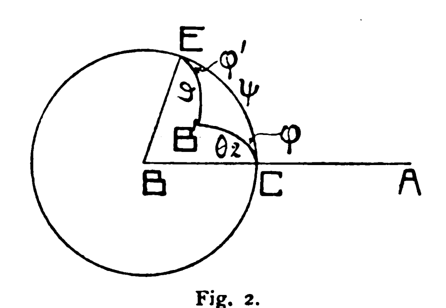


Fig. 2.

hält, einen Winkel $CBE = \psi$, und führen die Winkel $EBB' = \vartheta$ und $CEB' = \varphi'$ als neue unabhängige Variabeln ein an der Stelle von Θ_2 und φ. Integration nach φ' gibt 2π. Die Integration nach ϑ kann auch leicht ausgeführt werden. Führen wir dann g als unabhängige Variable ein statt Θ_1, so erhalten wir

$$P = \pi \int\limits_{\sigma}^{\infty} r^2 dr \cdot G,$$

mit

$$G = \frac{2}{c\sqrt{3}} \int\limits_{1}^{2} \frac{dg}{\sqrt{g^2 - 1}} (e^{cg} - e^{-cg} - 2cg), \tag{8}$$

wo $c = \frac{h\mu_1^2}{r^3}$. Wir entwickeln $e^{cg} - e^{-cg}$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von g, und integrieren dann. Schreiben wir

$$v = \frac{\mu_1^2}{\sigma^3} \tag{9}$$

für die potentielle Energie von zwei sich berührenden Molekülen, deren Achsen einander parallel sind und senkrecht zur Verbindungslinie der Mittelpunkte stehen, so erhalten wir schließlich

$$B = \tfrac{1}{2} n \cdot \tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 \left\{ 1 - \tfrac{1}{3!} q_1 (hv)^2 - \tfrac{1}{3} \tfrac{1}{5!} q_2 (hv)^4 - - \tfrac{1}{5} \tfrac{1}{7!} q_3 (hv)^6 - \tfrac{1}{7} \tfrac{1}{9!} q_4 (hv)^8 \ldots \right\}, \tag{10}$$

wo

$$q_1 = 1 + 1 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 = 2$$
$$q_2 = 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 + 1 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 3^2 = \frac{24}{5}$$
$$q_3 = 1 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 3^2 + 1 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot 3^3 = \frac{464}{35}$$
$$q_4 = 1 + 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 + 6 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 3^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot 3^3 + + 1 \cdot \tfrac{1}{9} \cdot 3^4 \text{ usw.},$$

oder

$$B = \tfrac{1}{2} n \cdot \tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} (hv)^2 - \frac{1}{75} (hv)^4 - - \frac{29}{55125} (hv)^6 \ldots \right\}. \tag{11}$$

Weil nach (6) h hierin durch $\frac{1}{kT}$ zu ersetzen wäre, erhalten wir also für B eine Reihe, die nur gerade Potenzen von T^{-1} enthält.

1) Für die Ableitung siehe man Comm. Leiden Suppl. Nr. 24b, § 6.

§ 4. Der zweite Virialkoeffizient für kugelförmige Moleküle mit festen achsensymmetrischen Quadrupolen.

Wir betrachten jetzt die gegenseitige Kraftwirkung der Moleküle dadurch verursacht, daß dieselben in ihrem Mittelpunkt einen Quadrupol tragen, welcher aus zwei Dipolen besteht, deren Achsen in derselben Geraden liegen, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Diese beiden Dipole liegen einander unendlich nahe, erzeugen aber dabei ein endliches Quadrupolmoment[1]). Für uns sind die Einzelheiten dieses Bildes nicht maßgebend, es genügt, daß das Kraftfeld des Moleküls äquivalent ist mit der Wirkung eines solchen Quadrupols[2]).

Es ist nun die potentielle Energie eines Molekülpaares:

$$\left.\begin{aligned} u = \tfrac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{r^5}\Big\{ & 1 - 5\cos^2\theta_1 - 5\cos^2\theta_2 - \\ & - 15\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2(4\cos\theta_1\cos\theta_2 + \\ & + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)^2\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wenn μ_2 das Moment des Quadrupols bedeutet.

Wir führen ein

$$v = \tfrac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{\sigma^5}, \quad (13)$$

dann ist v = die potentielle Energie von zwei einander berührenden Molekülen, mit den Achsen der Quadrupole zugleich senkrecht zueinander und zu der Verbindungslinie der Mittelpunkte.

Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} \Psi = & 1 - 5\cos^2\theta_1 - 5\cos^2\theta_2 - \\ & - 15\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2(4\cos\theta_1\cos\theta_2 + \\ & + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)^2, \end{aligned}$$

oder

$$\Psi = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi, \quad (14)$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} A &= 2(1 - 3\cos^2\theta_1)(1 - 3\cos^2\theta_2), \\ B &= 16\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2, \\ C &= \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

so daß

$$u = v\frac{\sigma^5}{r^5}\Psi.$$

Entwickeln wir $e^{-hu} - 1$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von hu, und integrieren wir in (6) nach r, so erhalten wir

$$P = \tfrac{1}{2}\sigma^3 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{5n-3}\frac{1}{n!}(hv)^n \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Psi^n \sin\theta_1\sin\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\varphi. \quad (16)$$

Schreiben wir abkürzend $[\Psi^n]$ für das Integral in (16) und entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} [A^p B^{2q} C^r] &= \int_0^\pi\int_0^\pi A^p B^{2q} C^r \sin\theta_1\sin\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \\ [\cos^r\varphi\cos^s 2\varphi] &= \int_0^{2\pi}\cos^r\varphi\cos^s 2\varphi\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und beachten wir, daß $[\cos^{2l-1}\varphi] = 0$, $[\cos^{2l-1} 2\varphi] = 0$, $[\cos^{2l-1}\varphi\cos^m\varphi] = 0$, wenn l und m positive ganze Zahlen sind, so finden wir:

$$\left.\begin{aligned} [\Psi^n] = & 2\pi[A^n] + \\ & + \binom{n}{2}[A^{n-2}B^2][\cos^2\varphi] + \binom{n}{2}[A^{n-2}C^2][\cos^2 2\varphi] + \\ & + \binom{n}{3}\binom{3}{1}[A^{n-3}B^2C][\cos^2\varphi\cos 2\varphi] + \\ & + \binom{n}{4}[A^{n-4}B^4][\cos^4\varphi] + \binom{n}{4}\binom{4}{2}[A^{n-4}B^2C^2][\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi] + \\ & \binom{n}{4}\binom{4}{4}[A^{n-4}C^4][\cos^4 2\varphi] + \\ & + \binom{n}{5}\binom{5}{1}[A^{n-5}B^4C][\cos^4\varphi\cos 2\varphi] + \binom{n}{5}\binom{5}{3}[A^{n-5}B^2C^3][\cos^2\varphi\cos^3 2\varphi] \\ & + \binom{n}{6}[A^{n-6}B^6][\cos^6\varphi] + \binom{n}{6}\binom{6}{2}[A^{n-6}B^4C^2][\cos^4\varphi\cos^2 2\varphi] + \\ & + \binom{n}{6}\binom{6}{4}[A^{n-6}B^2C^4][\cos^2\varphi\cos^4 2\varphi] + \\ & \binom{n}{6}\binom{6}{6}[A^{n-6}C^6][\cos^6 2\varphi] + \\ & + - - - - - - - - - - - - - - - - - - \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

1) J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism., 3. ed., Vol. I, S. 197.

2) Wie dies in erster Näherung z. B. bei dem Bohr-Debyeschen Wasserstoffmolekül der Fall ist.

Schreiben wir

$$\left.\begin{array}{ll} A = 2A_1A_2, & A_1 = 1 - 3\cos^2\Theta_1, \\ B = 16B_1B_2, & B_1 = \sin\Theta_1\cos\Theta_1, \\ C = C_1C_2, & C_1 = \sin^2\Theta_1, \end{array}\right\} \quad (19)$$

dann ist

$$[A^p B^{2q} C^r] = 2^{p+8q} \{[A_1^p B_1^{2q} C_1^r]\}^2 \ldots \quad (20)$$

wo die eckigen Klammern im zweiten Glied sich jetzt auf Θ_1 allein beziehen:

$$[\ldots] = \int_0^\pi \ldots \sin\Theta_1 d\Theta_1.$$

Man findet

$$\left.\begin{array}{l} \left[A_1^p B_1^{2q} C_1^r\right] = 2^{p+q+r+1} \dfrac{(p+q+r)!}{(2p+4q+2r+1)(2p+4q+2r-1)\ldots(2q+1)} \cdot \\ \left\{1 - \binom{p}{1}\dfrac{2q+1}{p+q+r} + \binom{p}{2}\dfrac{(2q+1)(2q+3)}{(p+q+r)(p+q+r-1)} - \ldots\right\}, \end{array}\right\} \quad (21)$$

mittels welcher Formel auch die speziellen Fälle: $[A_1^p]$, $[A_1^p B_1^{2q}]$ usw. berechnet werden können.

Von diesen Ausdrücken kann $[A_1^p]$ leichter mittels folgender Beziehung gefunden werden:

$$\left[A_1^p\right] = (-1)^p \frac{2^{p+1}}{2p+1} + \frac{2p}{2p+1}\left[A_1^{p-1}\right]. \quad (22)$$

Weiter ist

$$\left.\begin{array}{l} \left[\cos^{2q}\varphi\right] = \left[\cos^{2q} 2\varphi\right] = 2\pi \cdot \binom{2q}{q} \cdot \dfrac{1}{2^{2q}}, \\ \left[\cos^{2q}\varphi \cos^{2r} 2\varphi\right] = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2^{q+2r}}\left\{\binom{2r}{r} + \right. \\ \left. + \binom{q}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2}\binom{2r+2}{r+1} + \binom{q}{4}\cdot\dfrac{1}{2^4}\binom{2r+4}{r+2} \ldots\right\}, \\ \left[\cos^{2q}\varphi \cos^{2r-1} 2\varphi\right] = 2\pi \cdot \\ \cdot \dfrac{1}{2^{q+2r}}\left\{\binom{q}{1}\binom{2r}{r} + \binom{q}{3}\dfrac{1}{2^2}\binom{2r+2}{r+1} \ldots\right\}. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Diese Formeln geben schließlich:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{4}{3}\pi\sigma^3 \left\{\dfrac{16}{15}(h\nu)^2 - \dfrac{128}{735}(h\nu)^3 + \right. \\ + \dfrac{18176}{37485}(h\nu)^4 - \dfrac{262144}{419265}(h\nu)^5 + \\ + 0{,}2360\,(h\nu)^6 - 0{,}1355\,(h\nu)^7 + \\ \left. + 0{,}1019\,(h\nu)^8 \ldots\right\}, \end{array}\right\} \quad (24)$$

so daß

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1}{2}n \cdot \frac{4}{3}\pi\sigma^3 \{1 - 1{,}0667\,(h\nu)^2 + \\ + 0{,}1741\,(h\nu)^3 - 0{,}4738\,(h\nu)^4 + \\ + 0{,}6252\,(h\nu)^5 - 0{,}2360\,(h\nu)^6 + \\ + 0{,}1355\,(h\nu)^7 - 0{,}1019\,(h\nu)^8 \ldots\}. \end{array}\right\} \quad (25)$$

§ 5. Bemerkungen in bezug auf die für Quadrupolmoleküle abgeleitete Formel.

Für niedrigere Temperaturen, z. B. beim Boyle-Punkt (die Temperatur bei der $B = 0$), konvergiert die Reihe (25) sehr langsam, so daß da die oben angegebenen Glieder nicht genügen.

Beim Inversionspunkt des Joule-Kelvin-Effektes für kleinere Dichten ($T = T_{\text{inv}(\varrho=0)}$) beträgt das Glied mit $(h\nu)^8$ in (25) etwa $^1/_{800}$ von B_∞, dem Wert, zu welchem B sich nähern würde für $T = \infty$, falls die hier gefundenen Gleichungen da ihre Gültigkeit behalten sollten. Also könnten für den soeben genannten Inversionspunkt und für höhere Temperaturen die oben angegebenen Glieder als genügend angesehen werden, angenommen, daß keiner der folgenden Glieder unerwartet groß ist. Bei $0{,}75\ T_{\text{inv}(\varrho=0)}$ beträgt das oben genannte Glied $^1/_{80}$ von B_∞, so daß wir bei derselben Annahme da auf eine Genauigkeit von 1 Proz. (von B_∞) rechnen können.

Es ist mir nicht gelungen, eine Reihe abzuleiten, die für niedrigere Temperaturen besser geeignet ist.

Gleich wie für die Dipolmoleküle, so fehlt auch für die Quadrupolmoleküle das Glied mit T^{-1} in der Reihe für B. Während aber bei den Dipolen alle ungeraden Potenzen von T^{-1} fehlen, treten bei den Quadrupolen die höheren ungeraden Potenzen auf, obgleich der Koeffizient von T^{-3} noch relativ klein ist[1]).

Oberhalb $3\ T_{\text{inv}(\varrho=0)}$ sind mit einer Genauigkeit von $^1/_{1000}$, oberhalb $1{,}2\ T_{\text{inv}(\varrho=0)}$ mit einer Genauigkeit von $^1/_{100}$, die zwei ersten Terme von (25) genügend. Die Temperaturabhängigkeit von B entspricht dann der Annahme, daß in der van der Waalsschen Gleichung b unabhängig von T, und a proportional T^{-1} ist. Letztere Annahme wurde bereits von Clausius gemacht mit Rücksicht auf die Dampfspannungen von Kohlensäure. Eine Beziehung, welche übereinstimmt mit

$$B = B_\infty\left(1 + \frac{b_2}{T^2}\right) \quad (26)$$

(mit einem negativen Wert von b_2), wurde auch von D. Berthelot[2]) geeignet gefunden, um die Kompressibilität bei nahezu normalen Dichten darzustellen. In diesen Untersuchungen wurde die angenäherte Gültigkeit jener Beziehung bis zu viel niedrigeren Temperaturen ausgedehnt als die oben angedeuteten. Es wird sich im nächsten

1) In Leiden. Suppl. Nr. 39b, Amsterdam Zittingsversl. Okt. 1915 wurden die allgemeinen Bedingungen angegeben, unter welchen das Glied mit T^{-1}, oder auch höhere ungerade Potenzen von T^{-1}, in B verschwinden.

2) D. Berthelot, Trav. et Mém., Bur. Internat. des Poids et Mesures, t. 13 (1907).

Paragraphen ergeben, daß tatsächlich Gl. (25) mit einer Gleichung von der Form (26) übereinstimmt bis zu bedeutend niedrigeren Temperaturen als oben angegeben wurde.

§ 6. Vergleich der für Dipol- und für Quadrupolmoleküle erhaltenen Formeln.

Zwecks dieses Vergleichs werden wir in den Formeln für B die Temperaturen ausdrücken in einer für jedes Gas spezifischen Reduktionstemperatur[1]) als Einheit. Nach dem, was in § 5 gesagt wurde über das Gebiet, in dem Gl. (25) verwendet werden kann, ist die Inversionstemperatur des Joule-Kelvin-Effektes bei kleinen Dichten für diesen Zweck geeignet. Diese Temperatur wird gefunden aus der Beziehung

$$B - T\frac{dB}{dT} = 0$$

oder

$$B + hv\frac{dB}{d(hv)} = 0.$$

Gl. (25) bzw. Gl. (11) geben

für Quadrupole:

$$hv_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)} = 0{,}576,$$

für Dipole:

$$hv_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)} = 0{,}969.$$

Schreiben wir $\frac{T}{T_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)}} = t_{(\mathrm{inv})}$, so erhalten wir weiter:

für Quadrupole:

$$\left.\begin{array}{l} B = B_\infty\{1 - 0{,}3539\, t_{(\mathrm{inv})}^{-2} + 0{,}03327\, t_{(\mathrm{inv})}^{-3} - \\ \quad - 0{,}05215\, t_{(\mathrm{inv})}^{-4} + 0{,}03964\, t_{(\mathrm{inv})}^{-5} - \\ \quad - 0{,}00862\, t_{(\mathrm{inv})}^{-6} + 0{,}00285\, t_{(\mathrm{inv})}^{-7} - \\ \quad - 0{,}00123\, t_{(\mathrm{inv})}^{-8} \ldots\ldots\}, \end{array}\right\} \quad (27)$$

für Dipole:

$$\left.\begin{array}{l} B = B_\infty\{1 - 0{,}3130\, t_{(\mathrm{inv})}^{-2} - 0{,}01175\, t_{(\mathrm{inv})}^{-4} - \\ \quad - 0{,}00044\, t_{(\mathrm{inv})}^{-6} \ldots\ldots\}. \end{array}\right\} \quad (28)$$

Die Tabelle I enthält einige Zahlen, berechnet aus Gl. (27) und (28).

Tabelle I.

$\frac{T}{T_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)}}$	$\frac{B}{B_\infty}$			
	Quadrupole	Dipole	van der Waals	Clausius-Berthelot
0,75	0,413	0,404	0,333	0,407
1	0,660	0,675	0,5	0,667
1,5	0,847	0,859	0,667	0,852
2	0,914	0,921	0,75	0,917
3	0,961	0,965	0,833	0,963
4	0,978	0,980	0,875	0,979

1) Vgl. H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung. Math. Enz. V. 10, § 28a.

Die Tabelle gibt auch einige Zahlen, berechnet aus der Gleichung

$$B = B_\infty\{1 - 0{,}5\, t_{(\mathrm{inv})}^{-1}\}, \quad (29)$$

welche aus der van der Waalsschen Gleichung mit konstanten a und b folgt, und ebenso einige berechnet aus

$$B = B_\infty\{1 - \tfrac{1}{3}\, t_{(\mathrm{inv})}^{-2}\}, \quad (30)$$

welche aus Clausius' und Berthelots Annahme, das van der Waalssche a sei proportional T^{-1}, erhalten wird.

Wie aus Tabelle I hervorgeht, ist im hier betrachteten Temperaturgebiet der Unterschied zwischen den Werten von B für Quadrupole und für Dipole gering, und zwar oberhalb 0,75 $T_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)}$ kleiner als 1 Proz. von B_∞, oder 2,3 Proz. von B. Im betrachteten Gebiet von Temperatur und Dichte werden also die Zustandsgleichungen für Dipol- und für Quadrupolgase schwer voneinander unterschieden werden können.

Weiter ergibt sich aus Tabelle I, daß die Werte von B für Quadrupole sowohl wie für Dipole sehr wenig abweichen von Gl. (30), und zwar über das ganze Gebiet oberhalb 0,75 $T_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)}$ weniger als 0,6 Proz. des Wertes von B_∞, und weniger als 1,5 Proz. des Wertes von B.

§ 7. Vergleich mit der Erfahrung. Wasserstoff.

Werte von B für ein zweiatomiges Gas im Temperaturgebiet, für welches die in (25) und (27) angegebenen Glieder genügen, sind bis jetzt nur bekannt für Wasserstoff. Weil, besonders aus der Untersuchung Debyes[1]) betreffs dielektrischer Konstante und Brechungsindex, klar geworden ist, daß die Moleküle der zweiatomigen elementaren Gase kein Dipolmoment besitzen, so werden wir die experimentellen Ergebnisse für Wasserstoff, besonders mit den für Quadrupole abgeleiteten Formeln zu vergleichen haben. Zu gleicher Zeit werden wir aber doch bisweilen die für Dipole abgeleiteten Formeln zum Vergleich mit heranziehen[2]).

Es wurde dazu B/B_{inv} für Wasserstoff als Funktion von $T/T_{\mathrm{inv}\,(\varrho=0)}$ in einem Diagramm dargestellt und mit den aus Gl. (27) bzw. (28) berechneten Werten verglichen. Die Werte von B für Wasserstoff sind für -140^0, -104^0, 0^0 und 100^0 C den Messungen von Kamerlingh Onnes und Braak[3]), für 20^0 C denen von

1) Vgl. P. Debye, diese Zeitschr. 13, 97, 1912; W. C. Mandersloot, Diss. Utrecht 1914, S. 56; N. Bohr, Phil. Mag. (6) 26, 866, 1913.

2) Wir übergehen hier Betrachtungen über einen etwaigen Quanteneinfluß auf die Zustandsgleichung des Wasserstoffs.

3) H. Kamerlingh Onnes und C. Braak, Comm. Leiden No. 100a und b (Nov. 1907).

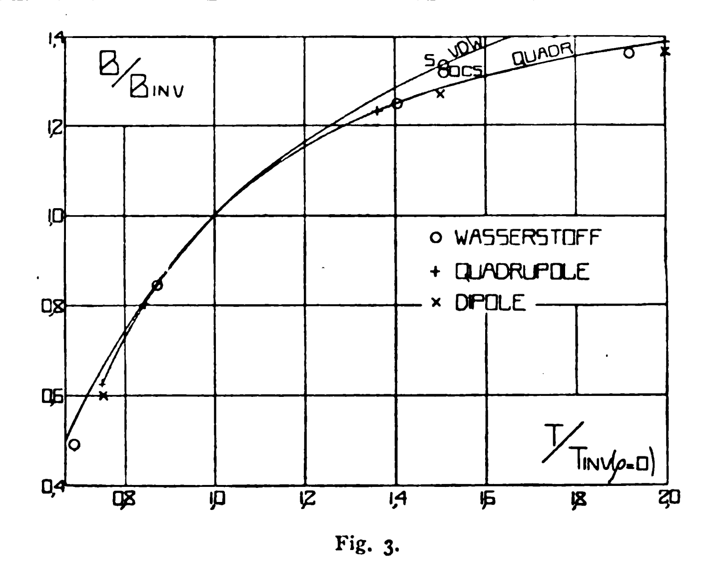


Fig. 3.

Schalkwijk[1]) und von Kamerlingh Onnes, Crommelin und Fräulein Smid[2]) entnommen. Die Temperatur des Inversionspunktes des Joule-Kelvin-Effektes für kleine Dichten (200,6° K) wurde den Berechnungen von J. P. Dalton[3]) entnommen. B_{inv}, der Wert von B für die soeben genannte Temperatur, wurde berechnet aus der in Leiden. Comm. Nr. 109a, § 7 mitgeteilten speziellen reduzierten Zustandsgleichung.

In dieser Weise wurde aber keine genügende Übereinstimmung erreicht, weder mit der Gleichung für Quadrupole, noch mit der für Dipole. Der Wert von B für 100° C weicht ziemlich bedeutend von den berechneten Kurven ab.

Das ist hauptsächlich dem Wert zuzuschreiben, der für $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ angenommen ist. Es zeigt sich, daß die für die Berechnung von $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ verwendete spezielle Zustandsgleichung in diesem Gebiet eine etwas weniger gute Übereinstimmung mit dem Experiment gibt, als in anderen Gebieten, und diese Tatsache hat einen bedeutenden Einfluß auf das für $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ erhaltene Resultat, eine Folge des Umstandes, daß in die Bestimmung von $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ der Wert von dB/dT eingeht.

Es wurde deswegen ein neuer Wert von $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ abgeleitet mit Hilfe einer Gleichung, die in diesem Temperaturgebiet sich gut an das Experiment anschließt. Dafür wurde eine Gleichung von der Form (26) gewählt, und die Konstanten aus den experimentellen Daten abgeleitet. Aus den Resultaten von Kamerlingh Onnes und Braak erhielten wir:

$$T_{\text{inv}\,(\varrho=0)} = 194{,}5, \quad B_{N\text{inv}} = 0{,}000465\,^{1)}.$$

Fig. 3 zeigt, welche Übereinstimmung mittels dieser Werte der Konstanten erhalten wird[2]). Dabei ist zum Vergleich auch die aus der van der Waalsschen Gleichung mit konstanten Koeffizienten folgende Kurve aufgenommen.

Es zeigt sich jetzt, daß für das betrachtete Temperaturgebiet die Werte von B für Wasserstoff sowohl mit der für kugelförmige Quadrupolmoleküle abgeleiteten Gleichung als mit der für kugelförmige Dipolmoleküle in Übereinstimmung gebracht werden können. Aus dem oben angeführten Grunde werden wir aber nur die Übereinstimmung mit der für Quadrupole gültigen Gleichung als wesentlich betrachten.

Aus dem für B_{inv} gefundenen Wert erhalten wir dann für σ[3]):

$$\sigma = 2{,}32 \times 10^{-8} \text{ cm}.$$

Aus $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ folgt dann[4]):

$$v = 1{,}53 \times 10^{-14},$$

1) J. C. Schalkwijk, Diss. Amsterdam 1902, S. 116; auch Comm. Leiden, No. 78, S. 22.

2) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin und Fräulein E. J. Smid, Comm. Leiden, No. 146b (Juni 1915).

3) J. P. Dalton, Leiden. Comm. No. 109a (März 1909).

1) Hierin bedeutet der Index N, daß das Volum in der Zustandsgleichung in das Normalvolum als Einheit ausgedrückt gedacht ist.

2) Die den Messungen von Schalkwijk und von Kamerlingh Onnes, Crommelin und Fräulein Smid entnommenen Werte sind angedeutet mit S, bzw. OCS.

3) Aus $B_{N\text{inv}} = 0{,}000465$, und $B_{\text{inv}}/B_\infty = 0{,}660$ (Tab. I), folgt $B_{N\infty} = 0{,}000705$. $A_{N0°C} = 0{,}99942$ (Comm. Leiden Nr. 100b) gibt dann $B_{\Theta\infty} = 0{,}000705$. $B_{M\infty} = 0{,}000705 \times 22412 = 15{,}80 = \frac{1}{2} N \cdot \frac{4}{3}\pi\sigma^3$. Mit $N = 6{,}06 \times 10^{23}$ nach Millikan ergibt sich dann der im Text gegebene Wert für den Diameter des Moleküls. Für die Bedeutung der Indizes N, Θ und M vgl. H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom. Die Zustandsgleichung Math. Enz. V. 10 (Leiden. Suppl. Nr. 23) Einheiten b.

4) Berechnet aus $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)} = 194{,}5$, $h\nu_{\text{inv}} = 0{,}576$ (§ 6), Gl. (6) und $k = 1{,}37 \times 10^{-16}$.

und weiter aus (13) das Moment des Quadrupols:

$$\mu_2 = 2{,}03 \times 10^{-26} \text{ [elektrost. Einh.} \times \text{cm}^2\text{]}.$$

Daß die elektrischen Ladungen im Wasserstoffmolekül derart angeordnet sind, daß sich dieser Wert für das Quadrupolmoment ergibt, ist als sehr gut möglich zu betrachten, wie man an einem einfachen Beispiel leicht einsieht[1]).

§ 8. Weiterführung der Rechnung für Quadrupole[2]). Wie in § 5 bemerkt wurde, geben die Rechnungen von § 4 den Wert von B bis $\frac{3}{4}\ T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ herab mit einer Genauigkeit von 1 Proz. (von B_∞). Die Rechnungen sind jetzt weitergeführt, so daß die Reihe für B mit der genannten Genauigkeit verwendet werden kann bis zu $\frac{1}{2}\ T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ herab, d. h. für Wasserstoff bis zu etwa $96^0\ K$. Dieses umfaßt das ganze Gebiet oberhalb des Boyle-Punktes.

Indem wir der Gleichung (25) die neuberechneten Terme hinzufügen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} B = \tfrac{1}{2} n \cdot \tfrac{4}{3}\pi\sigma^3 \{ & 1 - 1{,}0667\,(hv)^2 + \\ & + 0{,}1741\,(hv)^3 - 0{,}4738\,(hv)^4 + \\ & + 0{,}6252\,(hv)^5 - 0{,}2360\,(hv)^6 + \\ & + 0{,}1355\,(hv)^7 - 0{,}1019\,(hv)^8 + \\ & + 0{,}05934\,(hv)^9 - 0{,}03579\,(hv)^{10} + \\ & + 0{,}01910\,(hv)^{11} - 0{,}00993\,(hv)^{12} + \\ & + [0{,}0048\,(hv)^{13} - 0{,}0022\,(hv)^{14}] \ldots \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Die Koeffizienten bis zu dem von $(hv)^{12}$ sind mit den Gleichungen von § 4 berechnet worden. Dagegen sind diejenigen von $(hv)^{13}$ und $(hv)^{14}$ nur vorläufige Werte, und deswegen zwischen eckige Klammern gesetzt. Tatsächlich fanden wir bei der Berechnung der vorhergehenden Terme, daß das Verhältnis des ganzen Koeffizienten zur Summe der zwei größten der Glieder, aus denen er nach Gleichung (18) gebildet ist, sich nur sehr wenig ändert. Für die Koeffizienten von $(hv)^9$ bis $(hv)^{12}$ beträgt dieses Verhältnis: 1,287, 1,289, 1,275, 1,277. Für die Koeffizienten von $(hv)^{13}$ und $(hv)^{14}$ nahmen wir darum ein Verhältnis von 1,275 an. Die Berechnung der Summe der zwei größten Glieder, welche durch die zwei ersten Glieder von Gleichung (18) geliefert werden, kann bedeutend abgekürzt werden durch Anwendung der Formel

$$[A_1^{n-2}\ B_1^2] = \frac{1}{6(n-1)}[A_1^n], \qquad (32)$$

während $[A_1^n]$ aus $[A_1^{n-1}]$ berechnet wird mit Hilfe der Gleichung (22).

Indem wir die neu berechneten Glieder hinzufügen geht Gleichung (27) über in:

$$\begin{aligned} B = B_\infty \{ & 1 - 0{,}3539\, t_{(\text{inv})}^{-2} + 0{,}03327\, t_{(\text{inv})}^{-3} - \\ & - 0{,}05215\, t_{(\text{inv})}^{-4} + 0{,}03964\, t_{(\text{inv})}^{-5} - 0{,}00862\, t_{(\text{inv})}^{-6} + \\ & + 0{,}00285\, t_{(\text{inv})}^{-7} - 0{,}00123\, t_{(\text{inv})}^{-8} + 0{,}000414\, t_{(\text{inv})}^{-9} - \\ & - 0{,}000147\, t_{(\text{inv})}^{-10} + 0{,}0000442\, t_{(\text{inv})}^{-11} - 0{,}0000132 \\ & t_{(\text{inv})}^{-12} + [0{,}0000037\, t_{(\text{inv})}^{-13} - 0{,}0000010\, t_{(\text{inv})}^{-14}] \ldots \} \end{aligned} \quad (33)$$

Das letzte Glied in Gleichung (33) wird $= {}^1/_{50}\ B_\infty$ für $t_{(\text{inv})} = 0{,}49$. Bis zu dieser Temperatur können wir die Genauigkeit auf 1 Proz. von B_∞ veranschlagen.

Zur Tabelle I können wir jetzt die folgenden Zahlen hinzufügen:

Tabelle Ia.

$\frac{T}{T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}}$	B/B_∞			
	Quadrupole	Dipole	v. d. Waals	Clausius-Berthelot
0,5	−0,105	−0,471	0,000	−0,333
0,6	+0,147	+0,011⁵	+0,167	+0,074

Zur Berechnung von B/B_∞ für Dipole wurde der Gleichung (28) das Glied $-0{,}0000123\, t_{(\text{inv})}^{-8}$ zwischen den {} hinzugefügt.

Es ergibt sich also, daß die Werte von B/B_∞ für Quadrupole und für Dipole unterhalb $0{,}75\ T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ mehr und mehr zu divergieren anfangen, und zwar in der Richtung, daß die Dipole eine größere Attraktion aufweisen. Die nach Clausius-Berthelot berechneten Werte liegen noch immer zwischen jenen.

§ 9. Weitere Prüfung an Wasserstoff.

In Fig. 4 sind die experimentellen Daten für B von Wasserstoff (vgl. § 7) verglichen mit den für Quadrupole und für Dipole berechneten Werten. Wie in Fig. 3 sind die verschiedenen Kurven im Inversionspunkt des Joule-Kelvin-Effektes für kleine Dichten zum Anschluß gebracht.

Es zeigt sich, daß bei den niedrigeren Temperaturen die experimentellen Werte von B zwischen der Kurve für Quadrupole und der für Dipole liegen[1]). Dieses ist (vgl. § 8) auch der Fall mit der Kurve, die aus der Clausius-Berthelotschen Annahme folgt (gestrichene

1) Wenn man annimmt, der Quadrupol bestehe aus zwei positiven Ladungen e im Abstand d voneinander, und einer negativen Ladung $-2e$ in der Mitte zwischen denselben, so daß $\mu_2 = {}^1/_2\, e d^2$, und man setzt $e =$ der Ladung eines Elektrons $= 4{,}77 \times 10^{-10}$ (Millikan), so findet man $d = 0{,}92 \times 10^{-8}$ cm. Vgl. weiter, besonders auch für das Bohr-Debyesche Wasserstoffmolekül, § 11.

2) Die §§ 8—10 wurden von Frl. C. van Leeuwen und mir bearbeitet.

1) Von den von Kamerlingh Onnes und Braak gegebenen Werten von B bildet der Wert für $t = -139{,}85^0$ ($t_{(\text{inv})} = 0{,}865$) die einzige Ausnahme von dieser Regel.

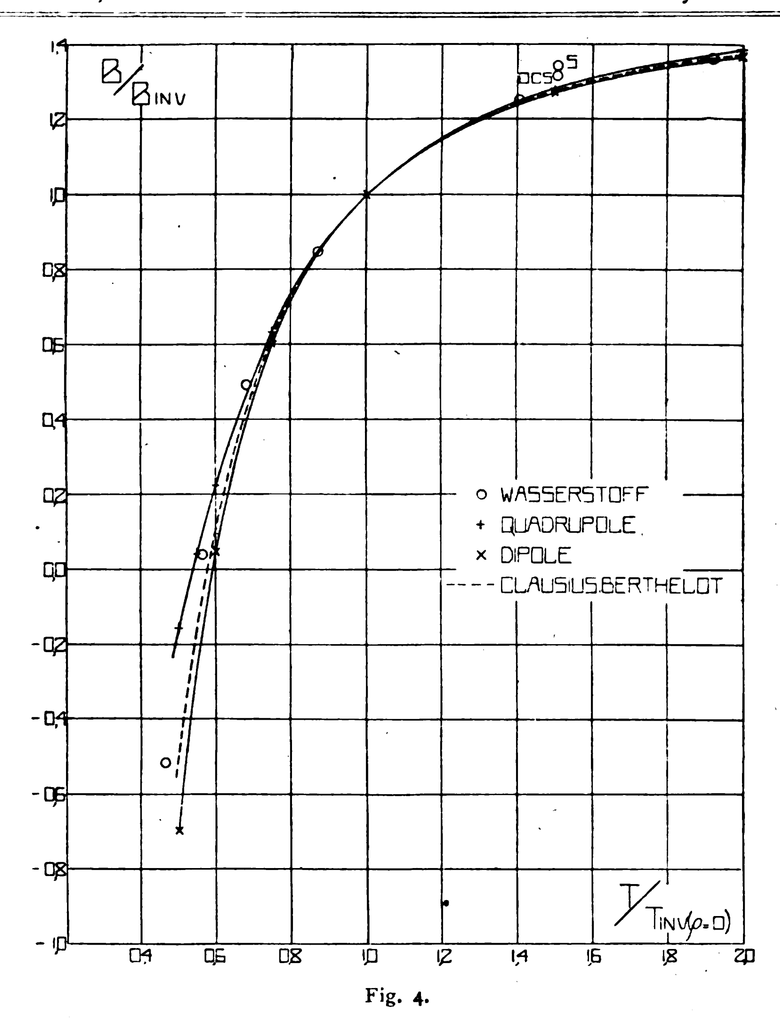


Fig. 4.

Kurve in Fig. 4). Nach steigenden Werten von B/B_{inv} bei gleichem $T/T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ ist die Reihenfolge: Dipole, Clausius-Berthelot, Wasserstoff, Quadrupole.

§ 10. Der Boyle-Punkt.

Für das Verhältnis der Temperatur T_B des Boyle-Punktes ($B = 0$) zur Temperatur des Inversionspunktes des Joule-Kelvin-Effektes bei kleinen Dichten erhalten wir:

	$T_B/T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$
van der Waals (a und b unabhängig von T)	0,5
Quadrupole	0,539
Wasserstoff[1])	0,552
Clausius-Berthelot	0,577
Dipole	0,592.

In diesen Zahlen erscheint dieselbe Reihenfolge als in § 9.

1) $T_B = 107{,}4$ nach Kamerlingh Onnes und Braak, Comm. Leiden Nr. 100 a § 22. Für $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ vgl. § 7.

Die Quadrupolmomente der Sauerstoff- und der Stickstoffmoleküle.

§ 11. In § 7 wurde gezeigt, daß man von dem zweiten Virialkoeffizienten der Zustandsgleichung für Wasserstoff, im Temperaturgebiet zwischen $+100^0$ C und -100^0 C (nach § 9 noch bis zu niedrigeren Temperaturen), Rechenschaft geben kann durch die Annahme, daß die Moleküle wie elektrische Quadrupole mit konstantem Quadrupolmoment[1]) aufeinander wirken, falls man die Abstoßungen, welche bei kleinen Abständen vorherrschend werden, ersetzen darf durch Stoßkräfte, welche auftreten würden, wenn die Moleküle wie harte Kugeln mit bestimmtem Radius gegeneinanderstoßen würden. Dabei wurde auch das Quadrupolmoment des Wasserstoffmoleküls bestimmt, wobei es sich zeigte, daß eine solche gegenseitige Stellung der zwei Kerne und der zwei Elektronen, aus denen das H_2-Molekül aufgebaut ist, daß dieses das geforderte Quadrupolmoment besitzen würde, sehr wohl möglich

1) In §§ 15—18 werden wir sehen, inwieweit die Beweglichkeit der Elektronen im Molekül, welche im Wert der dielektrischen Konstante zum Ausdruck kommt, von Einfluß ist auf den zweiten Virialkoeffizienten.

Tabelle II.

Sauerstoff			Stickstoff		
T	$B_\Theta \times 10^3$		T	$B_\Theta \times 10^3$	
472,6	+ 0,273	Amagat	472,5	+ 0,690	Amagat
372,6	— 0,088	„	372,45	+ 0,324	„
293,1	— 0,848	Onnes en Hyndman	290,6	— 0,298	Leduc 1910
288,7	— 0,694	„	289,1	— 0,234	Amagat
288,7	— 0,739	Amagat	288,0	— 0,316	Rayleigh
288,1	— 0,645	Leduc 1910	273,1	— 0,372	Amagat
284,3	— 0,791	Rayleigh			
273,1	— 0,812	Onnes en Hyndman			
273,1	— 0,928	Amagat			

ist. Damit war wahrscheinlich gemacht, und das war vorläufig das Hauptziel jener Betrachtungen, daß die molekulare Anziehung, wenigstens im betrachteten Gebiet von Dichten, auch für homopolare Moleküle erklärt werden kann aus den elektrischen Kräften, welche ausgehen von den Kernen und Elektronen, aus denen das Molekül aufgebaut ist.

Obgleich es auf der Hand lag, weiter das von der Zustandsgleichung geforderte Quadrupolmoment zu vergleichen mit dem von Bohr-Debye für das Wasserstoffmolekül aufgestellte Modell, wurde dieses unterlassen in Anbetracht der Schwierigkeiten, besonders auch was die magnetischen Eigenschaften betrifft, welche diesem Modell ankleben. Inzwischen ist von Burgers[1]) das Quadrupolmoment des Bohr-Debyeschen Wasserstoffmoleküls berechnet worden. Er fand eine merkwürdige Übereinstimmung mit dem in § 7 abgeleiteten Wert: aus der Zustandsgleichung[2]):

$$2{,}03 \times 10^{-26} \text{ (e.-st. Einh. cm}^2\text{)}$$

nach Bohr-Debye:

$$2{,}05 \times 10^{-26} \text{ („ „ „ „)}.$$

Wie günstig dieses Resultat auch für das Bohr-Debyesche Modell ausfällt, scheint es doch wahrscheinlich zu sein, daß die stetig anwachsenden Schwierigkeiten, die sich gegen jenes Modell erheben[3]), uns zwingen werden, uns nach einem anderen Modell umzusehen. Dennoch wird die Berechnung des Quadrupolmoments ihr Interesse behalten, weil sie, mit Vorbehalt wegen der Unsicherheit, welche die vereinfachende Annahme der Stoßkräfte mit sich bringt, eine wichtige Zahl liefert, mit dem bei der Konstruktion des definitiven Modells Rechnung getragen werden muß. In diesem Sinne scheint es wichtig, auch die Quadrupolmomente anderer Gase zu berechnen. Im nächsten Paragraph wird dieses für Sauerstoff und Stickstoff gemacht.

1) J. M. Burgers, Diss. Leiden, S. 186, 1918.

2) Dieser Wert wird noch eine kleine Änderung erfahren, wenn man Rechnung hält mit dem Umstande, daß die Moleküle in einanders Kraftfeld polarisiert werden (vgl. § 18).

3) Vgl. Frl. H. J. van Leeuwen, diese Zeitschr. **17**, 196, 1916. J. M. Burgers, Versl. K. Ak. Amsterdam **25**, 404, 1916. Frl. G. Laski, diese Zeitschr. **20**, 550, 1919. W. Lenz, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 632, 1919.

§ 12. Für die zweiten Virialkoeffizienten von Sauerstoff und Stickstoff verfügen wir im Temperaturgebiet, für das der zweite Virialkoeffizient für Quadrupolmoleküle berechnet ist, über die folgenden Daten[1]). (Siehe Tabelle II.)

Diese Daten erlauben nicht zu kontrollieren, ob der Verlauf von B mit der Temperatur mit dem für kugelförmige Quadrupolmoleküle berechneten übereinstimmt. Nehmen wir aber an, daß dieses für das betrachtete Temperaturgebiet genügend genau der Fall ist[2]), so lassen sie zu, das Quadrupolmoment sowie den Diameter der kugelförmig gedachten Moleküle zu bestimmen.

Wir verwenden dazu die in §§ 6 und 8 für kugelförmige Quadrupolmoleküle gegebenen Werte von B/B_∞ für verschiedene Werte von $T/T_{\text{inv}\,(\varrho\,=\,0)}$. Durch Anwendung der Methode der logarithmischen Diagramme[3]) erhalten wir: für Sauerstoff:

für die Inversionstemperatur des Joule-Kelvin-Effekts bei kleinen Dichten:

$$T_{\text{inv}\,(\varrho\,=\,0)} = 723 \qquad (450^0\ \text{C}),$$

für die potentielle Energie der Moleküle bei Berührung (mit den Quadrupolachsen senkrecht zueinander und senkrecht zur Verbindungslinie der Mittelpunkte):

$$v = 5{,}71 \times 10^{-14},$$

1) Ich entnehme diese Zahlen Rechnungen, ausgeführt von Herrn M. Daniëls. Dabei ist für die Beobachtungen von Amagat ausgegangen von den durch Kamerlingh-Onnes im Leiden. Comm. Nr. 71 publizierten Virialkoeffizienten. Der Index Θ deutet an, daß in der Zustandsgleichung v auf das theoretische Normalvolum als Einheit bezogen ist. Vgl. H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung. Math. Enz. V. 10, Einheiten b.

2) Bei Wasserstoff treten in diesem Gebiet schon Abweichungen auf, vgl. § 9.

3) Vgl. H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung, Math. Enz. V. 10 § 33, und W. H. Keesom, Leiden. Comm. Nr. 25.

für den Diameter des Moleküls:

$$\sigma = 2{,}65 \times 10^{-8}$$

und für das Quadrupolmoment:

$$\mu_2 = 3{,}55 \times 10^{-26} \text{ [e.-st. Einh.} \times \text{cm}^2].$$

Für Stickstoff:

$$T_{\text{inv}\,(\varrho\,=\,0)} = 604 \qquad (331^0\ \text{C})$$
$$v = 4{,}77 \times 10^{-14},$$
$$\sigma = 2{,}98 \times 10^{-8},$$
$$\mu_2 = 3{,}86 \times 10^{-26} \text{ [e.-st. Einh.} \times \text{cm}^2].$$

§ 13. Zur näheren Beurteilung der Bedeutung des für Sauerstoff für das Quadrupolmoment erhaltenen Wertes haben wir uns noch zu fragen, ob vielleicht die magnetische Anziehung zwischen den paramagnetischen Sauerstoffmolekülen einen merklichen Beitrag zu B liefert. In diesem Falle würde doch das Quadrupolmoment kleiner sein müssen, als oben mit Vernachlässigung davon berechnet wurde. Eine nähere Rechnung lehrt aber, daß das nicht der Fall ist.

Nach Weiß und Piccard[1]) würde n. l. Sauerstoff 14 Magnetonen pro Molekül besitzen, was für das magnetische Moment des Moleküls ergibt:

$$\mu = 2{,}6 \times 10^{-20}.$$

Im Leiden. Comm. Suppl. Nr. 25 § 4 wurde aber berechnet, daß ein Dipolmoment

$$\mu = 9{,}47 \times 10^{-19}$$

nötig sein würde, um daraus die molekulare Anziehung zu erklären. Tatsächlich ist das magnetische Moment nur $^1/_{39}$ davon. Wenn man in Betracht zieht, daß die statistisch übrigbleibende molekulare Attraktion proportional μ^4 ist, so ergibt sich, daß das magnetische Moment einen hier nicht in Betracht kommenden Beitrag zur molekularen Attraktion gibt.

§ 14. Es sei noch einmal ausdrücklich hervorgehoben, daß die Rechnungen sowohl von § 12 wie von § 7 ausgehen von der Voraussetzung, daß die Moleküle gegeneinanderstoßen, als wären sie harte Kugeln mit konstantem Diameter. Wenn dieses nicht der Fall ist und das Verhalten beim Stoß einem Wert von σ entsprechen würde, der von der Temperatur abhängig ist, so würde dieses sich in B fühlen lassen in der Form von Gliedern, die ebenfalls von T abhängig sind. Man würde dann also die Temperaturabhängigkeit von B nicht mehr, wie hier gemacht ist, ganz auf Rechnung der molekularen Attraktion stellen dürfen. Es wäre möglich, daß dadurch die Werte der Quadrupolmomente nicht unbedeutend abgeändert werden müssen.

1) P. Weiß und A. Piccard, C. R. 155, 1234, 1912.

§ 15. Debyes Ansatz zur Erklärung der van der Waalsschen Kohäsionskräfte.

Debye hat in der schon in § 1 genannten Arbeit darauf hingewiesen, daß die van der Waalsschen Kohäsionskräfte dadurch erklärt werden könnten, daß ein Molekül im Feld eines Nachbarmoleküls ein induziertes Dipolmoment erlangt und dann auf Grund dieses Dipolmoments vom induzierenden Molekül angezogen wird. Mehr speziell betrachtete Debye Gase, deren Moleküle kein eigenes Dipolmoment besitzen, und nahm er an, daß das Feld dieser Moleküle in erster Näherung als das eines Quadrupols betrachtet werden kann. Für eine erste Orientierung wurde dabei abgesehen von der mittleren Anziehung, welche jene Moleküle schon wegen ihrer eigenen Quadrupolmomente aufeinander dadurch ausüben, daß zwei in einanders Nähe kommende Moleküle einander derart zu richten bestreben, daß die Fälle, in denen sie einander anziehen werden, häufiger sind als die, in denen sie einander abstoßen. Tatsächlich wird das, wie auch Debye schon bemerkt, erlaubt sein bei genügend hoher Temperatur, weil da diese mittlere Anziehung verschwindet wegen der Wärmebewegung, die das gegenseitige Richten der Moleküle verhindert.

Dagegen wurde in den vorigen Paragraphen gezeigt, daß die molekulare Attraktion in Wasserstoff, jedenfalls insoweit sie in den zweiten Virialkoeffizienten eingeht, erklärt werden kann aus dem Umstand, daß die Moleküle ein Quadrupolmoment besitzen, und wurde da von einem Beitrag zu der Attraktion, der eine Folge von der Beweglichkeit der Elektronen im Molekül sein würde, abgesehen.

In Wirklichkeit wird man, wie Debye richtig bemerkt, zur Berechnung der molekularen Anziehung, sowohl die Anziehung, welche die betrachteten Moleküle wegen ihrer eigenen Quadrupolmomente aufeinander ausüben, ins Auge fassen müssen, wie jene, welche besonders von Debye betrachtet wurde und die eine Folge ist der Polarisierbarkeit der Moleküle in einem elektrischen Felde.

Wir werden uns in dieser Mitteilung mehr speziell mit dem Einfluß der molekularen Anziehung auf die Zustandsgleichung beschäftigen, und uns dabei auf den zweiten Virialkoeffizienten beschränken.

Man kann sich nun die Frage stellen: welche der beiden genannten Beiträge zur molekularen Attraktion hat bei den Temperaturen, bei welchen Messungen über die Zustandsgleichung gemacht worden sind, den größten Einfluß auf den zweiten Virialkoeffizienten?

§ 16. Vorläufige Orientierung. Der

Kürze halber werden wir den Beitrag zur Attraktion, welcher den eigenen Quadrupolmomenten zu verdanken ist, mit dem Namen „Quadrupolattraktion“ andeuten, den Beitrag, welcher von den Kräften herrührt, die von den Quadrupolen auf die in den Molekülen induzierten Dipole ausgeübt werden, mit dem Namen „induzierte Attraktion“. Ebenso die Glieder im zweiten Virialkoeffizienten, welche der Quadrupolattraktion zu verdanken sind, „Quadrupolglieder“, jene welche von der induzierten Attraktion herrühren „induzierte Glieder“.

Zwischen diesen beiden besteht dieser wichtige Unterschied, daß die Quadrupolglieder bei hohen Temperaturen proportional T^{-2} werden, während dagegen die induzierten Glieder in diesem Gebiet proportional T^{-1} werden. Man kann dieses auch so ausdrücken, daß die van der Waalsschen Attraktionskräfte beim erstgenannten Ansatz bei hohen Temperaturen proportional T^{-1}, beim letztgenannten Ansatz dagegen konstant werden. Nun hat sich schon in § 7 (vgl. Fig. 3, und auch § 9) ergeben, daß der zweite Virialkoeffizient vielmehr ein Verhalten zeigt, daß der Annahme von Quadrupolattraktion entspricht, und nicht mit der Annahme übereinstimmt, daß das van der Waalssche a konstant sei, wie es doch für hohe Temperaturen durch die induzierte Attraktion verlangt werden würde. Dieses weist schon darauf, daß man erwarten muß, daß die Quadrupolterme, jedenfalls bei Wasserstoff, die Überhand haben.

Dieser Schluß wird unterstützt, wenn man die Werte, welche Debye für das Quadrupol bei alleiniger Annahme induzierter Attraktion ableitet, vergleicht mit dem in § 7 gefundenen Quadrupolmoment. Debye findet (l. c. Tab. I) für Wasserstoff $3{,}20 \times 10^{-26}$, während nach § 7 ein Quadrupolmoment von $2{,}03 \times 10^{-26}$ schon eine Quadrupolattraktion gibt, die genügt, um die experimentell gefundene Zustandsgleichung zu erklären. Da nun der erste der Quadrupolterme proportional der vierten Potenz des Quadrupolmoments ist, so würden also die Debyeschen Quadrupole eine viel zu große Quadrupolattraktion liefern.

Man kommt zu dem selben Schluß für Sauerstoff und Stickstoff, für welche Gase die Quadrupolmomente bei Vernachlässigung der induzierten Attraktion in § 12 berechnet wurden:

	Debye:	§ 12:
O_2:	$11{,}2 \times 10^{-26}$,	$3{,}55 \times 10^{-26}$
N_2	13,3 „	3,86 „ .

Zwingend wird der Schluß, daß die Quadrupolattraktion für die genannten Gase die Überhand hat über die induzierte Attraktion, falls man bei der Berechnung des zweiten Virialkoeffizienten auch die induzierte Anziehung in Rechnung zieht. Dieses geschieht im nächsten Paragraphen.

§ 17. Der zweite Virialkoeffizient für kugelförmige polarisierbare Quadrupolmoleküle.

Wir nehmen an, daß der Polarisationszustand der Moleküle (Verschiebung der Elektronen aus ihren Gleichgewichtszuständen oder -bahnen) in jedem Augenblick dem Felde entspricht, in dem sich das Molekül dann befindet. Weiter, daß das Molekül isotrop polarisierbar ist, daß also das induzierte Dipolmoment die Richtung des elektrischen Feldes E hat, und gleich ist

$$\mu_{1i} = \alpha E\,. \tag{34}$$

Es deutet hier der Index i an, daß wir es mit einem Dipolmoment zu tun haben, während der Index i hier und weiter immer andeuten wird, daß die betrachtete Größe von der elektrostatischen Induktion herrührt.

Die Energie des induzierten Dipols im Felde E beträgt (vgl. Debye l. c.).

$$-\tfrac{1}{2}\alpha E^2. \tag{35}$$

Befindet sich der induzierte Dipol in einem Punkte P des Feldes eines achsensymmetrischen Quadrupols A mit einem Quadrupolmoment μ_2 (Fig. 5) derart, daß PA den Winkel Θ mit der

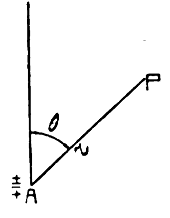


Fig. 5.

Achse des Quadrupols macht, so findet man für die Energie des induzierten Dipols:

$$-\frac{9}{8}\frac{\alpha\mu_2^2}{r^8}\left\{\sin^4\Theta + 4\cos^4\Theta\right\}. \tag{36}$$

Die Berechnung des zweiten Virialkoeffizienten schließt sich jetzt ganz der Rechnung in § 4 an. Die Energie des durch r, Θ_1, Θ_2, und φ (Fig. 1) gekennzeichneten Molekülpaares wird jetzt dadurch erhalten, daß man dem dort gegebenen Quadrupolterm

$$u_q = \frac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{r^5}\Big\{1 - 5\cos^2\Theta_1 - 5\cos^2\Theta_2 - 15\cos^2\Theta_1\cos^2\Theta_2 + 2(4\cos\Theta_1\cos\Theta_2 + \sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\varphi)^2\Big\} \tag{37}$$

den induzierten Term hinzufügt:

$$u_i = -\frac{9}{8}\frac{\alpha\mu_2^2}{r^8}\left\{\sin^4\Theta_1 + \sin^4\Theta_2 + 4\cos^4\Theta_1 + \right.$$

$$\left. + 4\cos^4\Theta_2\right\}. \qquad (38)$$

Hierzu wäre noch ein Term zu addieren, herrührend von den Kräften, welche die beiden induzierten Dipole aufeinander ausüben. Dieser Term würde α^2 enthalten. Wir werden aber vorläufig Terme mit α^2 fortlassen.

Wir entnehmen § 4 die Bezeichnung:

$$v = \frac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{\sigma^5}, \qquad (39)$$

indem wir der Kürze halber v schreiben statt v_q für die potentielle Energie des Molekülpaares bei Berührung bei ebendort genannten Richtungen der Quadrupolachsen, und bei alleiniger Berücksichtigung der Quadrupolattraktion.

Weiter

$$u_q = v\frac{\sigma^5}{r^5}\Psi, \qquad (40)$$

wo Ψ durch (14) und (15) gegeben ist.

Wir führen jetzt ein

$$\Psi = \sin^4\Theta_1 + \sin^4\Theta_2 + 4\cos^4\Theta_1 + 4\cos^4\Theta_2. \quad (41)$$

Dann ist

$$u_i = -\frac{3}{2}v\frac{\alpha\sigma^5}{r^8}\Psi. \qquad (42)$$

Der zweite Virialkoeffizient wird jetzt gegeben durch Gleichung (5) mit

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_\sigma^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}(e^{-hu_q-hu_i}-1)$$

$$r^2\sin\Theta_1\sin\Theta_2\,dr\,d\Theta_1\,d\Theta_2\,d\varphi. \qquad (43)$$

Entwickeln wir nach steigenden Potenzen von h, und lassen wir dabei Terme mit α^2 usw. fort, so fällt P auseinander in

$$P = P_q + P_i, \qquad (44)$$

wo P_q durch Gleichung (16) und schließlich Gleichung (24) gegeben ist, und nach Integration nach r:

$$P_i = \frac{3}{20}\alpha hv\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\Psi\left\{1 - \frac{1}{2!}hv\Psi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}(hv)^2\Psi^2\ldots\right\}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\,d\Theta_1\,d\Theta_2\,d\varphi. \qquad (45)$$

Die Integration weiter ausführend, bekommt man:

$$P_i = \frac{16}{5}\pi\sigma^3\cdot\frac{\alpha}{\sigma^3}\cdot hv\left\{1 + \frac{16}{15}(hv)^2\ldots\right\}\cdot \quad (46)$$

und dann[1])

$$B_i = -\frac{1}{2}n\cdot\frac{4}{3}\pi\sigma^3\cdot\frac{12}{5}\frac{\alpha}{\sigma^3}hv\left\{1 + \frac{16}{15}(hv)^2\ldots\right\}. \qquad (47)$$

Addieren wir diese Terme zu B_q nach Gleichung (25), so erhalten wir schließlich:

$$B = \frac{1}{2}n\cdot\frac{4}{3}\pi\sigma^3\left\{1 - 1{,}0667(hv)^2 + \right. \qquad (48)$$

$$\left. + 0{,}1741(hv)^3\ldots\ldots - 2{,}4\frac{\alpha}{\sigma^3}hv[1 + 1{,}067(hv)^2\ldots]\right\}.$$

§ 28. Schlußbemerkungen.

An erster Stelle bemerken wir, daß für die strenge Gültigkeit des Gesetzes übereinstimmender Zustände erforderlich wäre, daß für verschiedene Gase $\frac{\alpha}{\sigma^3}$ denselben Wert hat.

Wir entnehmen α, Debye folgend, der molekularen Refraktion (P_0) für $\lambda = \infty$, den Wert von σ für H_2 § 7, für O_2 und N_2 § 11. Wir erhalten dann folgendes:

Tabelle III.

	P_0	σ	$\frac{\alpha}{\sigma^3}$
Wasserstoff	2,03	$2{,}32 \times 10^{-8}$	0,0640
Sauerstoff	3,98	2,65 „	0,0842
Stickstoff	4,34	2,98 „	0,0646

Für Wasserstoff wird dann:

$$B = \tfrac{1}{2}n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\sigma^3\{1 - 1{,}0667(hv)^2 + 0{,}1741(hv)^3\ldots\ldots$$
$$- 0{,}1536\,hv - 0{,}1638(hv)^3\ldots\ldots\}, \qquad (49)$$

während die letzte Reihe von Termen für Stickstoff nur unbedeutend, für Sauerstoff etwas mehr abweicht.

Da die Werte von σ, welche hier verwendet sind, Rechnungen entnommen wurden, bei denen nicht auf die induzierte Attraktion geachtet ist, so ist dieser Ausdruck für B nur als eine erste Stufe in der Reihe sukzessiver Näherungen anzusehen. Wir würden jetzt wie in § 6 auf Grund von Gleichung (49) den Wert von hv im Joule-Kelvin-Inversionspunkt bei kleinen Dichten berechnen müssen (wozu noch einige Terme für den „induzierten Teil" von B zu errechnen wären), und könnten dann aus den experimentellen Werten von $T_{\text{inv}\,(\varrho=0)}$ und B_{inv} verbesserte Werte von v und σ ableiten. Wir

1) Der erste Term in diesem Resultat entspricht einem Wert für die van der Waalssche Attraktionskonstante a, die vollkommen mit dem von Debye in Gleichung (8) l. c. gegebenen übereinstimmt.



dürfen erwarten, daß die Änderung, welche σ dadurch erleiden wird, relativ gering sein wird, so daß auch die Änderung, die Gleichung (49) dadurch erleiden wird, nicht sehr bedeutend sein wird.

Wir werden uns hier aber darauf beschränken, festzustellen, daß es sich auch jetzt (durch Vergleichung der betreffenden Terme in Gleichung (49)) ergibt, daß jedenfalls für die genannten Gase, die „Quadrupolattraktion", falls nicht die Temperatur sehr hoch ist, einen bedeutend größeren Einfluß in B hat als die „induzierte Attraktion". Die von van der Waals in die Zustandsgleichung eingeführten Kohäsionskräfte können also für Gase wie die genannten der Hauptsache nach den Kräften zugeschrieben werden, welche die Moleküle auf Grund ihrer Quadrupolmomente aufeinander ausüben.

Utrecht, Nov. 1920.

(Eingegangen 30. November 1920.)

Die Polarität einer Aluminiumzelle.

2. Mitteilung[1]).

Von F. Streintz und F. Fiala.

Gasentwicklung durch die Elektrolyse.

Zwei Aluminiumbleche von je $2,5 \times 0,9$ cm² Fläche wurden in ein Hofmannsches Voltameter, das mit verdünnter Schwefelsäure von 4 Gewichtsprozenten gefüllt war, in die unten offenen Schenkel mittelst Kautschukstopfen eingeführt. Die Zuleitung zum Schließungskreise erfolgte derart, daß ein schmaler Streifen aus dem Bleche mit herausgeschnitten wurde, der Drahtform erhielt. Im offenen Kreise war die Gasentwicklung äußerst sparsam, der Angriff der verdünnten Säure auf das Metall mithin gering. Zur Elektrolyse dienten 14 Akkumulatoren, die Stromstärke wurde mit Hilfe eines Schlittenwiderstandes auf 0,1 Weber[2]) konstant erhalten.

An der Anode war die Gasabgabe unbedeutend; nach 6 stündigem Stromdurchgang betrug die entwickelte Menge 3 cm³. An der Kathode fand lebhafte H_2-Entwicklung statt. Nach 81 Minuten waren 60 cm³ ausgeschieden. Daraus ergibt sich eine Stromstärke von 0,102 Weber nach Ausführung der Korrektionen auf Druck und Temperatur. Möglicherweise ist dieser um 2 Prozent größere Wert als der vom Voltmeter angegebene durch den direkten Angriff der Säure entstanden. Nach 24 stündiger Elektrolyse brach die Anode zusammen. Durch die daselbst erzeugte Wärme steigt nämlich die Stärke der Säure, außerdem wird sie durch Überführung des Anions konzentrierter, ein Vorgang, der mit dem Auge aus dem Auftreten von Schlieren im unteren Teile des Anodenschenkels bis auf 12 cm Höhe über der Elektrode verfolgt werden konnte. Nach stundenlangem Fließen des Stromes trat ein ziemlich regelmäßiges Geräusch auf, das zwischen Ticken und Knistern gelegen war. In Verbindung damit erfuhr das Voltmeter sprunghafte Änderungen, denen geringfügige Schwankungen folgten.

Im Laufe der Zeit hatte sich die Anode in ein tieferes Grau verfärbt, die Kathode dagegen nahm eine viel dunklere Farbe an, die wohl der Auflockerung der Metalloberfläche durch den entwickelten Wasserstoff zuzuschreiben ist. Zuweilen entstand an einzelnen Punkten ein feiner aus einer Perlenschnur bestehender Strahl, der das darunter befindliche glänzende Metall bloßlegte[1]). Wurde die Stromrichtung umgekehrt, dann erfolgte sofort an der früheren Anode H_2-Entwicklung dem Faradayschen Gesetze entsprechend.

Die Koeffizienten a und b im Gesetze der Strompolarität.

Um den Einfluß der zeitlichen Änderungen, die die Zelle während des Stromdurchganges erfährt, soweit als möglich zu beseitigen, wurden neue Messungen bei verschiedenen Ladungspotentialen und Stromstärken gemacht. Nach den Erfahrungen am Silberglanzdetektor erschien es zweckmäßig, mit kleineren Stromstärken, als es früher geschehen war, zu arbeiten. Die Messungen wurden mit $i_{21} = 0,015$ begonnen und in Stufen von 0,003 bis auf $i_{21} = 0,003$ Weber herab fortgesetzt. Die Anode bestand aus einem Blech von $2 \times 5,6 \times 4 = 44,8$ cm² Oberfläche. Als Kathode diente eine elliptisch gebogene, geladene negative Akkumulatorplatte, die die Anode von allen Seiten umgab. Die Säure war ebenso verdünnt wie vorher. Die Ladungspotentiale betrugen zunächst 79 Volt und wurden in neun Serien bis auf 14,3 Volt herabgesetzt. Jede Messung wurde von Beobachtungen bei 41 Volt und den dazu gehörigen Stromstärken i_{21} eingeschlossen, und die Ergebnisse darauf bezogen. Die so gewonnenen Werte sollen mit $\overline{i_{12}}$ be-

1) Diese Zeitschr. **21**, 477, 1920.

2) Um etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, daß einem Vorschlage Lenards entsprechend sowohl in der vorliegenden Mitteilung als in den früher veröffentlichten Weber für Ampère gesetzt wurde.

1) Vgl. E. Rumpf, Sitzungsber. d. Wiener Akad. **119**, 959, 1910.



Tabelle I.

V	79,0	64,9	50,0	41,0	35,2	30,8	26,6	20,4	14,3
a	0,3540	0,2941	0,2565	0,1866	0,1437	0,1190	0,1163	0,0681	0,0639
b	0,3566	0,2967	0,2575	0,1882	0,1461	0,1216	0,1177	0,0704	0,0653
$b-a$	0,0026	0,0026	0,0010	0,0016	0,0024	0,0026	0,0014	0,0023	0,0014
i_{21}	$\overline{i_{12}}$ beob.								
0,01500	0,01458	0,01447	0,01430	0,01406	0,01397	0,01372	0,01360	0,01303	0,01282
1200	1170	1161	1150	1138	1127	1120	1109	1073	1040
0900	0885	0882	0876	0867	0860	0856	0851	0833	0811
0600	0594	0593	0589	0586	0590	0583	0581	0573	0563
0300	0299	0299	0297	0298	0298	0298	0296	0297	0295

zeichnet werden. Der Vorgang war etwas langwierig, ließ sich aber nicht umgehen.

Die Übereinstimmung der beobachteten Stromstärken mit den aus der Polaritätsgleichung berechneten war wieder eine vorzügliche. Ihre Differenzen erreichten höchstens ein halbes Prozent. Es kann also auf eine Zusammenstellung mit den berechneten Zahlen verzichtet werden.

Die obige Tabelle I enthält die Ergebnisse. In der ersten wagrechten Reihe finden sich die in Verwendung gestandenen Ladungspotentiale V in Volt, in der zweiten und dritten die aus der Gleichung berechneten Werte der Koeffizienten a und b, in der vierten die Differenzen $b-a$. Dann folgen in der ersten senkrechten Reihe die Stromstärken in der nomalen Richtung i_{21}, in den weiteren Reihen die dazu gehörigen gemessenen Stromstärken in der anomalen $\overline{i_{12}}$.

Die Koeffizienten a und b nehmen mit steigendem Potential zu. Die Differenz $b-a$ gibt jene Stromstärke an, bei der nach der Polaritätsgleichung $i_{12}=i_{21}$ wird, und damit die Polarität U verschwindet. Eine genaue Bestimmung dieses Grenzwertes ist nicht möglich, da a und b nur wenig voneinander verschieden sind, wodurch die Bestimmung ihrer Differenz unsicher wird. Es dürfte aber der Schluß erlaubt sein, daß innerhalb der gewählten Potentialgrenzen die Polarität bei rund 0,002 Weber verschwindet. Dementsprechend ergeben auch die Beobachtungen, daß bei $i_{21}=0{,}003$ Weber die Polarität sehr gering wird.

Fig. 1 zeigt den Zusammenhang des Ladungspotentials mit den Koeffizienten. Da die Kurven für a und b als parallel anzusehen sind, wurde die jeweilige Summe $(a+b)$ als Ordinate gewählt. Ein oberflächlicher Blick genügt, um

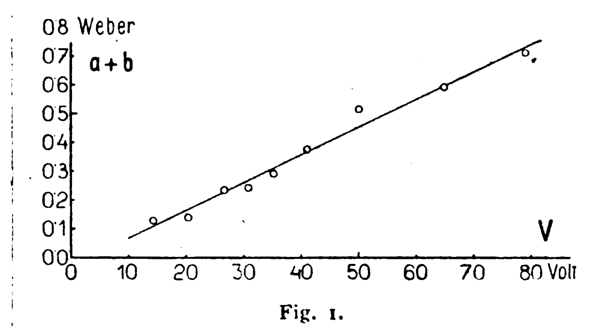


Fig. 1.

zu zeigen, daß die als Kreise eingetragenen aus der Gleichung der Strompolarität berechneten Werte nahezu auf einer Geraden gelegen sind. Die mit der Methode der kleinsten Quadrate gerechneten Kurve

$$a+b=(0{,}00962\,V-0{,}02906)\text{ Weber}$$

ist durch die gerade Linie dargestellt. Die Übereinstimmung läßt zu wünschen übrig. Die größte Abweichung findet sich bei 50 Volt. Tabelle II zeigt die Beziehung zwischen Beobachtung und Berechnung. Systematische Differenzen sind nicht vorhanden.

In der ersten Mitteilung wurde gezeigt, daß das Produkt UV bei einer Stromstärke von 0,01 Weber erst von $V=120$ Volt aufwärts unveränderlich wird. Bei den eben besprochenen Versuchen besaß das Anodenblech ungefähr dieselbe Ausdehnung, die größte Stromstärke betrug 0,015 Weber. Der Zusammenhang zwischen V und U war dafür folgender:

$V=$	79	64,9	50	41 Volt
$U=$	0,0320	0,0387	0,0493	0,0626
$UV=$	2,53	2,51	2,465	2,57

$V=$	35,2	30,8	26,6 Volt
$U=$	0.0727	0.0840	0,0933
$UV=$	2,56	2,59	2,48

Tabelle II.

V	79,0	64,9	50,0	41,0	35,2	30,8	26,6	20,4	14,3
$(a+b)$ beob.	0,711	0,591	0,514	0,375	0,290	0,241	0,234	0,139	0,129
$(a+b)$ ber.	0,731	0,595	0,452	0,365	0,310	0,267	0,227	0,167	0,109
Δ	— 20	— 4	+ 62	+ 10	— 20	— 26	+ 7	— 28	+ 20

Es macht also den Eindruck, daß UV schon bei einer viel geringeren Spannung einen konstanten Wert annimmt. Allein die Spannung, bei der gerade der Grenzwert erreicht wird, läßt sich, wie bereits hervorgehoben worden ist, nicht feststellen, da die Kurve, bevor sie den geradlinigen Weg einschlägt, vielfachen Schwankungen unterliegt. Auch befindet sich die Zelle in jeder Versuchsreihe in einem anderen Zustande. Damit erscheint die bereits ausgesprochene Befürchtung bestätigt, daß über diese Beziehung kaum etwas Genaueres zu ermitteln sein wird.

Ladungspotential, Klemmenspannung und Stromdichte.

Um zu entscheiden, welchen Einfluß die Stromdichte auf die Polarität der Zelle ausübt, wurde in folgender Weise verfahren. Die bereits in Verwendung gestandene negative Akkumulatorplatte umgab in der Wanne, die wieder mit 4 prozent. Schwefelsäure gefüllt war, fünf Aluminiumbleche von gleicher Oberfläche (je $2 \times 2{,}7 \times 2{,}0$ cm²), die parallel zur umgebenden Bleiplatte aufgehängt waren. Die Bleche konnten entweder sämtlich parallel in den Stromkreis geschaltet werden oder in beliebigen Gruppen von einer Platte aufwärts. Mit einer konstanten Spannung von 14 Volt wurden nun die Messungen in der Weise ausgeführt, daß durch entsprechende Wahl von Widerständen die Stromdichte stets dieselbe blieb. War also bei 5 Platten $i_{21} = 1$ Weber, so wurde die Stomstärke bei 4 Platten auf 0,8 Weber eingestellt und so fort, bis sie bei Einschaltung einer einzigen Platte 0,2 Weber betrug.

Die Versuche wurden im Gebiete von $i_{21} = 0{,}015$ bis $i_{21} = 1$ Weber bei Parallelschaltung sämtlicher Platten angestellt. Sie ergaben mit großer Übereinstimmung, daß die Polarität U nur von der Stromdichte abhängig ist. Es genügt daher die Angabe von Werten, die bei einer und derselben Stromdichte ermittelt wurde. In der nachstehenden Tabelle enthält die erste senkrechte Reihe die Zahl der Platten, die zweite die gewählten Werte i_{21}, die dritte die beobachteten i_{12}, an die unmittelbar Kontrollmessungen bei i_{21} angeschlossen wurden. Dann folgen in den beiden letzten Reihen die daraus berechneten Größen für die Polaritäten U und für ihre reduzierten Werte $\overline{U}$.

Die Polarität U nahm mit der Zeit von 0,852 auf 0,835 ab. Durch das Fließen des Stromes scheint diese Abnahme hervorgerufen zu werden, eine Erscheinung, die regelmäßig bei Verwendung von kräftigeren Strömen verfolgt werden konnte. Geht man von stärkeren

Tabelle III.

Plattenzahl	i_{21}	i_{12}	i_{21}	U	$\overline{U}$
5	1,000	0,148	1,000	0,852	1,000
4	0,800	0,119	0,800	0,851	1,001
5	1,000	0,152	1,000	0,848	
3	0,600	0,094	0,600	0,843	0,996
5	1,000	0,156	1,000	0,844	
2	0,400	0,062	0,400	0,845	1,000
5	1,000	0,158	1,000	0,842	
1	0,200	0,034	0,200	0,830	0,990
5	1,000	0,165	1,000	0,835	

Strömen zu schwächeren über, so erfolgt zunächst eine langsame Zunahme von U mit der Zeit. Die Werte von $\overline{U}$ weichen voneinander kaum ab; sie dienen als Beleg für den ausgesprochenen Satz.

Da möglicherweise sich die Verhältnisse ändern, wenn zu größeren Stromdichten übergegangen wird, wurden von den Blechen Streifen abgeschnitten, so daß sie umgefähr ein Fünftel der früheren Oberfläche (je $2 \times 2{,}0 \times 0{,}6$ cm²) erhielten. Die Stromdichte war also bei denselben Stromstärken, wie sie früher angewendet worden waren, die viereinhalbfache, $9:2 \cdot \overline{U}$ blieb unverändert; daraus folgt, daß auch die Koeffizienten a und b nur von der jeweiligen Stromdichte abhängig sind.

Bei der Untersuchung des Silberglanzsystems[1]) konnte gezeigt werden, daß an der Verbindungsstelle des Metalles mit dem Kristall beim Fließen des anomalen Stromes i_{12} eine Temperaturerhöhung eintrat, die proportional war dem Ladungspotential V. Zur Entscheidung der Frage, ob auch an der Aluminiumanode eine weitere Analogie zu entdecken war, hätte ein Thermoelement, etwa aus Platin-Rhodium, in unmittelbare Berührung mit dem Metalle gebracht werden müssen. Da es zweifelhaft schien, ob auf diesem Wege einwandfreie Ergebnisse zu erzielen waren, wurde von einer derartigen Anordnung abgesehen und als Ersatz die Potentialdifferenz an den Klemmen der Zelle während des Fließens von i_{12} gemessen. Dazu diente ein von Bartels in Göttingen hergestelltes Dolezaleksches Binantenelektrometer. Die Oberfläche des Al-Bleches betrug wieder 44,8 cm². Bei unverändert erhaltener Stromstärke i_{12} wurde mit verschiedenen elektromotorischen Kräften V polarisiert. Die Beziehungen zwischen i_{12}, V und der Klemmenspannung π_{12}, die beiden letzteren in Volt ausgedrückt, sind nachstehende:

1) F. Streintz, diese Zeitschr. 21, 371, 1920.

i_{12}	V	π_{12}	i_{12}	V	π_{12}
0,01460	8	1,80	0,1124	12	10,7
	10	1,80		14	10,7
	12	1,80		18	10,7
	8	1,80		24	10,65
	4	1,85		12	10,65
0,0579	14	6,50	0,600	28	17,55
	10	6,55		36	17,40
	8	6,55		42	17,25
	14	6,60		56	17,25
				28	17,30

Diese Angaben dürften hinreichen, um zu zeigen, daß die Spannung einer Zelle mit *Al* als Anode von der elektromotorischen Kraft der ladenden Kette nicht beeinflußt wird und nur von der Stromdichte abhängig ist. So hat auch Zenneck[1]) ermitteln können, daß eine leidliche Ventilwirkung nur erzielbar ist mit großer Stromdichte. Die Analogie mit dem Kristalldetektor hat also ihr Ende gefunden. Hier ist maßgebend die auf die Flächeneinheit gelangende Menge des in der Zeiteinheit entstehenden Anions oder Sauerstoffes, während beim Kristalldetektor ein Zuströmen von Gas nicht stattfindet. Nach Feststellung dieses Ergebnisses genügte es, die Beziehung zwischen i_{12} und π_{12} bei einer einzigen Ladungsspannung zu ermitteln. Dazu trat eine Akkumulatorenbatterie von 28 Volt in Verwendung. Das Ergebnis ist durch das Diagramm $i_{12} - \overline{\pi_{12}}$ dargestellt (Fig. 2). Die Werte von $\overline{\pi_{12}}$ sind wieder auf die bereits wiederholt angegebene Art korrigiert.

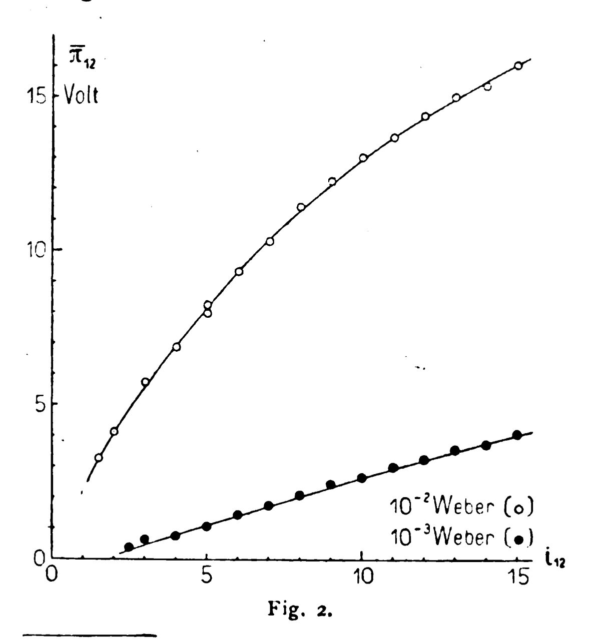


Fig. 2.

Die obere Kurve gibt die Beziehung an, wenn die Stromstärken zwischen 0,03 und 0,15 Weber gelegen waren. Ihre Neigung ist konkav gegen die Abszissenachse. Die Untersuchung auf dem Gebiete von 0,03 bis 0,05 Weber und von 0,05 Weber aufwärts wurde an zwei aufeinanderfolgenden Tagen ausgeführt. End- und Anfangspunkt der beiden Kurvenstücke weichen nur wenig voneinander ab. Die untere Kurve erhielt man zwischen den Grenzen $i_{12} = 0{,}0025$ und 0,015 Weber, sie weicht kaum von der Geraden ab.

Die größte Klemmenspannung wurde zu 17,5 Volt bei 0,6 Weber ermittelt. Darüber hinaus unterlag π_{12} Abnahmen bis zu 2 Volt und darüber. Geringere Schwankungen machten sich zeitweilig auch schon von 0,2 Weber aufwärts geltend. Sie finden ihre Erklärung in der Annahme, daß bei diesen Stromdichten bereits Durchbrüche durch die wirksame Schicht stattfinden. Die Anode zeigte an verschiedenen Stellen, besonders gegen die Ränder zu, kleine kreisförmige Vertiefungen, als wären sie dem Blech mit einer spitzen Stahlnadel beigebracht worden. Das beschriebene Ticken und Knistern wird das Entstehen dieser Narben angezeigt haben.

Eine weitere Analogie mit dem Silberglanzdetektor ist wieder festzustellen: Das gesetzmäßige Verhalten auf dem Gebiete der Polarität läßt sich nur dann nachweisen, wenn die Versuche mit entsprechend geringen Stromdichten ausgeführt werden.

Bei größerer Stromdichte wird *H*-Polarisation an der zum Vergleiche dienenden Bleiplatte auftreten. Mit Rücksicht auf die verhältnismäßig große Ausdehnung der Akkumulatorplatte kann sie im Vergleich zu der hohen Klemmenspannung an der Anode vernachlässigt werden.

Wenn eine Aluminiumelektrode als Anode in Verwendung steht, so bildet sich an ihrer Oberfläche eine mit der Stromdauer wachsende Haut aus, von der der mit dem Gase behaftete Teil von Schulze als wirksame Schicht bezeichnet wurde. Es entsteht noch die Aufgabe, den Widerstand dieser allerdings von der Säure durchtränkten Haut kennen zu lernen. Zu diesem Zweck wurde eine frische blank polierte Platte mit einer Oberfläche von 44,8 cm² mit der negativen Akkumulatorplatte verglichen. Die Potentialdifferenz zwischen *Al* und *Pb*, mit dem Elektrometer gemessen, betrug unmittelbar nach dem Eintauchen des Bleches in die Säure 0,18 Volt und stieg allmählich bis 0,21 an. *Al* war elektropositiv gegen *Pb*. Dann wurde das Aluminiumblech bei $i_{21} = 0{,}1$ Weber in einem Stromkreise mit 10 Volt kathodisch polarisiert.

1) J. Zenneck, diese Zeitschr. **14**, 539, 1913.

Nach einer Viertelstunde änderte sich die Klemmenspannung π_{21} nicht mehr, sie ergab sich zu 0,48 Volt. Der Widerstand der Zelle w_{21} war somit 4,8 Ohm. Bei sonst unverändertem Stromkreis wurde darauf das Blech anodisch polarisiert. i_{12} hatte im ersten Augenblick nach dem Stromwechsel einen etwas höheren Wert als i_{21} und nahm zunächst rascher, dann langsamer ab, um nach einer Viertelstunde auf 0,05 Weber herabzusinken. Daß beim Stromwechsel zunächst $i_{12} > i_{21}$ ist, wird durch die Annahme erklärt, daß die Oberfläche des Bleches durch Vereinigung der Gase zu Wasser einen kleineren Widerstand besitzt, als während der kathodischen Polarisation. π_{12} stieg zunächst an, um sich nach derselben Zeit bei 4,70 Volt ziemlich konstant zu halten. Daraus würde sich nach dem Ohmschen Gesetz ein Widerstand $w_{12} = 87,3$ Ohm ergeben. Wurde die Stromrichtung wieder umgekehrt, so fand sich nach fünf Minuten $i_{21} = 0,0978$, $\pi_{21} = 0,70$, somit $w_{21} = 7,2$ Ohm. Es würde sich also der Widerstand der gebildeten Haut auf 2,4 Ohm belaufen. Bei fortgesetztem Wechsel der Stromrichtung stieg w_{12} allmählich bis auf 132 Ohm an, dagegen unterlag w_{21} fortwährenden Schwankungen zwischen 5,7 und 4,5 Ohm. Es ist wahrscheinlich, daß, wie bereits früher bemerkt worden ist, eine allmähliche Auflockerung des Metalles durch den Wasserstoff entsteht, ähnlich wie bei der Bildung von Platinschwarz an einer Platinkathode. Damit ließe sich die Abnahme des Widerstandes erklären. Freilich kommt auch noch in Betracht, daß die anodisch gebildete Haut teilweise in Spuren von der Elektrode abfällt, teilweise in Lösung geht. Der entwickelte Wasserstoff scheint die vorgefundene Schicht nicht anzugreifen. Das geht daraus hervor, daß, wenn man im späteren Verlauf von der kathodischen zur anodischen Polarisation übergeht, die Nadel des Voltmeters ziemlich schnell an derselben Stelle einspielt, die sie zum Schlusse der vorangegegangenen anodischen Polarisation verlassen hatte.

Zuweilen gelingt es, die Schicht vom getrockneten Bleche loszulösen. Da ihre Härte zwischen Eisen und Stahl liegt, besteht sie also nicht aus Al_2O_3.

Fig. 3 zeigt eine photographische Aufnahme eines Teiles davon in der Vergrößerung 1 : 60. Er besteht aus einem zellenartigen Gebilde. An die Phantasie wird keine große Anforderung gestellt mit der Annahme, daß diese bald rundlichen bald polygonalen Zellen durch die Sauerstoffbläschen gebildet worden sind.

Eine rein mechanische Erklärung für die Polarität einer Aluminiumzelle soll noch versucht werden. Der an der Anode entwickelte Sauerstoff haftet, sowohl wegen seiner größeren Dichte, als auch, weil er im ständigen Umsatz mit dem Metall steht, viel besser als der an der Kathode ausgeschiedene leichtere Wasserstoff. Die Folge davon ist, daß sich an der Anode ein Kondensatorsystem ausbilden wird, an der Kathode dagegen nicht, wenigstens nicht auf nachweisbarem Wege.

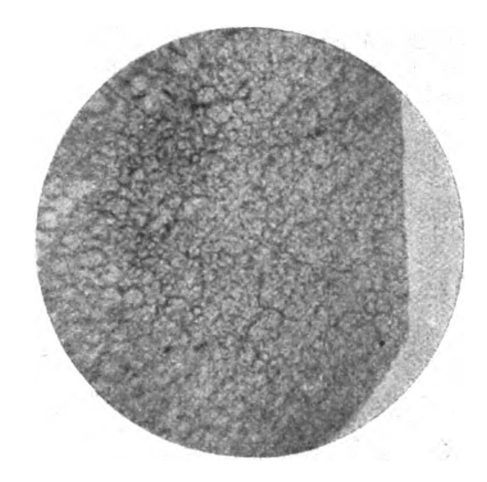


Fig. 3.

Damit ist die Untersuchung zum Abschlusse gelangt. Für einen raschen Überblick über die gewonnenen Ergebnisse dürfte es sich empfehlen, sie in folgende fünf Sätze zu fassen:

1. Die Stromstärken in der kathodischen und anodischen Richtung i_{21} und i_{12} sind durch die Beziehung
$$i_{12} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b i_{21}}$$
miteinander verknüpft. Die Koeffizienten a und b unterscheiden sich nur wenig voneinander und nehmen proportional mit dem Potential der ladenden Kette zu.
2. Das Produkt UV aus dem Ladungspotential V und der Strompolarität $U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$ wächst zunächst mit V, um von einem gewissen nicht genau festzustellenden Werte an einen Grenzwert zu erreichen.
3. Die Strompolarität U ist bei einem und demselben Ladungspotential nur von der Stromdichte abhängig, und zwar nimmt sie mit dieser gleichmäßig zu.
4. Die an der Zelle vorhandene Klemmenspannung wächst mit der Stromdichte zunächst linear; dann aber immer langsamer und ist unabhängig von der elektromotorischen Kraft der ladenden Kette. Der größte Wert der anodischen Klemmenspannung beträgt etwa 17,5 Volt.



5. Die eben genannten Sätze kommen um so reiner zur Geltung, je geringer die angewendeten Stromdichten sind.

Graz, II. physik. Institut der Technischen Hochschule, Weihnachten 1920.

(Eingegangen 7. Januar 1921.)

„Die elektromotorische Gegenkraft" der Aluminiumgleichrichter.

Von A. Günther-Schulze.

Während des Krieges sind in der Phys. Rev. eine Arbeit von Clarence W. Greene über die Polarisation der Aluminiumgleichrichter[1]) und eine Arbeit von Albert Louis Fitch über die gegenelektromotorische Kraft im Aluminiumgleichrichter[2]) erschienen. Während sich Greene mit der Angabe begnügt, daß man den Vergleich zwischen einer formierten Aluminiumelektrode und einem Kondensator nicht zu weit treiben darf, glaubt Fitch zur Erklärung seiner Versuche neue Annahmen einführen zu müssen, durch die die ohnehin schon genügend verwickelte Erklärung der Vorgänge im Aluminiumventil unnötig weiter erschwert wird.

Die hohe Spannung von der Größenordnung 100 Volt, die man an eine Aluminiumventilzelle legen kann, ohne daß sie von einem wesentlichen Strom durchflossen wird, hat ihre Ursache in einer Gasschicht von äußerst geringer Dicke und sehr hohem Widerstande, die infolge dieser beiden Eigenschaften wie das Dielektrikum eines sehr großen Kondensators wirkt, dessen Belegungen das Ventilmetall einerseits, der Elektrolyt andererseits sind. Die Gasschicht wird durch eine sehr viel dickere, stark poröse Aluminiumoxydschicht in ihrer Lage gehalten. Soweit die Poren dieser Oxydschicht nicht vom Gas eingenommen sind, werden sie vom Elektrolyten erfüllt. Diesen Anschauungen pflichtet auch Fitch bei.

Da eine formierte Aluminiumanode zugleich eine sehr große Kapazität (z. B. bei Formierung bis 10 Volt 0,70 M.-F. auf ein cm^2 Oberfläche) und einen sehr hohen Widerstand besitzen, so verschwindet die kapazitive Ladung der Zelle beim Ausschalten nicht momentan, sondern erst nach einer merklichen Zeit.

Die nach dem Ausschalten zunächst noch vorhandene kapazitive Spannung der Anode nennt Greene „Polarisation" und Fitch „gegenelektromotorische Kraft". In Deutschland sind diese Bezeichnungen für die Spannung eines geladenen Kondensators nicht üblich und geeignet, irre zu führen.

Greene und Fitch haben sich die Aufgabe gestellt, die Abnahme dieser Spannung nach dem Ausschalten als Funktion sowohl der vorherigen Formierungsdauer als auch der Dauer des Ausschaltens zu messen. Sie benutzen zu diesem Zwecke einen rotierenden Unterbrecher, der die Ventilzelle während einer bestimmten Zeit t_l lädt, dann eine bestimmte variable Zeit t_0 offen läßt, dann eine kurze Zeit t_m zur Messung mit dem Kompensator verbindet, so daß die nach t_0 noch vorhandene Spannung kompensiert werden kann.

Greene folgert aus seinen Versuchen, daß die Aluminiumventilzelle sich nicht wie ein gewöhnlicher Kondensator verhält und daß die beobachteten Wirkungen des Ausschaltens auf dem Wegdiffundieren der durch den Strom an die Gasschicht gedrängten Ionen beruhen.

Was mit der letzteren Aussage gemeint ist, ist nicht recht verständlich. Der Kondensator entlädt sich, sobald er ausgeschaltet wird, über seinen inneren Widerstand. Je weiter er sich entlädt, um so mehr werden die durch die Ladung an ihn gefesselten Ionen des Elektrolyten frei und können wegdiffundieren. Diese Diffusion als Ursache der Entladung hinzustellen, heißt doch die Verhältnisse auf den Kopf stellen.

Fitch prüft die Annahme, daß sich die Ventilzelle wie ein Kondensator mit Ohmschem Widerstand verhält. Er findet, daß der hiernach aus seinen Versuchen berechnete Ohmsche Widerstand nicht konstant ist, sondern sowohl von der Ausschaltungsdauer wie von der Einschaltungsdauer abhängt. Das ist richtig.

Daraus zieht er den Schluß, daß hier der typische Fall eines Kondensators mit konstantem Ohmschen Widerstand und einem doppelten Dielektrikum vorläge, nämlich der dünnen Gasschicht einerseits und der dickeren Oxydschicht andererseits. Beide Teile dieses Dielektrikums hätten geringe Durchlässigkeit und änderten ihre Dicke, indem die feste Schicht mit der Dauer des Stromschlusses dicker, die dünne Gasschicht mit der Dauer der Stromöffnung dünner würde. Er erhält dadurch eine neue Konstante und erreicht mit dieser einen besseren Anschluß an seine Messungen. Seine 4 verfügbaren Konstanten ändern sich von Kurve zu Kurve in nicht näher erklärter Weise.

In der Überlegung von Fitch stecken zwei Fehler. Die Annahme eines doppelten Dielektrikums ist falsch, denn der Widerstand der vom Elektrolyten erfüllten Oxydschicht ist gegenüber dem Widerstand der Gasschicht ver-

1) Phys. Rev. (2) 3, 264, 1914.
2) Phys. Rev. (2) 9, 15, 1917.

Tabelle I.

Tantalstab von 12,5 cm² wirksamer Oberfläche in 0,05 normaler KNO_3-Lösung mit 100 Volt formiert. $t = 20^0$ C.

Einschaltungsdauer	Formierungsstrom i Milliamp.	Zellenspannung e Volt	Dichte der festen Schicht Δ $\mu\mu$	Dichte der[1]) Gasschicht δ $\mu\mu$	$\frac{e}{i} = r$ Ohm	$\frac{r}{\delta}$ $\frac{\text{Ohm}}{\mu\mu}$
10 sec	100	27	113	2,50	—	—
30 „	100	73	160	3,53	—	—
40 „	100	101,3	270	6,00	$1{,}013 \cdot 10^3$	169
55 „	11	101,3	300	6,62	9,22 „	1390
90 „	4,1	101,3	305	6,74	24,7 „	3670
2 min	3,1	101,3	307	6,78	32,7 „	4820
10 „	1,16	101,3	325	7,17	87,2 „	12200
60 „	0,54	101,3	335	7,39	188 „	25500
260 „	0,365	101,3	350	7,72	278 „	36000
450 „	0,245	101,3	355	7,82	413 „	52800
2880 „	0,110	101,3	360	7,93	922 „	116000
7340 „	0,070	101,3	390	8,60	1450 „	169000
8780 „	0,064	101,3	395	8,72	1582 „	181000

schwindend gering. Die Annahme eines konstanten Ohmschen Widerstandes des Dielektrikums ist ebenfalls falsch. Fitch hat sich anscheinend gar nicht die Frage vorgelegt, weshalb der Ohmsche Widerstand der wirksamen Schicht, die er selbst als Gasschicht ansieht, während der Entladung, also bei veränderlicher Spannung, konstant sein soll. Er hätte sonst durch eine einfache Messung gefunden, daß er durchaus nicht konstant ist.

Zur Klarlegung der Erscheinungen gebe ich die Vorgänge bei der Formierung einer Tantalelektrode wieder. Die Erscheinungen im Tantal sind qualitativ genau dieselben wie im Aluminium, doch ist Tantal bei allen wissenschaftlichen Untersuchungen vorzuziehen, weil bei ihm die Störungen durch unvollkommene Unlöslichkeit, die beim Aluminium die Deutung der Erscheinungen oft erschweren, völlig fehlen.

Wenn ein Tantalstab von 12,5 cm² wirksamer Oberfläche in Kaliumnitratlösung mit Vorschaltwiderstand an eine Spannungsquelle von 100 Volt gelegt und mit Hilfe des Vorschaltwiderstandes die Formierungsstromdichte konstant erhalten wird, so steigt zunächst die Spannung proportional der Zeit an, bis 100 Volt erreicht sind, und der gesamte Vorschaltwiderstand ausgeschaltet ist. Gleichzeitig hat sich auf dem Tantal eine Oxydschicht und in ihr eine dünnere Gasschicht gebildet, deren Dicke der Formierungsspannung nahezu proportional angewachsen ist. Von nun an nimmt der Formierungsstrom erst schnell, dann langsamer ab, während die Oxydschicht und Gasschicht entsprechend weiter wachsen, wobei aber der Strom sehr viel schneller abnimmt als die Dicke der Gasschicht zunimmt, so daß der Widerstand der Schicht bei der konstanten Spannung von 100 Volt mit abnehmender Formierungsstromstärke sehr schnell ansteigt. Dabei nähern sich die Dicke der Gasschicht und der Formierungsstrom im Laufe von Tagen asymptotisch einem Grenzwert. Die obige Tabelle I verdeutlicht die Erscheinungen.

Aus dieser Tabelle folgt ohne weiteres, daß die Entladung eines Ventilkondensators um so langsamer vor sich geht, je länger die Dauer der Formierung war, denn um so größer ist $\frac{e}{i}$, während die Dicke der wirksamen Schicht und damit ihre Kapazität und ihre Ladung sich mit der Dauer der Formierung sehr viel weniger ändert.

Zweitens hängt die Geschwindigkeit der Entladung des Ventilkondensators nach dem Ausschalten davon ab, wie sich der Faktor $\frac{e}{i}$, „der Widerstand“ der wirksamen Schicht mit e ändert.

Hierüber gibt Tabelle II Aufschluß. Bei der ersten Versuchsreihe wurde eine Tantalelektrode von 12,5 cm² Oberfläche in Boraxlösung einen Tag lang mit 200 Volt formiert, sodann e stufenweise geändert und i gemessen, indem in der Reihenfolge der Versuchsnummern von Spannung zu Spannung fortgeschritten wurde. Wie Tabelle II zeigt, ist der „Widerstand“ in diesem Fall eine Funktion von Spannung und Spannungsänderung. Bei abnehmender Spannung ergeben sich für ihn wesentlich höhere Werte als bei zunehmender. Der Grund hierfür liegt darin, daß die geringeren Spannungen nicht imstande sind, die wirksame Schicht längere Zeit vollständig aufrecht zu erhalten.

1) Unter der Annahme, daß die unbekannte Dielektrizitätskonstante der Gasschicht gleich 1 ist.

Tabelle II.

Tantalstab von 12,5 cm² wirksamer Oberfläche in 0,05 normaler $Na_2B_4O_7$-Lösung nach eintägiger Formierung mit 200 Volt. $t = 14^0$ C.

1. Stufenweise Spannungsänderung.

Angelegte Spannung e Volt	Versuch Nr.	$\frac{e}{i}$ Ohm	Versuch Nr.	$\frac{e}{i}$ Ohm
200	1	$0{,}197 \cdot 10^6$	19	$0{,}0202 \cdot 10^6$
180	2	0,541 „	18	0,450 „
160	3	1,12 „	17	0,728 „
140	4	1,73 „	16	0,875 „
120	5	2,22 „	15	1,01 „
100	6	2,57 „	14	1,33 „
80	7	2,91 „	13	1,70 „
60	8	3,00 „	12	2,00 „
40	9	3,20 „	11	2,72 „
20	10	2,86 „		

2. Vor jedem Versuch 200 Volt Spannung an der Zelle.

Angelegte Spannung e Volt	$\frac{e}{i}$ Ohm
200	$0{,}209 \cdot 10^6$
180	0,522 „
160	1,103 „
140	1,88 „
120	2,40 „
100	2,94 „
80	3,80 „
60	4,28 „
40	5,00 „

Bei der zweiten Versuchsreihe der Tabelle II wurde ein Tantalstab von 12,5 qm wirksamer Oberfläche in Boraxlösung mit 200 Volt ebenfalls einen Tag lang formiert, und sodann momentan von 200 Volt auf die gewünschte Spannung geschaltet, i schnell gemessen und die Zelle dann wieder einige Zeit an 200 Volt gelegt. i änderte sich während der Messung nicht merklich. Die so erhaltenen Widerstände dürften für Versuche wie die von Fitch angestellten maßgebend sein. Die zweite Versuchsreihe zeigt nun, daß $\frac{e}{i}$ mit abnehmender Spannung schnell ansteigt, also von einer Konstanz des Widerstandes bei einer Entladung keine Rede ist.

Die Folge davon ist, daß, wie Greene und Fitch auch gefunden haben, die Entladung des Ventilkondensators langsamer vor sich geht, als sie es bei konstantem Ohmschen Widerstande tun würde. Also ist die mit den Eigenschaften der porösen Oxydschicht in Widerspruch stehende Annahme, daß die Oxydschicht als zweites Dielektrikum geringerer Durchlässigkeit wirke, durchaus überflüssig. Das Ergebnis der Versuche von Greene und Fitch läßt sich dahin zusammenfassen, daß der Quotient $\frac{e}{i}$, der „Widerstand" der wirksamen Schicht von Ventilzellen, sowohl von der Dicke der wirksamen Schicht als auch von der an ihr liegenden Spannung abhängt; ein Ergebnis, das angesichts des Umstandes, daß diese wirksame Schicht eine Gasschicht ist, wohl selbstverständlich ist.

(Eingegangen 10. Januar 1921.)

Eine mechanische Theorie der Serienspektra.

Von A. Korn.

III.

Schwingungsdauer der Röntgenstrahlen und Atomgewicht.

Nach den in der ersten und zweiten Abhandlung entwickelten Anschauungen entstehen die den Atomen zugehörigen Schwingungen des sichtbaren Spektrums dadurch, daß negativ elektrische Teilchen, welche im allgemeinen durch elektrische Kräfte beeinflußt um einen Atomkern rasche Umläufe ausführen, durch Störungen in innere (Kreis)[1])-Bahnen geworfen werden, für welche die elektrischen Kräfte durch Zentralkräfte besonderer Form übertönt werden. Ich habe gezeigt, welcher Art diese Zentralkräfte sein müssen, um Anlaß zu Serien von der Kayser-Rungeschen Art[2]) zu geben, und wie solche Zentralkräfte mechanisch infolge von Schwingungen des Kernes und der umlaufenden Teilchen entstehen können. Das Charakteristische dieser Zentralkräfte gegenüber den bei den universellen Schwingungen bei empirisch inkompressiblem Zwischenmedium auftretenden Kräften besteht darin, daß zur Entstehung dieser Zentralkräfte die Kompressibilität des Zwischenmediums herangezogen werden muß. Nur so lassen sich Zentralkräfte von der hier gewünschten Form:

$$f(r) = F'(r),$$
$$F(r) = \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) \cos\frac{r}{\lambda} 2\pi + \frac{2\pi}{3\lambda}\frac{\gamma}{r^3} \sin\frac{r}{\lambda} 2\pi,$$

in denen λ eine sehr kleine Länge vorstellt, erklären.

Man kann sich nun denken, daß um die Kerne außer den negativ elektrischen Teilchen,

1) Genauer: nahezu kreisförmige Bahnen.
2) Im einfachsten Falle zu einer Balmer-Serie.



deren Störungen zu den Serien des sichtbaren Spektrums Anlaß geben, weitere negativ elektrische Teilchen in wesentlich geringerer Entfernung umlaufen, so daß für die auf sie wirkenden Zentralkräfte die Kompressibilität des Zwischenmediums gar nicht oder genauer in zu vernachlässigender Weise in Betracht kommt. Die Bahnen solcher Teilchen gehen dann unter dem Einfluß von Zentralkräften:

$$f(r) = \left(\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} + \ldots\right) m m_0$$

vor sich, wie sie universellen Schwingungen der Teilchen in einem empirisch inkompressiblen Medium entsprechen, wenn m und m_0 bzw. die Massen des umlaufenden Teilchens und des Kerns, $a, b \ldots$ Konstanten sind. Wenn wir das einfache Gesetz:

$$f(r) = a\frac{m m_0}{r^2} \quad (a < 0) \tag{1}$$

zugrunde legen, welches gleichphasigen Pulsationen der Teilchen zugehört, so kommt man natürlich zu Bahnen, wie sie den Planetenbewegungen relativ zur Sonne entsprechen.

Ich gebe nun folgender Vorstellung über die Entstehung der Röntgenstrahlen Ausdruck: Die in den inneren Bahnen laufenden negativ elektrischen Teilchen beschreiben kleine Kreise um die Kerne in außerordentlich kleinen Umlaufszeiten. Wenn diese Bahnen durch äußere Störungen ein wenig verändert werden, so entstehen Schwingungen, indem die Kreisbahnen in elliptische Bahnen geringer Exzentrizität übergehen, und diese Schwingungen pflanzen sich im Zwischenmedium als Röntgenstrahlen fort. Um diese Auffassung zu stützen, will ich zeigen, daß die Schwingungsdauern dieser Schwingungen in erster Annäherung den Quadraten von m_0 (bei den chemischen Elementen also den Quadraten der Atomgewichte) umgekehrt proportional sind. Diese Auffassung stimmt im übrigen mit der Voraussetzung anderer Theorien überein, daß die Störungen, welche zu den Röntgenstrahlen Veranlassung geben, sich wesentlich näher dem Atomkern abspielen, als die Störungen, welche die Serien im sichtbaren Spektrum veranlassen.

Es seien, wie in der ersten Abhandlung[1]), x, y, z die Koordinaten des Zentrums eines umlaufenden Teilchens m (das Zentrum von m_0 wird als Anfangspunkt des Koordinatensystems genommen), dann sind die Bewegungsgleichungen von m:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{ax}{r^3} m m_0, \ldots, \tag{2}$$

mit den beiden bekannten Integralen:

1) Diese Zeitschr. **20**, 491—494, 1919.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right\} &= -a\frac{m_0}{r} + \frac{1}{m}c_1, \\ r^2\frac{d\omega}{dt} &= c_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bei Einführung der Polarkoordinaten (r, ω) durch die Transformation

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega$$

und Verlegung der Bahnebene in die Ebene $z = 0$; c_1 und c_2 sind Integrationskonstanten. In bekannter Weise folgt aus (3):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{c_1}{m} - a\frac{m_0}{r} - \frac{1}{2}\frac{c_2^2}{r^2},$$

und hieraus:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{am_0}{r^2} + \frac{c_2^2}{r^3}. \tag{4}$$

Die Bahn ist kreisförmig, wenn zu irgendeiner Anfangszeit

$$r = -\frac{c_2^2}{am_0} = r_0 \tag{5}$$

und die Geschwindigkeit zur Anfangszeit tangential zu diesem Kreise (5) ist. Wird durch eine instantan wirkende Störung m aus einer solchen Kreisbahn ein wenig abgelenkt, so wird m offenbar eine Ellipse mit geringer Exzentrizität beschreiben, also r um den Mittelwert r_0 schwingen, mit einer Schwingungsdauer, die offenbar mit der Umlaufszeit eines Teilchens m um die Kreisbahn (5) in erster Annäherung übereinstimmt. Nach der zweiten Gleichung (3) wird somit die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\frac{r_0^2}{c_2} = 2\pi\frac{c_2^3}{a^2}\cdot\frac{1}{m_0^2}. \tag{6}$$

Ist, entsprechend der bereits in der zweiten Abhandlung vertretenen Voraussetzung, c_2 eine universelle Konstante, so gilt dies auch von $\frac{c_2^3}{a^2}$, und es folgt, daß die Schwingungsdauer T mit m_0^2 (also bei Atomen mit dem Quadrate des Atomgewichtes) umgekehrt proportional ist, wie dies in erster Annäherung erfahrungsgemäß für die Röntgenstrahlungen zutrifft.

Daß die Erfahrung tatsächlich nicht bloß eine Schwingungsdauer, sondern wiederum ein Spektrum oder sogar mehrere Spektralserien für die Röntgenstrahlungen zeigt, widerspricht in keiner Weise der durch (6) dargestellten ersten Annäherung; es ergibt sich allerdings die Aufgabe, diese Feinheiten durch zweite, dritte usw. Annäherungen darzustellen, und hierfür stehen mehrere Möglichkeiten offen: Einmal braucht m_0 nicht genau mit dem Atomgewicht proportional zu sein, sondern es können sich durch Abspaltungen kleiner Massen vom Kern geringe Differenzen ergeben, ferner kann in dem den uni-

versellen Schwingungen entsprechenden Wechselwirkungsgesetz zu dem ersten Gliede

$$f(r) = a\frac{m m_0}{r^2}$$

ein weiteres Glied (oder weitere Glieder) hinzutreten. So einfach wird natürlich dann die Berechnung der Schwingungsdauern nicht mehr, die Aufgabe der Erklärung der Feinstruktur möge daher auch noch für eine spätere Abhandlung aufgeschoben werden; immerhin sei schon hier auf die Entstehung neuer interessanter mathematischer Aufgaben hingewiesen: Ein Teilchen m sei durch ein Gesetz, welches zentralen Anziehungen und Abstoßungen des Kernes m_0 entspricht, an eine gewisse Bahn durch Anfangsbedingungen gebunden; bei instantanen Störungen wird das Teilchen schwingungsartig von dieser Bahn abweichen; es handelt sich um die Berechnung der Schwingungsdauern. In dieser Abhandlung, wie in der ersten, haben wir zwei besonders einfache Beispiele betrachtet, welche die ersten wichtigen Resultate in dieser Richtung gegeben haben.

(Eingegangen 20. Dezember 1920.)

Über Atomkerne.

Von E. Gehrcke.

In einer früheren Mitteilung[1]) war geschlossen worden, daß der Eintritt einzelner H-Kerne in Ringe aus α-Teilchen anzunehmen sei. Nachdem jetzt die Versuche von Aston[2]) über isotope Elemente vorliegen, ist es möglich, einiges Nähere über diese H-Kerne auszuführen und Kernmodelle für Isotopen mit H-Kernen im Ring zu entwickeln. Ferner ist eine neue Untersuchung von Rutherford[3]) zu berücksichtigen, die diesen zur Aufstellung von Kernmodellen für C, N, O geführt hat.

1. Die Annahme, daß beim Stickstoffkern im Zentrum ein H_2^+-Kern steht und daß 12 H^+-Kerne auf einem Ring angeordnet sind, möchte ich im Einklang mit Rutherford festhalten, aber ich möchte nicht daran festhalten, daß der Ring sich in 3 Untergruppen (= 3 α-Teilchen) geordnet hat. Vielmehr möchte ich annehmen, daß sich im Ringe noch keine Bildung von Untergruppen vollzogen hat. Der Stickstoffkern wird dann das in Fig. 1 dargestellte Bild geben (die Kreise bedeuten Elektronen, die

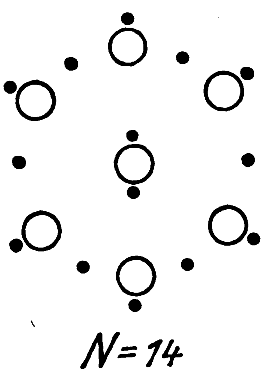


Fig. 1.

Punkte H^+-Kerne). Dieser Kern macht besser als der frühere verständlich, daß beim Beschießen von Stickstoff mit α-Strahlen Teilchen, die aus 3 H^+-Kernen und einem Elektron gebildet sind, und keine α-Teilchen abgeschossen werden, wie es Rutherford gefunden hat. Es bleibt dahingestellt, ob der N-Kern stets diesen Bau hat, oder ob dieser nur eine von mehreren Gleichgewichtslagen darstellt, bei denen eine teilweise Zusammenballung von H^+-Kernen zu Untergruppen stattfindet (also Tautomerie des Kerns).

2. Von obigem N-Kern ausgehend kann man nicht umhin, auch dem in der Reihenfolge des periodischen Systems voranstehenden Element, dem Kohlenstoff, einen ringförmigen Kern zuzusprechen. Denn wenn der sehr symmetrische Ring im Stickstoffkern stabil ist, sollte er auch für sich allein stabil sein. So kommt man also zu einem C-Kern von vollendeter, ebener Symmetrie (vgl. Fig. 2). Dieser

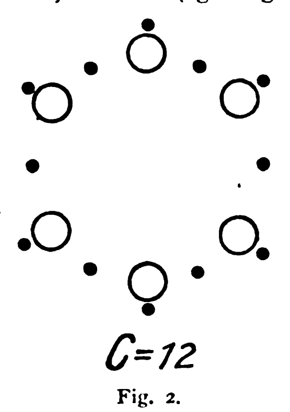


Fig. 2.

erscheint besonders geeignet, das Verhalten des Graphits, der in sechsseitigen Tafeln kristallisiert und dessen Raumgitter nach Debye und Scherrer[1]) aus einem Aufbau von regelmäßigen Sechsecken besteht, zu bedingen.

---

1) E. Gehrcke, Heidelberger Akademie d. Wiss., Sitzungsberichte, 4. Abhandlung 1920.
2) F. W. Aston, Phil. Mag. 39, 449, 611, 1920.
3) E. Rutherford, Proc. Roy. Soc. A., Vol. 97, 1920, S. 374—400.

1) P. Debye und P. Scherrer, diese Zeitschr. 18, 297, 1917.



Fig. 3.

Fig 4.

Fig. 5.

Das Sechseck-Modell des *C*-Atoms, das durch 6 (in Fig. 2 nicht gezeichnete) Außenelektronen in großem Abstand vom Kern vervollständigt wird, scheint auch geeignet, die 4-Wertigkeit des Kohlenstoffs dem Verständnis näher zu führen. Denn von den 6 Außenelektronen werden 2, in der Achse des Ringes, auf jeder Seite der Ringebene, besonders fest gehalten werden.

Das Sechseck-Modell des *C*-Atomkerns ist als eine räumliche Isomere des früher[1]) entwickelten Tetraederkerns anzusprechen. Man hätte also beim Kohlenstoff, entsprechend den beiden Formen Graphit und Diamant, zwei räumlich isomere Kerne: den Sechseck-Ring- und den Tetraeder-Kern. Bei letzterem stehen 6 Innenelektronen in den Mitten der 6 Kanten eines Tetraeders; seine 12 H^+-Kerne lassen sich so, wie früher angegeben, symmetrisch gruppieren, oder aber in den Mittelpunkten der Verbindungslinien der 6 Kernelektronen auf den Seitenflächen des Tetraeders. Nur mit andern Worten ausgedrückt heißt dies: es sitzen die 12 H^+-Kerne auf den Mitten der 12 Kanten eines Oktaeders, und die 6 Kernelektronen sitzen an den 6 Eckpunkten des Oktaeders. Der frühere Tetraederkern und der soeben als Oktaederkern gekennzeichnete unterscheiden sich also nicht in der Anordnung der 6 Kernelektronen voneinander, und beide sind mit ihren elektrostatischen Kraftlinien nach der Symmetrie eines Tetraeders aufgebaut.

Die räumlich isomeren Isotopen des *C* sind durch magnetische und elektrische Ablenkung nicht leicht[2]) zu trennen, vielmehr fallen sie im Massenspektrum zusammen. Wohl aber sollten sie in ihren optischen (Linien- und Banden-) Spektren Verschiedenheiten zeigen.

1) E. Gehrcke, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 779, 1919.

2) Nämlich nur insoweit, als infolge der Verschiedenheit der Lagerung der elektrischen Ladungen im Kern Unterschiede der Massen bedingt werden.

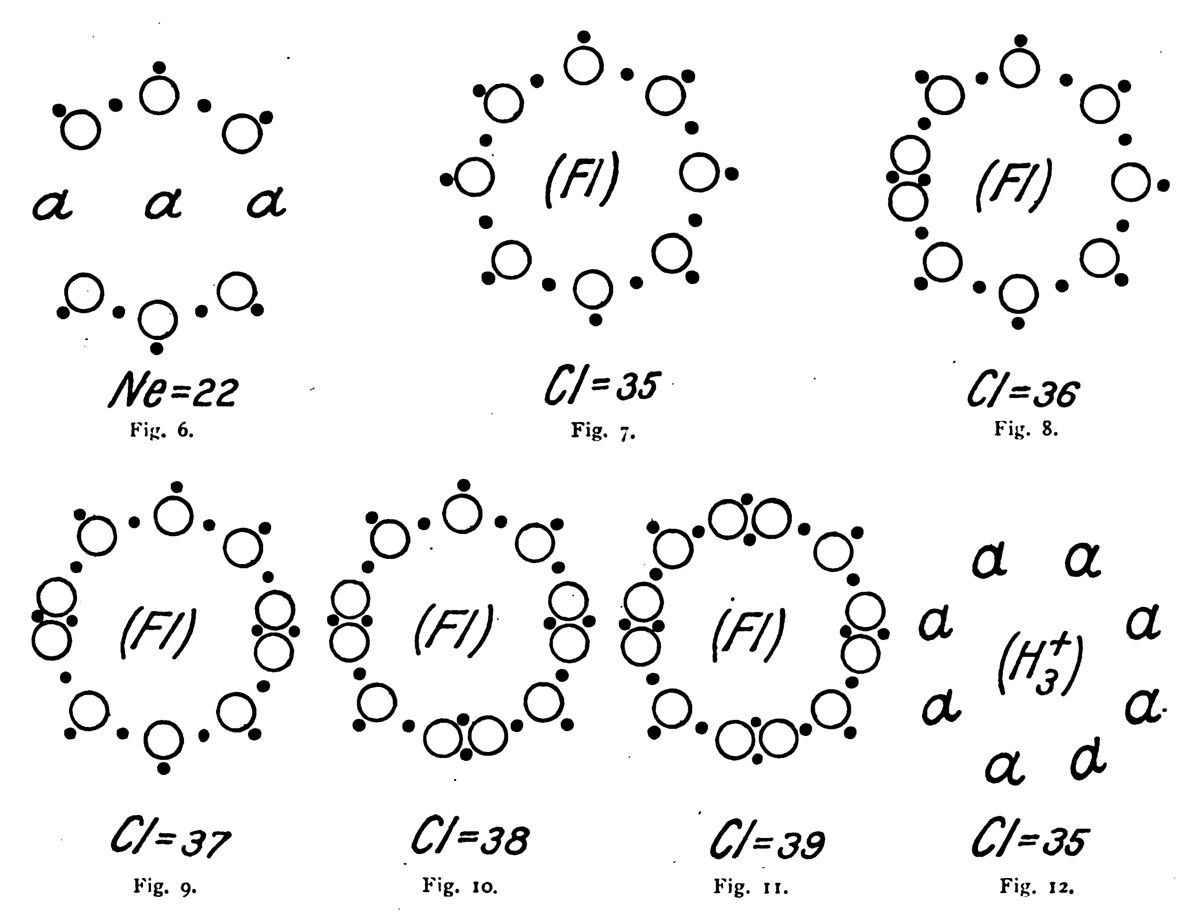
3. Übergehend zum Sauerstoff wird man den Ring, der den *O*-Kern ausmachen soll, ebenfalls nicht zu 4 Untergruppen (4 α-Teilchen) gruppiert annehmen, sondern ihn als Ganzes bestehen lassen; man erhält so einen Ring in Form eines Achtecks (Fig. 3). Dieses Bild des *O*-Kerns erscheint geeignet, das Ergebnis Rutherfords zu begreifen, daß beim Beschießen mit α-Strahlen Teilchen der Masse 3 abgeschossen werden. Ob bei *O* ähnlich wie bei *C* räumlich isomere Kerne, insbesondere ein aus den 8 Kernelektronen gebildeter Würfel, vorkommen, mag in Anbetracht des Mangels erfahrungsmäßiger Anhaltspunkte dahingestellt bleiben.

4. Der im periodischen System auf *O* folgende Kern, Fluor, möge hier übersprungen werden. — Dann kommt Neon. Bei diesem Gase fand Aston, ebenso wie schon Thomson, zwei Isotope der Atomgewichte 20 und 22. Wir werden also nunmehr anzunehmen haben, daß der Ring aus 16 H^+-Kernen und 8 Elektronen fähig wird, 2 weitere H^+-Kerne nebst 2 Elektronen aufzunehmen und stellen versuchsweise folgende Regel zur Ableitung der Isotopen auf: bei Vergrößerung des innersten Atomkerns wird der aus 16 H^+-Kernen und 8 Elektronen bestehende Ring Untergruppen bilden, bestehend aus einzelnen α-Teilchen, aber zunächst unter Wahrung der Grundform des Ringes als eines Achtecks.

Hiernach haben die beiden Isotopen von Neon etwa die in Fig. 4 und 5 dargestellte Kerngestalt, die letztere läßt sich etwas abgekürzt auch so wie Fig. 6 schreiben.

Ob weitere Isotopen oder räumliche Isomere im Gase Neon enthalten sind, erscheint möglich, mag aber, da ihre Menge nur gering zu sein scheint, hier außer Betracht bleiben.

5. Von den folgenden Elementen sei Chlor, weil genau untersucht, behandelt. Unter Anwendung der oben in Nummer 4 aufgestellten Regel erhalten wir hier die in Fig. 7—11 dargestellten Isotopen; (*Fl*) bedeutet den Fluorkern. Es sind dies die fünf von Aston beobachteten *Cl*-Iso-



$Ne = 22$
Fig. 6.

$Cl = 35$
Fig. 7.

$Cl = 36$
Fig. 8.

$Cl = 37$
Fig. 9.

$Cl = 38$
Fig. 10.

$Cl = 39$
Fig. 11.

$Cl = 35$
Fig. 12.

topen. Bemerkenswert ist, daß $Cl = 36$ und 38 die geringste Symmetrie des Kernrings zeigen; diese beiden sind auf Astons Photographien die lichtschwächsten, also seltensten. Es lassen sich auch räumliche Isomeren aufstellen, wie z. B. die durch Fig. 12 gekennzeichnete.

Eine Aufhellung der Frage der räumlichen Isomerie der Kerne ist durch magnetische und elektrische Ablenkung positiver Strahlen erst zu erhoffen, wenn es gelingt, das Auflösungsvermögen im Massenspektrogramm erheblich weiter zu steigern, so daß sehr kleine Gewichtsunterschiede, bedingt durch die verschiedene räumliche Lagerung der H^+-Kerne, merkbar werden.

(Eingegangen 7. Januar 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die erdmagnetische Säkularvariation.

Von Adolf Schmidt.

Was man als Säkularvariation des Erdmagnetismus zu bezeichnen pflegt, ist keine einheitliche Erscheinung. Es werden darin zwei allerdings zunächst nicht scharf gegeneinander abzugrenzende Vorgänge von ganz verschiedenem Charakter zusammengefaßt: ein langsamer, längere Zeit hindurch annähernd gleichmäßiger, mehr oder minder periodischer, Jahrhunderte umspannender Verlauf von vielfach sehr beträchtlicher Schwingungsweite und schnellere, unregelmäßige Schwankungen von geringerem Ausmaß, die bei den verschiedenen Elementen einen gewissen Parallelismus aufweisen.

Der Hauptteil, auf den die Bezeichnung säkular eigentlich beschränkt werden sollte, stellt eine allmähliche, tiefgreifende Umwandlung der (nach Gauß) sogenannten beharrlichen Magnetisierung des festen Erdkörpers dar. Die ihm aufgesetzten Schwankungen gehören in der Hauptsache einem sehr viel schwä-

cheren äußeren (d. h. aus äußeren Ursachen entspringenden) Magnetfelde von verhältnismäßig einfacher Gestalt an, das vermutlich durch einen nach der Birkeland-Störmerschen Theorie des Polarlichts die Erde umkreisenden Elektronenring hervorgerufen wird.

1.

Der Ursprung des beharrlichen Erdmagnetismus ist noch dunkel. Der Umstand, daß er zum weitaus überwiegenden Teile einer homogenen Magnetisierung der Erde mit einer von deren Drehachse nur wenig (ungefähr um $11\frac{1}{2}{}^0$) abweichenden Achsenrichtung entspricht, legt die Vermutung nahe, daß er eine Folge der Erdrotation sei. Ob hierdurch eine Magnetisierung entsteht, und gegebenenfalls, durch welche physikalischen (wohl molekularen) Vorgänge dies geschieht, bleibt freilich zunächst eine offene Frage[1]. Für jene Vermutung spricht aber der Umstand, daß andere Möglichkeiten einer Erklärung kaum bestehen, und sie wird weiter dadurch gestützt, daß auch die säkulare Variation eine Beziehung auf die Erdachse zeigt, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

Zerlegt man das für die Erdoberfläche geltende Potential V der beharrlichen Magnetisierung nach Kugelfunktionen der geographischen Koordinaten, Polabstand u und östliche Länge λ mit a als dem Erdradius, setzt man also[2])

$$V = a \sum_1^\infty {}_n \sum_0^n {}_m c_m^n R_m^n (\cos u) \cos m (\lambda + \alpha_m^n)$$

so ergibt sich aus unsern, freilich kaum 300 Jahre zurückreichenden Erfahrungen nach der grundlegenden Untersuchung von Carlheim-Gyllensköld, daß in erster Annäherung die Amplituden c der einzelnen Glieder konstant sind und ihre Phasenwinkel α der Zeit proportional wachsen, mit anderen Worten, daß sich jedes der durch diese Glieder dargestellten Teilfelder mit konstanter Geschwindigkeit in ostwestlicher Richtung um die Erdachse dreht[3]).

1) Vgl. dazu Arthur Schuster, A critical examination of the possible causes of terrestrial magnetism. Proc. London Phys. Soc. **24**, 3, 121—137, 1912.

2) Über die Bedeutung der bei Zahlenrechnungen gegenüber den sonst üblichen Formen zweckmäßigeren Funktionen R_m^n vgl. diese Zeitschr. **19**, 352, 1918. Der quadratische Mittelwert jedes Gliedes einer nach diesen entwickelten Reihe auf der ganzen Kugelfläche ist gleich seinem Koeffizienten.

3) Sur la forme analytique de l'attraction magnétique de la terre exprimée en fonction du temps. Astronomiska Iakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium, Bd. 5, Heft 5. Stockholm 1896. Ein ausführliches Referat findet man in der Meteorologischen Zeitschr. **14**, 39, 1897, Literaturbericht.

Die Glieder der zwei ersten Ordnungen lauten in der hier gewählten Form der Darstellung

$$\begin{aligned} V:a = &- 1822\, R_0^1 (\cos u) + \\ &+ 387\, R_1^1 (\cos u) \cos (\lambda + 239^0{,}3 + 0^0{,}114\, t), \\ &- 4\, R_0^2 (\cos u) + \\ &+ 123\, R_1^2 (\cos u) \cos (\lambda + 348^0{,}3 + 0^0{,}261\, t), \\ &+ \;\; 68\, R_2^2 (\cos u) \cos 2 (\lambda + 117^0{,}6 + 0^0{,}396\, t). \end{aligned}$$

Die Einheit der Zahlen ist 0,0001 Γ = $0{,}1^4\ \mathrm{cm}^{-1/2}\, g^{1/2}\, \mathrm{sec}^{-1}$; die Zeit t ist in Jahren von 1800 ab gezählt. Die durch die Glieder mit $m = 0$ dargestellte Längsmagnetisierung ändert sich gar nicht; für die drei hier angegebenen Glieder der Quermagnetisierung ergibt sich aus dem Faktor von t eine Periodendauer von rund 3150, 1400 und 450 Jahren.

Bei einer Transformation auf eine andere Achse bleibt nun diese einfache Form von V als Funktion der Zeit nicht erhalten; soweit sie also tatsächlich bei der Beziehung auf die Rotationsachse gilt, drückt sie eine ausgezeichnete Bedeutung dieser letzteren für die Magnetisierung der Erde aus und bringt diese damit in ursächlichen Zusammenhang mit der Erdumdrehung.

Wäre die Erde selbst homogen oder aus homogenen konzentrischen Schichten aufgebaut, so müßte eine durch ihre Umdrehung auf welche Weise auch immer hervorgerufene Magnetisierung gleichfalls homogen oder zum mindesten achsensymmetrisch, ihr Potential also auf die zu $m = 0$ gehörigen Glieder beschränkt sein. Die vorhandene Quermagnetisierung muß daher auf stoffliche oder Zustands-Verschiedenheiten innerhalb der einzelnen Schichten des Erdkörpers zurückgeführt werden. Solche Inhomogenitäten sind in den obersten Schichten tatsächlich vorhanden. Mit wachsender Tiefe nehmen sie im allgemeinen sicherlich mehr und mehr ab, während sich zugleich ihre an der Oberfläche spürbare Wirkung auch noch wegen des steigenden Abstandes von dieser verringert. Das ist in um so höherem Maße der Fall, je größer die Ordnungszahl n ist, da ein Potential von der Form R_m^n mit der $(n+1)$-Potenz der Entfernung vom Mittelpunkt abnimmt.

Diese Erwägungen lassen den Ursprung der Quermagnetisierung, vor allem der höheren Glieder, zunächst in der Erdrinde suchen. Um eine gewisse Anschauung von den für diesen Fall maßgebenden Größenverhältnissen zu gewinnen, sei ein einfaches Beispiel betrachtet. Es bestehe überall eine senkrecht zur Erdoberfläche gerichtete Magnetisierung von der Intensität η in einer Schicht von der Dicke d

und es sei ηd als Funktion des Ortes durch eine Kugelfunktion n-ter Ordnung O_n dargestellt. Dieselbe Funktion gilt dann auch für das an der Oberfläche herrschende Potential V des hieraus entspringenden magnetischen Feldes, und man hat als einander entsprechend

$$V = a \cdot O_n \qquad \eta d = \frac{2n+1}{4n\pi} a \cdot O_n.$$

Nimmt man, möglichst hochgreifend, d zu 100 km an, so führen die Glieder 2. und 3. Ordnung in dem tatsächlich vorhandenen quermagnetischen Felde für η zu Werten, die bis auf 0,5 Γ (d. i. $\Gamma \mathrm{cm}^3 : \mathrm{cm}^3$) ansteigen, also weit über die Beträge hinausgehen, die in irgendwelchen Gesteinen der Erdrinde (mit — meist weit — unter 0,01 liegender Suszeptibilität) durch die Induktion in dem homogenen Hauptfelde hervorgerufen werden könnten. (Diesem letzteren entspricht eine Intensität der Magnetisierung der ganzen Erde von der Dichte 0,08 Γ.) Auch zeigt die Verteilung der Werte von η keinerlei Anklang an andere geographische Tatsachen, wie etwa die Verteilung von Wasser und Land oder diejenige irgendwelcher meteorologischen Elemente.

Schwerer noch als die hieraus entspringenden Bedenken wiegt die anscheinende Unmöglichkeit, auf diesem Wege zu einer Erklärung der Säkularvariation zu gelangen. Die Beschaffenheit der Erdrinde ist etwas Dauerndes. Eine durch sie unmittelbar bedingte Beeinflussung des durch eine gleichfalls konstante Ursache (wie die Erddrehung) geschaffenen Magnetfeldes müßte im wesentlichen unveränderlich sein. Das gilt auch, wenn es sich nicht um eine Induktionswirkung, sondern um einen unmittelbaren Einfluß der stofflichen Beschaffenheit auf eine durch die Rotation hervorgerufene Magnetisierung handelte.

Nur die auf kleinere Gebiete beschränkten, von Ort zu Ort unregelmäßig wechselnden sogenannten lokalen Störungen sind hierbei auszunehmen; denn soweit die spärlichen, darüber bereits vorliegenden Erfahrungen reichen, sind sie zeitlich konstant, so daß ihrer Zurückführung auf die örtliche Beschaffenheit der Unterlage kein grundsätzliches Bedenken entgegensteht. Und in der Tat ist es vielfach gelungen, sie dadurch befriedigend zu erklären. Besonders eingehende Untersuchungen darüber verdankt man Rücker und Thorpe bei der von ihnen durchgeführten magnetischen Vermessung der Britischen Inseln[1]). Die in vielen Felsarten, vor allem in basischen Eruptivgesteinen, durch das Erdfeld induzierte Magnetisierung erweist sich als hinreichend, um Störungen von der Größenordnung von 2000 bis 3000 γ (1 γ = $0{,}1^5 \Gamma$) hervorzurufen, ein Betrag, den die beobachteten Lokalstörungen verhältnismäßig selten erreichen und nur ganz vereinzelt übersteigen.

Bei den vorher erwähnten, weite Gebiete umfassenden Störungen, die in der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen zum Ausdruck kommen, gelangt man dagegen auf diesem Wege zu keiner befriedigenden Lösung; man wird vielmehr dahin geführt, ihre Ursache in tieferen Schichten zu suchen, in denen eine gewisse langsame Massenverschiebung möglich erscheint. Erklärungen auf dieser Grundlage sind mehrfach, zum Teil in recht abenteuerlicher Form (Umlauf eines Trabanten im Innern der als hohl vorgestellten Erdkugel) versucht worden[1]). Wohl am nächsten liegt der Gedanke, dem hypothetischen Eisenkern eine unregelmäßig gestaltete Oberfläche (Hervorragungen und Vertiefungen) und eine langsame Drehung gegenüber der Erdrinde zuzuschreiben. Dann müßte sich aber die säkulare Änderung auf eine bloße Verschiebung des Feldes ohne eine gleichzeitige Gestaltsänderung beschränken, oder anders ausgedrückt, seine Teile von verschiedener Ordnung müßten sämtlich die gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit besitzen, was nicht der Fall ist. So beträgt nach dem früher Mitgeteilten die Umlaufsdauer der zu R^1_1, R^2_1, R^2_2 gehörigen Teilfelder 3150, 1400 und 900 (d. i. 2 · 450) Jahre.

Es bliebe hiernach nichts anderes übrig, als sehr mächtige Schichten zur Erklärung heranzuziehen, innerhalb deren noch merkliche Unterschiede ihrer relativen Geschwindigkeit gegenüber der Erdrinde möglich wären, wobei offenbar diese Geschwindigkeit mit der Tiefe zunähme. Da nun die Umlaufsgeschwindigkeit der einzelnen Teilfelder mit ihrer Ordnungszahl im allgemeinen wächst, so würde folgen, daß ihre Ursache in um so größere Tiefe hinabreichen müßte, je höher ihre Ordnungszahl ist. Mit andern Worten: die magnetisch wirksamen Ungleichförmigkeiten müßten

1) Magnetic Survey of the British Isles for the Epoch January 1, 1891; Phil. Trans. A. 1896, vol. 108. Vgl. dazu A. W. Rücker, On the relation between the magnetic permeability of rocks and regional magnetic disturbances. Proc. Roy. Soc. **48**, 505, 1890. — Bei den sehr viel stärkeren Störungen im Gebiet eines Eisenberges, wie des von Carlheim-Gyllensköld untersuchten bei Kiirunavaara wird man von vornherein an keine andere Ursache denken.

1) Eine ähnliche Auffassung hat in neuerer Zeit H. Wehner vertreten. Besondere Erwähnung verdient ein Versuch von H. Wilde, die Erscheinungen durch ein Modell nachzuahmen. London Roy. Soc. Proc. 1890, 91, 94. Vgl. dazu Äußerungen von Rücker und Bauer in Terrestrial Magnetism **4**, 113 u. 130, 1899.

zum mindesten bis zu einer recht beträchtlichen Tiefe hin um so stärker werden, je mehr man sich von der Erdoberfläche entfernt. Das ist, wie schon an früherer Stelle betont wurde, durchaus unwahrscheinlich; man hat vielmehr das Gegenteil zu erwarten.

Allen diesen Schwierigkeiten, die die angedeutete Erklärung höchstens für einen kleinen Teil des nicht homogenen Erdfeldes möglich erscheinen lassen, weichen die im wesentlichen übereinstimmenden Theorien aus, die A. Schuster[1]) und V. Carlheim-Gyllensköld (a. a. O.) unabhängig voneinander aufgestellt haben. Sie nehmen an, daß die Erde von einem gar nicht oder nicht übereinstimmend mit ihr rotierenden Medium umgeben sei, das eine gewisse elektrische Leitfähigkeit besitzt, und berechnen nun die darin durch die Quermagnetisierung der Erde induzierte Strömung und die von dieser auf die Erde ausgeübte magnetische Wirkung. Es zeigt sich, daß diese Wirkung für jedes einfache Teilfeld $R_m^n (\cos u) \cos m (\lambda + \alpha)$ von derselben Form wie dieses, aber dagegen verschoben ist, und zwar im horizontalen Anteil gegen die Erddrehung, im vertikalen mit ihr. Die Folge ist eine allmählich fortschreitende Ummagnetisierung der Erdkugel, die sich formell als eine von Osten nach Westen gerichtete Verschiebung der einzelnen Teilfelder mit einer bei wachsender Ordnungszahl zunehmenden Geschwindigkeit darstellt - durchaus im Einklang mit der Erfahrung.

Diese gründlich durchgearbeitete Theorie besitzt unzweifelhaft einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit; auf alle Fälle ist sie die einzige bis jetzt aufgestellte, die ernstlich in Betracht kommt. Als gesichert würde sie anzusehen sein, wenn das von ihr geforderte äußere Magnetfeld der Erde als tatsächlich bestehend nachgewiesen würde. Soweit darüber die bisherigen Untersuchungen über die Verteilung der erdmagnetischen Kräfte an der Erdoberfläche Aufschluß geben, scheint dies allerdings nicht der Fall zu sein; das aus ihnen folgende äußere Feld weicht in wesentlichen Punkten von dem jener Theorie entsprechenden ab[2]). Indessen ist es keineswegs ausgeschlossen, daß die Widersprüche eine bloße Folge der Fehler und Lücken des bisherigen Beobachtungsmaterials sein mögen. Von der dem Abschlusse nahen einheitlichen magnetischen Vermessung der bis jetzt ungenügend bekannten Gebiete, besonders der Ozeane, die man der Umsicht und Tatkraft L. A. Bauers verdankt, darf in nicht zu ferner Zukunft eine sichere Entscheidung der Frage erwartet werden. Fällt sie bejahend aus, so bedarf es zur vollständigen Durchführung der Theorie nur noch genauerer Feststellungen über das Verhalten der Gesteine unter dem Einflusse schwacher, aber dauernd wirkender magnetischer Kräfte und damit über den Vorgang der allmählichen Magnetisierung des Erdkörpers. Soweit diese die Erdrinde betrifft, würden die in dieser vorhandenen regionalen Unterschiede für die Erklärung feinerer Einzelheiten im Verlauf der säkularen Variation Bedeutung gewinnen können.

Die in den früheren Ausführungen gestreifte Frage nach dem Ursprung der Quermagnetisierung (wie auch der Inhomogenität der Längsmagnetisierung) bleibt auch dann, wenn sich die geschilderte Theorie bewähren sollte, offen. Diese setzt ja die Quermagnetisierung voraus und richtet sich ausschließlich auf die Frage, warum und wie sie sich ändere. Immerhin würde mit einer hier erzielten Lösung auch für jene weitere Frage manches gewonnen sein, wäre es selbst nur, daß die eine oder andere an sich möglich erscheinende Erklärung ausgeschlossen und damit das Feld der zu erwägenden Möglichkeiten eingeschränkt würde.

Auf dem Boden der geschilderten Theorie muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß die Erde infolge der Bewegung des Sonnensystems durch den Weltraum nacheinander in Gebiete mit verschiedener Leitfähigkeit gelangt. Das würde zeitliche Schwankungen in der Geschwindigkeit des Ablaufs der säkularen Variationen zur Folge haben, die überall auf der Erde gleichzeitig eintreten. Auf beschränktem Gebiet werden derartige Schwankungen in der Tat beobachtet, so im Gange der Deklination im westlichen und mittleren Europa eine starke Verlangsamung um die Jahrhundertwende und eine noch beträchtlichere Beschleunigung während des laufenden Jahrzehnts. Beispielsweise betrug die jährliche Abnahme in Potsdam 1890: 6,'2, 1900: 4,'3, 1910: 8,'0, 1915: 9,'5. Diese Schwankungen gehen weit über die aus der Theorie folgenden hinaus und erklären sich auch nur zu einem kleinen Teile aus den im nächsten Abschnitt behandelten kurzperiodischen Vorgängen. Um aber zu entscheiden, ob es sich dabei nur um örtlich begrenzte oder um erdumfassende Erscheinungen handelt, bedarf man jahrzehntelanger, zuverlässiger Beobach-

1) On electric currents induced by rotating magnets, and their application to some phenomena of terrestrial magnetism. Terr. Magn. 1, 1—17, 1896.

2) Ad. Schmidt. Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte **21**, 2, 27, 1898.

tungsreihen von einer größeren Anzahl einigermaßen gleichmäßig über die Erde verteilter Stationen, als bisher zu Gebote stehen.

Der in der Schuster-Gyllensköldschen Theorie betrachtete Induktionsvorgang läßt den zur Erdachse symmetrischen Teil des Erdmagnetismus, der durch die Funktionen R_0^n dargestellt wird, — die Längsmagnetisierung — ungeändert. Das gilt insbesondere von dem nach der Erdachse gerichteten Teil des magnetischen Moments und damit wegen der nahezu festen Abweichung der magnetischen von der Rotations-Achse auch vom Moment selbst. Das schließt aber natürlich die Möglichkeit nicht aus, daß dieser Teil Veränderungen durch andere Ursachen erfahren mag. Solche scheinen in der Tat nach einer Untersuchung von L. A. Bauer stattzufinden[1]). Dieser vergleicht einerseits die Ergebnisse der Potentialberechnungen für die Epochen 1843 und 1880, 1885 miteinander, andererseits Beobachtungen aus den Jahren 1890 und 1900 an 32 sorgfältig ausgewählten, nach Möglichkeit über die Erde verteilten Stationen. Beide Berechnungen, die somit auf vollkommen voneinander unabhängiger Beobachtungsgrundlage fußen, ergeben in naher Übereinstimmung eine mittlere jährliche Abnahme des magnetischen Moments der Erde um etwa $^1/_{2400}$ seines Betrags. Man kann diese Feststellung nicht wohl als bloße Folge von Beobachtungsungenauigkeiten ansehen wollen, so schwer verständlich sie auch ist. Zu ihrer Erklärung kann man in erster Linie an die entmagnetisierende Wirkung des im Folgenden behandelten magnetischen Außenfeldes denken, das dem Felde der beharrlichen inneren Magnetisierung entgegengesetzt gerichtet ist. Wenn aber diese eine unmittelbare Folge der Umdrehung der Erde ist, so könnte schwerlich eine ständig fortschreitende, sich dem Nullzustande nähernde Entmagnetisierung stattfinden, sondern nur eine längst erreichte Annäherung an einen etwas abgeschwächten Zustand und vielleicht ein mehr oder minder periodisches Schwanken um diesen. Eine endgültige Bestätigung des angeführten Ergebnisses würde durchaus gegen die Hypothese der vorwiegenden Magnetisierung durch die Rotation sprechen.

2.

Daß die kürzeren, anscheinend unregelmäßigen Schwankungen im Verlaufe der säkularen Variation in einem engen Zusammenhange mit den wechselnden Sonnenzuständen stehen, ist unverkennbar und hat daher auch schon wiederholt Beachtung und Erwähnung gefunden[1]). Eine eingehendere, auf die Beobachtungen mehrerer Observatorien gestützte Untersuchung darüber hat aber erst L. A. Bauer angestellt, wobei er als empirische Grundlage die Abweichungen f und g der von ihm als magnetische Lokalkonstanten bezeichneten Größen

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ und } G = \sqrt{X^2 + Y^2 + \tfrac{1}{4} Z^2}$$

von ihren durch formelmäßige Ausgleichung erhaltenen Mittelwerten benutzte[2]). (X, Y, Z sind die nach Norden, Osten und unten gerichteten Komponenten des erdmagnetischen Feldes.) Bauer findet, daß diese Abweichungen einen zeitlichen Gang besitzen, der dem der Sonnenflecken-Relativzahlen N ähnlich, aber etwas gegen ihn verschoben ist, und zwar ergeben 8 rings um die Erde verteilte Magnetwarten im Mittel eine Verspätung von etwa 2 Jahren. Dementsprechend findet er weiter, daß die Quadratsumme der Abweichungen merklich sinkt, wenn man die Ausgleichsformel durch ein Glied vervollständigt, das dem um 2 Jahre früheren Werte von N proportional ist.

Dieses Ergebnis ist leicht verständlich; es ist eine unmittelbare Folge der unter dem Namen der Nachstörung bekannten Erscheinung, die darin besteht, daß bei jeder Störung eine Änderung des mittleren Zustandes des Feldes eintritt, die in der Folgezeit allmählich mit abnehmender Geschwindigkeit wieder zurückgeht. Diese Änderung entspricht der Wirkung eines der beharrlichen Magnetisierung entgegengesetzten Feldes, das an jedem Orte eine nahezu feste Richtung besitzt. Infolgedessen sind die gleichzeitigen Schwankungen der einzelnen Komponenten, wie auch

1) The physical decomposition of the Earth's permanent magnetic field, Nr. 5. Terr. Magn. **9**, 173—186, 1904.

1) So besonders bei E. Leyst, Die Variationen des Erdmagnetismus, S. 166ff. Moskau 1910. (Die dortige, auf die Potsdamer Säkularvariation bezügliche Bemerkung auf S. 168 trifft nicht zu, da es statt 7',57 und 1',68 [als Änderung in zwei aufeinanderfolgenden Jahren] in guter Übereinstimmung 4',57 und 4',68 heißen muß. Vgl. Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam und Seddin im Jahre 1910, S. 4, Anm., sowie ebenda im Jahre 1907, S. 4.) — Vgl. ferner: Ad. Schmidt, Der säkulare Gang der magnetischen Deklination von 1890 bis 1906 nach den Beobachtungen des Observatoriums zu Potsdam, S. 16, 1907. Hier wird (S. 24) zuerst darauf hingewiesen, daß die Unregelmäßigkeiten des säkularen Ganges wahrscheinlich in der Hauptsache dem kleinen äußeren Felde angehören.

2) L. A. Bauer, Relation between the secular variation of the Earth's magnetism and solar activity. Terr. Magn. **23**, 1 u. 61, 1918. — Vgl. ferner: Ad. Schmidt, Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam und Seddin in den Jahren 1900—1910, S. 35ff., Berlin 1916 und N. A. F. Moos, Magnetic observations made at the Gov. Obs. Bombay for the period 1846 to 1906 and their discussion. Bombay 1910, Part II, S. 265 u. 273ff.

der zuvor erwähnten Größen F und G einander annähernd proportional. Es genügt deshalb zunächst, die Betrachtung auf eine davon zu beschränken. Am zweckmäßigsten ist es im allgemeinen, die Nordkomponente X oder die davon wenig verschiedene Horizontalintensität zu wählen, deren Schwankungen wesentlich größer als diejenigen von Y und aus instrumentellen Gründen zuverlässiger zu bestimmen sind, als diejenigen von Z.

Da nun einerseits mit wachsender Fleckenzahl die Häufigkeit und Stärke der Störungen steigt, andererseits hierdurch die Mittelwerte der magnetischen Elemente stets in demselben Sinne beeinflußt werden, so müssen deren Abweichungen von ihrem normalen Zustande annähernd parallel mit der Sonnenfleckenentwicklung verlaufen. Und da die Wirkung des Sonneneinflusses nicht auf den Augenblick seines Eintretens beschränkt bleibt, sondern sich in der Nachstörung über einen längeren Zeitraum erstreckt, so muß sie gegenüber der auslösenden Ursache eine gewisse Verspätung zeigen. Dies soll im Folgenden noch etwas näher ausgeführt werden.

Die, während einer kurzen Zeit dt herrschende Sonnenaktivität A bewirke in dieser Zeit eine Steigerung der (durch irgendeine ihrer Komponenten gemessene) Stärke I des Nachstörungsfeldes um $dI = Adt$. Hiervon sei nach Verlauf der Zeit τ noch der Bruchteil $A\varphi(\tau)dt$ vorhanden, worin $\varphi(\tau)$ eine ständig fallende, von $\varphi(0) = 1$ auf $\varphi(\infty) = 0$ abnehmende Abklingungsfunktion bezeichnet. Dann ist, wenn I ausschließlich aus dieser Sonnentätigkeit entspringt, deren wechselnde Stärke als Funktion der Zeit durch $A(t)$ ausgedrückt sei, im Augenblick ϑ

$$I = \int_{-\infty}^{\vartheta} A(t)\,\varphi(\vartheta - t)\,dt.$$

Die einfachste und nächstliegende Annahme über das Abklingen der einzelnen Teile von I ist nun die, daß die Abnahme eines jeden proportional seinem noch vorhandenen Betrage und bei allen in gleicher Weise erfolge. Das führt auf den Ansatz

$$\varphi(\tau) = \varepsilon^{\tau} = e^{-\lambda\tau} = e^{-\tau:\tau_0}.$$

Dabei ist nach einer jetzt häufig gebrauchten Ausdrucksweise $\tau' = 0.693\,\tau_0$ die Halbwertszeit. Bei diesem Gesetz, und nur bei ihm, ist auch die Abnahme des Gesamtfeldes in jedem Augenblick seiner Stärke proportional. Das ist unmittelbar ersichtlich und ergibt sich auch leicht aus der der obigen Gleichung entspringenden Beziehung

$$\frac{dI}{d\vartheta} = A(\vartheta) + \int_{-\infty}^{\vartheta} A(\vartheta)\,\varphi'(\vartheta - t)\,dt,$$

die in diesem Falle wegen $\varphi'(\tau) = -\lambda\varphi(\tau)$ in

$$\frac{dI}{d\vartheta} = A(\vartheta) - \lambda I$$

übergeht.

Für einen konstanten Wert A_0 von A erhält man

$$I = A_0 : \lambda = A_0\tau_0,$$

also einen gleichfalls konstanten, endlichen Betrag. Setzt aber A_0 erst im Augenblick $t = \vartheta - \tau$ ein, und war vorher $A = 0$, so ist zur Zeit ϑ noch nicht der volle Endwert von I erreicht, sondern es fehlt daran noch der Bruchteil $e^{-\lambda\tau}$ davon. Das ist für $\tau = 2{,}3\,\tau_0$ ein Zehntel, für $\tau = 4{,}6\,\tau_0$ ein Hundertstel usw.

Ist A eine periodische Funktion der Zeit

$$A = C \sin \varkappa t,$$

so ergibt sich

$$I = Ce^{-\lambda\vartheta}\int_{-\infty}^{\vartheta} \sin \varkappa t\, e^{\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{Ce^{-\lambda\vartheta}}{\varkappa^2 + \lambda^2}\left[e^{\lambda t}(\lambda \sin \varkappa t - \varkappa \cos \varkappa t)\right]_{-\infty}^{\vartheta}$$

$$I = \frac{C}{\sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}} \sin(\varkappa\vartheta - \varsigma) \text{ mit } \operatorname{tg}\varsigma = \frac{\varkappa}{\lambda} = \varkappa\tau_0.$$

Da λ positiv ist und auch $\varkappa$, ohne daß der Allgemeinheit Eintrag geschieht, positiv angenommen werden kann, so liegt ς im ersten Quadranten, d. h. die Verspätung beträgt höchstens ein Viertel der Periodendauer T. Diesen Höchstwert erreicht sie für $\lambda = 0$. Auch in diesem Falle, in dem keine spontane Abnahme des Feldes erfolgt, bleibt doch — was übrigens ohne weiteres einzusehen ist — I endlich; es wird

$$I = -\frac{C}{\varkappa}\cos \varkappa t = -\frac{CT}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Die solare Aktivitätsschwankung ist nun in der Tat annähernd periodisch; die Dauer eines Zyklus beträgt rund 11 Jahre, so daß $\varkappa = 2\pi : 11 = 0{,}57$ wird. Die von Bauer festgestellte Verspätung um 2 Jahre, d. i. um $\varsigma = 65^0$ liefert $\operatorname{tg}\varsigma = 2{,}2$ und $\lambda = 0{,}26$ oder $\tau_0 = 3{,}8$ Jahre, und die Halbwertszeit $\tau' = 2{,}7$ Jahre. Für ε folgt $0{,}77$; es vermindert sich also I, von dem Zuwachs durch neue Aktivitätswirkungen abgesehen, jährlich um fast ein Viertel seines Betrags. Der Faktor $1 : \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}$ endlich wird gleich 1,6. Die Bedeutung dieser Zahlen darf freilich nicht überschätzt werden; das geht schon aus dem Um-

stande hervor, daß eine kleine Änderung der zugrunde gelegten Angabe von 2 Jahren für die Phasenverspätung einen beträchtlichen Einfluß auf die daraus abgeleiteten Werte hat. Immerhin vermitteln diese eine gewisse Anschauung von den Vorgängen im allgemeinen und können zu einer ersten Orientierung dienen.

Nimmt man nun die Sonnenfleckenzahlen N als genähertes Maß der Aktivität A an, so wird man im einfachsten Falle $A = a + bN$ setzen können, wobei a und b zwei positive Konstanten sind. Daß nicht etwa a verschwindet, zeigt sich darin, daß auch in den ganz oder nahezu fleckenfreien Jahren noch recht merkliche Aktivitätswirkungen auftreten. Bei dem freilich nicht streng mit den Störungsvorgängen zu vergleichenden, aber doch verwandten Phänomen der täglichen Variation ist $a:b$ ungefähr von der Größenordnung von 100. Für bN, das zwischen 0 und einem Höchstwerte $2C$ periodisch schwankt, kann schematisch $C + C \sin \varkappa t$ gesetzt werden, so daß $A = (a + C) + C \sin \varkappa t$ wird. Dem Vorausgehenden zufolge wird dann

$$I = (a + C) : \lambda + \frac{C}{\sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}} \sin(\varkappa t - \varepsilon),$$
$$I = 3{,}8\,(a + C) + 1{,}6\,C \sin(\varkappa t - 65^0).$$

Die Amplitude $2 \cdot 1{,}6\,C$ der periodischen Schwankungen ergibt sich aus den Beobachtungen; sie ist die Differenz der größten Abweichungen von dem ausgeglichenen Gange. Dabei ist freilich eine gewisse Willkür nicht zu umgehen. Benutzt man Jahresmittel des Ganges der magnetischen Elemente, so muß man damit rechnen, einen zu niedrigen Wert zu erhalten, da in diesem bereits eine gewisse Ausgleichung zur Wirkung kommt. Bei Monatsmitteln ist umgekehrt ein zu hoher Wert nicht unwahrscheinlich, da in ihnen möglicherweise noch ein fremder Einfluß in Gestalt eines jährlichen Ganges steckt. Danach wird man indessen mit einem dazwischen liegenden Werte der Wahrheit einigermaßen nahe zu kommen hoffen dürfen.

Als Beispiel mögen die Potsdamer Beobachtungen von 1892—1910 dienen. Die Jahresmittel von X geben hier rund $30\,\gamma$, die Monatsmittel $45\,\gamma$ für $3{,}2\,C$, so daß $C = 12\,\gamma$ angenommen werden kann. Die entsprechende Schwankung in N betrug im Mittel der zwei Sonnenfleckenperioden, die annähernd auf diese Zeit entfallen, 80 Einheiten, so daß $80\,b = 2\,C = 24$ gilt und $b = 0{,}3$ folgt. Nimmt man für a dem Gesagten zufolge das Hundertfache an, so hat man $a = 30\,\gamma$ zu setzen und daraus ergibt sich für den unbekannten, konstanten Anteil $3{,}8\,(a + C)$ der Betrag von rund $160\,\gamma$. Das bedeutet die nach Süden gerichtete Hauptkomponente des Nachstörungsfeldes in Potsdam zur Zeit seiner schwächsten Entwicklung. Dieser Wert ist sowohl mit der Theorie von Störmer, wie mit den Ergebnissen der Potentialberechnung für den beharrlichen Erdmagnetismus seiner Größenordnung nach durchaus verträglich.

Wie schon bemerkt wurde, haben alle diese Betrachtungen nur den Wert orientierender Abschätzungen. Eine schärfere Untersuchung, für die schon des umfangreichen Tabellenmaterials halber, das sie erfordert, hier nicht der Ort ist, muß von der Voraussetzung schematischer Fälle absehen und den wirklichen Gang von N und I im einzelnen zugrunde legen. Einen ersten Versuch in dieser Richtung, der für das Minimum des Nachstörungsfeldes in demselben Sinne wie zuvor die Grenzwerte von rund $100\,\gamma$ und $200\,\gamma$ ergab, habe ich an der früher (S. Anm. 2, S. 156) erwähnten Stelle (S. 36, 37) gemacht, dabei gleichfalls die oben genannte Potsdamer Reihe zugrunde legend. Zu abschließenden Ergebnissen kann man indessen nach den Beobachtungen an einer einzelnen Station überhaupt nicht gelangen; denn in diesem Falle muß die keineswegs sichere Annahme gemacht werden, daß die unregelmäßigen Schwankungen im säkularen Gange ausschließlich dem betrachteten Nachstörungsfelde entspringen. Es ist aber nicht nur möglich, sondern sogar wahrscheinlich, daß daran auch ein sekundäres inneres Feld beteiligt ist. Eine zuverlässige Entscheidung darüber und gegebenenfalls eine Zerlegung der ganzen Schwankung in diese zwei Teile ist aber bekanntlich nur möglich, wenn Beobachtungen von genügend vielen Orten vorliegen, um die Erscheinungen für die gesamte Erdoberfläche hinreichend genau zu definieren.

Schließlich bleibt noch ein sehr wichtiger Umstand zu erwähnen, der bei einer schärferen Untersuchung beachtet werden muß. Die Annahme einer einfachen Exponentialfunktion für $\varphi(\tau)$ ist nicht streng, ja für kleine Werte von τ nicht einmal annähernd zutreffend. Tatsächlich erfolgt die Abnahme von I in der ersten unmittelbar an eine Störung anschließenden Zeit sehr viel schneller, als später. Als Anfangswert der Halbwertzeit ergab sich mir früher aus Potsdamer Beobachtungen der geringe Betrag von einem Tage, also nur rund ein Tausendstel des Wertes, der für die spätere Zeit gilt[1]). Die weitere Verfolgung der

1) Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam und Seddin im Jahre 1912, S. 31, sowie ebenda im Jahre 1913, S. 30.

hieraus entspringenden Aufgaben muß besonderen Untersuchungen überlassen bleiben.

Dagegen rechtfertigt sich hier noch ein Hinweis auf die Bedeutung der besprochenen Erscheinung für die magnetische Vermessung der Erde. Bei dieser handelt es sich darum, für möglichst zahlreiche über die Erdoberfläche zerstreute Punkte die einem bestimmten Zeitpunkt entsprechenden Normalwerte der erdmagnetischen Elemente zu ermitteln. Die Messungen an diesen Orten, die diesem Zwecke dienen sollen, können nun natürlich nicht gleichzeitig ausgeführt werden, sondern verteilen sich über einen Zeitraum von vielen Jahren. Die unmittelbaren Messungsergebnisse müssen daher auf die gewählte Epoche reduziert werden. Bei Punkten, die in der Nähe einer Magnetwarte liegen, hat das keine Schwierigkeit, da die zeitlichen Änderungen des magnetischen Zustandes an benachbarten Orten lange Zeit hindurch keinen merklichen Unterschied aufweisen. Für die die große Mehrzahl bildenden Punkte aber, die weitab von jedem Observatorium gelegen sind, muß man den Betrag der säkularen Schwankung und damit den der anzubringenden Reduktion auf die Epoche durch besondere Untersuchungen zu bestimmen suchen. Dabei hat man sich bis jetzt stets darauf beschränkt, die im ersten Abschnitt behandelte mittlere Säkularvariation zu berücksichtigen, die man interpolatorisch aus derjenigen an nicht zu fernen Orten, von denen wiederholte Messungen vorlagen, ableitete. Man vernachlässigt bei diesem Verfahren die zeitlich unregelmäßigen Schwankungen, die doch Beträge (bis zu 20, ja 30 γ) erreichen, die über andere vermeidbare Fehler hinausgehen. Diese Vernachlässigung ist um so weniger zu rechtfertigen, als sie nicht durch sachliche Schwierigkeiten bedingt ist. Jene Schwankungen sind ja, im Gegensatz zu allen andern erdmagnetischen Erscheinungen (auch der mittleren Säkularvariation) eine verhältnismäßig einfache Funktion des Ortes, so daß sie aus den Beobachtungen einer kleinen Anzahl gut verteilter Observatorien mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln sind[1]).

1) Vgl. die Ausführungen über diesen Punkt in: Archiv des Erdmagnetismus **3**, 12ff., 1918.

(Eingegangen 3. November 1920.)

BESPRECHUNGEN.

Ph. Forchheimer, Hydraulik. gr. 8⁰. X u. 566 S. m. Fig. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1914. Geh. M. 18.—, geb. M. 19.—.

R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik. I. Teil (Sammlung mathematisch-physikalischer Schriften. Nr. 17). 8⁰. VIII u. 212 S. m. 72 Textfiguren. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1914. Geh. M. 5.40.

Die Besprechung dieser beiden Bücher kommt arg verspätet, doch kommt sie, da es sich um Werke von bleibendem Wert handelt, nicht zu spät. Sie sollte ursprünglich bis zu dem mit kurzer Frist angekündigten Erscheinen des II. Teiles des v. Misesschen Buches verschoben werden. Durch den Kriegsausbruch ist dessen Erscheinen aber verhindert worden und wird, da nach Angabe des Verfassers das Material zu ihm noch in Straßburg in den Händen der Franzosen lagert, auch jetzt noch nicht erscheinen können.

Beide Bücher behandeln von den Strömungsgesetzen des Wassers denjenigen Teil, der hauptsächlich dem Bauingenieur von Wichtigkeit ist; im Vordergrund des Interesses steht das Strömen des Wassers durch Flüsse und Kanäle, sowie in Rohrleitungen. Die maschinentechnischen Probleme der Strömung durch Turbinen, Pumpen und dergl. werden nicht behandelt. In ihrer Tendenz sind beide sehr verschieden, dabei jedes in seiner Richtung wertvoll.

Das Forchheimersche Buch, dessen Entstehung an den Enzyklopädieartikel des Verfassers anknüpft, ist eine ungeheuer reichhaltige Materialsammlung von theoretischen und experimentellen Untersuchungen auf dem erwähnten Gebiet; es enthält außerdem zahlreiche Originalbeiträge sowohl des Verfassers wie auch anderer Fachmänner. So ist es dem auf diesem Gebiete praktisch oder wissenschaftlich Arbeitenden ein ungemein wertvolles Nachschlagebuch. Das Material ist dabei lehrhaft verarbeitet und systematisch geordnet, so daß es für das Studium der Ingenieur-Hydraulik ebenfalls empfohlen werden kann.

Das v. Misessche Buch zeigt im Gegensatz zu der mehr referierenden Art Forchheimers eine knappe, ihrem Hauptzweck nach lehrhafte Darstellung, die, soweit irgend möglich, an die exakte Theorie anknüpft und eine starke Eigenart zeigt. Das Versuchsmaterial, das in der Hydraulik immer eine große Rolle spielt, da die Theorie die zum Teil sehr schwierigen Aufgaben nicht bewältigen kann, ist von v. Mises vielfach nach neuen Gesichtspunkten bearbeitet. Das Buch enthält eine Reihe bemerkenswerter Originalbeiträge, so besonders auf dem Gebiete des Widerstandes von Rohrleitungen, ferner auch in der Theorie der Staukurven. Der praktischen Benutzbarkeit der Ergebnisse ist durch neue graphische Darstellungen und rechnerisch zweckmäßige Zurechtmachung der Formeln, sowie durch Erläuterung von Beispielen Rechnung getragen.

Die Gesetze der Wasserströmung sind — abgesehen von einem gewissen historisch gewordenen Bestand der Experimentalphysikvorlesungen — den Physikern wenig bekannt. Sie enthalten jedoch viel Reizvolles und zum Nachdenken Geeignetes, so daß man gerne diejenigen Physiker, die durch Quanten-

und Atomtheorien nicht ganz absorbiert sind, auf diese Dinge hinweisen möchte. L. Prandtl.

G. Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Vierte verbesserte Auflage. gr. 8°. VI und 740 S. Berlin und Leipzig 1919, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger. Geh. M. 100.—, geb. M. 110.—.

Ein mathematisches einführendes Lehrbuch, welches in verhältnismäßig kurzer Zeit seine vierte Auflage erlebt, muß pädagogische Vorzüge haben. In der Tat entspricht das vorliegende Werk in hohem Maße seinem Zweck. Es trägt durchaus den Charakter einer Einführung, dazu bestimmt, den Leser, welcher mehr oder weniger den Anforderungen des Abiturientenexamens genügt, mit sorgsamer pädagogischer Hand so weit zu führen, daß er die einfachsten der wichtigen Anwendungen der Mathematik auf Naturwissenschaften oder Technik verstehen kann. Das Buch wäre vielleicht noch brauchbarer für manchen Studierenden der Physik, wenn die Lehre von den erzwungenen Schwingungen und der Resonanz eine ausführlichere Behandlung erfahren hätte. — In jedem Falle ist es dem Anfänger, besonders zum Selbststudium, zu empfehlen.
R. Courant.

G. Mie, Das Wesen der Materie I. Moleküle und Atome. gr. 8°. IV u. 122 S. m. 25 Fig. 4. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1919. M. 1.60, geb. M. 1.90. Dazu Teuerungszuschläge des Verlags.

Verf. gibt in einem ersten Teil ein Bild von der körnigen Struktur der Materie und macht dann die Annahme einer Molekulartheorie durchaus plausibel.

Im zweiten Teil erledigt er sich der Aufgabe, über den Durchmesser und die Zahl der Moleküle etwas zu erfahren. Dabei werden unter anderem die Radiometerwirkung, die Brownsche Molekularbewegung und Zustandsschwankungen im Sinne von Einstein und Smoluchowski erörtert.

In einem hieran anschließenden Teil beantwortet Verf. die Frage nach der Sichtbarkeit der Moleküle und kommt zu dem Resultat: auch die Materie ist ein trübes Medium und man kann z. B. aus dem Himmelsblau auf die Anzahl der Moleküle im cm³ schließen.

Im letzten Teile geht Verf. näher ein auf die Grundlagen der Chemie, die spez. Wärme der Gase und festen Körper, den Satz von der Äquipartition der Energie auf die einzelnen Freiheitsgrade und auf die Interferenz von Röntgenstrahlen nach Laue und den Braggs; auch werden einige Blicke in die flüssigen Kristalle, die optischen und Röntgen-Spektra und in das period. System der Elemente geworfen. Tieferen Einblick in die spez. Wärmen die optischen und Röntgen-Spektra gewährt besonders die Quantentheorie, auf die Verf. nicht zu sprechen kommt.

Auch viele andere schöne Dinge, die zur Vertiefung des Atombaus dienen, fehlen gänzlich, wie z. B. die Theorie des Diamagnetismus, des Paramagnetismus, der Dispersion, der Zerstreuung von Röntgenstrahlen und von α-Teilchen durch Materie oder die van der Waalssche Kohäsion.

Für den Fachmann bietet das Werk nichts Wesentliches, obwohl es für den Laien mancherlei Interessantes und Lehrreiches enthält. H. Falkenhagen.

M. Grübler, Lehrbuch der technischen Mechanik. Zweiter Band. Statik der starren Körper. gr. 8°. XII u. 280 S. m. 222 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1919. M. 18.—.

Nachdem der Verfasser im ersten Bande seines Lehrbuches als Bewegungslehre jene Beziehungen der Mechanik vorweg dargestellt hat, welche unabhängig von den physikalischen Eigenschaften der Materie sind, geht er nunmehr im zweiten Bande zur eigentlichen Mechanik über, indem er die hierfür wichtigste Materialkonstante, die Masse, einführt und daraus weitere Grundbegriffe, wie Kraft, Arbeit ableitet. Im übrigen werden dann die hauptsächlichsten Begriffe und Lehrsätze der Statik behandelt. In dem Bestreben, die Darstellung möglichst klar zu gestalten, führt der Verfasser verschiedene neue Bezeichnungen ein. Dabei wäre jedoch etwas mehr Vorsicht wünschenswert gewesen. So wird z. B. das Wort Dyade, dem bereits in der Vektorrechnung eine ganz bestimmte Bedeutung zukommt, hier auch noch zur Bezeichnung eines Systems von zwei windschiefen Kräften verwandt. Abgesehen von solchen nebensächlichen Mängeln ist die Darstellung sonst gut und verständlich. Obwohl das Buch in erster Linie für Ingenieure geschrieben ist, so hat es durch die starke Betonung der grundlegenden Begriffe und deren Klarlegung doch auch für einen weiteren Kreis naturwissenschaftlich gebildeter Leser Interesse. Betz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Dozent für physikalische Chemie an der Universität Manchester I. M. Pring zum Leiter der physikalisch-chemischen Abteilung am Woolwich-Arsenal, der a.o. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl Heß zum Leiter der organisch-chemischen Abteilung des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster Dr. Erwin Madelung in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt a. M., der ord. Professor der Chemie an der Bergakademie Clausthal Dr. Wilhelm Biltz zum ord. Professor für anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Hannover, der ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Otto Eggert in gleicher Eigenschaft an die Landwirtschaftliche Hochschule Berlin.

Neuer Lehrauftrag: Professor Dr. Wilhelm Westphal an der Universität Berlin für ausgewählte Kapitel aus der Experimentalphysik für Studierende der Zahnheilkunde und Pharmazeuten.

Gestorben: Der ord. Professor für Physik an der Universität Wien und ehemalige Direktor der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik Hofrat Dr. Wilhelm Trabert, der Dozent der Chemie an der Universität Perugia Professor Giuseppe Bellucci, der frühere Professor der Chemie an der Universität Oxford Dr. William Odling.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1921. Redaktionsschluß für No. 8 am 20. März 1921. 22. Jahrgang.

INHALT:

Friedrich Dolezalek.

Am 10. Dezember 1920 wurde uns nach kaum 14 tägiger schwerer Krankheit Professor Dr. Friedrich Dolezalek entrissen. Für die Wissenschaft, die noch viel von ihm erwarten durfte, ist er unersetzlich. Für seine Freunde, Schüler und Assistenten, die tief um ihn trauern, bedeutet sein Tod den Verlust nicht nur eines hochbegabten Lehrers, sondern eines Freundes von seltener Herzensgüte.



Friedrich Dolezalek wurde am 5. Februar 1873 in Szigeth in Ungarn geboren. Seine früheste Jugend verlebte er in Göschenen, wo sein Vater den Bau des Gotthardtunnels leitete. Dann besuchte er das Realgymnasium in Hannover, und begann sein Studium auf der dortigen Hochschule. Von den Vorlesungen Runges sprach er mit besonderer Freude.

1895 siedelte er nach Göttingen über, um sich im Nernstschen Institut der physikalischen Chemie zu widmen. Zusammen mit Nernst konstruierte er ein hochempfindliches Quadrantenelektrometer, mit Küster einen elektrischen Ofen, wandte sich dann aber eigentlich physikalisch-chemischen Problemen zu. Er studierte die Dampfspannung homogener Gemische (Doktor-Arbeit) und bearbeitete dann in einer Reihe von Arbeiten die Theorie des Bleiakkumulators.

1901 siedelte er an die Reichsanstalt über. Von hier aus habilitierte er sich an der Technischen Hochschule zu Berlin. Als Habilitationsschrift diente sein bekanntes Buch: Theorie des Bleiakkumulators, das weit über die Grenzen Deutschlands berühmt wurde, wie die französischen und amerikanischen Übersetzungen zeigen. Kohlrausch, der Dolezaleks hervorragende Begabung erkannte, bearbeitete mit ihm zusammen die Löslichkeit des Bromsilbers, das Leitvermögen ge-

sättigter wässeriger Lösungen und andere physiko-chemische Fragen.

Zunächst sollten aber nicht seine physikalisch-chemischen Untetsuchungen, sondern seine ersten konstruktiven Arbeiten ihre Früchte tragen. Siemens hatte damals die Puppinpatente erworben und suchte einen theoretisch gut durchgebildeten Physiker mit gutem konstruktivem Geschick, um die auf dem Papier stehenden Puppinschen Ideen in die Praxis umzusetzen. Sie beriefen Dolezalek, der ihnen diese Aufgabe denn auch in kurzer Zeit glänzend löste.

So leicht war allerdings die Sache nicht. Technisch bestand die Schwierigkeit darin, Spulen von genügend geringer Dämpfung herzustellen. Dies erforderte aber zunächst einmal Methoden, diese geringe Dämpfung zu messen. Aber selbst zur Ausarbeitung dieser Meßmethoden waren die Vorbedingungen noch nicht gegeben. Es mußte erst ein Generator für 800periodigen, möglichst sinusförmigen Wechselstrom konstruiert werden. So entstanden: Telephonsummer, Sirene, bifilare Brücke und die Selbstinduktionsnormalien. Nun erst konnte die störende Dämpfung der Spulen studiert werden. Als Ursachen hierfür erkannte Dolezalek die Wirbelströme im Draht, im Eisenkern und die Hysteresisverluste im Eisen. Zur Beseitigung der Wirbelströme im Draht konstruierte er die unterteilten verflochtenen und verdrillten Litzen, die später auch in der drahtlosen Telegraphie allgemein eingeführt wurden. Um Hysteresis und Wirbelströme im Eisen zu vermeiden, wurden Kerne aus Ferrum reductum mit besonderen Bindemitteln gepreßt.

Die Einführung der Puppinspulen, wohl aber noch mehr die Grundlage einer systematischen Untersuchung von Schwachstromapparaten, die Dolezalek schuf, erregten die Aufmerksamkeit Max Wiens, der Dolezalek als außerordentlichen Professor an sein Institut nach Danzig holte. Trotz eines glänzenden Angebotes ließ sich Dolezalek von Siemens nicht halten. Er folgte seinem Idealismus, und nahm die Professur an, die zwar wesentlich schlechter bezahlt wurde, aber seinen Fähigkeiten größeren Spielraum gewährte.

Unterdessen waren seine grundlegenden elektrochemischen Arbeiten bekannt geworden und er sollte nun auch ihre Früchte ernten. 1905 wurde Nernst nach Berlin berufen. Dolezalek, dem begabtesten Schüler Nernsts, wurde das berühmte Göttinger Institut übertragen. In Göttingen arbeitete er mit seinen Mitarbeitern wieder auf elektrochemischem Gebiete: Über heterogene hydrolytische Gleichgewichte, über Flüssigkeitsketten, Blei- und Eisenakkumulator, Ozonpotential, Überspannung und Elektrokapillarität. Aber auch elektrotechnische Arbeiten wurden noch erledigt: Sie betrafen Wirbelstromverluste und die Konstruktion des Binantenelektrometers.

1908 wurde er als Ordinarius für Physik und physikalische Chemie an die Technische Hochschule zu Berlin berufen. Neben einigen elektrotechnischen Arbeiten über Wirbelströme in Litzenspulen und Eisenkernen wandte er sich jetzt voll der Theorie der konzentrierten Lösungen zu. Bereits 1908 erschien seine erste Veröffentlichung über: Binäre Gemische und konzentrierte Lösungen, der Grundstein einer wichtigen neuen Naturerkenntnis und der Anfang von einer langen Reihe weiterer Untersuchungen.

Wie jede wirklich große und fruchtbare neue Idee beruht die Dolezaleksche Theorie der konzentrierten Lösungen auf einem außerordentlich einfachen Gedanken: Alle Eigenschaften eines binären Gemisches setzen sich additiv zusammen. Und zwar sind die Glieder der Summe den „wahren Molenbrüchen" proportional. Unter dem wahren Molenbruch einer Komponente A ist dabei der Quotient der Zahl der Grammole der Komponente A pro Liter Lösung dividiert durch die Zahl der Grammole sämtlicher anderen Komponenten zu verstehen. Aller-

dings muß berücksichtigt werden, daß sich manche Stoffe nach dem Massenwirkungsgesetz zu zweifachen und dreifachen Molekülen assoziieren, und daß sich auch Doppelmoleküle aus verschiedenen Elementen bilden können. Hat man aber die Massenwirkungskonstanten an Hand von einer Eigenschaft, z. B. der Dampfdrucke ermittelt, so kann man auf Grund dieser Kenntnis alle anderen Eigenschaften, wie spezifische Wärme, Kompressibilität, Dielektrizitätskonstante, Wärmeausdehnungskoeffizient usw. in Abhängigkeit von der Konzentration der Lösung berechnen.

Im Kriege war Professor Dolezalek anfangs als Adjutant eines Pionierbataillons im Osten, wurde aber dann zum Ingenieur-Komitee kommandiert. Dort konstruierte er ein Horchgerät für Miniergeräusche, daß bereits 1917 im Felde eingeführt wurde.

Kurz vor Kriegsbeginn wurde ihm ein neues Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie bewilligt und während des Krieges fertig gebaut. Nur seinem großen persönlichen Geschick und seinen guten Beziehungen zur Industrie, die seine Leistungen noch in dankbarer Erinnerung hatte, gelang es, die maschinelle Ausrüstung zu beschaffen.

Heute nun ist sein neues Institut, auf das er sich durch all die Kriegsjahre gefreut hatte, fertig. „Es ist ein wahrer Staat", schrieb er in seinem letzten Briefe. Und das ist es auch. Kein Stück überflüssig, das Nötige aber in guter Ausführung wohl durchdacht angeordnet. Alte Mitarbeiter hatten sich nach den Wirren der Revolution wieder eingefunden, neue Doktoranden hatten ihre Aufgaben begonnen. Die frische, fröhliche Arbeit hatte so gerade recht eingesetzt, als nach kurzer Krankheit unerwartet der Tod seinem arbeitsreichen, aber auch schönen und erfolgreichen Leben ein Ende setzte.

Aber trotz des frühen Endes war Dolezaleks Leben doch ein ganz besonders reiches. Sonst vermag wohl ein Gelehrter im besten Falle auf einem Gebiete führend zu schaffen. Dolezalek leistete, eine seltene Erscheinung, auf zwei Gebieten, der Elektrotechnik und der Physikalischen Chemie, Pionierarbeit.

Die Verehrung seiner Schüler gilt aber noch mehr als seinem Können seinem Charakter. Frische fröhliche Freude am Schaffen, die jeden seiner Schüler mitriß, Idealismus und unbedingte Sachlichkeit, rückhaltlose Offenheit und die reine Absicht, ohne alle Nebengedanken dem anderen zu helfen, sind seine hervorragendsten Eigenschaften. Persönliche Wünsche neben sachlichen kannte er nicht. Er förderte jede wissenschaftliche Arbeit mit gleichem Interesse, ganz gleichgültig, ob sie sich in seine eigenen Untersuchungen einfügte oder nicht. Er freute sich wirklich von Herzen auch über fremde Erfolge, oft mehr wie über die eigenen, auch dann, wenn ihm selbst dadurch eine Idee vorweggenommen wurde. Er half, gleichgültig, ob es ihm unangenehme Arbeit brachte, mit so herzlicher Anteilnahme, daß man nicht nur einen wohldurchdachten Rat, sondern auch neue Arbeitsfreudigkeit und neues Selbstvertrauen von ihm mitnahm. Und so erwarb er durch seine große echte Herzensgüte die Verehrung und Liebe seiner Assistenten und Schüler, die wir ihm für immer bewahren werden.

H. G. Möller.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das allgemeine System der Isotopen.

Von A. van den Broek.

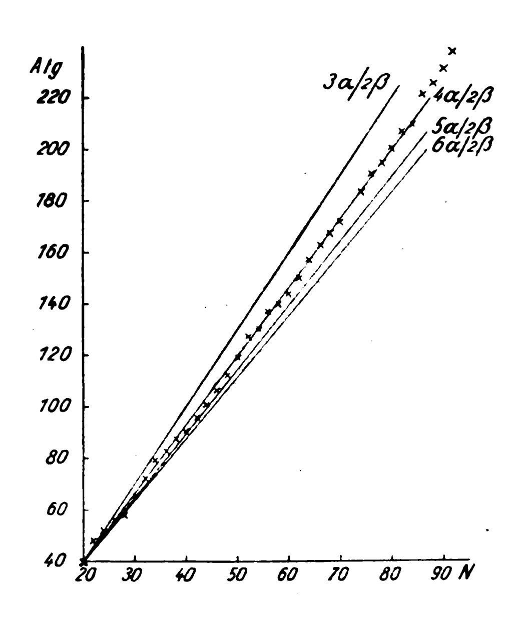
Die Zahl der von Aston bis jetzt (Dezember 1920) gefundenen Isotopen, mit Einschluß der unsicheren (20, 30, 39, 128, 130) siebenundvierzig, hat wohl jeden Zweifel an der Existenz dieser „wirklichen Elemente der Materie“ beseitigt.

Von diesen 40 gehören 5 zum $(4n + 1)$-Typus, also 35 zu den drei anderen Typen. Von diesen 35 aber waren 30 in einem theoretischen System der Isotopen, 1916 durch den Verfasser für diese drei Typen aufgestellt[1]), schon enthalten (Ausnahmen: 78, 86, 134, 136 und 39[1]). Grundgedanke dieses Systems war allgemeiner regelmäßiger Zerfall aller Elemente in 6 Reihen.

Der Zusammenfassung dieser Abhandlung: „Obwohl der Atomzerfall, soweit uns bekannt, nicht vollkommen regelmäßig stattfindet, schließt sich die Atomgewichtskurve einem regelmäßigen Zerfall nach dem Schema α-, α-, α-, α-, β-, β-, in periodischer Folge (bei einigen naheliegenden Annahmen) in derart auffallender Weise an, daß die sich hieraus ergebenden Isotopen sämtlicher Elemente einer experimentellen Nachprüfung wohl wert wären“, könnte man also wohl beipflichten (Tabelle I und Figur).

Wie überraschend die Übereinstimmung aber auch sei, so zeigen doch namentlich die nicht richtig vorhergesagten Isotopen des *Kr* und *Xe* die Unvollkommenheit des Systems.

Die sich bei der Aufstellung eines Systems der Isotopen in regelmäßigen Reihen ergebenden Schwierigkeiten sind folgende. Für *Kr* wurden von Aston folgende Isotopen gefunden: 78, 82, 86, 80, 84, 83. — Nimmt man an, daß die beiden Vierfachen 80 und 84 nur aus α-Teilchen bestehen (oder eventuell aus ganzen und halben), so gehören sie entweder zu einer (Zerfalls?)-Reihe und sind dann (nach der Hypothese des Verfassers) durch $(\alpha + 2\beta)$ verbunden durch



Falte (= Alteration) der Reihe, entweder nach unten oder nach oben — oder aber sie gehören zu zwei Reihen, deren Verlauf, auch wenn regelmäßig, von hier aus gar nicht zu bestimmen wäre. Zwar müssen die Atomgewichte, wie wir sie experimentell kennen, innerhalb dieser Grenzen liegen. Ob aber gerade durch diese oder durch andere Reihen begrenzt, ist nicht zu sagen, und ebensowenig wie weit diese Grenzen außerhalb dieser Gewichte liegen.

Nehmen wir weiter für 78, 82, 86 an, daß diese nur aus α-Teilchen, 2 Wasserstoffkernen und Elektronen bestehen, so genügt eine Reihe nur, wenn hier entweder 2×2 Kernelektronen entweder nach oben oder nach unten hinzutreten — oder aber mehrere (2 oder 3) Reihen vorhanden sind. Und diese Reihen können wieder auf sehr viele Weisen die experimentellen Atomgewichte decken. Nimmt man außerdem die Möglichkeit von anderer Zusammenstellung, mehrere Teilchen von der

Tabelle I.

Die experimentell gefundenen Isotopen (ohne *Kr* und *Xe*).

		H	*He*	*B*	*C*	*N*	*O*	*F*	*Ne*	*Si*	*P*	*S*	*Cl*	*Ar*	*As*	*Br*	*J*	*Hg*
Aston	$4n+1$	—	—	—	—	—	—	—	21?	29	—	—	37	—	—	81	—	—
Aston	$4n$	—	4	10	12	14	16	19	20	28	31	32	35	36	75	79	127	202
	$4n+2$	—	—	11	—	—	—	—	22	30	—	—	39?	40	—	—	—	204
	$4n+3$																	(Band)
von diesen van den Broek 1916	$4n$	—	4	10	12	14	16	19	20	28	31	32	35	36	75	79	127	202
	$4n+2$	—	—	11	—	—	—	—	22	30	—	—	—	40	—	—	—	204
	$4n+3$																	

1) Diese Zeitschr. 17, 260, 1916.



Tabelle II.

Die Initialteilchen.

N \ M	1	2	3	4
0	$(H+)\beta$	$(H+)_2\beta_2$	$(H+)_3\beta_3$	$(H+)_4\beta_4$
1	$(H+)$	$(H+)_2\beta$	$(H+)_3\beta_2$	$(H+)_4\beta_3$
2		$(H+)_2$	$(H+)_3\beta$	$(H+)_4\beta_2$
3			$(H+)_3$	$(H+)_4\beta$
4				$(H+)_4$?

System der Isotopen.

Nr.		Atg.															
0	—	—	1	2	3	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	*H*	1,007	—	—	—	—	[1]	2	3	4	—	—	—	—	—
2	*He*	4,0	5	6	7	8	—	—	—	—	2	3	[4]	—	—
3	*Li*	6,94	—	—	—	—	5	6	7	8	—	—	—	3	4
4	*Be*	9,1	9	10	11	12	—	—	—	—	6	7	8	—	—
5	*B*	11,0	—	—	—	—	9	[10]	[11]	12	—	—	—	7	8
6	*C*	12,0	13	14	15	16	—	—	—	—	10	11	[12]	—	—
7	*N*	14,01		—	—	—	13	[14]	15	16	—	—	—	11	12
8	*O*	16,0	17	18	19	20	—	—	—	—	14	15	[16]	—	—
9	*F*	19,0	—	—	—	—	17	18	[19]	20	—	—	—	15	16
10	*Ne*	20,2	21	[22]	23	24	—	—	—	—	18	19	[20]	—	—
11	*Na*	23,1	—	—	—	—	21	22	23	24	—	—	—	19	20
12	*Mg*	24,3	25	26	27	28	—	—	—	—	22	23	24	—	—
13	*Al*	27,1	—	—	—	—	25	26	27	28	—	—	—	23	24
14	*Si*	28,3	[29]	[30]	31	32	—	—	—	—	26	27	[28]	—	—
15	*P*	31,0	—	—	—	—	29	30	[31]	32	—	—	—	27	28
16	*S*	32,0	33 37	34 38	35 39	36 40	—	—	—	—	30	31	[32]	—	—
17	*Cl*	35,46	[37]	38	39	40	33 37	34 38	[35] [39]	36 40	—	—	—	31	32
18	*Ar*	39,88	37 41	38 42	39 43	40 44	37	38	39	40	34 38	35 39	[36] [40]	—	—
19	*K*	39,1	—	—	—	—	37 41	38 42	39 43	40 44	38	39	40	35 39	36 40
20	*Ca*	40,08	45	46	47	48	—	—	—	—	38 42	39 43	40 44	39	40
21	*Sc*	45	—	—	—	45	45	46	47	48	—	—	—	39 43	40 44
22	*Ti*	48,1	49	50	51	52	—	—	—	—	46	47	48	—	—
23	*V*	51,0	—	—	—	—	49	50	51	52	—	—	—	47	48
24	*Cr*	52,0	53	54	55	56	—	—	—	—	50	51	52	—	—
25	*Mn*	54,96	—	—	—	—	53	54	55	56	—	—	—	51	52
26	*Fe*	55,84	57	58	59	60	—	—	—	—	54	55	56	—	—
27	*Co*	58,96	—	—	—	—	57	58	59	60			—	55	56
28	*Ni*	58,7	61 65	62 66	63 67	64 68	—	—	—	—	58	59	60	—	—
29	*Cu*	63,6	65	66	67	68	61 65	62 66	63 67	64 68	—	—	—	59	60
30	*Zn*	65,4	65 69	66 70	67 71	68 72	65	66	67	68	62 66	63 67	64 68	—	—
31	*Ga*	69,9	—	—	—	—	65 69	66 70	67 71	68 72	66	67	68	63 67	64 68
32	*Ge*	72,5	73	74	75	76	—	—	—	—	66 70	67 71	68 72	67	68
33	*As*	74,96	—	—	—	—	73	74	[75]	76	—	—	—	67 71	68 72
34	*Se*	79,2	77 81	78 82	79 83	80 84	—	—	—	—	74	75	76	—	—
35	*Br*	79,9	[81]	82	83	84	77 81	78 82	[79] 83	80 84	—	—	—	75	76
36	*Kr*	82,9	[81] 85	[82] [86]	83 87	84 88	81	82	[83]	84	[78] [82]	79 83	[80] [84]	—	—
37	*Rb*	85,45	—	—	—	—	81 85	82 86	83 87	84 88	82	83	84	79 83	80 84
38	*Sr*	87,6	89	90	91	92	—	—	—	—	82 86	83 87	84 88	83	84
39	*Y*	89	—	—	—	—	89	90	91	92	—	—	—	83 87	84 88

Die umrahmten nach **Aston**, die unterstrichenen (von *Ne* bis *Se* angegeben), die Ganzzahligen.

Fortsetzung von Tabelle II.

Nr.		Atg.	System der Isotopen												
40	*Zr*	90,6	93 97	94 98	95 99	96 100	—	—	—	—	90	91	92	—	—
41	*Nb*	93,5	97	98	99	100	93 97	94 98	95 99	96 100	—	—	—	91	92
42	*Mo*	96,0	97 101	98 102	99 103	100 104	97	98	99	100	94 98	95 99	96 100	—	—
43	—	—	—	—	—	—	97 101	98 102	99 103	100 104	98	99	100	95 99	96 100
44	*Ru*	101,7	105	106	107	108	—	—	—	—	98 102	99 103	100 104	99	100
45	*Rh*	102,9	—	—	—	—	105	106	107	108	—	—	—	99 103	100 104
46	*Pd*	106,7	109 113	110 114	111 115	112 116	—	—	—	—	106	107	108	—	—
47	*Ag*	107,9	113	114	115	116	109 113	110 114	111 115	112 116	—	—	—	107	108
48	*Cd*	112,4	113 117	114 118	115 119	116 120	113	114	115	116	110 114	111 115	112 116	—	—
49	*In*	114,8	—	—	—	—	113 117	114 118	115 119	116 120	114	115	116	111 115	112 116
50	*Sn*	118,7	121	122	123	124	—	—	—	—	114 118	115 119	116 120	115	116
51	*Sb*	120,2	—	—	—	—	121	122	123	124	—	—	—	115 119	116 120
52	*Te*	127,5	125 129	126 130	127 131	128 132	—	—	—	—	122	123	124	—	—
53	*J*	126,9	129	130	131	132	125 129	126 130	127 131	128 132	—	—	—	123	124
54	*Xe*	130,2	[129] 133	130 [134]	131 135	[132] [136]	129	130	[131]	132	126 [130]	127 131	[128] [132]	—	—
55	*Cs*	132,8	—	—	—	—	129 133	130 134	131 135	132 136	130	131	132	127 131	128 132
56	*Ba*	137,4	137	138	139	140	—	—	—	—	130 134	131 135	132 136	131	132
57	*La*	139,0	—	—	—	—	137	138	139	140	—	—	—	131 135	132 136
58	*Ce*	140,25	141 145	142 146	143 147	144 148	—	—	—	—	138	139	140	—	—
59	*Pr*	140,6	145	146	147	148	141 145	142 146	143 147	144 148	—	—	—	139	140
60	*Nd*	144,3	145 149	146 150	147 151	148 152	145	146	147	148	142 146	143 147	144 148	—	—
61	—	—	—	—	—	—	145 149	146 150	147 151	148 152	146	147	148	143 147	144 148
62	*Sa*	150,4	153	154	155	156	—	—	—	—	146 150	147 151	148 152	147	148
63	*Eu*	152,0	—	—	—	—	153	154	155	156	—	—	—	147 151	148 152
64	*Gd*	157,3	157 161	158 162	159 163	160 164	—	—	—	—	154	155	156	—	—
65	*Tb*	159,2	161	162	163	164	157 161	158 162	159 163	160 164	—	—	—	155	156
66	*Ds*	162,5	161 165	162 166	163 167	164 168	161	162	163	164	158 162	159 163	160 164	—	—
67	*Ho*	163,5	—	—	—	—	161 165	162 166	163 167	164 168	162	163	164	159 163	160 164
68	*Er*	167,7	169	170	171	172	—	—	—	—	162 166	163 167	164 168	163	164
69	*Tu*	168,5	—	—	—	—	169	170	171	172	—	—	—	163 167	164 168
70	*Yb*	173,5	173 177	174 178	175 179	176 180	—	—	—	—	170	171	172	—	—
71	*Lu*	175,0	177	178	179	180	173 177	174 178	175 179	176 180	—	—	—	171	172
72	—	—	177 181	178 182	179 183	180 184	177	178	179	180	174 178	175 179	176 180	—	—
73	*Ta*	181,5	—	—	—	—	177 181	178 182	179 183	180 184	178	179	180	175 179	176 180
74	*W*	184,0	185	186	187	188	—	—	—	—	178 182	179 183	180 184	179	180
75	—	—	—	—	—	—	185	186	187	188	—	—	—	179 183	180 184

Fortsetzung von Tabelle II.

Nr.		Atg.	System der Isotopen												
76	*Os*	190,9	189 193	190 194	191 195	192 196	—	—	—	—	186	187	188	—	—
77	*Ir*	193,1	193	194	195	196	189 193	190 194	191 195	192 196	—	—	—	187	188
78	*Pt*	195,2	193 197	194 198	195 199	196 200	193	194	195	196	190 194	191 195	192 196	—	—
79	*Au*	197,2	—	—	—	—	193 197	194 198	195 199	196 200	194	195	196	191 195	192 196
80	*Hg*	200,6	201 205 209	[202] 206 210	203 207 211	[204] 208 212	—	—	—	—	194 [198]	195 [199]	196 [200]	195	196
81	*Tl*	204,0	205 209	206 210	207 211	208 212	201 205 209	202 206 210	203 207 211	204 208 212	—	—	—	195 199	196 200
82	*Pb*	207,15	205 209 213	206 210 214	207 211 215	208 212 216	205 209	206 210	207 211	208 212	202 206 210	203 207 211	204 208 212	—	—
83	*Bi*	208,0	—	—	—	—	205 209 213	206 210 214	207 211 215	208 212 216	206 210	207 211	208 212	203 207 211	204 208 212
84	*Po*	210	217	218	219	220	—	—	—	—	206 210 214	207 211 215	208 212 216	207 211	208 212
85	—	—	—	—	—	—	217	218	219	220	—	—	—	207 211 215	208 212 216

Masse 1, 2 oder 3 oder andere an, so ist die Zahl der Möglichkeiten eine unendliche. Ohne ganz bestimmte Hypothesen kommt man also nicht aus.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung: Neuere Anschauungen über chemische Elemente und ihre Atome, II[1]) gibt Kohlweiler einen Versuch eines Systems aller Isotopen, das in den Grundgedanken (nicht aber in den speziellen Hypothesen) kaum wesentlich abweicht von den Versuchen, die über diese, jetzt aktuell gewordene Frage vom Verfasser publiziert wurden.

In Abweichung jedoch von der bis jetzt üblichen Annahme, daß alle Atomkerne aus Heliumkernen (α-Teilchen) und Kernelektronen mit einigen wenigen Wasserstoffkernen bestehen, verknüpft Kohlweiler die Zahl dieser Wasserstoffkerne mit den Gruppenelementen des periodischen Systems durch die Annahme, daß überall da, wo keine Valenzänderung eintritt — Eisen-Palladium-Platingruppe und seltene Erden, Wasserstoffkerne mit Elektronen, und zwar monovalente positive (H_2)-Teilchen für je eine Ordnungszahl statt α-Teilchen für je 2 Ordnungszahlen hinzukommen.

Ob diese Annahme sich späterhin als richtig erweisen wird, muß abgewartet werden. Nur möge hier betont werden, daß, wenn richtig, diese Annahme sich in jedem System der Isotopen, auch die vom Verfasser bisher publizierten, einfügen läßt, ohne dies sonst zu ändern. Die Zahl der Isotopen wird dadurch für diese Strecken einfach vergrößert, ohne daß die Einfügung der Kernelektronen oder der Zahl der Reihen, durch welche alle diese Systeme im wesentlichen bestimmt werden, eine Änderung zu erfahren braucht, denn statt einem α-Teilchen kommen einfach zwei halbe oder (H_2)-Teilchen.

Nun ist das α-Teilchen selber eine Kombination von 4 Wasserstoffkernen und 2 Elektronen, also $(H^+)_4\beta_2$.

Daneben fand Rutherford ein Teilchen $(H^+)_3$, ebenso zweivalent, also $(H^+)_3\beta$, und als Komponenten des Stickstoffatoms einfache Wasserstoffkerne. Außerdem aber Andeutungen, daß auch neutrale Kernteilchen vorhanden sind, deren Masse nicht angegeben wurde. Die Verbindungsgewichte 7, 9, (11), 12, 14, mit den Ordnungszahlen 3, 4, (5), 6, 7, fragen weiter, wenn die Zahl der α-Teilchen immer die höchst mögliche ist, bzw. $(H^+)_3\beta_2$; $(H^+)\beta$; $(H^+)_3\beta_2$; $(H^+)_4\beta_2$; $(H^+)_2\beta$ als Initialteilchen.

Gegeben ist diese Mannigfaltigkeit dadurch daß am einfachsten mit der Möglichkeit man rechnet, daß alle neutralen und positiven Initialteilchen, deren Masse 4 nicht übersteigt, möglicherweise durch eine vollständige Reihe vertreten wäre. Diese 14 Initialteilchen und das daraus abgeleitete vollständige System bis zu den Radioelementen gibt Tabelle II.

Sogar diese Beschränkung — daß keine negativen zusammengestellten Initialteilchen bestehen — und daß (wohl durch die außerordentliche Stabilität des α-Teilchen) höhere Kombinationen nicht vorkommen, kann nur eine vorläufige sein.

1) Diese Zeitschr. **21**, 311, 1920.

Damit ist ein System der Isotopen aber noch keineswegs gegeben.

Eine starke Anweisung für die Existenz gewisser Isotopen liegt noch in den ganzen Zahlen oder Annäherung an dieselben bei den experimentellen Atomgewichten. Ein experimentelles Atomgewicht 96,0; 139,0; 152,0; 175,0; 184,0; oder die Annäherung 102,9; 107,9; 126,9; 190,9; 193,1 läßt auf dieselben ganzzahligen Isotopen schließen, wie unter anderen bei 82,9 = 83 (*Kr*) bestätigt wurde. So fand Aston nur beim *Br* (79,9) kein Vorherrschen der Isotope 80, sondern 79 und 81, in ungefähr gleicher Stärke vertreten, und beim *Hg* (200,6) keine Isotope 201, bei allen andern Atomgewichten aber eine Isotope wie Abrundung zu ganzen Zahlen erwarten läßt.

Auch größere Abweichungen sind also jedenfalls noch zu erwarten. Zwar kann 132,8 sowohl durch 3 Isotopen von 132, und 2 von 134, als durch 4 Isotopen von 133 und 1 von 132, oder auch auf viele andere Weisen erklärt werden, aber bei *Ne* (20,2), *Si* (28,3), *Cl* (35,46), *Ar* (39,88), *Xe* (132,32), die größten Abweichungen wurden immer die nächstliegenden Isotopen gefunden (132?).

(Bilden diese ganzen Zahlen also auch eine wertvolle Bereicherung zu den bereits gefundenen Isotopen, so sind sie doch zusammen vollkommen ungenügend zur Abgrenzung der verschiedenen Reihen. Unter Reihen wird hier verstanden eine Anzahl Isotopen, deren Masse nur Unterschiede von $4n$-Einheiten aufweist, und die auch tatsächlich genetisch durch Einlagerung oder Austretung von α- und β-Teilchen auseinander entstehen könnten, da die Zahl der Kernelektronen der Ladung entsprechend regelmäßig geändert wurde. Durch Extraeinlagerung von H^+- oder β-Teilchen würden sie ineinander übergehen können.)

Für *Kr* wären also 80, 81 (?), 82, 83 und 84; für *Xe* 128, 129, 130 (?), 131 und 132 theoretisch zu erwarten, die außer 81 bekanntlich alle gefunden wurden. Umgekehrt kann auf die hinzugefundenen (für *Kr* 78 und 86, für *Xe* 134 und 136) die $4\alpha/2\beta$-Hypothese angewendet werden. Da die nach Analogie aus der $4\alpha/2\beta$-Regel gefundenen Isotopen (sowohl die von den experimentell gefundenen als die aus der reduzierten Ganzzahligkeit abgeleiteten) frei von einer jeden Hypothese über die Reihen sind, mögen sie zunächst in einer Tabelle III zusammengestellt werden. Sie bilden also nur eine Auswahl, kein System. Die hinzugefundenen mit ihren Analogen wurden umklammert.

Es möge bemerkt werden, daß die neuen von Aston für *Xe* gefundenen Zahlen (A) mit den aus den für *Kr* gefundenen berechneten (B)

Tabelle III A.

Ganzzahlige Atomgewichte und analoge Isotopen.

	24—29 *Cr—Cu*	30—35 *Zn—Br*	36—41 *Kr—Nb*	42—47 *Mo—Ag*	48—53 *Cd—I*	54—59 *Xe—Pr*	60—65 *Nd—Tb*	66—71 *Ds—Lu*	72—77 *?—Ir*	78—83 *Pt—Bi*	Limites *Cr—Bi*	
$6p$	116,0	113,4	114,9	112,0	112,4	114,2	112,3	114,5	—	115,2	112,0—116,0	112—116
$6p+1$	118,9	117,9	117,45	—	114,8	116,8	—	115,5	117,5	117,2	114,8—118,9	114—119
$6p+2$	119,8	120,5	119,6	117,7	118,7	121,4	118,4	119,7	120,0	120,6	117,7—121,4	117—122
$6p+3$	123,0	123,0	121	118,9	120,2	123,0	120,0	120,5	—	—	118,9—123,0	118—123
$6p+4$	122,7	127,2	122,6	122,7	127,5	124,25	125,3	125,3	126,9	—	122,6—127,5	122—128
$6p+5$	127,6	(127,9)	125,5	123,88	126,9	124,6	127,2	127,0	129,1	—	123,88—129,1	123—130
	— 64	— 48	— 32	— 16	± 0	+ 16	+ 32	+ 48	+ 64	+ 80		
$6p$	116	113?	115	112	112?	114?	112?	—	—	115	112—114—115—116	113?
$6p+1$	119	118	117?	—	115	117?	—	—	—	117?	115—117—118—119	—
$6p+2$	120?	—	120?	118?	119	121?	118?	120?	120	—	118—120	119? 121?
$6p+3$	123	123	121?	119	120	123	—	—	—	—	119—120—123	121?
$6p+4$	123	127?	123?	123?	—	124?	125?	—	127	—	123—124—125—127	—
$6p+5$	128?	—	—	124	127	125?	127?	127	129	—	124—127—129	125? 128?

Tabelle IIIB.

Atg.		*N*	(4*n*)	(4*n* + 1)	(4*n* + 2)	(4*n* + 3)
	Cu	63,6	60 (64)	(61) 65	—	63
30	*Zn*	65,4	64 68 **72**	(65)	**62** 66 **70**	67
	Ga	69,9	—	69	70	67 71
	Ge	72,5	72	(73)	70	(71)
33	*As*	75,0	72	(73)	—	71 75
	Se	79,2	76	77	—	75 79
	Br	79,9	76 (80)	(77) 81	—	79
36	*Kr*	82,9	80 84 **88**	(81)	**78** 82 **86**	83
	Rb	85,45	—	85	86	83 87
	Sr	88,7	88	(89)	86	(87)
39	*Y*	89	88	(89)	—	87 91
	Zr	90,6	92	93	—	91 95
	Nb	93,5	92 (96)	(93) 97	—	95
42	*Mo*	96,0	96 100 **104**	(97)	**94** 98 **102**	99
	—	—	—	101	102	99 103
	Ru	101,7	104	(105)	102	(103)
45	*Rh*	102,9	104	(105)	—	103 107
	Pd	106,7	108	109	—	107 111
	Ag	107,9	108 (112)	(109) 113	—	111
48	*Cd*	112,4	112 116 **120**	(113)	**110** 114 **118**	115
	In	114,8	—	117	118	115 119
	Sn	118,7	120	(121)	118	(119)
51	*Sb*	120,2	120	(121)	—	119 123
	Te	127,5	124	125	—	123 127
	J	126,9	124 (128)	(125) 129	—	127
54	*X*	130,2	128 132 **136**	(129)	**126** 130 **134**	131
	Cs	132,8	—	133	134	131 135
	Ba	137,4	136	(137)	134	(135)
57	*La*	139,0	136	(137)	—	135 139
	Ce	140,25	140	141	—	139 143
	Pr	140,6	140 (144)	(141) 145	—	143
60	*Nd*	144,3	144 148 **152**	(145)	**142** 146 **150**	147
	—	—	—	149	150	147 151
	Sa	150,4	152	(153)	150	(151)
63	*Eu*	152,0	152	(153)	—	151 155
	Gd	157,3	156	157	—	155 159
	Tb	159,2	156 (160)	(157) 161	—	159
66	*Ds*	162,5	160 164 **168**	(161)	**158** 162 **166**	163
	Ho	163,5	—	165	166	163 167
	Er	167,7	168	(169)	166	(167)
69	*Tu*	168,5	168	(169)	—	167 171
	Yb	173,5	172	173	—	171 175
	Lu	175,0	172 (176)	(173) 177	—	175
72	—	—	176 180 **184**	(177)	**174** 178 **182**	179
	Ta	181,5	—	181	182	179 183
	W	184,0	184	(185)	182	(183)
75	—	—	184	(185)	—	183 187
	Os	190,0	188	189	—	187 191
	Ir	193,1	188 (192)	(189) 193	—	191
78	*Pt*	195,2	192 196 **200**	(193)	**190** 194 **198**	195
	Au	197,2	—	197	198	195 199

Tabelle IV.

Xe { *A* . . .	—	—	128	129	130	131	132	—	134	—	136
Xe { *B* . . .	126	—	128?	—	130?	131	132	—	134	—	—
Xe { *C* . . .	—	—	128	—	130	131	—	133	—	135	—
Kr	**78**	—	**80**	—	**82**	**83**	**84**	—	**86**	—	—
Xe	—	—	**128**	**129**	**130**	**131**	**132**	—	**124**	—	**136**

viel besser übereinstimmen, als die zuerst für *Xe* gegebenen als roughly provisional bezeichneten (C). Tabelle III.

Werden die 3 Reihen in dieser Folge untereinander gestellt und dann die vollständigen Reihen nach der $4\alpha/2\beta$-Hypothese für *Kr* und *Xe* (die nichtgefundenen sind unterstrichen), und bedenkt man, daß die Reihen die gefundenen Minimalreihen sind, so ist die Übereinstimmung auffallend und eine gute Stütze für die Hypothese.

Nun kommen in jeder vollständigen Reihe auf je 6 Ordnungszahlen auch 6 Isotopen, und nimmt, weil jede weitere Isotope durch Hinzu-

treten von einem Kernteilchen entstand, die Zahl der Kernteilchen für je 6 Ordnungszahlen um je 6 Einheiten zu. Durchschnittlich muß also die Zahl der Isotopen für jede Ordnungszahl gleich der Zahl der Reihen sein. Tabelle III weist also offenbar noch viele Lücken auf.

Sind sowohl die Initialteilchen als das Gesetz der Einfügung der β-Teilchen gegeben, so muß umgekehrt das periodische System in seiner eigentümlichen angenäherten Regelmäßigkeit von diesen beiden aus erklärt werden können. Die beiden ersten Ordnungszahlen weisen dabei auf die Initialteilchen, deren Masse von 1 bis 4, und deren Ladung von 0 bis 4 wechselt und die in dem α-Teilchen oder Heliumkerne ihren typischen Vertreter finden.

Die beiden ersten kleinen Perioden weisen dann auf das Hinzukommen von $2 \times 4\, \alpha$-Teilchen ohne β-Teilchen hin. Würden keine weiteren β-Teilchen hinzukommen, so würde das experimentelle Atomgewicht im Durchschnitt immer gleich der doppelten Ordnungszahl bleiben.

Statt dessen finden wir gleich am Anfang der ersten großen Periode die erste Aufnahme von 2β-Teilchen, sowohl in dem $4n$, als in dem $(4n+3)$-Typus (40 beim *Ar* wie beim *Ca*; 35 und 39 beim *Cl*). Die nächsten 4α-Teilchen können hier also keine regelmäßige kleine Periode von 8, sondern nur eine solche von 6 Ordnungszahlen bilden. Dann kommt eine zweite Gruppe von annähernd 6 Ordnungszahlen — mit einem Sprung der experimentellen Atomgewichte am Ende — die in dem periodischen System mit der Regelmäßigkeit der 8 Vertikalreihen nur durch Zusammenlegung von 3 an einer Stelle in Einklang (?) gebracht werden konnten, und erst eine dritte Gruppe von 6 Ordnungszahlen stellt die anfängliche Periodizität wieder her.

Schon in einer ersten Abhandlung über das periodische System (1907), wo alle Atome als „sekundäre Abänderungen von α-Teilchen-Konglomerationen" aufgefaßt wurden, wurden diese Gruppenelemente der VIII. Reihe als verkümmerte kleine Perioden aufgefaßt. Da wir jetzt wissen, wie Einfügung von 2β-Teilchen auf 4α-Teilchen zu 6 statt zu 8 Ordnungszahlen führt, während die Valenzelektronen nach wie vor einer Anordnung nach 8 Reihen zustreben, ist es kaum möglich, in dieser ganzen Anordnung nicht eine Zusammenwirkung von nur in unvollkommener Weise zu vereinbarenden Regelmäßigkeiten zu sehen, und die großen Perioden von 18 Ordnungszahlen auf etwas anderes als 3×6, statt ursprünglich 3×8 Elementen zurückzuführen, von denen nur 2×8 sich mit einem Reste von 2 nach den Valenzen ordnen können.

Auch die zweite große Periode führt zu derselben Erklärung, und die allmähliche Änderung der Eigenschaften bis zu den ausgesprochenen Ausnahmen (die seltenen Erden) läßt dennoch, z. B. in dem Fehlen eines Elementes in der Ordnungszahl 61 wie in 43, eine gleichartige Wirkung auch weiterhin erkennen, wie auch beim *Ta*, und wohl schon vorher, die Übereinstimmung mit den großen Perioden wiederhergestellt wird.

Neben dem eigentümlichen Verhalten der Valenz und Verwandtschaft tritt hier aber eine weitere Reduktion der Länge der Periode auf, und zwar von 2×18 auf 2×16 (oder $18 + 14$). Auch diese Reduktion findet in der Zahl der eingefügten β-Teilchen am Ende dieser größten Periode einen Widerklang, als wären hier 2×6 Ordnungszahlen zu 2×4 hineingeschrumpft.

Gleichzeitig aber tritt Instabilität und radioaktiver Zerfall ein und damit Unregelmäßigkeit der Reihen gegeneinander, wie auch komplexer Zerfall. Eine vollständige Erklärung wäre hier denn auch kaum zu geben.

Zusammenfassung.

Mindestens zwei Grundbedingungen müssen erfüllt sein, wenn von einem aufstellbaren System der Isotopen überhaupt die Rede sein könnte.

1. Die Zahl der den α- und β-Teilchen zugefügten Wasserstoffkerne oder deren Kombinationen mit Kernelektronen (β-Teilchen) muß, wie bis jetzt auch allgemein angenommen, eine sehr geringe sein — also nur eine Beimischung bilden.
2. Die Hinzutretung von Kernelektronen (d. h. β-Teilchen) muß ganz bestimmten Gesetzen unterworfen sein.

Stimmen beide Bedingungen zu, so ist die weitere Frage sowohl:

1. die Zahl der Beimischungen (weil von Anfang der Reihe an vorhanden, besser Initialteilchen genannt) zu bestimmen, als:
2. die Reihenentwicklung von diesen Initialteilchen ab durch ein Gesetz der β-Teilcheneinfügung festzulegen.

Für jede dieser Fragen wurde oben eine geeignete Hypothese gegeben und nochmals versucht, ein allgemeines System der Isotopen aufzustellen.

Scheveningen, Dezember 1920.

(Eingegangen 12. Januar 1921.)



Über Beziehungen, welche zwischen den Konstanten der radioaktiven Körper bestehen.

Von Hans Th. Wolff.

In einer früheren Veröffentlichung[1]) stellte der Verfasser die Formel auf

$$\log R = x \log (k - s) + y, \qquad (1)$$

in welcher R die Reichweite eines α-Strahlers bedeutet und s die Zahl ist, welche angibt, das wievielte Zerfallsprodukt er innerhalb seiner Zerfallsreihe ist, während x, y und k Konstanten sind. Die Körper ThC, RaF, AcX, AcC und AcC' ($= AcC_2$) fügen sich dieser Beziehung nicht. Es sei hier nachgetragen, daß ThC, AcX und AcC' der Gleichung dann auch Genüge leisten, wenn man für sie Werte von s einsetzt, welche ihnen eigentlich nicht zukommen. Für ThC ist $s = 5$ einzuführen an Stelle des Wertes $s = 8$, für AcX $s = 2$ statt $s = 3$ und für AcC' $s = 5$ statt $s = 8$. Demgemäß fallen die Reichweiten folgender Körper paarweise nahezu zusammen: ThC und $ThEm$, AcX und $RaAc$, AcC' und AcA. Tabelle I zeigt, mit welchem Genauigkeitsgrade Formel (1) von den genannten Produkten erfüllt wird.

Tabelle I.

	s	$\log R_{beob.}$	$\log R_{ber.}$
ThC	5	0,671	0,675
$ThEm$	5	0,676	0,675
AcX	2	0,606	0,605
$RaAc$	2	0,602	0,605
AcC'	5	0,786	0,777
AcA	5	0,774	0,777

Wie bereits l. c. S. 393 erwähnt ist, sind nach F. G. Carruthers die Logarithmen der Reichweiten für jede Gruppe von Isotopen angenähert lineare Funktionen der Logarithmen der Atomgewichte. An Stelle dieser Regel, sowie der Formel (1), kann man schreiben:

$$\log R = \xi \log (\tfrac{3}{4} M - L + K) + \eta, \qquad (2)$$

wobei M die durch das Atomgewicht ausgedrückte Masse des Kerns und L seine durch die Atomnummer ausgedrückte Ladung bedeutet, während K, ξ und η Konstanten sind.

Daß in dieser Gleichung das Gesetz (1) enthalten ist, zeigt folgende einfache Überlegung: Bei einer α-Strahlumwandlung ändert sich M um -4 und L um -2, demnach der Klammerausdruck von (2) um $-3 + 2$, also um -1. Bei einer β-Strahlumwandlung ändert sich nur L, und zwar um $+1$, der Klammerausdruck somit um -1. Man sieht, daß auf jede Zerfallsstufe die gleiche Abnahme des Klammerausdruckes entfällt, was von Formel (1) verlangt wird. Es ist wohl als eigenartig zu bezeichnen, daß die Reichweite bei Betrachtung einer einzelnen Radiofamilie einerseits als eine Funktion der beiden den Kern charakterisierenden Größen Atomgewicht und Ladung dargestellt werden kann, andererseits aber auch als eine Funktion einer einzigen Größe, nämlich der Nummer der Zerfallsstufe, wobei die Abhängigkeit vom Atomgewicht zugleich einen Zusammenhang zwischen Gliedern von verschiedenen radioaktiven Familien bedeutet.

Die Uranradiumreihe hat die Eigentümlichkeit, daß für die Glieder UI bis mit Ra die Konstanten x und y in (1) nur etwa halb so große Werte besitzen als für die übrigen Glieder. Somit hat man für die genannten Körper in (2) gesonderte Werte der Konstanten ξ und η einzusetzen. Hierbei ist aber zu bemerken, daß UII zugleich der allgemeinen Formel (2) genügt. Bei einer graphischen Darstellung hat man es mit zwei Geraden zu tun, welche sich in dem zu UII gehörigen Punkte schneiden.

Es ist ferner darauf hinzuweisen, daß die 5 eingangs erwähnten Körper, welche Gleichung (1) nicht erfüllen, selbstverständlich auch Regel (2) nicht befolgen können. Von diesen zeigen ThC, RaF und AcC hinsichtlich der Reichweiten ein abnormes Verhalten (l. c. S. 393); in AcC' verwandelt sich nur ein sehr geringer Bruchteil des doppelt zerfallenden AcC.

Graphische Darstellungen sprechen dafür, daß Formel (2) die Beobachtungen etwas besser wiedergibt, als eine Gleichung von der Form

$$\log R = \xi \cdot (\tfrac{3}{4} M - L + K) + \eta. \qquad (2a)$$

Zur genaueren Festlegung der Konstanten ξ und η in Formel (2) wurde die Methode der kleinsten Quadrate benutzt. Wie l. c. S. 393 erwähnt ist, kann man in Gleichung (1) die Konstante k bis zu einem gewissen Grade willkürlich wählen. Gleiches gilt von der Konstanten K. Wir setzen für diese den Wert $-26,09$ ein, so daß für Th ($M = 232,12$, $L = 90$) $\tfrac{3}{4} M - L + K = 58,00$ wird, wie dies der l. c. für Th aufgeführten Beziehung (daselbst als Gleichung (2) bezeichnet) entspricht. Man gelangt zu der Gleichung

$$\log R = -6,8427 \cdot \log (\tfrac{3}{4} M - L - 26,09) + + 12,4765. \qquad (3)$$

Mit welcher Genauigkeit diese Beziehung erfüllt wird, ist aus Tabelle II zu ersehen.

1) Diese Zeitschr. **21**, 393, 1920. Im folgenden mit l. c. bezeichnet.

Für *UII* wurde gesetzt: $M = 234,17$ und $L = 92$, für *ProtAc*: $M = 231,17$ und $L = 91$. Das letztgenannte Atomgewicht entspricht der Annahme, daß *UY* aus *UII* unter Aussendung von H_3^{++} entsteht. Dieses Heliumisotop ist von Rutherford als Kernbaustein festgestellt worden[1]). Die Reichweiten (cm) gelten für 0° C und 760 mm Druck. Es bedeutet

$$u = \tfrac{3}{4} M - L - 26,09\,,$$
$$\Delta = \log R_{\text{ber.}} - \log R_{\text{beob.}}$$

Der mittlere Fehler von $\log R_{\text{ber.}}$ beträgt $\pm 0,0045$ (1 Proz. Fehler von R). Schließt man *RaTh* und *UX* aus, welche bei der Berechnung von ξ und η nicht mit verwendet wurden, so erhält man den mittleren Fehler $\pm 0,0032$.

Tabelle II.

	u	$\log R$	Δ
Th	58,00	0,412	— 0,002
RaTh	55,00	0,565	+ 0,003
ThX	54,00	0,611	+ 0,011
ThEm	53,00	0,676	+ 0,002
ThA	52,00	0,732	+ 0,003
ThC'	49,00	0,912	— 0,001
UII	$57,53_8$	0,439	— 0,005
RaEm	$54,53_8$	0,596	— 0,003
RaA	$53,53_8$	0,653	— 0,005
RaC'	$50,53_8$	0,818	+ 0,001
ProtAc	$56,28_8$	0,497	+ 0,002
RaAc	$54,28_8$	0,602	+ 0,005
AcEm	$52,28_8$	0,723	— 0,005
AcA	$51,28_8$	0,774	+ 0,001

Die l. c. mit (3) bezeichnete, für die Körper *UI* bis mit *Ra* gültige Beziehung kann man entsprechend obiger Gleichung (2) auch schreiben:

$$\log R = -3,183 \log\left(\tfrac{3}{4} M - L - 26,628\right) + 6,033\,. \qquad (4)$$

Besonders hervorzuheben ist das Verhalten des *ProtAc*. Wählt man die Darstellungsform (1), so genügt dieser Körper gemäß der Zerfallsfolge $UII \rightarrow UY \rightarrow ProtAc$ der für *UI* bis mit *Ra* gültigen Beziehung [l. c. Formel (3)]. Nach dem oben über den Zusammenhang, der zwischen den Gleichungen (1) und (2) besteht, Gesagten, erfüllt *ProtAc* auch Formel (4), wenn man voraussetzt, daß *UII* unter α-Strahlung in *UY* übergeht. Wird aber, wie dies oben geschah, angenommen, daß sich *UII* unter Aussendung von H_3^{++}-Partikeln in *UY* verwandelt, so kann Gleichung (4) von *ProtAc* nicht erfüllt werden. Statt dessen fügt es sich jetzt aber der für die Mehrzahl der α-Strahler gültigen Beziehung (3). Durch die Ausstrahlung von H_3^{++} wird somit ein Übergang von dem für die Körper *UI* usw. gültigen Sondergesetz (4) zu der allgemeinen Formel (3) geschaffen. Man kann daher vermuten, daß das abweichende Verhalten jener Körper mit der Aussendung des H_3^{++} in Zusammenhang steht.

Für *AcEm* hat man neben dem Wert $\log R = 0,723$ auch gefunden: $\log R = 0,732$[1]). Die entsprechende Reichweite würde einem Körper (*AcEm'*) zukommen, welcher aus *AcEm* durch Aussendung von H_3^{++} entsteht, dem also der Wert $u = 52,03_8$ zugehört und der zu *AcA* isotop ist. Nach (3) ergibt sich jetzt: $\log R = 0,732$, also genau der beobachtete Betrag.

Für *AcA* hat man außer $\log R = 0,774$ auch erhalten: $\log R = 0,790$[1]). Dieser Wert könnte einem Körper (*AcA'*) zugehören, in welchen sich *AcA* unter Ausstrahlung einer H_3^{++}-Partikel verwandelt und der zu *AcB* isotop ist. Für *AcA'* ist $u = 51,03_8$, somit $\log R = 0,790$. Wiederum liegt vollständige Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Wert vor. Es ist bemerkenswert, daß sich *AcA'* der Geiger-Nuttallschen Zerfallskonstanten-Reichweitenbeziehung besser fügt als *AcA*.

Außer den Annahmen, welche hier über den Ursprung der erwähnten hypothetischen Körper gemacht wurden, sind noch andere möglich, doch soll auf diese hier nicht eingegangen werden. Es sei darauf hingewiesen, daß *AcEm'* und *AcA'* größere Reichweiten besitzen, als die Körper *AcEm* und *AcA*, als deren Abkömmlinge man jene Produkte sich denken könnte. Daher würde man z. B. bei einer Bestimmung der Reichweite von *AcEm*, dem nur wenig *AcEm'* beigemengt ist, doch wohl diejenige des letzteren Körpers beobachten können.

Nennt man die Reichweite eines α-Strahlers einer Radiofamilie R_1 und diejenige des analogen α-Strahlers einer anderen Familie R_2, so gilt für Körper, welche Gleichung (3) erfüllen:

$$\log R_1 = -6,8427 \cdot \log u + 12,4765\,,$$
$$\log R_2 = -6,8427 \log (u + \delta) + 12,4765\,.$$

Solange dieselben beiden Familien betrachtet werden, hat δ einen konstanten Wert. Es folgt:

1) Vgl. E. Rutherford, Nat. **105**, 500, 1920 (Phys. Berichte 1, 1252, 1920). Das Atomgewicht 227 für *Ac* wurde bereits früher von Fajans vorgeschlagen (diese Zeitschr. **16**, 456, 1915). Vgl. auch St. Meyer, Zeitschr. für physik. Chem. **95**, 407, 1920. — H_3^{++} wird X_3 genannt.

1) Siehe die Tabelle auf S. 262 des Lehrbuches der Radioaktivität von St. Meyer und E. v. Schweidler (Leipzig und Berlin 1916).

$$\log \frac{R_1}{R_2} = 6{,}8427 \log \left(1 + \frac{\delta}{u}\right). \qquad (5)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit der α-Strahlen berechnet sich bekanntlich nach der Formel

$$v = \sqrt[3]{R} \cdot \text{Konst.}$$

Daher ist

$$\log \frac{v_1}{v_2} = 2{,}2809 \log \left(1 + \frac{\delta}{u}\right).$$

Da sich $1 + \frac{\delta}{u}$ nur wenig verändert bei konstantem δ, so ergibt sich der Satz, daß die Quotienten der Anfangsgeschwindigkeiten von je zwei analogen α-Strahlern zweier Radiofamilien in angenähert konstantem Verhältnis zueinander stehen. Dieser wurde vom Verfasser l. c. S. 395 im Anschluß an die Regel von R. Swinne ausgesprochen, welche lautet: Der Unterschied zwischen der Anfangsgeschwindigkeit eines α-Strahlers einer Radiofamilie und der des analogen α-Strahlers einer anderen Familie ist für diese beiden Familien angenähert konstant. Es ist hervorzuheben, daß die beiden Regeln auch für Körper Gültigkeit haben, deren α-Strahlung der Gleichung (3) nicht Genüge leistet (*Jo, Ra, ThC, AcX, AcC* und *AcC'*).

Schließlich möge eine Bemerkung folgen, welche die Zerfallskonstanten λ der radioaktiven Körper betrifft. Wenn ein α-Strahler, sowohl obiger Formel (1), als auch der Geiger-Nuttallschen Gleichung

$$\log \lambda = A + B \log R$$

Genüge leistet, so läßt sich $\log \lambda$ als lineare Funktion von $\log (k - s)$ darstellen. Es liegt die Vermutung nahe, daß letztere auch die Logarithmen der Zerfallskonstanten der β-Strahler zur Darstellung bringt. Dies ist aber, abgesehen vielleicht von *Ac*, nicht der Fall.

Zusammenfassung.

Die Reichweite R eines α-Strahlers kann man als Funktion der Masse M (= Atomgewicht) und der Ladung L (= Atomnummer) des Atomkernes darstellen in der Form:

$$\log R = \xi \log \left(\tfrac{3}{4} M - L + K\right) + \eta.$$

Die Konstanten ξ und η wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt; über die Konstante K kann man innerhalb gewisser Grenzen frei verfügen. *ThC, RaF, AcX, AcC* und *AcC'* leisten dieser Gleichung nicht Genüge, und für die Glieder der Uranradiumreihe *UI* bis mit *Ra* gilt eine spezielle Formel der genannten Art, in welcher ξ und η abweichende Werte besitzen. Die Reichweite von *UII* erfüllt zugleich auch die allgemeinere Gleichung. Gewissen Sonderbeträgen, welche die Reichweitebestimmungen für *AcEm* und *AcA* ergeben hatten, kann man auf Grund der angeführten Beziehung hypothetische α-Strahler zuordnen, über deren mögliche Einreihung in das Zerfallsschema Angaben gemacht werden.

Die obige Formel wird mit einem die Anfangsgeschwindigkeiten der α-Strahlen entsprechender Zerfallsprodukte betreffenden Satze in Zusammenhang gebracht, welcher bereits früher vom Verfasser im Anschluß an eine diesbezügliche Regel von R. Swinne ausgesprochen worden war.

Es folgt eine kurze Bemerkung über die Frage nach einem mathematischen Ausdruck für die Zerfallskonstanten.

Bemerkungen zu zwei früheren Arbeiten des Verfassers.

In Gleichung (4) (l. c. S. 393) ist die Größe s derart aufzufassen, daß ihr Betrag für *RaEm* gleich 0 ist. In Tabelle VII (l. c. S. 395) muß die unterste Zahl der mit III—I überschriebenen Spalte 0,16 heißen statt 0,15 — Die Tabelle I (diese Zeitschr. **21**, 176, 1920) enthält auch nach Vornahme der l. c. am Schluß erwähnten Änderungen Werte, die nicht einwandfrei sind. Man kann auf dem eingeschlagenen Wege auf Grund der gegenwärtig vorliegenden Beobachtungen kaum einen sicheren Schluß über die Konstanz der Größe B der Geiger-Nuttallschen Gleichung ziehen.

Dresden, im Januar 1921.

(Eingegangen 18. Januar 1921.)

Zur Theorie des Gleit- und Rollwiderstandes der festen Körper. I. (Gleitende Reibung.)

Von Sigmund Fuchs.

I. Das Wesen der gleitenden Reibung ist bis nun eine offene Frage geblieben. Zahlreiche Versuche verschiedener Forscher in der letzten Zeit haben den großen Einfluß der die gleitenden Körper umgebenden Atmosphäre auf die Reibungserscheinungen erwiesen. Wir wollen nun versuchen zu zeigen, daß die seinerzeit von Klein und Sommerfeld gestellte Frage[1]): „Wird es möglich sein, auch die trockene Reibung unserem physikalischen Verständnis näher zu bringen, indem wir die zwischen den reibenden Oberflächen verbleibende Luftschicht als eine Art Schmiermittel auffassen und auf sie die Reibungsgesetze der kinetischen Gastheorie anwenden?" — bejaht werden kann.

Die Verdichtung der Gase an der Oberfläche der festen Körper ist eine bekannte

1) „Über die Theorie des Kreisels", S. 546.

Tatsache. Jeder in Berührung mit einem Gase befindliche feste Körper überzieht sich mit einer sehr dünnen und stark verdichteten Schicht dieses Gases. Die Dichte dieser „Gashaut" nimmt stetig mit dem Druck ab; bei sehr kleinen Drucken wird die Gashaut so dünn, daß ihr Einfluß auf die gaskinetischen Erscheinungen an der Oberfläche der Körper verschwindet[1]).

Wir nehmen nun im folgenden an, daß zwei feste Körper, die sich längs einer Fläche von der Größe F berühren, in relativer gleitender Bewegung mit der Geschwindigkeit U sich befinden. Die Körper sind durch eine Luftschicht von sehr kleiner Dicke voneinander getrennt. Während der Bewegung wird eine hydrodynamische (eigentlich gaskinetische) Reibungskraft R in der die Körper trennenden Luftschicht entwickelt, deren Größe bei Annahme konstanter Dicke h der Luftschicht folgende Formel angibt[2]):

$$R = \frac{\eta F U}{h + \frac{\eta}{\lambda_1} + \frac{\eta}{\lambda_2}}. \qquad (1)$$

Hierin bezeichnen:

η den Koeffizienten der inneren Reibung in der Luftschicht,

λ_1, λ_2 die Koeffizienten der äußeren Reibung der Luft mit der einen bzw. anderen Berührungsfläche.

Es ist klar, daß die beiden Berührungsflächen einander mathematisch genau nicht entsprechen können. Wegen der unvollkommenen Bearbeitung verbleiben an der Oberfläche kleine Vorsprünge und Vertiefungen, die zwar ganz unmerklich, von derselben Größenordnung aber wie die Dicke der „schmierenden" Luftschicht sein können. Außer dieser mechanischen Unebenheit gibt es noch eine molekulare Unebenheit, d. i. ultramikroskopisch kleine Vertiefungen und Vorsprünge, die vollkommen unregelmäßig verteilt sind. Man kann demnach die Dicke der Luftschicht als Funktion irgendwelcher Veränderlichen nicht bestimmen, weil ihre Größe von Punkt zu Punkt wechselt und den Gesetzen des Zufalls unterliegt. Es ist aber möglich, von einer mittleren, obzwar imaginären Dicke h_m zu sprechen und diese für jeden einzelnen Fall zu ermitteln. Im folgenden werden wir an Stelle von h in der Formel (1) h_m einsetzen.

Wir wollen nun die Abhängigkeit von h_m von verschiedenen Umständen untersuchen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Dicke der die Körper trennenden Luftschicht von der gegenseitigen Pressung der Körper abhängig ist, und zwar entspricht einem größeren Drucke eine kleinere Dicke der Schicht. Wir nehmen an, daß h_m dem Drucke pro Quadrateinheit der Berührungsfläche umgekehrt proportional ist. Es ist auch ohne weiteres verständlich, daß h_m eine Funktion von η und λ sein muß, denn je kleiner die Koeffizienten der inneren und der äußeren Reibung sind, desto leichter wird die Luftschicht unter sonst gleichen Umständen herausgepreßt. Demnach muß auch h_m von der Temperatur abhängig sein.

Es ist eine interessante Tatsache, daß h_m auch von der relativen Gleitgeschwindigkeit abhängig sein muß. Es ist klar, daß die einander entsprechenden Elemente der Oberflächen beider sich „reibenden" Körper einander parallel nicht sein können, erstens wegen der unvollkommenen Bearbeitung und zweitens wegen der elastischen, hysteresen und plastischen Deformationen, die durch die Belastung entstehen. Wir wissen, daß die Formänderungen außer von den äußeren Kräften auch vom Material und Form beider Körper abhängig sind, demnach kaum für die beiden durch die Luftschicht getrennten Oberflächen gleich sein können. Nun ist bekannt, daß, wenn zwei gegeneinander geneigte Ebenen in relativer Bewegung mit wachsender Geschwindigkeit sich befinden, die äußere Luft sich immer mehr und mehr zwischen die beiden Ebenen einschiebt, und zwar dann, wenn die Richtung der relativen Geschwindigkeit gegen die Spitze des Neigungswinkels gerichtet ist. Demnach wächst der Luftdruck zwischen den Ebenen mit der Geschwindigkeit. Die zur relativen Geschwindigkeit senkrechte Komponente des Luftdruckes erreicht bei gewisser Geschwindigkeit (sog. „kritischen Geschwindigkeit") die Größe der auf die beiden Ebenen wirkenden ebensolchen Komponenten der äußeren Kräfte (Belastung)[1]). Unterhalb der kritischen Geschwindigkeit bewirkt sie eine Entlastung beider Flächen, oberhalb der kritischen Geschwindigkeit bleibt sie konstant. Wenn wir uns demnach die Oberflächen der sich reibenden Körper von lauter gegeneinander geneigten elementaren Flächen vorstellen, dann müssen wir annehmen, daß bis zu einer gewissen „mittleren kritischen Ge-

---

1) W. Gaede: „Die äußere Reibung der Gase", Ann. d. Phys. **41**, 312, 330, 1913.

2) N. Petroff: „Neue Theorie der Reibung" (deutsch von Wurzel), Hamburg-Leipzig 1887, S. 102.

1) Vgl. Versuche von F. Charron: „Rôle lubrifiant de l'air dans le frottement des solides. Frottement dans le vide". C. R. **150**, 906—908, 1910 und „Modifications apportées par l'air dans le frottement de glissement entre corps solides". C. R. **151**, 1047—1049, 1910.

schwindigkeit" der mittlere Abstand h_m der sich „reibenden" Flächen eine Funktion von U ist und weil die „mittlere" Neigung der Flächen infolge der unvollkommen elastischen Deformationen der Körper ein Einsaugen der Luft (infolge Luftreibung) bewirkt, daß einer größeren relativen Geschwindigkeit eine größere Dicke der Luftschicht entspricht; dies wird verständlich, wenn man beachtet, daß eine Vergrößerung von U mit der Verminderung des Druckes auf die Flächeneinheit der äußeren Kräfte gleichwertig ist. Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit muß h_m unabhängig von U sein. Daß diese Abhängigkeit zwischen h_m und U unter anderem auch durch die geometrische Gestalt der sich reibenden Oberflächen bedingt ist, ist ohne weiteres klar, wenn man beachtet, daß die entlastende (tragende) Komponente des Luftdruckes bei der relativen Bewegung notwendig von der Form der sogenannten Berührungsfläche abhängt.

Nehmen wir in erster Annäherung an, daß h_m linear mit U wächst, dann erhalten wir folgende Formel:

$$h_m = \varkappa U \frac{F}{P}. \tag{2}$$

Hierin bezeichnet P die Belastung des gleitenden Körpers (senkrecht zur relativen Geschwindigkeit) und $\varkappa$ ist ein Koeffizient, der vom inneren und äußeren Reibungskoeffizienten der Luftschicht im gegebenen Zustande abhängig ist und die Dimension des inneren Reibungskoeffizienten hat.

Bei den üblichen Drucken der Atmosphäre ist das Verhältnis $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$, genannt auch Gleitungskoeffizient, so klein, daß es sogar gegenüber h_m vernachlässigt werden kann; physikalisch bedeutet das ein dauerndes Haften der Gasschicht an der Körperoberfläche während des Gleitens. Die Formel (1) ergibt demnach die Größe der inneren Reibungskraft:

$$R = \eta \frac{FU}{h_m}. \tag{1a}$$

Setzen wir für h_m den Wert aus (2) ein, dann ist:

$$R = \mu P \tag{3}$$

wo $\mu = \frac{\eta}{\varkappa}$ ein Zahlenkoeffizient ist. Wir erhalten demnach das Reibungsgesetz von Coulomb; μ wird gewöhnlich Reibungskoeffizient genannt.

Bei Geschwindigkeiten, die sehr häufig bei den technischen Anwendungen vorkommen, stimmt bekanntlich die Formel (3) ziemlich gut mit der Erfahrung überein. Bei größeren Geschwindigkeiten, wie sie etwa beim Eisenbahnbetriebe vorkommen, haben sehr zahlreiche Versuche ein Abnehmen der Reibungskraft mit wachsender Geschwindigkeit erwiesen. Nehmen wir nun im folgenden an, daß bei großen Geschwindigkeiten (jedoch nur bis zur kritischen Geschwindigkeit) h_m schneller als U wächst, und zwar wegen der stark anwachsenden Saugwirkung in der die Körper trennenden Luftschicht, und zwar:

$$h_m = \varkappa U e^{\alpha U} \frac{F}{P}, \tag{4}$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und α ein Zahlenkoeffizient sind, und setzen diesen Wert in die Formel (1a) ein, dann erhalten wir:

$$R = \mu e^{-\alpha U} P, \tag{5}$$

eine Formel, die von J. N. Franke[1]) auf Grund zahlreicher Versuche verschiedener Forscher aufgestellt worden ist.

Bei Geschwindigkeiten, welche die „kritische" überschreiten, muß, wie erwähnt, h_m konstant bleiben. Demnach soll laut (1a) die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit wachsen. In der Tat haben Versuche von J. Perry[2]) ein Anwachsen der Reibung bei Steigerung der Geschwindigkeit über die „kritische" erwiesen.

Bei hohem Flächendruck kann die Kontinuität der Gasschicht stellenweise zerstört werden, woduch Adhäsionskräfte geweckt werden, welche die Reibung wesentlich erhöhen; außerdem verursachen starke spezifische Flächenpressungen merkliche Deformationen der Körper, wodurch die Reibungsarbeit wesentlich erhöht wird.

Wir nehmen im folgenden an, daß die Oberfläche eines Körpers so gereinigt wurde, daß die „permanente" Gashaut entfernt worden ist und daß dieser Körper auf ebenso gereinigter schiefer Ebene hinabgleitet; den Versuch wollen wir uns in einem evakuierbaren Raum von sehr kleinem Gasdruck ausgeführt denken. Unter diesen Umständen wird der Koeffizient der äußeren Reibung λ sehr klein, also der Gleitungskoeffizient γ sehr groß. Vernachlässigen wir h_m gegenüber $(\gamma_1 + \gamma_2)$ in der Formel (1), dann erhalten wir die äußere Reibungskraft:

$$R = (\lambda_1 + \lambda_2) F U. \tag{6}$$

Daß Gase bei geringen Drucken an den Ober-

1) „Über die Abhängigkeit der gleitenden Reibung von der Geschwindigkeit". Civilingenieur **28**, 206ff, 1882.

2) „Angewandte Mechanik" (deutsch von R. Schick) 1908, S. 74.

flächen der Körper gleiten, ist eine experimentell bewiesene Tatsache. Es sollte demnach schon bei sehr kleinem Neigungswinkel φ der schiefen Ebene der Körper hinabgleiten. Vergrößern wir allmählich den Neigungswinkel, so wird U wachsen, gleichzeitig aber wächst laut (6) die äußere Reibungskraft; dadurch entsteht eine relative Geschwindigkeit zwischen den äußersten und den übrigen Schichten der die Körper trennenden verdünnten Luftschicht und demnach wird auch die innere Gasreibung geweckt. Hat die äußere Reibungskraft die Größe der inneren Reibung erreicht, so hört das Gleiten an den Körperoberflächen auf und es bleibt nur das Gleiten der Gasschichten aneinander übrig; die Formel (3) tritt wieder in Kraft.

Experimentelle Untersuchungen von Ch. Jakob[1]) bestätigen obige Ausführungen. Als Material wurde hauptsächlich Glas benutzt. Die Bewegung des Glasläufers auf der geneigten Glastafel war eine gleichförmige; sie nahm mit wachsendem Neigungswinkel erst langsam, dann immer rascher zu und schien bei einem gewissen Grenzwert von φ sehr groß zu werden. Der kleinste Winkel, bei dem noch eine Bewegung bemerkt werden konnte, betrug 1,5°! Betrachten wir tg φ oder bei Kleinheit der Winkel auch φ als ein Maß der Reibung, so erhalten wir ein stetiges Anwachsen der Reibungskraft bis zum Coulombschen Werte.

Der beobachteten Abhängigkeit zwischen φ und U kann sehr passend durch eine exponentielle Funktion:

$$U = e^{\Phi} \tag{7}$$

entsprochen werden, worin Φ ein nach steigenden Potenzen des Neigungswinkels φ geordnetes Polynom darstellt; e ist die Basis der natürlichen Logarithmen. Die einfache Formel:

$$U = e^{\alpha\varphi+\beta} \tag{7'}$$

gibt schon befriedigende Resultate. Die Werte der Koeffizienten α, β erhalten wir leicht, wenn wir die beobachtete Abhängigkeit zwischen φ und $\ln U$ zeichnerisch auftragen und das Diagramm durch eine Gerade rektifizieren.

Bei den Versuchen zeigte sich, daß künstliche Fettschichten, die durch Verdunstenlassen von Alkohol, in dem ein wenig Öl gelöst war, erzeugt wurden, wieder die Coulombsche Größe der Reibungskraft hervorbrachten. Die Verfasserin meint deshalb, diese Erscheinung solle beweisen, „daß die bei reinen Platten beobachteten Gleiterscheinungen nicht, wie anfangs vermutet wurde, von unsichtbaren Schmiermittelschichten herrühren"[1]). Wir meinen dagegen, daß wegen des Haftens des Öles an den reibenden Flächen die Gleitung der Gase an denselben unmöglich wurde und dadurch die innere Reibung in der Gasschicht zur Geltung kam, was die Coulombsche Form der Reibungsgesetze ergab.

Sehr bezeichnend waren auch die Versuche bei allmählich wachsender Temperatur. Es ergab sich, daß bei wachsender Temperatur der „Reibungswinkel" zuerst stark abnahm, dann von etwa 150° bis 190° ungefähr konstant blieb, um dann sehr rasch und sehr hoch zu steigen. Das Minimum des Reibungswinkels betrug manchmal nur 1/3 seines Wertes bei Zimmertemperatur. Der Vorgang zwischen Zimmertemperatur und derjenigen des Minimums war ein durchaus reversibler und vom Beginn des Steigens der Reibung wurde er irreversibel. Bemerkenswert ist, daß der kleinste Winkel für eine Spiegelglasplatte 1,4° betrug, während bei 432° seine Größe bis 33° gestiegen ist. — Der Vorgang läßt sich folgendermaßen begründen: Die an der Glasoberfläche zurückgebliebenen Reste der verdichteten „Gas- und Wasserhaut" verflüchtigen sich beim Erhitzen und verschwinden erst bei etwa 500°. Hierdurch wird die Gleitung der Luft an den Glasoberflächen begünstigt und die Reibung vermindert. Von einer Temperatur von etwa 150° an tritt, wie die Versuche zeigten, eine Änderung der Oberfläche, nämlich die Ausscheidung einer abreibbaren Schicht ins Spiel, wodurch die Gleitung der Luft vermindert wird und weil auch gleichzeitig die Temperaturerhöhung ein Anwachsen des inneren Reibungskoeffizienten η bedingt, wächst die Reibungskraft ziemlich hoch. Reibt man die derart veränderte Oberfläche mit reinem Mull ab, so erhält man wieder die niedrigen Werte der Reibungskraft.

Die Versuche von Charron und Jakob beweisen unleugbar, daß die Hauptrolle bei der Erzeugung der gleitenden Reibung der zwischen den reibenden Oberflächen befindlichen Atmosphäre zufällt. Dieselbe besteht aus einer an den Oberflächen der festen Körper haftenden adsorbierten Gas- und Dampfhaut, die je nach dem Druck und Temperatur Gase und Dämpfe absorbiert oder ausscheidet und aus einer dünnen Luftschicht. Daß die adsorbierte Gasmasse von der Beschaffenheit und Struktur des Materials an der Körperoberfläche abhängig sein muß, ist ohne weiteres klar, weshalb der Einwand entfällt, daß bei

1) „Über gleitende Reibung" (Doktor-Dissertation), Leipzig 1911.

1) l. c., S. 58.

dieser „Schmiermittelreibung" das Material der gleitenden Körper gleichgültig sein sollte. Es muß nochmals ausdrücklich betont werden, daß die Dicke der gesamten „Schmierschicht" eine mit der Unebenheit der gleitenden Fläche vergleichbare Größe ist. Die Verschiedenheit der Flächendeformationen je nach der Art der Druckverteilung und Gestalt der Körper, die Abhängigkeit der Dicke und physikalischen Eigenschaften der schmierenden Luftschicht von Druck, Temperatur, Feuchtigkeitsgrad usw. erschweren sehr identische Zustände zu erzwingen; eine Versuchsreihe kann demnach nur Mittelwerte der Reibungskoeffizienten ergeben.

Es ist wohl kein Zufall, daß die Abhängigkeitskurve zwischen dem Reibungskoeffizienten und Geschwindigkeit bei der Schmiermittelreibung in den Gleitlagern denselben Verlauf hat wie bei der „trockenen" Reibung, also zuerst eine Abnahme des Reibungskoeffizienten bei wachsender Geschwindigkeit bis zu einem Minimum und dann eine Zunahme[1]); und wenn die „Übergangsgeschwindigkeit" bei der Ölreibung ziemlich klein ist, dagegen bei der Luftreibung verhältnismäßig hoch liegt, so ist der Grund hierfür in der Kleinheit der Viskositätskonstante der Gase gegenüber den entsprechenden Konstanten der zähen Flüssigkeiten zu suchen[2]).

1) R. Stribeck: „Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager", Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **46**, 1345, 1902.

2) Vgl. A. Sommerfeld: „Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung", Zeitschr. f. Math. u. Phys. **50**, 154, 1904.

Lemberg, Techn. Hochsch., Juli 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

Die Theorie der Volumdilatation bei konzentrierten Lösungen.

Von Alfred Schulze.

Auf Grund des physikalischen Verhaltens der konzentrierten Lösungen ist man zu der Ansicht gekommen, daß bei zwei Flüssigkeiten, die beide nur aus Monomolekülen bestehen, und deren Moleküle bei der Mischung in keiner Weise aufeinander reagieren, das Volumen der Mischung gleich der Summe der Volumina der Komponenten ist. Sobald aber die Moleküle sich gegenseitig beeinflussen und eine chemische Verbindung eingehen, so tritt infolge der Verringerung der Molekülzahl eine Volumkontraktion ein. Ist nun eine Flüssigkeit ideal, die andere dagegen komplex, enthält sie also beispielsweise Bimoleküle, so wird bei der Mischung dieser beiden Flüssigkeiten eine Volumdilatation zu beobachten sein, da infolge der Verdünnung ein Teil der Bimoleküle in Monomoleküle gespalten wird.

Alle Fälle sind bei dem zahlreichen Beobachtungsmaterial verschiedentlich beobachtet worden[1]). Bei der Verbindungsbildung ist der Fall der Volumkontraktion auch exakt theoretisch durchgeführt worden und in guter Übereinstimmung mit dem Experiment befunden worden. Bei der Volumdilatation infolge von Assoziation ist die theoretische Ableitung noch nicht erbracht worden. Hier liegt die Sache viel schwieriger, da bei der assoziierten Komponente jedesmal zwei neue Unbekannte, nämlich die betreffende physikalische Eigenschaft der Monomoleküle und die der Bimoleküle, hinzukommen, die doch beide von der gemessenen verschieden sind, da ja die reine assoziierte Flüssigkeit als ein Gemisch von Monomolen und Bimolen aufgefaßt werden kann.

Um nun einen Ausdruck für die Volumdilatation von konzentrierten Lösungen abzuleiten, der lediglich abhängig ist von dem Volumen der reinen Komponenten und der Anzahl der Moleküle in der Mischung, die mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes ermittelt werden können, seien zunächst die benutzten Bezeichnungen eingeführt.

Gegeben seien zwei Flüssigkeiten A und B. A enthalte nur Monomoleküle, B sei assoziiert, habe also außer Monomolekülen noch Bimoleküle. M_a und M_b seien die Molekulargewichte, d_a und d_b die Dichten der beiden Flüssigkeiten. Werden beide Komponenten miteinander vermischt, so enthalte ein Grammol Mischung q_a Mole der Flüssigkeit A und q_b Mole der Flüssigkeit B, so daß also:

$$q_a + q_b = 1$$

sein muß. Infolge des Mischungsvorganges sind jetzt in jedem Grammol Mischung drei Molekülarten vorhanden; erstens eine Anzahl Monomole der Flüssigkeit A (sie sei mit ξ bezeichnet), dann eine Anzahl Monomole von B (sie sei x_1) und drittens eine Anzahl Bimole von B (sie sei x_2). Dann ist wiederum:

$$\xi + x_1 + x_2 = 1.$$

q_a und q_b heißen die „analytischen Molenbrüche"; ξ, x_1, x_2 die „wahren Molenbrüche".

Je mehr in jeder Mischung von der assoziierten Flüssigkeit vorhanden ist, desto größer

1) Siehe u. a. W. Deutschmann, Berl. Dissertation 1911 und F. Dolezalek und A. Schulze, Zeitschr. f. phys. Chemie **83**, 45, 1913.

ist auch x_2. Für die reine assoziierte Flüssigkeit wird x_2 am größten sein; hierfür sei die Anzahl der Monomole und Bimole x_1' und x_2', so daß auch hier wieder:

$$x_1' + x_2' = 1$$

ist. Da nun ein Bimolekül aus zwei Monomolekülen besteht, so enthält die reine Flüssigkeit $B\,(x_1' + 2\,x_2')$ analytische Grammole. Wenn $(x_1' + 2\,x_2')$ analytische Grammole x_2'-Grammole bimolekularer Flüssigkeit enthalten, so kommen auf ein analytisches Grammol $\frac{x_2'}{x_1' + 2\,x_2'}$ Grammole bimolekularer Flüssigkeit. Nun enthält ein wahres Grammol Mischung $(x_1' + 2\,x_2')$ analytische Grammole der assoziierten Flüssigkeit, mithin kommen auf $(x_1' + 2\,x_2')$ analytische Grammole der assoziierten Flüssigkeit: $(x_1' + 2\,x_2')$ $\frac{x_2'}{x_1' + 2\,x_2'}$, Gramm Bimole. Mit anderen Worten: zur Herstellung von einem wahren Grammol Mischung sind vor dem Mischen in der assoziierten Flüssigkeit: $(x_1 + 2\,x_2) \cdot \frac{x_2'}{x_1' + 2\,x_2'}$, Bimole vorhanden. Nach der Mischung sind nur noch x_2-Grammole bimolekularer Flüssigkeit vorhanden. Demnach beträgt die Abnahme der Zahl der Bimole infolge der Mischung:

$$\Delta b = (x_1 + 2\,x_2) \cdot \frac{x_2'}{x_1' + 2\,x_2'} - x_2.$$

Ist das Molvolumen der Monomole der assoziierten Flüssigkeit V_1, das der Bimole V_2, so beträgt die Dilatation bei der Spaltung von einem Bimol in zwei Monomole: $2\,V_1 - V_2$; bei des Spaltung von Δb-Bimolen beträgt sie:

$$(2\,V_1 - V_2) \cdot \Delta b \text{ ccm}.$$

Diese Volumenänderung bezieht sich auf die Herstellung von einem wahren Grammol Mischung; sie muß jetzt auf ein analytisches Grammol Mischung umgerechnet werden. In einem wahren Grammol Mischung sind enthalten:

ξ Grammole nicht assoziierter Flüssigkeit,
x_1 Gramm Monomole der assoziierten Flüssigkeit,
$2\,x_2$ „ Bimole „ „ „ ;

im ganzen sind also in einem wahren Grammol Mischung:

$$\xi + x_1 + 2\,x_2 = 1 + x_2$$

analytische Grammole von den beiden Flüssigkeiten A und B enthalten. Mithin beträgt die Dilatation pro analytisches Grammol:

$$\Delta V = \frac{(2\,V_1 - V_2) \cdot \left[(x_1 + 2\,x_2) \frac{x_2'}{x_1' + 2\,x_2'} - x_2\right]}{1 + x_2}$$

oder

$$\Delta V = \frac{2\,V_1 - V_2}{1 + x_2} \cdot \left[\frac{x_2'}{1 + x_2'} \cdot (x_1 + 2\,x_2) - x_2\right] \cdot \qquad (1)$$

In dieser Gleichung kann die Molekularkonstitution als bekannt angenommen werden, da sie bei den binären Systemen im allgemeinen aus den Dampfspannungsmessungen ermittelt wird. Unbekannt sind die Molvolumina V_1 und V_2, die durch das bekannte Molvolumen V_b ausgedrückt werden müssen. Das Volumen der reinen assoziierten Flüssigkeit, die ja x_1' und x_2' Gramm Monomole und Bimole enthält, ist gegeben durch

$$V_1\,x_1' + V_2\,x_2'.$$

In diesem Volumen sind $(x_1' + 2\,x_2')$ analytische Grammole der assoziierten Flüssigkeit enthalten. Demnach ist das Volumen von einem analytischen Grammol assoziierter Flüssigkeit:

$$V_b = \frac{V_1\,x_1' + V_2\,x_2'}{x_1' + 2\,x_2'}.$$

Daraus folgt:

$$V_2 = \frac{V_b\,(1 + x_2')}{x_2'} - V_1 \cdot \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \ldots \qquad (2)$$

Auf diese Weise haben wir zwei Gleichungen (1) und (2) erhalten, aus denen für ein bekanntes ΔV die Molvolumina V_1 und V_2 berechnet werden. Sind V_1 und V_2 einmal bekannt, so lassen sich dann über das ganze Konzentrationsgebiet die Volumdilatationen berechnen.

Beispiel:

Das Gemisch Äthyläther-Aceton.

Die Gleichungen (1) und (2) seien nun auf ein binäres System aufgewandt. Als solches eignet sich das Gemisch Äthyläther — Aceton recht gut, da hierbei die Dilatationen ziemlich groß sind. Aus Dampfdruckmessungen[1]) hat sich ergeben, daß Aceton assoziiert ist, und zwar enthält das Aceton bei 20° C 29 Proz. Bimolekeln[3]).

Die Dichtemessungen sind in derselben Weise wie früher[2]) ausgeführt. Die Temperatur ist 20°. Die Molekularkonstitution, die aus den Dampfspannungsmessungen errechnet ist, ist für 20° in der folgenden Tabelle I angegeben. q_b ist der analytische Molbruch Aceton; ξ der wahre Molbruch Äthyläther, x_1 und x_2 die wahren Molbrüche an Monomolen und Bimolen des Acetons.

---

1) A. Schulze, Zeitschr. f. physik. Chemie **97**, 388, 1921.

2) l. c. S. 1.

3) Äthyläther und Aceton, die von der Firma Kahlbaum bezogen sind, sind vor den Messungen sorgfältig gereinigt.

Tabelle I.

q_b	ξ	x_1	x_2
0	1,0000	0	0
0,2	0,8131	0,1706	0,0163₃
0,4	0,6328	0,3125	0,0546₉
0,5	0,5403	0,3792	0,0805₃
0,6	0,4444	0,4445	0,1111
0,8	0,2380	0,5721	0,1899
1,0	0	0,7143	0,2857

Die Molekulargewichte von Äthyläther und Aceton sind:

$$M_a = 74{,}08$$
$$M_b = 58{,}05.$$

In der Tabelle II sind die Meßergebnisse zusammengestellt. In Spalte 2 und 3 befinden sich die beobachteten Dichten und Volumdilatationen und in Spalte 4 und 5 die mittels Gleichung (1) und (2) errechneten. Man sieht hier die außerordentlich zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung (vgl. auch die nebenstehende Figur).

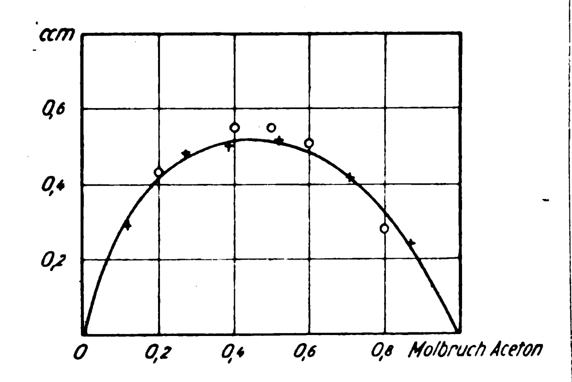


Tabelle II.

q_b	beobachtet		berechnet	
	Dichte $\frac{20^0}{4^0}$	ΔV	Dichte	ΔV
0,0	0,7106	—	(0,7106)	—
0,2	0,7191	0,42₁	0,7190	0,42₇
0,4	0,7312	0,51₇	0,7309	0,55₆
0,5	0,7383	0,51₄	0,7380	0,55₁
0,6	0,7461	0,48₂	0,7459	0,50₁
0,8	0,7645	0,32₄	0,7650	0,273
1,0	0,7877	—	(0,7877)	—

Berechnet man aus dem ganzen Konzentrationsgebiet die Molvolumina der Monomole und der Bimole des Acetons, so erhält man außerordentlich konstante Werte. Es ergibt sich als Mittelwert für:

$$V_1 = 77{,}03_4$$

und

$$V_2 = 129{,}03_9.$$

Daraus folgt für die Dichten der Monomole und der Bimole des Acetons:

$$d_1 = 0{,}7536$$
$$d_2 = 0{,}8997.$$

Das Molvolumen des Acetons selbst ist:

$$V_b = 73{,}69_5.$$

Zugleich liefert die gute Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte einen Beweis dafür, daß die aus den Dampfspannungsmessungen über das ganze Konzentrationzgebiet errechnete Molekularkonstitution mit den anderen physikalischen Eigenschaften völlig im Einklang steht.

Charlottenburg, Institut f. physik. Chem. u. Elektrochem. d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 24. Januar 1921.)

Bemerkung zur Rotationsbewegung im Gravitationsfeld der Sterne. II.

Von A. Kopff.

Die in dieser Zeitschrift **22**, 24, 1921 gegebene Herleitung der im rotierenden Koordinatensystem auftretenden Zentrifugal- und Corioliskräfte beruht auf der ersten Näherung der Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Wir können zu demselben Resultat auch auf folgendem strengeren Weg gelangen.

Wir gehen von den Lösungen aus, die W. de Sitter[1]) für die erweiterten Einsteinschen Gravitationsgleichungen unter Annahme des geschlossenen elliptischen Raumes gegeben hat:

$$\left. \begin{array}{l} g_{ik} = -\dfrac{\delta_{ik}}{1+\varepsilon r^2} + \dfrac{\varepsilon x_i x_k}{(1+\varepsilon r^2)^2} \; (i,k = 1,2,3) \\ g_{i4} = 0 \qquad g_{44} = 1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Hierbei bedeutet $\varepsilon = \frac{1}{R^2}$, und R den konstanten Krümmungsradius des elliptischen Raumes.

Transformiert man wie früher diese Gravitationspotentiale auf das relativ zur Gesamtheit der im Durchschnitt ruhenden Materie mit der Winkelgeschwindigkeit ω' gleichförmig rotierende, gestrichene Koordinatensystem, so gehen sie, wenn $x_4 = ct$ gesetzt wird, über in:

1) W. de Sitter, On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences. 3. paper. Monthly Notices of the Royal Astron. Society. Vol. 78, Nr. 1.

$$\left.\begin{aligned} g'_{ik} &= -\frac{\delta_{ik}}{1+\varepsilon r'^2} + \frac{\varepsilon x'_i x'_k}{(1+\varepsilon r'^2)^2} (i,k=1,2,3) \\ g'_{14} &= \frac{+x'_2\omega'}{1+\varepsilon r'^2}\,; \quad g'_{24} = \frac{-x'_1\omega'}{1+\varepsilon r'^2}\,; \\ g'_{34} &= 0; \quad g'_{44} = 1 - \frac{\omega'(x_1'^2+x_2'^2)}{1+\varepsilon r'^2}. \end{aligned}\right| \quad (2)$$

Beschränkt man sich auf die Umgebung des Nullpunktes, so kann man wegen der Kleinheit von ε diese g'_{ik} durch die folgenden ersetzen:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & +x_2'\omega' \\ 0 & -1 & 0 & -x_1'\omega' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ +x_2'\omega' & -x_1'\omega' & 0 & [+1-\omega'(x_1'^2+x_2'^2)]. \end{matrix}\right| \quad (3)$$

Zu denselben Werten wäre man auch gelangt, wenn man die früher benutzten Lösungen für den sphärischen Raum wieder zugrunde gelegt hätte.

Die soeben gefundenen Werte der Gravitationspotentiale setzen wir nun in die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\frac{d^2 x'_i}{ds^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx'_r}{ds}\frac{dx'_s}{ds} = 0 \qquad (4)$$

ein. Die Determinante der g'_{ik} ist:

$$g' = -1\,, \qquad (5)$$

und die kontravarianten Gravitationspotentiale werden:

$$\left.\begin{matrix} -(1-x_2'^2\omega'^2) & -x_1'x_2'\omega'^2 & 0 & +x_2'\omega' \\ -x_1'x_2'\omega'^2 & -(1-x_1'^2\omega'^2) & 0 & -x_1'\omega' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ +x_2'\omega' & -x_1'\omega' & 0 & +1. \end{matrix}\right| \quad (6)$$

Hieraus erhält man für die Feldkomponenten Γ^i_{rs} die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^2_{41} &= +\omega'; & \Gamma^1_{42} &= -\omega' \\ \Gamma^1_{44} &= -x_1'\omega'^2; & \Gamma^2_{44} &= -x_2'\omega'^2. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Alle übrigen Γ^i_{rs} sind Null.

Die Bewegungsgleichungen (4) gehen demnach über in:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1'}{ds^2} - 2\omega'\frac{dx_2'}{ds}\frac{dx_4'}{ds} - x_1'\omega'^2\left(\frac{dx_4'}{ds}\right)^2 = 0 \\ &\frac{d^2x_2'}{ds^2} + 2\omega'\frac{dx_1'}{ds}\frac{dx_4'}{ds} - x_2'\omega'^2\left(\frac{dx_4'}{ds}\right)^2 = 0 \\ &\frac{d^2x_3'}{ds^2} = 0; \quad \frac{d^2x_4'}{ds^2} = 0. \end{aligned}\right| \quad (8)$$

Setzen wir zufolge der letzten Gleichung $x_4' = s$, so gelangen wir wieder zu den gewöhnlichen Gleichungen für die Zentrifugal- und Corioliskräfte.

Wir hätten dasselbe Ergebnis natürlich auf folgendem kürzeren Weg erhalten können. In der unmittelbaren Umgebung des Nullpunktes gehen im System der ruhenden Materie die in (1) gegebenen Werte g_{ik} in diejenigen der speziellen Relativitätstheorie über. Ein Massenpunkt, dem wir eine Anfangsgeschwindigkeit erteilen, bewegt sich zufolge der Bewegungsgleichungen (4) für das ungestrichene System geradlinig und gleichförmig. Transformieren wir die Bewegung ebenso wie in der klassischen Mechanik auf ein rotierendes System, so werden wir zu den Zentrifugal- und Corioliskräften geführt.

Die erste Art der Darstellung hat jedoch den Vorteil, daß man ohne weiteres erkennt, wie die Zentrifugal- und Corioliskräfte durch das Gravitationsfeld der ruhenden Materie, den Gravitationsäther, bedingt sind; sie müssen also den Gravitationskräften zugeordnet werden. Ebenso ergibt sich unmittelbar, daß infolge der allgemeinen Invarianz der Gravitations- und Bewegungsgleichungen dieselben Kräfte auch auftreten, wenn das zuerst rotierende System ruht, und die äußeren Massen dagegen rotieren.

Heidelberg-Königstuhl, Januar 1921.

(Eingegangen 12. Januar 1921.)

Über den Transport von Vektorgrößen mit Anwendung auf Wirbelbewegung in reibenden Flüssigkeiten.

Von George Jaffé.

Manche Sätze über Zustandsänderungen in kontinuierlich verbreiteten Medien gewinnen eine besonders anschauliche Form, wenn man den Begriff des „Stromes" von skalaren Größen auf Vektoren überträgt. Der „Strom einer Vektorgröße", zu dem man so gelangt, ist als Tensor (zweiter Stufe), und zwar im allgemeinen unsymmetrischer Tensor, anzusprechen.

Wir denken uns ein kontinuierlich verbreitetes Medium M gegeben, das skalarer und vektorieller Zustandsänderungen fähig sei. Es bedeute σ eine im Raum feste, geschlossene Fläche, die im Inneren von M verläuft, aber auch ganz oder teilweise mit der Begrenzung von M zusammenfallen kann; τ sei der von σ begrenzte Teil von M, n die äußere Normale des Oberflächenelementes $d\sigma$, also

$$d\sigma_\nu = d\sigma \cos(n x_\nu) \ldots\ldots (\nu = 1, 2, 3)$$

die Projektionen von $d\sigma$ auf die Koordinatenebenen.

Besteht nun für eine skalare Zustandsgröße s ein Zusammenhang von der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\int s\,d\tau = -\int \Sigma^{\nu} c_{\nu}\,d\sigma_{\nu}, \tag{I}$$

so nennt man den Vektor mit den Komponenten c_{ν} die Stromdichte des Skalars s.

Ganz entsprechend wird man beim Bestehen von drei Gleichungen der folgenden Form für den Vektor w

$$\frac{\partial}{\partial t}\int w_{\mu}\,d\tau = -\int \Sigma^{\nu} c_{\mu\nu}\,d\sigma_{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \tag{II}$$

den Tensor $c_{\mu\nu}$ als Stromdichte des Vektors w_{μ} bezeichnen. Der Strom des Vektors w durch das Flächenelement $d\sigma$ pro Zeiteinheit in Richtung von n ist also dann gegeben durch den Vektor j:

$$j_{\mu} = \Sigma^{\nu} c_{\mu\nu} \cos(n x_{\nu})\,d\sigma. \tag{IIa}$$

Im folgenden beschränken wir die Betrachtung auf den Fall, daß M eine inkompressible Flüssigkeit ist, wobei aber s und w noch beliebige Bedeutung haben mögen. Verstehen wir unter dem Vektor mit den Komponenten v_{μ} die Geschwindigkeit als Funktion des Orts, so soll also die Gleichung

$$\Sigma^{\nu} \frac{\partial v_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{1}$$

zu allen Zeiten erfüllt sein. Genügt unter diesen Umständen der Skalar s der Differentialgleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\Sigma^{\nu} v_{\nu} \frac{\partial s}{\partial x_{\nu}}, \tag{2}$$

so sagen wir, s werde durch Konvektion befördert. Denn, integriert man (2) über τ und verwandelt die rechte Seite in ein Oberflächenintegral, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\int s\,d\tau = -\int \Sigma^{\nu} s v_{\nu}\,d\sigma_{\nu}; \tag{3}$$

der Strom (s. I)

$$c_{\nu} = s v_{\nu} \tag{4}$$

ist also ein Konvektionsstrom.

Dementsprechend wollen wir sagen, der Vektor w werde durch Konvektion befördert, wenn seine Komponenten den Gleichungen

$$\frac{\partial w_{\mu}}{\partial t} = -\Sigma^{\nu} v_{\nu} \frac{\partial w_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \tag{5}$$

genügen. Durch die gleiche Rechnung findet man dann als Konvektionsstrom des Vektors w den speziellen Tensor (die „Dyade"):

$$c_{\mu\nu} = w_{\mu} v_{\nu}. \tag{6}$$

Ist der Vektor w selber quellenfrei, genügt er also der Gleichung

$$\Sigma^{\nu} \frac{\partial w_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \tag{7}$$

so ist noch eine zweite Art von Konvektionsstrom möglich. Genügen die w_{μ} nämlich dann Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial w_{\mu}}{\partial t} = \Sigma^{\nu} w_{\nu} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \tag{8}$$

so findet man den Konvektionstensor zweiter Art

$$c'_{\mu\nu} = -v_{\mu} w_{\nu}. \tag{9}$$

Außer der Konvektion betrachten wir den „Transport durch Diffusion". Von einem solchen sprechen wir bei einem Skalar s, wenn eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial s}{\partial t} = k\,\Sigma^{\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x_{\nu}^2} \tag{10}$$

besteht. Integriert man wieder über den Bereich τ und verwandelt die rechte Seite in ein Oberflächenintegral, so ergibt der Vergleich mit I folgenden Ausdruck für den Diffusionsstromvektor

$$d_{\nu} = -k \frac{\partial s}{\partial x_{\nu}}. \tag{11}$$

Analog folgt aus dem Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial w_{\mu}}{\partial t} = k\,\Sigma^{\nu} \frac{\partial^2 w_{\mu}}{\partial x_{\nu}^2} \tag{12}$$

als Diffusionsstromtensor

$$d_{\mu\nu} = -k \frac{\partial w_{\mu}}{\partial x_{\nu}}. \tag{13}$$

Es möge nochmals betont werden, daß in allen vorstehenden Rechnungen die Integrationen über einen im Raum festen Bereich zu erstrecken sind.

Als erste Anwendung betrachten wir den Impulssatz für inkompressible, reibende Flüssigkeiten unter der Wirkung von Kräften, die ein Potential V haben. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\varrho \frac{\partial v_{\mu}}{\partial t} = -\varrho\left(\Sigma^{\nu} v_{\nu} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial V}{\partial x_{\mu}}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_{\mu}} + k\,\Sigma^{\nu} \frac{\partial^2 v_{\mu}}{\partial x_{\nu}^2} \tag{14}$$

(ϱ Dichte, k Reibungskonstante). Integriert man diese Gleichungen wieder über einen im Raum festen Bereich und verwandelt die rechte Seite in ein Oberflächenintegral, so ergibt sich als Ausdruck des Impulssatzes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho v_{\mu}\,d\tau = -\int \Sigma^{\nu} (c_{\mu\nu} + d_{\mu\nu})\,d\sigma_{\nu} - \int (p + \varrho V)\,d\sigma_{\mu} \tag{15}$$

mit der Bedeutung

$$c_{\mu\nu} = \varrho v_{\mu} v_{\nu}, \tag{16a}$$

$$d_{\mu\nu} = -k \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x_{\nu}}. \tag{16b}$$

Läßt sich also in der strömenden Flüssigkeit eine im Raum feste Fläche legen, an der p und V konstant sind, so verschwindet das zweite Integral auf der rechten Seite, und die Zunahme des Gesamtimpulses innerhalb jener Fläche pro Zeiteinheit ist dann gleich dem Konvektions- und Diffusionsstrom des Impulses durch die Fläche in Richtung der inneren Normale.

Ein analoger Satz gilt für die Bewegung von Wirbeln in reibenden Flüssigkeiten. Indem man durch kreuzweise Differentiation V und p aus den Gleichungen (14) eliminiert, gelangt man zu dem folgenden Gleichungssystem[1]):

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial t} = -\Sigma^\nu\left(v_\nu \frac{\partial w_\mu}{\partial x_\nu} - w_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right) + \frac{k}{\varrho}\Sigma_\nu \frac{\partial^2 w_\mu}{\partial x_\nu^2}; \tag{17}$$

dabei bedeutet

$$w_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial v_\varkappa}{\partial x_\lambda}\right) \ldots\ldots (\varkappa, \lambda, \mu \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3) \tag{17a}$$

den Wirbelvektor.

Unter Berücksichtigung von (6), (9) und (13) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\int w_\mu d\tau = -\int \Sigma^\nu (c_{\mu\nu} + d_{\mu\nu})\, d\sigma_\nu; \tag{18}$$

dabei ist gesetzt

$$c_{\mu\nu} = w_\mu v_\nu - v_\mu w_\nu, \tag{19a}$$

$$d_{\mu\nu} = -\frac{k}{\varrho}\frac{\partial w_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{19b}$$

Die Änderung des Gesamtwirbels in einem räumlich festen Bereich pro Zeiteinheit ist demnach — wenn die äußeren Kräfte ein Potential haben — gleich dem Wirbelstrom durch die Begrenzung. Dieser Wirbelstrom setzt sich zusammen aus dem Konvektionsstrom (19a) und dem Diffusionsstrom (19b). Der Konvektionsstrom ist in diesem Falle von erster und zweiter Art, und infolgedessen ein schiefsymmetrischer Tensor („äußeres Produkt der Vektoren w und v").

Läßt sich eine feste geschlossene Fläche legen, an welcher dauernd die rechte Seite von Gleichung (18) verschwindet, z. B. eine unendlich große Kugel, wenn v oder w von hinreichender Ordnung im Unendlichen verschwindet, so erhält man den Satz, daß der Gesamtwirbel zeitlich konstant ist:

$$\int w_\mu d\tau = \text{const.} \tag{20}$$

Dieser Satz ist für zweidimensionale Strömung reibender Flüssigkeiten schon von Poincaré ausgesprochen worden[2]). Verschwindet v selbst überall an der Begrenzung, so kann der konstante Wert von (20), wie eine partielle Integration lehrt, nur Null sein.

Ist die Flüssigkeit von festen Wänden eingeschlossen, so verschwindet zwar an diesen der Konvektionsstrom, aber im allgemeinen weder der Diffusionsstrom des Impulses (16b), noch derjenige des Wirbels (19b). Es findet also dann Austausch von Impuls und Wirbel mit der Umgebung statt; in diesem Falle sind aber auch die äußeren Kräfte mit zu berücksichtigen, die als tangentielle Flächenkräfte kein Potential haben[1]).

Wir betrachten noch ein einfaches Beispiel für den allgemeinen Satz (20). Man überzeugt sich leicht, daß die Werte

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{x_2}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}\left(W_1 e^{-\frac{\varrho(x_1^2+x_2^2)}{4kt}} + W_2\right) \\ v_2 &= \frac{x_1}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}\left(W_1 e^{-\frac{\varrho(x_1^2+x_2^2)}{4kt}} + W_2\right) \\ v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

und demzufolge

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_2 &= 0 \\ w_3 &= -\frac{\varrho W_1}{8\pi kt} e^{-\frac{\varrho(x_1^2+x_2^2)}{4kt}}; \quad x_1^2 + x_2^2 > 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

den Gleichungen (1) und (17) genügen.

Das partikuläre Integral (21), in dem W_1 und W_2 Konstante bedeuten, stellt eine zweidimensionale Strömung parallel der $x_1 x_2$-Ebene dar; die Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ist nur Funktion des Radiusvektors $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und steht überall senkrecht auf diesem. Der Wirbel w_3 hat die Form eines zweidimensionalen „Wärmepols", die Ausdrücke für v_1 und v_2 sind daraus durch Integration gewonnen.

Die durch (21) dargestellte Strömung besteht aus der Superposition eines gewöhnlichen Wirbelfadens von der Intensität W_2 und eines sich verbreiternden zylindrischen Wirbels von der Intensität W_1, beide mit der x_3-Achse als Achse. Die Geschwindigkeit v und der Wirbel w_3 können nur in der x_3-Achse unendlich werden; die Energie der Strömung ist, wie bei einem gewöhnlichen Wirbelfaden, logarithmisch unendlich.

Zwei Sonderfälle sind von Interesse, erstens der Fall $W_1 \neq 0$; $W_2 = 0$, und zweitens der Fall $W_1 + W_2 = 0$. In ersterem Falle herrscht zur Zeit $t = 0$ nur in der x_3-Achse Bewegung, dort natürlich von unendlichem Betrage. Dann beginnt der Wirbel sich zu verbreitern, hinterläßt aber in der x_3-Achse einen gewöhnlichen Wirbelfaden von der Intensität W_1, der als Endzustand

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 667. B. G. Teubner, Leipzig 1907.

2) H. Poincaré, Théorie des Tourbillons, S. 196. Georges Carré, Paris 1893.

1) G. Jaffé, diese Zeitschr. 21, 541, 1920.

($t = \infty$) allein bestehen bleibt. Diese Folgerung aus den Gleichungen (21) widerspricht scheinbar dem Ausdruck (22) für w_3, nach dem man erwarten sollte, daß der Wirbel für $t = \infty$ überall verschwindet. Es ist aber zu berücksichtigen, daß (22) für $r = 0$ ungültig ist, denn bei der Berechnung von (22) aus (21) gemäß (17a) haben sich Glieder fortgehoben, die für $r = 0$ unendlich werden. Der Ausdruck (22) für w_3 stellt nur denjenigen Teil des Gesamtwirbels[1]) dar, der sich verbreitert und schließlich ins Unendliche hinauswandert. Sein Betrag ist unabhängig von der Zeit

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} w_3\, r\, dr\, d\varphi = -\frac{W_1}{2}. \tag{23}$$

Um den Gesamtwirbel zu erhalten, ist hierzu noch derjenige Anteil zu addieren, der in der x_3-Achse auch für $t = \infty$ bestehen bleibt, das heißt also $+\frac{W_1}{2}$. In dem Spezialfalle, der uns jetzt beschäftigt ($W_1 \neq 0$; $W_2 = 0$), ist also der — nach dem Satze (20) konstante — Betrag des Gesamtwirbels Null; der Anteil $-\frac{W_1}{2}$ davon wandert ins Unendliche, der Betrag $+\frac{W_1}{2}$ verbleibt in der x_3-Achse. In dem allgemeineren Falle (21) ist der konstante Betrag des Gesamtwirbels $\frac{W_2}{2}$; davon kann man sich leicht überzeugen, indem man für $t = 0$ die Zirkulation längs irgendeines endlichen Kreises $r = r_0$ berechnet. Man findet so den Wert W_2, also nach dem Stokesschen Satz und (17a) für den Gesamtwirbel $\frac{W_2}{2}$.

In dem zweiten Sonderfalle, wenn $W_2 = -W_1$ ist, besteht für $t = 0$ diejenige, außerhalb der Achse wirbelfreie, Geschwindigkeitsverteilung, welche einem gewöhnlichen Wirbelfaden von der Intensität $-W_1$ zukommt. Dann beginnt der Wirbel sich zu verbreitern und als Endzustand tritt überall, einschließlich der Achse, Ruhe ein. Obgleich also in diesem Falle der Wirbel schließlich überall unter jeden Betrag sinkt, ist dennoch nach (23) und in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze (20) der Gesamtwirbel $-\frac{W_1}{2}$ konstant.

Der Diffusionsstrom des Wirbels ist bei dem Beispiel (21) radial nach außen gerichtet. In der Zeiteinheit wird durch einen Kreiszylinder vom Radius r_0 und der Höhe 1 die Wirbelmenge

$$-\frac{\varrho r_0^2 W_1}{8 k t^2} e^{-\frac{\varrho r_0^2}{4kt}} \tag{24}$$

befördert. Dieser Wirbelstrom geht zur Zeit

$$t_{\max} = \frac{\varrho r_0^2}{8k} \tag{25}$$

durch ein Maximum und ergibt, von $t = 0$ bis $t = \infty$ integriert, ebenfalls den konstanten Betrag $-\frac{W_1}{2}$.

Leipzig, im Januar 1921.

(Eingegangen 10. Januar 1921.)

1) Unter Gesamtwirbel ist der Ausdruck (20) zu verstehen, und jetzt — im zweidimensionalen Falle — ein Zylinder von der Höhe 1 zu nehmen.

Einige Bemerkungen zur Relativitätstheorie.

Von Otto Meißner.

1. Seit etwa 10 Jahren verfolge ich die Diskussionen über das Relativitätsprinzip. Wenn es mir trotzdem nicht gelungen ist, über alle Punkte völlige Klarheit zu erlangen, so dürfte dies mindestens zum Teil auch daran liegen, daß die Theorie selbst im Laufe der Zeit durch ihren Urheber manche schwerwiegende Umänderung und Erweiterung erfahren hat, zum Teil aber auch wohl daran, daß nicht immer die physikalischen und die philosophischen Probleme dieser auf jeden Fall höchst beachtenswerten Theorie genügend auseinander gehalten sind, was zu einer klaren Erfassung der Sachlage aber doch wohl unbedingt erforderlich ist.

2. Um völlige Klarheit zu erzielen, ist es wohl nötig, zunächst genau festzulegen, an welche Stelle der Comte-Ostwaldschen Wissenschaftspyramide das Relativitätsprinzip gehört. Denn, wie mir scheint, beruht ein großer Teil der Streitigkeiten darüber auf verschiedener Auffassung, wo das Relativitätsprinzip einzureihen sei. Wer im Prinzip die Ordnung der Wissenschaften nach der Comte-Ostwaldschen Pyramide für richtig hält, wird zum Beispiel nie in Zweifel sein können, bezüglich der Beantwortung der Frage, ob wir empirisch die Euklidizität des Raumes oder das Gegenteil davon festzustellen vermögen. Denn da die „Mathetik" den Unterbau der energetischen Wissenschaften bildet, müssen ihre Gesetze notwendigerweise auch für jene gelten, und der Physiker kann höchstens feststellen, welche Koordinatensysteme ihm zur Beschreibung der Vorgänge am zweckmäßigsten erscheinen, nicht aber, welche Eigenschaften der Raum als solcher hat. Das hat namentlich Poincaré, allerdings ohne auf die

Wissenschaftspyramide Bezug zu nehmen, wiederholt mit Entschiedenheit betont. Die „Transitivität“ (nach Ostwald) bedingt andererseits, daß niemals Gesetze (oder Beobachtungen) in einer höheren Wissenschaft (hier der Physik s. l. c.), solche einer niedrigeren (hier der Mathetik) umstoßen können, solange wenigstens letztere in sich richtig sind: das trifft aber für die Geometrie zweifellos zu.

3. Schon Gauß soll daran gedacht haben, durch Messung von großen Dreiecken auf der Erde oder am Himmel feststellen zu können, ob der Raum euklidisch sei oder nicht. Aber er hat diese Gedanken nicht öffentlich ausgesprochen, „weil er das Geschrei der Böoter scheue“, eine für Gauß merkwürdige Äußerung, die wohl eher darauf hindeutet, daß Gauß im stillen doch noch größere Schwierigkeiten bei dem Problem fand, als er sich vielleicht selbst zugestehen mochte, denn er pflegte zwar seine Publikationen äußerst sorgfältig abzurunden, keineswegs aber ihr Verständnis dem Publikum so zu erleichtern, wie dies etwa und vor allem Euler getan hat. Wieder muß ich hier auf Poincaré verweisen. Und wenn, was man wohl mit sehr großer Wahrscheinlichkeit annehmen muß, die Sonnenfinsternis vom Mai 1919 eine Bestätigung der Relativitätstheorie gebracht hat, so nimmt doch gerade Einstein selbst eine Krümmung der Lichtstrahlen infolge des starken Schwerefeldes der Sonne an, nicht aber — wenn ich die Sache richtig begriffen habe — eine Krümmung des Raumes.

4. Jedenfalls kann man meines Erachtens nicht gleichzeitig von einer Krümmung des Raums und von einer solchen der Lichtstrahlen sprechen. Sind die Lichtstrahlen im leeren Raume immer als Gerade anzusehen, so könnte man vielleicht von einer Raumkrümmung reden, praktisch aber könnte man sie ebenso wenig feststellen wie ein „bewegter Beobachter“ die Lorentzkontraktion, weil jedes Mittel dazu fehlen würde. Ist aber „der Raum euklidisch“, was bei mir nichts anderes heißt als: setzt man den euklidischen Raum der Mathematik als Grundlage für seine physikalischen Formeln und Betrachtungen voraus, so kann man allerdings feststellen, ob die Lichtstrahlen stets gerade Linien sind oder nicht. Dann aber ist eben der Raum euklidisch, nicht aus irgendwelchen physikalischen Gründen, sondern einfach, weil man aus Zweckmäßigkeits- oder anderen Gründen ein euklidisches Koordinatensystem gewählt hat.

5. Nun will freilich Einstein, wenn ich ihn recht verstanden haben, noch über Minkowski hinausgehen, der in seinem „Weltpostulat“ die unauflösliche Union von Raum und Zeit gefordert hat, wobei freilich die Zeit auch so noch eine Sonderstellung einnimmt, indem sie in die Formeln mit i multipliziert eingeht. Nach den neueren Arbeiten der Relativitätstheoriker aber existiert auch diese Raumzeitwelt nicht, sondern nur ein vierdimensionales Feld. Allerdings dürfte auch schon früher die Meinung der meisten Physiker und sogar der Mehrzahl der Philosophen gewesen sein, daß der „leere Raum“ eine Abstraktion oder wenigstens ohne physikalische Bedeutung sei, ja das ist geradezu das Fundament der Galilei-Newtownschen Theorie, daß der Raum als solcher für die Physik ohne Bedeutung ist; nichts anderes will die Forderung der „Homogenität“ des Raumes besagen. Was die Relativitätstheorie unter dem Begriff „Raum“ versteht, ist eben offenbar etwas anderes, als was Newton darunter verstand; dann braucht die Differenz aber auch nicht darauf zu beruhen, daß notwendigerweise einer von beiden Teilen unrecht haben muß. Wortstreitigkeiten, darauf beruhend, daß jede von beiden Parteien dasselbe Wort in verschiedener Bedeutung gebraucht, pflegen stets sehr langwierig und der Natur der Sache nach notwendigerweise ergebnislos zu sein.

6. Wäre der Raum wirklich nichteuklidisch, so käme man zu sehr sonderbaren Folgerungen, die ja zum Teil auch schon von einigen gezogen sind. Vor allem wäre damit die Existenz einer weiteren Raum- (und möglicherweise auch noch einer zweiten Zeit-)Dimension erwiesen, denn die Krümmung eines Gebildes von n-Dimensionen setzt immer das Vorhandensein eines Gebildes von $n+1$-Dimensionen voraus, wie eine leichte Überlegung, z. B. die Betrachtung einer krummen 2 dimensionalen Fläche lehrt, die nur in einem 3 dimensionalen Raume gekrümmt sein kann. Unsere Welt wäre dann also ein Teil eines wenigstens 5 dimensionalen Raumzeitgebildes.

Wäre der Raum „unbegrenzt, aber endlich“, wie schon Riemann meinte, so könnte er, wie namentlich Schwarzschild hervorgehoben und als besonderen Vorzug für die Verständlichkeit angesehen hat, nur eine endliche Masse, jetzt würden wir sagen: eine begrenzte Energie, also nach der jetzt in der Physik herrschenden Quantenlehre Plancks nur eine endliche Anzahl Elementarquanten, enthalten. Da die Kombination einer endlichen Anzahl von Elementen ebenfalls endlich ist, so müßte nach einer gewissen, wiewohl nach menschlichem Maß gemessen ungeheuer langen Zeit sich dieselbe Kombination wiederholen, woraus nach dem Kausalgesetze eine „ewige Wiederkehr“ alles Geschehens folgen würde. Dieser uralte Gedanke ist von philosophischer Seite bekannt-

lich zuletzt von Nietzsche vertreten worden, der nur bedauerte wegen seines gänzlichen Mangels an mathematischen Fähigkeiten (wegen dessen er sein Abiturium in Schulpforta beinahe nicht bestanden hätte), seine These nicht beweisen zu können.

Diese Betrachtung wäre allerdings hinfällig, wenn auch das Kausalgesetz keine absolute Gültigkeit hätte, sondern wie viele, vielleicht die meisten Naturgesetze, nur ein auf dem Gesetz der großen Zahlen beruhendes Durchschnittsgesetz wäre. Hierüber wissen wir aber vorläufig noch gar nichts.

8. Während Lorentz einen ruhenden Äther annimmt, der bei einer Bewegung der Körper die nach ihm benannte Kontraktion hervorruft, die wir nur deshalb nicht wahrnehmen können, weil die zur Prüfung dienenden Maßstäbe in derselben Weise verkürzt werden, existiert nach der Relativitätstheorie der Äther überhaupt nicht. Dafür aber ist der Raum inhomogen, nichteuklidisch und besitzt bestimmte physikalische, durch die Feldgleichungen definierte Eigenschaften. Auch hier handelt es sich um verschiedene Bewertungen desselben Wortes. Nach meiner, auch von anderen geteilten Auffassung ist die Einsteinsche Lehre eher eine Stütze als ein Beweis gegen die Existenz des Äthers; nur nennen wir das Äther, was Einstein „Raum" nennt und reservieren das Wort Raum für die mathematische Abstraktion. Diese Auffassung deckt sich zwar nicht ganz mit der Kantischen, ist aber wohl mit ihr vereinbar, was von der Einsteinschen nicht gesagt werden kann, obwohl freilich manche Relativitätstheoretiker, besonders Schlick, eine genauere Scheidung zwischen den physikalischen und den psychologischen Begriffen anstreben.

9. Ganz kurz zusammengefaßt kann man vielleicht sagen, der Satz: „es gibt keine absolute Bewegung", ist das Fundament der speziellen, der Satz: „es gibt keine absolute Beschleunigung", das der allgemeinen Relativitätstheorie. Theoretisch wird sich jeder zu diesen Sätzen bekennen; was die Praxis braucht, ist etwas anderes, und auch die geschichtliche Entwicklung spricht nicht dafür, daß das „Relativitätsprinzip" eine „absolute" Wahrheit ist. Wohl hat man ständig andere Koordinatensysteme den kosmischen Betrachtungen zugrunde gelegt, aber dies waren stets einzelne, sich vor allen anderen auszeichnende Systeme, und beim weiteren Fortschritt der Wissenschaft sind sie auf Teilgebieten, eben ihrer Besonderheit wegen, immer in Geltung geblieben, z. B. das geozentrische in der mathematischen Geographie usw. Auch Poincaré betont ausdrücklich, daß die Relativierung des Raumbegriffes keine Ehrenrettung der Verfolger Galileis bedeute.

10. Ist der Nachweis, daß schwere und träge Masse identisch sind, als geglückt anzusehen, so ist dies in der Tat ein bedeutender Fortschritt. Das hierbei fast stets gebrauchte Verdeutlichungsbeispiel von dem Mann im Kasten, der allein im Weltraum ist, und an dessen Kasten ein Engel plötzlich zu ziehen anfängt, scheint mir aber ziemlich unglücklich gewählt. Denn gerade nach den Prinzipien der Relativitätstheorie kann dem Kasten des Mannes weder eine Beschleunigung erteilt werden, noch ist ein Gravitationsfeld vorhanden außer dem verschwindend kleinen des Kastens. Was hat ferner ein Engel, also ein übernatürliches Wesen, in der Physik zu tun? Zwar sind auch mir die Maxwellschen Dämonen nicht unbekannt, aber hier handelt es sich um die Verdeutlichung eines fundamentalen Grundsatzes, was bei Maxwell nicht der Fall ist.

11. Bei der Messung einer rotierenden, aus einer Ebene herausgeschnittenen Scheibe soll nur ein „ruhender" Beobachter für den Umfang den richtigen Wert $2r\pi$ herausbekommen, ein mitbewegter dagegen einen anderen. Es ist übrigens nicht streng richtig, wenn Bloch angibt, daß der bewegte Beobachter den Durchmesser der Scheibe genau ebenso lang findet wie der unbewegte; der Unterschied ist aber von höherer Größenordnung als sie bei der Umfangmessung in Frage kommt. Wie würde nun ein unbefangener Beobachter seine Messungsergebnisse deuten? Von den beiden Erklärungsmöglichkeiten: die Gesetze der euklidischen Geometrie gelten nicht — und: meine Maßstäbe erfahren bei der Umfangsmessung eine systematische Verkürzung, würde er ohne Zweifel die letztere wählen (vgl. die Ausführungen von H. Dingler in dieser Zeitschr. **21**, 487, 1920). Er würde eben in dieser rein physikalischen Angelegenheit statt der naturphilosophischen (mathetischen nach Ostwald) die physikalische Erklärung vorziehen, und das ist nicht bloß in diesem, sondern überhaupt in jedem vorkommenden Falle möglich.

12. Es ist überhaupt immer möglich, ohne die Relativitätstheorie auszukommen, ebenso wie man auch mit der Ptolemäischen Theorie alle Himmelserscheinungen erklären könnte. Wenn man trotzdem die Kopernikanische angenommen hat, so liegt das daran, daß sie die Erscheinungen weit einfacher erklärt. Das kann man in unserm Falle aber höchstens von der im Minkowskischen Sinne verstandenen speziellen Relativitätstheorie sagen, von der allgemeinen jedoch in ihrer jetzigen Gestalt und vorläufig jedenfalls nicht.

Ist nun deshalb die Relativitätstheorie zu verwerfen? Das soll keineswegs gesagt sein. Sie bietet eine einheitliche Erklärung für viele merkwürdige Erscheinungen, die zwar auch ohne sie, und oft (man denke an die Lorentz-Kontraktion) ganz plausibel, erklärt werden können, wobei aber die einzelnen Erklärungen nichts miteinander gemeinsam haben. Es ist also wohl mit Sicherheit anzunehmen, daß aus methodologischen Gründen der Kern der Relativitätstheorie sich durchsetzen wird, auf keinen Fall aber in der jetzigen Form.

Benutzte Literatur.

1. Arbeiten von Einstein, Freundlich, Schlick, Witte, v. Laue, Weyl, Hasse über die Relativitätstheorie.

2. Kultur der Gegenwart, Band: Physik (Wiechert, Wien, Lorentz, Einstein, Planck).

3. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese; Wert der Wissenschaft; Wissenschaft und Methode; Letzte Gedanken.

4. Kant, Kritik der reinen Vernunft.

5. Dingler, Der starre Körper.

Potsdam, 7. Februar 1921.

(Eingegangen 11. Februar 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Bericht über die Anwendung der Statistik auf chemische Gleichgewichte.

Von K. F. Herzfeld.

Die thermodynamische Theorie des chemischen Gleichgewichtes ist durch das Nernstsche Theorem und die neueren Untersuchungen über spezifische Wärmen zu einem gewissen Abschluß gekommen, soweit keine Lösungen daran beteiligt sind. (Letztere widersetzen sich bisher der Behandlung, da ihre thermischen Größen unbekannt sind.) Doch läßt sich durch statistische Betrachtungen das Verständnis der Formeln vertiefen, worüber hier ein zusammenfassender Bericht erstattet werden soll. Zuerst seien die Verhältnisse auf Grund der klassischen Theorie besprochen, dann die Änderungen, welche die Einführung der Quanten bedingt, endlich die Frage, wieweit sich diese Überlegungen auf geladene Teilchen (Elektronen) übertragen lassen.

I. Klassische Theorie.

a) Die Verteilung. Wir entnehmen der Statistik den Satz, daß die Zahl der Teilchen mit der Masse m in zwei verschiedenen Zuständen mit den Energien E_1 und E_2 sich verhält wie

$$dV_1\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, e^{-\frac{E_1}{kT}} : dV_2\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2\, e^{-\frac{E_2}{kT}}. \quad \text{(I)}$$

Hier ist der Zustand eines Teilchens dadurch charakterisiert, daß es im Raumelement dV sitzt und seine Impulskomponenten zwischen ξ und $(\xi + d\xi)$, η und $(\eta + d\eta)$, ζ und $(\zeta + d\zeta)$ liegen $\left(\frac{\xi}{m}, \frac{\eta}{m}, \frac{\zeta}{m}\right.$ sind die Geschwindigkeiten$\left.\right)$.

Zur bequemen Ausdrucksweise sagen wir, daß sein Impuls im Element

$$d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

des „Impulsraumes" liegt, dessen Koordinaten

$$x' = \xi, \qquad y' = \eta, \qquad z' = \zeta$$

sind. Wir können dann Gruppen solcher Zustände zu einem einheitlichen Körper zusammenfassen. Das Verhältnis der Teilchenzahlen in zwei verschiedenen im Gleichgewicht stehenden Körpern ist dann

$$\Sigma dV_1\, d\omega_1\, e^{-\frac{E_1}{kT}} : \Sigma dV_2\, d\omega_2\, e^{-\frac{E_2}{kT}},$$

wobei über alle im Körper zusammengefaßten Zustände zu summieren ist. Eine solche Summe wollen wir das mittlere Phasenvolumen Φ nennen[1]). Teilen wir die Energie in eine potentielle und eine kinetische $E = E_v + E_J$, so zerfällt Φ in ein Produkt

$$\Phi = \Sigma dV\, d\omega\, e^{-\frac{E_J + E_v}{kT}} = J \cdot \overline{V} \qquad J = \Sigma d\omega\, e^{-\frac{E_J}{kT}}$$

$$\overline{V} = \Sigma dV\, e^{-\frac{E_v}{kT}} \qquad (1)$$

J wollen wir das mittlere Volumen des Impulsraumes, $\overline{V}$ das mittlere Raumvolumen[2]) nennen.

Im allgemeinen wird J und $\overline{V}$ von T abhängen. Es ist in dreidimensionalen Problemen

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2mkT}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{-\frac{\eta^2}{2mkT}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, e^{-\frac{\zeta^2}{2mkT}} = $$

$$= \sqrt{2\pi mkT}^3. \qquad (2)$$

1) Diese Phasenvolumina hängen auf das innigste mit der freien Energie, bzw. dem Gibbsschen thermodynamischen Potential zusammen, s. K. F. Herzfeld, Zeitschr. f. phys. Chem. **95**, 139, 1920.

2) Vgl. die verwandten Begriffe Konfigurationsausdehnung und Geschwindigkeitsausdehnung bei W. Gibbs, Statistische Mechanik Kap. VI, Leipzig 1905.

Diese Temperaturabhängigkeit von J ist innig mit der spezifischen Wärme verknüpft. Sie bedeutet ja, daß mit steigender Temperatur sich die mittlere Geschwindigkeit, die das mittlere Volumen des Impulsraumes bedingt, vergrößert, und zwar ist

$$C_J = R \frac{\partial}{\partial T}\left(T^2 \frac{\partial}{\partial T} \lg J\right) \qquad (3)$$

wenn C_J die spezifische Wärme pro Molekül bedeutet, die von der kinetischen Energie herrührt. Der Universalität des Ausdruckes von J entspricht die Universalität des aus (3) folgenden Wertes $C_J = \frac{3}{2} R$.

Diese Betrachtungen wollen wir zuerst auf rein physikalische, dann auf chemische Gleichgewichte anwenden.

b) Zwei ideale[1]) Gase in verschiedener Höhe, verbunden durch eine dünne Röhre. Die Summation über alle Impulse des Gases 1 in einem Volumelement ergibt das mittlere Volum des Impulsraumes J, die Summation über die dV ergibt V_1, das Gasvolum von 1, mal $e^{-\frac{mgh_1}{kT}}$, wenn h_1 die Höhe über einem beliebigen Nullpunkt, mgh_1 also die potentielle Schwereenergie ist.

Das zweite Gas ergibt analog $JV_2\, e^{-\frac{mgh_2}{kT}}$, also

$$n_1 : n_2 = \frac{V_1}{V_2} e^{-\frac{mg(h_1 - h_2)}{kT}} \qquad (4)$$

Das ist die bekannte Barometerformel.

c) Verdampfung[2]) fester Körper. Wir haben hier einerseits eine Gruppe von Zuständen zum Gas zusammengefaßt, für sie bekommen wir wie bisher $J \cdot V_g$.

Beim festen Körper andererseits ist das mittlere Volum des Impulsraumes ganz das gleiche wie beim Gas, nämlich

$$J = \sqrt{2\pi mkT^3}.$$

Dagegen ist das Volumen, das den Atomen im festen Zustand zur Verfügung steht, anders zu berechnen. Es ist nicht jeder Ort für ein festes Atom möglich, sondern eine ganz bestimmte Anzahl von Bezirken; diese Anzahl ist gleich der Zahl der festen Atome n_f. In einem solchen Bezirk schwinge nun das Atom quasielastisch um einen festen Punkt,[3]) nach dem es durch die rücktreibende Kraft $-m(2\pi\nu)^2 r$ zurückgezogen werde.

Wir erhalten dann bei der Summation über die dV für das mittlere Schwingungsvolumen eines Atoms[1])

$$\bar{v}_f = \int_0^\infty 4\pi r^2 e^{-\frac{m 4\pi^2\nu^2 r^2}{2kT}} dr = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}^3 \left(\frac{1}{2\pi\nu}\right)^3, \qquad (5)$$

für $\overline{V}_f = n_f \bar{v}_f$, für

$$J \cdot \overline{V} = n_f \left(\frac{kT}{\nu}\right)^3, \qquad (6)$$

dazu noch den Faktor $e^{+\frac{Q_0}{kT}}$, herrührend von der Verdampfungswärme Q_0 beim absoluten Nullpunkt.

Es wird also

$$n_g : n_f = V_g \cdot J : n_f \bar{v}_f \cdot J e^{+\frac{Q_0}{kT}}$$

oder

$$\frac{n_g}{V_g} = \frac{1}{\bar{v}_f} e^{-\frac{Q_0}{kT}} = \nu^3 \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}^3 e^{-\frac{Q_0}{kT}} \qquad (7)$$

Das Herausfallen von n_f bedeutet die Konstanz der „aktiven Masse" des festen Stoffes.

Wir sehen, daß bis auf die e-Potenz das Maßgebende direkt das Verhältnis von Gasvolum V_g und mittlerem Schwingungsvolumen v_g des festen Stoffes ist.

Die Potenz $T^{-3/2}$ bedeutet, daß die spezifische Wärme des festen Stoffes um $\frac{3}{2} R$ größer ist, als die des Gases und das kommt gerade dadurch zustande, daß das Gasvolum temperaturunabhängig ist, während das mittlere Schwingungsvolumen des festen Stoffes mit T steigt, d. h. mehr Teilchen sich in den weiteren Abständen vom Schwingungsmittelpunkt befinden und daher größere mittlere Energie haben.

Eine lehrreiche Anwendung bietet folgende Betrachtung.

Wir greifen als eigenes Körpersystem, d. h. als eigenen Stoff, all die Teilchen n'_f heraus, welche eine Entfernung zwischen r und $r + dr$ von der Ruhelage haben. Das mittlere Volumen des Impulsraumes bleibt unverändet $\sqrt{2\pi kTm}^3$, das des Schwingungsraumes ist dagegen n'_f mal dem Volum der Kugelschale, also $n'_f\, 4\pi r^2 dr$; dann ist noch zu berücksichtigen, daß das neue System pro Molekül die potentielle Energie $\frac{4\pi^2 m \nu^2 r^2}{2}$ hat, die Verdampfungswärme also um diesen Betrag niedriger ist. Die Gleichgewichtsbedingung mit dem Gas lautet nun

1) Wir behandeln die Atome im Folgenden unter Vernachlässigung von Drehungen und rechnen nur mit idealen Gasen, also unter Vernachlässigung des Moleküleigenvolumens.

2) O. Stern, diese Zeitschr. **14**, 629, 1913, Z. f. El. **25**, 66, 1919, H. Tetrode, Amst. Proc. **17**, 1067, 1915.

3) Diese Idealisierung des festen Körpers dient nur zur Vereinfachung der Rechnung, s. die beiden letzten oben zitierten Arbeiten.

1) Über die Integration bis ∞ siehe O. Stern a. a. O.

$$n_g : n'_f = V\sqrt{2\pi kTm^3} :$$
$$: n'_f \cdot 4\pi r^2 dr \sqrt{2\pi kTm^3}\, e^{-\frac{4\pi^2\nu^2 m r^2}{2kT}} + e^{\frac{Q_0}{kT}}.$$

Unser System hat ebenso wie das Gas die spezifische Wärme $^3/_2\, R$, da sein Volumen pro Molekül temperaturunabhängig $4\pi r^2 dr$ ist. Der gesamte feste Körper läßt sich als Gleichgewicht zwischen unendlich vielen solchen verschiedenen Komponenten auffassen; bei steigender Temperatur steigt die Menge der Komponenten mit größerem Energieinhalt und dadurch das mittlere Volum des ganzen Systems. Die Erhöhung der spezifischen Wärme um $\frac{3}{2}\, R$ rührt von der „Umwandlungswärme" der Komponenten her.

Es sei noch bemerkt, daß von dem in der e-Potenz steckenden Einfluß der Verdampfungswärme abgesehen, sinkende Temperatur das Gas bevorzugt, dessen Volum konstant bleibt, während das Schwingungsvolum des festen Körpers abnimmt.

Unsere Betrachtung führt insofern weiter als die reine Thermodynamik, als sie uns auch in Fällen, wo nur die Verdampfungswärme Q_0, aber gar nichts über die spezifische Wärme bekannt ist, Grenzen für die möglichen Dampfdrucke gibt. Es liegt nämlich das Phasenvolum pro Atom zwischen folgenden Grenzen[1]):

$$\frac{V_0}{n_f}\sqrt{2\pi kTm^3} \geqq \Phi \geqq h^3$$

(s. Abschnitt II), wenn V_0 das wirkliche Gesamtvolum des Körpers ist, also

$$\frac{V}{V_0}\, e^{-\frac{Q_0}{kT}} \leqq \frac{n_g}{n_f} \leqq \frac{V\sqrt{2\pi kTm^3}}{n_f h^3}\, e^{-\frac{Q_0}{kT}}.$$

d) Dissoziation fester Verbindungen. In diesem Fall (z. B. $Ag\,Br \rightarrow Ag + Br$)[2]) ist die Rechnung ganz genau so zu führen. Beim Gas ist überhaupt alles unverändert, sein mittleres Phasenvolumen ist

$$V\sqrt{2\pi kTm^3}\, e^{-\frac{Q_0}{kT}},$$

wo Q_0 die Wärmetönung pro Molekül für $T = 0$ ist.

Auch in der festen Verbindung ist das Volumen des Impulsraumes

$$J = \sqrt{2\pi kTm^3},$$

dagegen erfordert das Raumvolumen eine eigene Betrachtung, die einen Punkt des vorigen Abschnittes näher aufklären wird. Es sei die Zahl der freien Ag-Teilchen n_a, während $n_f\, Ag\,Br$ Moleküle vorhanden seien. Das mittlere Schwingungsfeld eines Br Atoms ist wieder

$$\bar{v}_f = \sqrt{\frac{2\pi kT^3}{m}}\, \frac{1}{(2\pi\nu)^3}.$$

Haben wir aber nun n_a oder n_f solcher anzusetzen? Wir sehen nun: wenn wir n_a ansetzen, dann kann sich ein Br Atom an jedes beliebige Ag Atom anlegen, wir werden also dann in der Masse Ag und $Ag\,Br$ Moleküle untereinander verstreut haben, d. h. wir haben eine feste Lösung von $Ag\,J$ in Ag. Das Gleichgewicht lautet nun:

$$n_g : n_f = V\sqrt{2\pi kTm^3}\, e^{-\frac{Q_0}{kT}} : n_a$$
$$\sqrt{2\pi kTm^3}\sqrt{\frac{2\pi kT^3}{m}}\, \frac{1}{(2\pi\nu)^3}, \qquad (8)$$

d. h. der Dampfdruck ist proportional $\frac{n_f}{n_a}$ der Konzentration des $Ag\,Br$ in der festen Lösung.

Kommen dagegen nicht alle Ag Teilchen in Betracht, d. h. kann sich ein Bromatom nicht überall anlagern oder mit anderen Worten, bleiben die beiden festen Phasen getrennt (wodurch das bewirkt wird, ist natürlich eine andere Frage, die hier nicht beantwortet werden kann), so ist die Zahl der einzelnen Schwingungsvolumina n_f statt n_a; die Größe n_f fällt wieder heraus wie bei der Verdampfung, die aktive Masse der festen Phase ist konstant. Wir erhalten die gleichen Gesetze (7) wie bei der Verdampfung.

e) Dissoziation zweiatomiger Gase[1]).

$$AB \rightleftarrows A + B.$$

Dieser Fall unterscheidet sich vom vorigen dadurch, daß die spezifische Wärme bei konstantem Volumen erfahrungsgemäß $^7/_2\, R$ ist. Davon entfallen $^3/_2\, R$ auf die fortschreitende Bewegung des Moleküls (bedingt durch den Impulsraum dieser fortschreitenden Bewegung mit dem mittleren Volumen J), R auf die Schwingung der Atome gegeneinander, R auf die Rotation. Daraus folgt, daß von der Rotation keine von potentieller Energie herrührende spezifische Wärme stammen kann, d. h. das mittlere Raumvolumen, das der Rotation zukommt, muß konstant sein, während nur das mittlere Schwingungsvolumen von T abhängig sein darf, um die entsprechende spezifische Wärme $^1/_2\, R$ zu geben. Das erreichen wir, wenn die Schwingung nicht um einen Punkt, sondern um die Oberfläche einer Kugel stattfindet, deren Radius

1) S. auch die Anmerkung zu I f.).

2) Wir denken uns der Einfachheit halber so hohe Temperatur, daß der Bromdampf einatomig ist, während das Ag nicht verdampfen möge.

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig 1898, II. 177 f. O. Stern, Ann. d. Phys. **44**, 495, 1914.

groß gegen die mittlere Amplitude ist. Dann ist nur die Dicke dieser dünnen Kugelschale temperaturabhängig, also nimmt nur eine Dimension mit T zu und so erhalten wir die spezifische Wärme $^1/_2\, R$, während eine die Vollkugel ausfüllende Schwingung wie in c) und d) $^3/_2\, R$ gibt.

Es wird das mittlere Schwingungsvolumen

$$\bar{v}_f = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} (r_0 + r)^2\, e^{-\frac{2\pi^2 m' \nu^2 r^2}{kT}}\, dr = $$
$$= 4\pi r_0^2 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m'}} \frac{1}{\nu}, \qquad (9)$$

wenn T klein genug ist, daß die Kugelschale dünn bleibt. Ihre Oberfläche beträgt $4\pi r_0^2$ und ihre temperaturabhängige mittlere Dicke

$$\sqrt{\frac{kT}{2\pi m'}} \frac{1}{\nu}.$$

Hierbei ist $m' = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$, weil beide Atome gegen den gemeinsamen Schwerpunkt schwingen. Für den Impulsraum geben Rotation und Schwingung zusammen J. Für das Dissoziationsgleichgewicht erhalten wir

$$n_B : n_{AB} = V \cdot J\, e^{-\frac{Q_0}{kT}} : n_a J \bar{v}_f =$$
$$\frac{V}{n_a} \nu \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\, e^{-\frac{Q_0}{kT}}. \qquad (10)$$

Die Formel ist genau die thermodynamisch aus den chemischen Konstanten abgeleitete[1]).

f) Löslichkeit einatomiger Gase.

Für Lösungen in Flüssigkeiten liegt keine thermodynamisch abschließende Theorie vor. Doch können wir folgendes aussagen. Das mittlere Volumen des Impulsraumes für ein gelöstes Gas ist wieder $J = \sqrt{2\pi k T m^3}$.

Dann kommt der Faktor $e^{+\frac{Q_0}{kT}}$ hinzu, herrührend von der Lösungswärme für $T = 0$. Das mittlere Raumvolumen, das dem Gas in der Lösung zur Verfügung steht, sei V'. Dann sind zwei Fälle möglich:

1. Es ist der zur Verfügung stehende Raum temperaturunabhängig. Natürlich muß V' kleiner sein als das Gesamtvolum der Lösung V_0. Dann ist

$$n_{\text{gas}} : n_{\text{gelöst}} = \frac{V_g}{V'} e^{-\frac{Q_0}{kT}} \qquad (11)$$

1) Man kann auch hier wie in c) eine obere Grenze für das Schwingungsvolumen schätzungsweise angeben.

Der Faktor $\frac{V_g}{V'}$ ist konstant, die spezifische Wärme des gelösten Stoffes $^3/_2\, R$.

2. V' steigt mit steigender Temperatur. Das wird im allgemeinen der Fall sein, da bei steigender Temperatur die gelösten Moleküle infolge ihrer größeren kinetischen Energie näher an die Moleküle des Lösungsmittels herankönnen, also in einen bei tieferer Temperatur „verbotenen" Raum eindringen.

Formel 11 gilt weiter, die spezifische Wärme des gelösten Gases ist aber $> {}^3/_2\, R$, weil mit steigender Temperatur immer mehr Moleküle in Räume mit hoher potentieller Energie gelangen.

Bilden wir die Löslichkeit α,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{n_g}{V_g} : \frac{n_{\text{gelöst}}}{V_0},$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{V_0}{V'} e^{-\frac{Q_0}{kT}}. \qquad (12)$$

Hier ist $\frac{V_0}{V'} > 1$, bei Abnahme mit steigender Temperatur läßt sich direkt die Zunahme von V' berechnen, wenn Q_0 bekannt ist.

In diesem Abschnitt ist vorausgesetzt, daß das Lösungsmittel durch die Auflösung keine Veränderung erfährt.

Vergleiche mit der Erfahrung liegen nicht vor.

Für die Verdampfung der Flüssigkeit selbst, die sich wegen unserer Unkenntnis der theoretischen Deutung der spezifischen Wärme der Flüssigkeiten nur zahlenmäßig thermodynamisch behandeln läßt, gelten ganz ähnliche Überlegungen[1]). Die Formel 3'

$$C_v = R \frac{\partial}{\partial T} T^2 \frac{\partial}{\partial T} \log \bar{V} \qquad (3')$$

gilt auch hier.

II. Quantentheorie.

Die Quantentheorie ändert unsere Betrachtungen insofern ab, als sie nicht gestattet, einerseits den Impulsraum und den gewöhnlichen Raum für sich in einzelne Zustände zu teilen, andererseits diese Einteilung beliebig fein zu machen. Es ist uns nur erlaubt, das ganze Phasenvolumen als solches in genau vorgeschriebene Teile zu teilen. Hierbei ist in den sogenannten nichtentarteten[2]) Fällen diese Ein-

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig 1898, 2. Bd., S. 167f. M. Reinganum, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, S. 876.

2) Entartung bedeutet hier eine mechanische Eigenschaft des Systems, nicht die Abweichung von der klassischen Theorie wie in dem Worte „Gasentartung". Siehe auch W. Schottky, diese Zeitschr. **22**, 1, 1921; P. Ehrenfest u. V. Trkal, Amst. Proc. 162, 1920.

teilung uns schon vollständig bekannt, während bei Entartung einige Einzelheiten noch nicht feststehen.

Im ersteren Fall ist nämlich das Phasenvolumen in Stücke der Größe $A = h^3$ (für dreidimensionale Probleme) zu teilen, während im letzteren diese Stücke nicht gleich sind, sondern ihre Größe von ihrer Lage durch einen Zahlenfaktor abhängt.

An Stelle der Formel I tritt dann die entsprechende Formel

$$A_n e^{-\frac{E_n}{kT}}, \tag{II}$$

wo E_n ein geeignet zu wählender Energiewert im Phasenvolumelement A_n ist.

Wir wollen nun annehmen, unser System gehorche Quantengesetzen, und zwar betrachten wir es bei so hoher Temperatur, daß die klassische spezifische Wärme praktisch erreicht ist. Das bedeutet aber folgendes:

Für die Gebiete mit großer Energie, die hier den Hauptteil des Phasenvolumens füllen, sind die Quantensprünge $E_{n+1} - E_n$ relativ so gering, daß es keinen Unterschied macht, ob die Einteilung nur die Feinheit der Quanteneinteilung oder eine größere hat. Für die Gebiete niederer Energie dagegen, wo die Quantensprünge relativ zu E_n groß sind, ist $\frac{E_n}{kT}$ selbst so klein, daß wir $e^{-\frac{E_n}{kT}}$ durch 1 ersetzen können und dann steht in diesen Gebieten einfach $\sum A_n$, das Gesamtphasenvolum, unabhängig von jeder Einteilung. Zusammengefaßt: Wenn wir bei so hoher Temperatur arbeiten, daß das Phasenvolumen genügend viele der endlichen Quantengebiete umfaßt (wenn also die spezifische Wärme den klassischen Wert hat), so ist das mittlere Phasenvolum unabhängig davon, wie man es unterteilt, d. h. ob es Quanten gibt oder nicht. In diesem Fall gelten unsere Formeln unverändert, bis auf einen Faktor, der z. B. beim Planckschen Resonator $e^{-\frac{2h\nu}{2kT}}$ beträgt und innerhalb der anfangs dieses Absatzes zugelassenen Ungenauigkeit liegt und eventuell durch Nullpunktsenergie zu kompensieren ist[1]).

Anders wird es beim Übergang zu tiefer Temperatur.

Hier wollen wir den extremen Fall ins Auge fassen, daß praktisch die spezifische Wärme null geworden ist. Das bedeutet, daß alle Atome die kleinste mögliche Energie haben, d. h. in gleichen Phasenvolumelementen sitzen. Während also bei niedriger Temperatur in der klassischen Theorie das mittlere Volum des Impulsraumes immer mehr nach der Formel

$$J = \sqrt{2\pi kTm}^3$$

zusammenschrumpft, ebenso bei quasielastischer Bindung das Schwingungsvolumen nach Formel 5

$$\bar{v}_f = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}^3 \frac{1}{(2\pi\nu)^3},$$

behält im Quantenfall das Phasenvolumen seine Minimalgröße $A_0 = h^3$ (eventuell bei Entartung mit einem Zahlenfaktor). Das hat zur Folge, daß der Quantenkörper gegenüber einem System, das klassisch bleibt, bevorzugt wird.

Für das Gleichgewicht zwischen einem solchen Kondensat und seinem Dampf gilt:

$$n_g : n_f = \sqrt{2\pi mkT}^3 e^{-\frac{\varrho_0}{kT}} : h^3 n_f. \tag{13}$$

Das ist die einfachste Ableitung der sogenannten chemischen Konstanten einatomiger Gase. Man sieht, daß das h^3 aus den Eigenschaften des festen Körpers stammt und mit dem Gas nichts zu tun hat[1]).

Eine etwa bei noch tieferer Temperatur eintretende „Entartung" des Gases ändert an der Formel nichts, denn beim Gas sind wir in dem früher besprochenen Fall, daß die Art der Einteilung für das mittlere Phasenvolumen gleichgültig ist. Es lassen sich also auf eine etwa eintretende Entartung des Gases keine Schlüsse ziehen.

Friert die Schwingung in e) fest, so bleibt das Volumen des Impulsraumes, das von der Rotation herrührt, unverändert

$$J' = 2\pi kTm'$$

und die ihrem Raumvolumen entsprechende Kugeloberfläche $4\pi r_0^2$, während an Stelle des Produktes der Dicke der Kugelschale $\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \frac{1}{\nu}$ und des zugehörigen Impulsraumvolumens $\sqrt{2\pi kTm}$ die Größe h tritt.

Daß man tatsächlich das Gleiche erhält, ob man nun die Gleichgewichte im Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik berechnet und daraus mit Hilfe der spezifischen Wärmen die Gleichgewichte bei tiefen Temperaturen thermo-

1) Er rührt daher, daß ohne Nullpunktsenergie beim Planckschen Oszillator die Energie bei hoher Temperatur um $\frac{h\nu}{2}$ pro Freiheitsgrad hinter der klassischen Energie kT zurückbleibt. S. O. Stern, Ann. d. Phys. **44**, 495, 1914.

1) Diese letzteren Betrachtungen verdanke ich Gesprächen mit Herrn Professor Dr. W. Lenz, dem ich für die Erlaubnis zur Veröffentlichung zu großem Dank verpflichtet bin. S. a. die Thesen bei der Würzburger Habilitation von W. Schottky, 4./VI. 1920.

dynamisch ableitet oder ob man nach den hier besprochenen Regeln dies direkt tut, liegt daran, daß die bei der Umrechnung auftretende Größe $e^{\int\limits_{T'}^{T}\frac{dT}{T^2}\int\limits_0^T C\,dT}$ gerade das Verhältns der Phasenvolumina bei T und T' ist, wie Integration von $3+3'$ zeigt, und die spezifischen Wärmen eben den hier angegebenen Größen der Phasenvolumina entsprechen. Andere Phasenvolumina würden einen anderen Verlauf der spezifischen Wärme bedingen.

III. Geladene Systeme.

Auf geladene Systeme lassen sich die bisherigen Betrachtungen deshalb schwer übertragen, weil die Kräfte so weit reichen, daß nicht ohne weiteres klar ist, wann ein Teilchen als fest, bzw. gebunden zu gelten hat. Andererseits wäre es wichtig zu wissen, ob bei Elektronen auch Formel 13 für die chemische Konstante gilt[1]. Wir brauchen also zuerst eine geeignete scharfe Definition dafür, wann ein Elektron gebunden und wann es frei ist. Diese zu geben ermöglicht uns die Bohrsche Theorie[2]. Es sei ein Kern mit der positiven Ladung e gegeben, der selbst unbeweglich sei (diese letztere Annahme dient bloß zur Erleichterung der Rechnung). Um ihn kann sich ein Elektron bewegen, und zwar auf Ellipsen (Kreisen) oder auf Parabeln und Hyperbeln. Die ersteren sind durch Quantenbedingungen vorgegeben, die letzteren nicht. Bewegt es sich auf einer Bohr-Sommerfeldschen Bahn, so ist es gebunden, dann haben wir ein (fest fixiertes) neutrales Wasserstoffatom, bewegt es sich auf Parabeln oder Hyperbeln, so ist es abdissoziiert (frei). Nun lehrt die gewöhnliche Theorie der Planetenbewegung, daß der letztere Fall dann eintritt, wenn die Energie >0 ist, der erstere, wenn sie <0 ist. Das Phasenvolumen für die freien Elektronen ist leicht zu berechnen, wenn die Temperatur genügend hoch und das Volum genügend groß ist, so daß wir die potentielle Energie der freien Elektronen im Mittel gegen die kinetische vernachlässigen können. Es gilt dann einfach die gleiche Formel wie beim Gas, das Phasenvolumen wird

$$V\sqrt{2\pi k T m^3}.$$

Wir können andererseits ohne die vorige Bedingung zu verletzen, die Temperatur so niedrig wählen, daß nur die innerste Bohrsche Bahn merklich häufig vorkommt. Ihr Phasenvolumen ist ah^3; der Wert von a läßt sich von vornherein nicht ganz sicher festlegen, da es sich um eine „entartete" Bewegung handelt. Plausible Annahmen[1]) führen zu den Werten $a=\frac{1}{3}$, 1, 3. Dann wird (n_g bedeutet auch hier freie, n_f gebundene Elektronen)

$$n_g : n_f = V(2\pi k T m)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Q_0}{kT}} : n_f h^3 a.$$

Das ist also die gleiche Formel wie beim ungeladenen Gas, wenn man $a=1$ setzt. Bei anderen Temperaturen wird nur die Rechnung etwas länger, weil die spezifische Wärme der freien Elektronen einerseits, des Körpers aus festen H-Atomen andererseits sich ändert.

Zusammenfassung.

Bei chemischen Gleichgewichten kommt es auf das Verhältnis der „mittleren Phasenvolumina" der betrachteten Zustände an, abgesehen vom Einfluß der Energiedifferenz für $T=0$. Das mittlere Phasenvolum läßt sich bei Gültigkeit der klassischen Theorie in zwei Faktoren zerlegen, deren einer von der kinetischen, der andere von der potentiellen Energie abhängt. Die Änderung dieser Größen mit der Temperatur bestimmt die spezifische Wärme. Dann werden die durch die Quantentheorie bedingten Umgestaltungen der Formeln besprochen und gezeigt, daß sich das Vorhergehende auch auf geladene Teilchen anwenden läßt. Stets besteht natürlich Übereinstimmung mit der Thermodynamik.

1) K. F. Herzfeld, diese Zeitschr. **14**, 1120, 1913, (nach einer mündlichen Bemerkung von O. Stern) **16**, 359, 1915; W. Nernst, Die Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Halle 1918, M. v. Laue, Jahrb. f. Rad. **15**, 257, 1919, W. Schottky, Ann. d. Physik, **62**, 113, 1920.
2) K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. **51**, 261, 1916.

1) A. Sommerfeld, Münchn. Ber. S. 83, 1917. K. F. Herzfeld, diese Zeitschr. **18**, 389, 1917.

München, 18. November 1920.

(Eingegangen 22. November 1920.)

BESPRECHUNGEN.

Georg Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Erster Band. 8°. 423 S. m. 404 Figuren. Berlin, Julius Springer. 1919. Geheftet M. 26.—, gebunden M. 30.60.

Das prächtige Buch bietet in der Anordnung und Darstellung des Stoffes so viel Neues, daß es unter den zahlreichen, im letzten Jahrzehnt erschienenen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie eine durchaus selbständige Sonderstellung einnimmt. Es wird besonders an den Universitäten heimisch werden, da es in glücklich getroffener Abgrenzung auch analytische Methoden heranzieht, statt die rein synthetischen, wie sonst üblich, einseitig zu bevorzugen. Zahlreiche historische Anmerkungen beleben die Darstellung und sind recht geeignet, das Interesse zu vertiefen.

In dem ersten Bande ist der Parallelprojektion auf eine einzige Bildebene mehr als die Hälfte des Raumes gewidmet, was ohne Zweifel das Studium erheblich erleichtert und auch einem systematischen Aufbau zugute kommt. An technischen Hochschulen wird man die zur Verfügung stehende Zeit — und diese wird zukünftig überall und auch mit Recht stark verkürzt werden — wohl mehr dem Exerzitium in Grund- und Aufriß, als der technisch-wichtigsten Darstellungsmethode, widmen müssen.

Bei der Orthogonalprojektion auf eine Ebene hätte wohl einiges über den sog. bezifferten Grundriß angegeben und durch den Ausschnitt aus einem Meßtischblatt erläutert werden können, da diese Methode in der Geodäsie doch recht weit verbreitet ist.

Die Figuren dürften an Schönheit in der mathematischen Literatur nicht ihresgleichen finden. Es sei denn in andern Werken desselben Verfassers. Die Ausstattung des Buches ist vorkriegsmäßig.

v. Sanden.

H. Geiger und W. Makower, Meßmethoden auf dem Gebiete der Radioaktivität. (Die Wissenschaft Bd. 65.) 8°. IX, 156 S. m. 61 Abb. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. Geheftet M. 6.—, gebunden M. 10.—

Als Leitfaden für radioaktive Messungen auf deutschen Hochschulen — soweit solche überhaupt mit Studierenden abgehalten werden — sind in Benützung Dorns vorzüglicher, kurz gehaltener Anhang in Kohlrauschs bekanntem Lehrbuche und der fünfte Abschnitt des reichhaltigen Buches von St. Meyer und E. v. Schweidler (siehe diese Zeitschr. **18**, 420, 1917). Dorn setzt naturgemäß die ganze Kenntnis der Radioaktivität voraus. St. Meyer und E. v. Schweidler geben die Meßmethoden besonders der Präzisionsmessungen sehr ausführlich und klar wieder und führen die darauf bezügliche deutsche und ausländische Literatur aufs vollständigste an.

Das vorliegende Buch von Geiger und Makower soll ein einführender Leitfaden in die experimentelle Technik der radioaktiven Messungen sein. Die Verfasser stützen sich auf Anweisungen Rutherfords, die dieser für einen radioaktiven Elementarkurs ausgearbeitet und durch Studierende hat erproben lassen. Man kann mit gutem Gewissen behaupten, daß der handliche Leitfaden seinem Zweck genügt, einen Studierenden in die experimentelle Technik der radioaktiven Meßmethoden einzuführen. Als Meßinstrumente werden eingehend besprochen: das Quadrantelektrometer in der Dolezalekschen Form und die einfachen durch Schwefel isolierten Goldblatt-Elektroskope mit einem Blatt und mikroskopischer Ablesung, wie sie durch Rutherford in England eingeführt sind. Referent zweifelt nicht an ihrer praktischen Brauchbarkeit gerade für Anfänger, hätte es aber gerne gesehen, daß außer diesen Apparaten und dem sehr kurz behandelten Zweifadenelektrometer auch das für radioaktive Messungen sehr brauchbare Einfadenelektrometer genannt wäre. Die Literaturangaben lassen den englischen Ursprung des Buches etwas zu deutlich erkennen. Der Anhang mit seinen Tabellen über Konstanten, Reichweiten, Absorptionskoeffizienten usw. wird dem radioaktiven Praktiker höchst willkommen sein.

Karl Bergwitz.

C. Runge, Graphische Methoden. (Sammlung math.-phys. Lehrbücher, Bd. 18.) Zweite Auflage. 8°. IV, 130 S. m. 94 Fig. im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1920. Geheftet M. 4.80, gebunden M. 5.50.

Diese zweite Auflage ist ein unveränderter Abdruck der ersten, hier seinerzeit besprochenen. Für die dritte Auflage sei dem Referenten der Vorschlag gestattet, die graphischen Methoden der konformen Abbildung neu aufzunehmen.

v. Sanden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe für Chemie Dr. Gustav Jantsch (bisher an der Universität Zürich) und für Lichttechnik Dr. Nikolas Holbertsma, an der Bergakademie Clausthal Dr.-Ing. Gustav F. Hüttig für anorganische und physikalische Chemie, an der Universität Berlin Dr. John Eggert für Chemie.

Ernannt: Dr. Torsten Svensson zum Dozenten für Photochemie an Stockholms Högskola, die a.o. Professoren der Chemie an der Universität Münster Dr. Aloys Bömer und Dr. Heinrich Ley zu ord. Professoren an derselben Hochschule.

Beurlaubung: Der ord. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen Geh. Regierungsrat Dr Johannes Hartmann (für ein Jahr, zwecks Organisierung der Sternwarte der Universität La Plata).

Gestorben: (Am 15. Dezember 1919) der ord. Professor der praktischen Geometrie und höheren Geodäsie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Geheimer Rat Dr. Matthäus Haid, der frühere ord. Professor der Astronomie an der Universität Basel Dr. Albert Riggenbach.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. | 1. April 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 9 am 10. April 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über negative Kanalstrahlen und die Umladung im Gasgemisch.

Von J. Koenigsberger und A. Rüttenauer.

§ 1. Theorie der Umladung von neutralen, positiven und negativen Kanalstrahlen in einheitlichen und gemischten Gasen. Gegenüber den Zweifeln, die G. Huch[1]) bezüglich der bisher angewandten Differentialgleichung[2]) für die Umladung der positiven Strahlen zu neutralen und der neutralen zu positiven äußerte, ist für die üblichen Laboratoriumsanordnungen im Beobachtungsraum der Kanalstrahlen folgendes zu bemerken. Die Umladungsweglängen λ_p und λ_a haben sich für verschiedene Umladungswegstrecken (A. Rüttenauer[3]) 21 cm und 12,5 cm und J. Koenigsberger und J. Kutschewski 14 cm) übereinstimmend ergeben. Das spricht für die Richtigkeit der e-Funktion. Ferner waren trotz sehr stark wechselnder Intensität der Kanalstrahlen, die im Verhältnis 1:300 variierte, die berechneten Werte von λ_p und λ_a stets innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen. Also kann die Ionisierung durch die Kanalstrahlen selbst für die Umladung meist nicht von großer Bedeutung sein. Daher darf der früher verwandte Ansatz zugrunde gelegt und erweitert werden.

Es sei p die Anzahl der positiven, m die Anzahl der negativen und a die Anzahl der neutralen Strahlen. Es sei ferner die Umladungsfunktion für p in $a = f_1$, für m in $p = f_2$, für a in $p = f_3$, für a in $m = f_4$, p in $m = f_5$ und m in $a = f_6$. Nach den folgenden Versuchen und früheren des einen von uns[4]) ergab sich, daß innerhalb der Versuchsfehler eine direkte Umladung von p in m und von m in p nicht stattfindet. Es ist für die Strecke dx die Zahl der neugebildeten negativen Strahlen dm daher nur proportional der Anzahl der neutralen und f_2 sowie f_5 sind $= 0$. Aus den negativen Strahlen werden sich zunächst nur neutrale bilden. Es ist also

1. $\frac{dm}{dx} + m f_6 - a f_4 = 0$. Analog ist: 2. $\frac{dp}{dx} + p f_1 - a f_3 = 0$. 3. $\frac{da}{dx} + a(f_3 + f_1) - p f_1 - m f_6 = 0$.

Wir haben hier also drei simultane Differentialgleichungen, deren Integrale in bekannter Weise erhalten werden. Es sei dann $f_1 + f_3 + f_4 + f_6 = P$ und $f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_3 f_6 = D$ gesetzt. Dann wird $p = c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_3$. In analoger Weise ergibt sich $a = c_4 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_5 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_6$,

$$m = c_7 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_8 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_9,$$

wobei c_1, c_2 bis c_9 noch zu bestimmende Konstanten sind. Durch Einsetzen in die ursprünglichen Differentialgleichungen ergibt sich, daß 6 von den Konstanten nicht willkürlich sind, sondern in folgender Weise miteinander verknüpft werden können: $c_4 = c_1 u_1$, $c_5 = c_2 u_2$, $c_6 = c_3 u_3$, $c_7 = c_1 v_1$, $c_8 = c_2 v_2$ und $c_9 = c_3 v_3$. Die Konstanten u_1, u_2, u_3 sind dabei die Wurzeln folgender kubischer Gleichung: $u^3 f_3^2 + u^2 f_3 (f_3 + f_4 + f_6 - 2 f_1) + u (f_1^2 + f_3 f_6 - f_1 f_6 - f_1 f_4 - 2 f_1 f_3) + f_1 (f_1 - f_6) = 0$.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, wenn

1) G. Huch, Ann. d. Phys. 58, 201, 1919.
2) W. Wien, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 27. Juli 1911, S. 773—786; J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. Frbg. Natur. Ges., Juli 1911.
3) A. Rüttenauer, Zeitschr. f. Phys. 1, 385, 1920 und ebenda S. 267, 1921.
4) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. d. D. Phys. Ges. 14, 1, 1912.

$$M_1 = \frac{f_3 + f_4 + f_6 - f_1}{2 f_3},$$

$$M_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_3 + f_4 + f_6 - f_1}{f_3}\right)^2 - \frac{f_6 - f_1}{f_3} \text{ gesetzt wird,}$$

$$u_1 = -M_1 - \sqrt{M_2}, \qquad u_2 = -M_1 + \sqrt{M_2},$$

$$u_3 = \frac{f_1}{f_3}.$$

Die Konstanten v_1, v_2, v_3 sind die Wurzeln folgender kubischen Gleichung: $v^3 f_3^2 f_6 + v^2 (f_3^2 f_6 - f_3 f_6^2 + f_1 f_3 f_6 - f_1 f_3 f_4 - f_3 f_4 f_6) + v (f_1 f_4^2 - f_1^2 f_4 + f_1 f_4 f_6 - f_1 f_3 f_4 - f_3 f_4 f_6) + f_1 f_4^2 = 0$. Es ergibt sich hieraus, wenn $N_1 = \frac{f_1 + f_3 - f_4 - f_6}{2 f_3}$, $N_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_1 + f_3 - f_4 - f_6}{f_3}\right)^2 + \frac{f_4}{f_3}$ gesetzt wird, $v_1 = -N_1 + \sqrt{N_2} = -u_1 - 1$, $v_2 = -N_1 - \sqrt{N_2} = -u_2 - 1$, $v_3 = \frac{f_1 f_4}{f_6 f_3}$. Die Konstanten c_1, c_2 und c_3 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Es ist für $x = 0$, $p = 0$, $a = 0$, $m = m_0$. Also ist $c_1 + c_2 + c_3 = 0$; $c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$; $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = m_0$.

Da $M_2 = N_2 = \frac{1}{f_3}\sqrt{\frac{P^2}{4} - D}$ ist, ergibt sich

$$c_1 = \frac{m_0\left(\frac{f_1}{f_3} + M_1 - \sqrt{M_2}\right)}{2\sqrt{M_2}\left(\frac{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}{f_6 f_3}\right)},$$

$$c_2 = \frac{-m_0\left(\frac{f_1}{f_3} + M_1 + \sqrt{M_2}\right)}{2\sqrt{M_2}\left(\frac{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}{f_6 f_3}\right)},$$

$$c_3 = \frac{m_0 f_6 f_3}{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Werte von p und a in die ursprüngliche Differentialgleichung $\frac{dp}{dx} + p f_1 - a f_3 = 0$ wurde die richtige Zuordnung der Konstanten u zu den c gefunden. Die Anfangsbedingung $a + p + m = m_0$ ist dann erfüllt, wenn $1 + u_1 + v_1 = 1 + u_2 + v_2 = 0$ ist, ferner wenn $c_3 (1 + u_3 + v_3) = m_0$ ist. Die Prüfung dieser Beziehung ergab die Zuordnung der Konstanten v zu den c. Es ist dann

$$p = c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_6 f_3}{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3},$$

$$a = c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_3 f_6},$$

$$m = c_1 v_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 v_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_4}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}.$$

wobei c_1, c_2, u_1, u_2, v_1 und v_2 die angegebenen Funktionen der f_1, f_3, f_4, f_6 sind. Es wird

$$\frac{m}{a} = \frac{c_1 v_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 v_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_4}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}{c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{2} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}. \tag{4}$$

Da f_1 und f_3 aus den Umladungsmessungen der positiven Strahlen angenähert bekannt sind, ferner $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = \frac{f_3}{f_1} = w$ und $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = w_m$ gemessen wurde, $w_m = \frac{f_4}{f_6}$, also $f_4 = w_m f_6$ ist, läßt sich zunächst f_6 und somit auch f_4 aus der obigen transzendenten Gleichung (4) mittelst graphischer Berechnung ermitteln.

Da $f_3 = f_1 \cdot w$ ist und $\frac{p}{a}$ experimentell gegeben ist, so lassen sich aus der Gleichung

$$\frac{p}{a} = \frac{c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_3 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}{c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}$$

auch die Funktionen f_1 und f_3 mit den wie oben angegeben berechneten Größen f_4 und f_6 jetzt genauer berechnen. Man kann dann in bekannter Weise im Näherungverfahren darauf f_4 und f_6 nochmals berechnen. Es zeigte sich aber, daß dies unnötig war, da die genauer berechneten f_1 und f_3 von den zuerst angenommenen sich in Anbetracht der Versuchsfehler wenig unterschieden.

Für die Rechnung wird zweckmäßig folgende

Form angewandt, worin $+\left(\frac{f_1}{f_3}+M_1-\sqrt{M_2}\right)=$ $=c_1'=-u_2+\frac{f_1}{f_3}$; $-\left(\frac{f_1}{f_3}+M_1+\sqrt{M_2}\right)=$ $=c_2'=+u_1-\frac{f_1}{f_3}$; die Exponenten von $e=a_1\cdot x$ und $a_2\cdot x$ gesetzt sind; $\frac{1}{2\sqrt{M_2}}=b$

$$\frac{m}{a}=\frac{b(c_1'v_1e^{a_1x}+c_2'v_2e^{a_2x})+\frac{1}{w\cdot w_m}}{b(c_1'u_1e^{a_1x}+c_2'u_2e^{a_2x})+\frac{1}{w}}$$

und

$$\frac{p}{a}=\frac{b(c_1'e^{a_1x}+c_2'e^{a_2x})+1}{b(c_1'u_1e^{a_1x}+c_2'u_2e^{a_2x})+\frac{1}{w}}.$$

Geht man statt von m_0 von p_0 aus, wie das bei einigen der folgenden Versuche geschehen, bei denen $\frac{p+m}{a}$ ermittelt wurde, so werden die Konstanten $c_1=\frac{f_1}{f_3}p_0(A+B)F$, $c_2=$ $=\frac{f_1p_0}{f_3 2\sqrt{M_2}}(B-A)F$ und $c_3=p_0F$, worin $A=N_1-M_1\frac{f_4}{f_6}$; $B=\sqrt{N_2}\left(1+\frac{f_4}{f_6}\right)$; $F=$ $=\frac{f_3f_6}{f_3f_6+f_1f_6+f_1f_4}$. Dies gibt

$$\frac{p}{a}=\frac{b'[(A+B)e^{a_1x}+(B-A)e^{a_2x}]+1}{b'[(A+B)u_1e^{a_1x}+(B-A)u_2e^{a_2x}]+\frac{1}{w}},$$

wobei $b'=\frac{1}{2w\sqrt{M_2}}$. Es ist ferner

$$\frac{p+m}{a}=\frac{-c'+\frac{w_m}{w}+1}{c'+\frac{1}{w}},$$

worin $c'=b'[(A+B)u_1e^{a_1x}+(B-A)u_2e^{a_2x}]$.

Man sieht leicht, daß in einem Gasgemisch die ursprünglichen Differentialgleichungen auch gelten. Nur treten an Stelle von f_1 jetzt $f_1'+$ $+f_1''+f_1'''+\ldots$ analog f_2 ist $f_2'+f_2''+f_2'''+\ldots$ usw. Hierin ist f_1' die Umladungsfunktion von p in a in einem Gas, dessen Partialdruck mit s' bezeichnet wird, f_1'' gilt für das zweite Gas mit Partialdruck s'' usf. Voraussetzung ist die anfangs erwähnte Annahme, die darauf hinausläuft, daß für die Umladung des Strahles nur der Zusammenstoß mit dem unveränderten ruhenden Gasmolekül entscheidend ist, daß also einfache Summation des Vorgangs gilt. In diesem Fall muß aber $f=\frac{1}{\lambda}$ dem Druck s proportional sein, also $=\varphi\cdot s$ gesetzt werden können. Daher ist an Stelle von f_1 im einfachen Gas $=\varphi_1 s$ oder im gemischten Gas $\varphi_1's'+\varphi_1''s''+\varphi_1'''s'''+\ldots$ usw. zu setzen. Im folgenden besteht das untersuchte Gasgemisch aus Quecksilberdampf und Wasserstoff. Eine kleine Vereinfachung tritt dadurch ein, daß negative H-Strahlen nur durch Zusammenstoß neutraler H-Atome mit ruhenden Hg-Gasatomen nicht mit H_2-Molekülen gebildet werden, also $\varphi_4''=0$.

Man sieht leicht, daß dann z. B. $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty=w_m=\frac{\varphi_4's'}{\varphi_6's'+\varphi_6''s''}$ und $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty=w=$ $=\frac{\varphi_3's'+\varphi_3''s''}{\varphi_1's'+\varphi_1''s''}$ sind. $\frac{1}{\lambda}$ wird in seiner Abhängigkeit von den beiden Partialdrucken durch eine Ebene, und wenn ein Partialdruck, z. B. s konstant ist, durch eine Gerade dargestellt, deren Schnittpunkt mit der einen Koordinatenachse durch s bestimmt wird. Die Abweichungen der anderwärts[1]) angegebenen Druckkurven von der Geraden sind also nicht etwa durch Verunreinigung des H_2 zu erklären.

§ 2. **Bildung und Gleichgewichtszustand negativer H- und O-Strahlen.** Nach Versuchen von W. Wien[2]) ist Quecksilberdampf die Ursache der Bildung negativer O-Kanalstrahlen. Bei Sauerstoffstrahlen findet W. Wien unter geeigneten Bedingungen einen Überschuß von negativen Strahlen über die positiven. Bei Wasserstoff ist niemals ein Überschuß negativer Strahlen da. W. Wien[3]) sagt ferner: „Auch durch Wasserstoff werden negative Ionen gebildet".

T. Retschinsky[4]) fand eine Verstärkung der negativen O-Kanalstrahlen durch Anwesenheit von Hg-Dampf. J. Koenigsberger und J. Kutschewski[5]) fanden, daß die negativen Strahlen hauptsächlich durch Anwesenheit von Wasserdampf sowohl im Beobachtungsraum wie im Entladungsraum entstehen.

Die folgenden Beobachtungen erstrecken sich zuerst auf die wiederholte Vergleichung des Fluoreszenzfleckes der negativen Strahlen unter verschiedenen Bedingungen. Ein schwaches Auftreten von negativen H-Kanalstrahlen erfolgte bei guter Kohlensäurekühlung, wenn schlecht oder gar nicht getrockneter Wasserstoff durchströmte, ferner sobald der Wasserdampf

1) Vgl. Zeitschr. f. Phys. **4**, 267, 1921.
2) W. Wien, diese Zeitschr. **11**, 377, 1910.
3) E. Marx, Handb. d. Radiologie, Bd. IV; W. Wien, Kanalstrahlen, S. 104.
4) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **47**, 525, 1915.
5) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Ann. d. Phys. **37**, 162, 1912.

H-Strahl.

Potential in v	$s'(Hg) \cdot 10^{+8}$	$s''(H_2) \cdot 10^{+8}$	$(m \cdot p)_{x=\infty}$	$(p+m:a)_{x=\infty}$
17500	1,19	4,8	0,395	—
23500	1,19	2,4	0,36	0,25
26000	1,19	3,9	0,31	—
28500	1,19	3,9	0,29	0,29
31500	1,19	3,0	0,24	0,345
28500	0,184	2,4	0,16	0,44
31500	0,184	3,0	0,125	0,495
28500	0,0216	3,0	0,035	0,62
31500	0,0216	3,5	0,030	0 66

im Entladungs- und Beobachtungsraum durch Gebrauch von sehr stark hydratisiertem Phosphorpentoxyd nicht mehr genügend beseitigt wurde. Durchleiten von gut getrocknetem Wasserstoff und Erneuern des Phosphorpentoxyds bewirkte ein allmähliches Schwächerwerden der negativen *H*-Strahlen und schließlich fast völliges Verschwinden des negativen Fluoreszenzfleckes. Ein geringes Auftreten der negativen *H*-Strahlen wird also durch Wasserdampf bewirkt. Daß der Wasserdampf hierbei als ruhendes Gas wirkt, ist früher[1]) gezeigt worden. Ein sehr starkes Auftreten der negativen *H*-Strahlen wurde beobachtet ohne Kohlensäurekühlung, gleichgültig, ob *H* gut oder schlecht getrocknet war. Das starke Auftreten der negativen *H*-Strahlen bei Abwesenheit von H_2O-Dampf muß also durch die Anwesenheit von *Hg*-Dampf verursacht sein. Auch in dem durch ein elektrisches und magnetisches Feld getrennten und abgelenkten positiven *H*-Strahl findet nachträglich im Beobachtungsraum bei Anwesenheit von *Hg*-Dampf Bildung negativer *H*-Strahlen statt. Auf der Parabel der negativen *H*-Strahlen, die sich infolge verschiedener Geschwindigkeit bei der elektromagnetischen Trennung auf dem Schirm abbildet, konnte man daher deutlich zwei getrennte Flecke sehen, die der Geschwindigkeit der Kurven *a* und *b*, die T. Retschinsky beim positiven *H*-Strahl beobachtete, entsprechen. Der Einfluß des *Hg*-Dampfes[2]) auf die Bildung der negativen Sauerstoff- und Wasserstoffstrahlen wurde genauer untersucht. Die Messungen hierüber erfolgten in H_2-Durchströmung bei verschiedenen *Hg*-Drucken, in der Weise, daß zuerst der durch ein erstes elektrisches und ein magnetisches Feld abgelenkte und getrennte positive *H*- bzw. *O*-Strahl, sodann durch Kommutieren dieser beiden Felder der negative *H*- bzw. *O*-Strahl auf ein hoch empfindliches Thermoelement, das mit einem Paschen-Galvanometer verbunden war, fiel. Es wurde also das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen gemessen, so wie es sich im Kanalstrahl nach Durchgang durch die Kathode und eine Eisenkapillare von 2,5 cm Länge auf einer Wegstrecke von 4,4 cm eingestellt hat, und das auch dem Gleichgewichtszustand im Gasgut entspricht.

In den Tabellen sind die Beobachtungen enthalten. Es ist daraus zu ersehen, daß bei einem größeren Partialdruck des *Hg*-Dampfes[1]) das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen größer wird, also eine stärkere Bildung der negativen Strahlen eintritt, was auch aus den Beobachtungen W. Wiens an *O*-Kanalstrahlen abzuleiten ist. Bei größeren Potentialen wird das Verhältnis der negativen zu den positiven kleiner. Der Einfluß des *Hg*-Dampfes auf die *H*- und *O*-Strahlen ist qualitativ etwa der gleiche.

Der große Einfluß kleiner Mengen von *Hg*-Dampf auf den Endzustand der Umladung ermöglicht, da er, wie im folgenden gezeigt, den beiden Partialdrucken proportional ist, die Druckmessung von *Hg*.

§ 3. Umladung der *H*- und *O*-Strahlen. Bei der Messung der Umladung der negativen Strahlen fiel der durch ein erstes elektrisches und ein magnetisches Feld abgelenkte und getrennte *O*- bzw. *H*-Strahl, der sich in seinem weiteren Verlaufe zu neutralen Atomen assoziiert und zu positiven dissoziiert, auf das Thermo-

1) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. d. D. phys. Ges. **14**, 1, 1912.

2) Bei den früheren Versuchen (1912) war beobachtet worden, daß nach tagelangem Einleiten von ganz trockenem O_2 trotz der Anwesenheit von *Hg*-Dampf von etwa $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ mm Partialdruck kein negativer Sauerstoff auftrat. Diese Beobachtung steht nicht im Widerspruch mit dem von W. Wien früher (und jetzt von uns) festgestellten Auftreten von starkem negativen *O* bei Anwesenheit von *Hg*-Dampf. Der scheinbare Widerspruch erklärt sich dadurch, daß bei sehr langer Benutzung einer zylindrischen Entladungsröhre, durch die ganz trockener H_2 oder O_2 durchgeleitet wird, schließlich, *H*, H_2 und *O* als positive und damit auch als negative Kanalstrahlatome fast verschwinden. — Für das in dieser Arbeit hier behandelte Problem ist es aber gleichgültig, auf welche Art ein Kanalstrahlion entsteht; es wird nur untersucht, wie ein einmal vorhandener Strahl sich verändert.

1) Bei Eiskühlung beträgt der Druck nach M. Knudsen (Ann. d. Phys. **29**, 193, 1909) für *Hg*-Dampf $= 0{,}184 \cdot 10^{-3}$ mm. Bei 20°, wobei ein Seitenrohr mit flüssigem *Hg* etwas höher erhitzt wurde, war $s = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$, bei Kohlensäureätherkühlung $s = 0{,}0216 \cdot 10^{-3}$.



element. Dies ergab $m+p+a$. Durch Ablenkung des positiven und negativen Teils durch ein zweites elektrisches Feld wurde nur der neutral assoziierte Teil a gemessen. Durch Verschiebung des Thermoelements nach oben und unten erhielt man den positiven und negativen Teil je für sich. Der abgelenkte negative Teil bildete bei höheren Drucken und kleineren Geschwindigkeiten keinen einheitlichen runden Fluoreszenzfleck auf dem Thermoelement, sondern einen langgezogenen Streifen, was auf eine rasche Umladung der negativen Strahlen hinweist in einem elektrischen Feld von einer solchen Ausdehnung, daß sich die positiven noch einheitlich verhalten. Um eine genügend große Intensität an negativen Strahlen zu erhalten, muß die Messung unter den günstigsten Bedingungen erfolgen. Wenn auch das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen mit größer werdendem Partialdruck des Hg-Dampfes größer wird, so wird hierbei doch die Intensität der positiven Strahlen und zwar die am stärksten der leichtesten, also der H-Strahlen, geschwächt und entsprechend die der negativen. Bei einem Hg-Druck, wie er bei Eiskühlung[1]) vorhanden ist, erhielt man den absolut größten Betrag an negativen Strahlen. Für die absolute Intensität der negativen H-Strahlen kam noch die Gebrauchsdauer der Entladungsröhre in Betracht. Bei einer neuen Entladungsröhre mit Eiskühlung konnte durch den abgelenkten H-Strahl ein Galvanometerausschlag von 30 bis 40 cm erhalten werden. Die Werte $\left(\frac{m}{a}\right)_{x=\infty}=w_m$ sind nach der Tabelle und aus den für $(p:a)_\infty = w$ von A. Rüttenauer erhaltenen Werten berechnet. Da $\left(\frac{p}{a}\right)_{x=\infty}$ bei höherem Potential E größer wird, $\left(\frac{m}{p}\right)_{x=\infty}$ aber kleiner, so hat $\left(\frac{m}{a}\right)_{x=\infty}$ einen von E fast uuabhängigen Wert.

Bei 28500 Volt wurde beobachtet von den negativen $m_0=1$ ausgehend, s' (Partialdruck von Hg in 10^{-3} mm) $=0{,}184$ für $x=12{,}5$ cm Weg, $s''=2{,}4$ (Druck von H_2 in 10^{-3} mm). Der Ausschlag in Zentimetern war für $a=8{,}5$, für $p=2{,}0$ und $m=2{,}0$ und $a=11{,}0$, $p=2{,}5$, $m=2{,}7$, was im Mittel $\frac{m}{a}=0{,}24$, $\frac{p}{a}=0{,}23$ ergibt. Hierbei ist nach dem früheren $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty=0{,}060$; $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty=0{,}38$. Für gleiche Geschwindigkeit, gleiches s und x, von $p_0=1$ ausgehend, für $s''=2{,}2$ ist $\frac{p+m}{a}=1{,}32$ und für $s''=3{,}1$ ist $\frac{p+m}{a}=0{,}94$. Berechnet man zunächst $\frac{m}{a}$ angenähert aus der einfachen Umladungsgleichung, so erhält man $\lambda_m=6{,}9$, während die Berechnung aus den vollständigen Gleichungen des § 1, unter der Annahme $\lambda_p=10$ gibt $\lambda_m=6{,}0$; für $\lambda_p=15$ ist $\lambda_m=6{,}2$, für $\lambda_p=20$ ist $\lambda_m=6{,}4$. Zur Bestimmung von λ_p sind verwendbar sowohl Messungen von $\frac{p}{a}$ von m_0 aus, wie von $\frac{p+m}{a}$ von p_0 aus. Letztere sind die genaueren Messungen und auch rechnerisch besser brauchbar. Aus ihnen ergibt sich für $s''=2{,}2$, $\lambda_p=18{,}2$ nach den exakten transzendenten Gleichungen des § 1. Nach der angenäherten Gleichung, wenn einfach statt $\frac{p+m}{a}$ nur $\frac{p}{a}=1{,}32$ gesetzt würde, wäre $\lambda_p=19{,}2$. Für $s''=3{,}1$ ist aus $\frac{p+m}{a}$ berechnet $\lambda_p=13$. Für $s''=2{,}4$ ist danach λ_p etwa 17. Also ist $\lambda_m=6{,}2$ und $\lambda_{am}=6{,}2:0{,}060=104$.

Berechnet man danach $\frac{p}{a}$ von m_0 aus, so ergibt sich berechnet 0,15 statt beobachtet 0,22. Man kann jetzt $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ [1]) für verschiedene s' und s'' berechnen und mit den in Tabelle § 2 gegebenen Messungen vergleichen und so die Mischungsformel prüfen, wonach $\frac{1}{\lambda_m}=\varphi_6's'+$ $+\varphi_6''s''$ ist. Wahrscheinlich gilt zwar für die Umladung von negativem Wasserstoffatom an H_2-Molekülen ebensowenig genaue Druckproportionalität wie für positiven H-Strahl; doch ist ein hierdurch verursachter Fehler nicht groß. Für H an Hg ist die Proportionalität, wie die

1) Bei allen Messungen, die nicht mit starker Kühlung unter -60^0 C vorgenommen werden, sind die Kohlenwasserstoffe fern zu halten. Diese werden vom neu verwandten Ramsaykitte abgegeben. Daher ist es notwendig, die Röhren vorher längere Zeit mit H_2 durchzuspülen. Die Kohlenwasserstoffe verringern alle Weglängen; sie verringern wegen ihrer höheren Dielektrizitätskonstante (vgl. S. 200) auch w gegenüber reinem H_2 und auch $\left(\frac{m}{p}\right)_\infty$ ziemlich stark.

1) In der Tabelle des § 2 ist $\left(\frac{p+m}{a}\right)_\infty=c_1$, ebenso $\left(\frac{m}{p}\right)_\infty=\frac{1}{c_2}$, woraus $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty=\frac{c_1}{1+c_2}$ und $\frac{p}{a}=c_1-\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ sich ergeben.

Beobachtungen des umgekehrten Falles (Hg an H_2) und die Übereinstimmung der folgenden Rechnung mit den Beobachtungen zeigen, nahezu vorhanden. Es ist $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = \frac{\lambda_m}{\lambda_{am}}$ für $s' = 1,19$ und $s'' = 3,9$ nach Tabelle S. 196 $= 0,065$, während $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,225$ ist. Da λ_{am} (für $s' = 0,184$) $= 104$ cm $= \varphi_4' \cdot s'$, so ist $\varphi_4' = 0,052$. Also ist $\frac{1}{\lambda_{am}} = f_4'$ für $s' = 1,19$ gleich $0,061$. Da $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0,065$, so ist $\frac{1}{\lambda_m}$ in diesem Fall $= 0,94$. Dies gibt: $1,19\,\varphi_6' + 3,9\,\varphi_6'' = 0,94$ und $0,184\,\varphi_6' + 2,4\,\varphi_6'' = 0,162$, woraus $\varphi_6' = 0,77$. Die Umladungsfunktion von H in reinem H_2 (φ_6'') ist aber daraus nur sehr ungenau bestimmbar, da ein kleiner Fehler in $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ sie stark beeinflußt; sie muß zwischen $0,006$ und $0,010$ liegen. Der genauere Wert von φ_6'' folgt aus den Beobachtungen für den kleinen Wert $s' = 0,0216$, und dem relativ großen $s'' = 3,0$ bei CO_2-Kühlung. Hier war $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0,03 = \frac{\lambda_m}{\lambda_{am}}$. Da $\lambda_{am} = 0,052 \cdot 0,0216$ ist, ergibt sich $\lambda = 0,037$ und $\varphi_6'' = 0,007$.

Aus beiden Werten von λ_p für $s'' = 2,2$ und $3,1$ kann man, da $\varphi_1'' s''$ direkt aus den Beobachtungen (S. 195, Anm. 1) in H_2 zu entnehmen sind ($s'' = 2,2$; $\varphi_1'' s'' = 0,0275$ und $s'' = 3,1$; $\varphi_1'' s'' = 0,033$) berechnen und findet φ_1' im Mittel $0,19$. Würde man annehmen, daß die beobachteten Werte bei niederen Drucken in reinem H_2 durch Fehler verfälscht sind und strenge Druckproportionalität gälte, so würden $\varphi_1'' s'' = 0,016$ bzw. $0,023$, woraus $\varphi_1' = 0,27$. Zwischen den Grenzen $0,19$ und $0,27$ ist φ_1' jedenfalls eingeschlossen. Außerdem ist λ_{ap} gegeben $= 17 : 0,38 = 45$ cm bei $s' = 0,184$ und $s'' = 2,4$. Danach ist $\frac{1}{\lambda_{ap}} = 0,0223 = \varphi'_3 \cdot 0,184 + \varphi_1'' s''$. Je nachdem Druckproportionalität in H_2 angenommen wird, oder die direkt beobachteten Werte zugrunde gelegt werden, erhält man $0,060$ oder $0,027$ für φ'_3. Die Beobachtungen geben noch einen Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,23$ bei $s' = 1,184$ und $s'' = 3,9$. Rechnet man mit den Werten von φ_3' und φ_1' und den entsprechenden Werten von $\varphi_1'' s''$ und $\varphi_3'' s''$ im Fall der Druckproportionalität, so erhält man $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,25$. Legt man die beobachteten Werte in H_2 für $\varphi_1'' s''$ und $\varphi_3'' s''$ zugrunde, so erhält man $0,21$. Der beobachtete Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty$ liegt zwischen diesen. Diese Übereinstimmung zeigt, daß wenn auch die Frage beziehentlich exakter Druckproportionalität in reinem H_2 noch nicht beantwortet werden kann, für Hg von $0,02 \cdot 10^{-3}$ bis zu $1,2 \cdot 10^{-3}$ mm hinauf jedenfalls die Umladung dem Druck sehr angenähert proportional ist.

Für 31500 Volt war bei $s' = 0,184$ und $s'' = 2,8$ der Wert $\frac{m}{a}$ im Mittel $0,28$, $\frac{p}{a} = 0,22$, $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0,054$, $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,42$. Ferner waren $\frac{p+m}{a} = 1,60$ für $s' = 0,184$ und $s'' = 1,7$ und $\frac{p+m}{a} = 1,3$ für $s' = 0,184$ und $s'' = 2,4$.

Letztere Werte ergeben für $\lambda_p = 21$ bei $s'' = 1,7$ und $\lambda_p = 18$ cm für $s'' = 2,4$, woraus nach Bildung des Mittels unter Berücksichtigung der Druckproportionalität für $s'' = 2,8$, λ_p etwa $= 18$ cm wird. Danach ergibt sich aus $\frac{m}{a} = 0,28$, $\lambda_m = 7,0$ und $\lambda_{am} = 116$ aus den transzendenten Gleichungen des § 1 und demnach $\varphi_4' = 0,047$. Da $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0,066$ für $s' = 1,19$ und $s'' = 3,0$, erhält man φ_6' etwa $= 0,70$ und φ_6'' zwischen $0,005$ und $0,010$. Für den kleinsten Wert $s = 0,0216$ und den relativ großen $s'' = 3,5$, wobei $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ etwa $0,03$ ist, läßt sich genauer φ_6'' zu etwa $0,070$ bestimmen. Analog wie oben ergibt sich aus den λ_p bei Annahme der Druckproportionalität $\varphi_1' = 0,19$, aus den beobachteten $\varphi_1'' s''$ dagegen $\varphi_1' = 0,14$. Außerdem wurden noch $\frac{p+m}{a} = 0,46$ bei $s' = 1,19$ und $s'' = 2,4$ und bei $s'' = 1,7$ ist $\frac{p+m}{a} = 0,52$ beobachtet. Aus letzteren ergibt sich bei Annahme der Druckproportionalität in reinem H_2 $\varphi_1' = 0,125$, bei Zugrundelegung der beobachteten Werte in reinem H_2 $\varphi'_1 = 0,115$. Also ist φ_1' jedenfalls zwischen $0,19$ und $0,115$ eingeschlossen. Es ist noch der Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,28$ bei $s' = 1,19$ und $s'' = 3,0$ gegeben. Hieraus berechnet sich bei Annahme der Druckproportionalität für die $\varphi_3'' s''$ der Wert $\varphi_3' = 0,043$, mit den beobachteten Werten für die $\varphi_3'' s''$ dagegen φ_3 zu $0,022$. Danach müßte $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0,37$ bei $s' = 0,184$ und $s'' = 2,4$ bei Druckproportionalität in H_2; da-

gegen wäre $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty$ nach den beobachteten Werten in H_2 für $\varphi_3'' s''$ = 0,43, während der beobachtete Wert = 0,42 ist.

§ 4. Die Umladungsfunktionen sind den Weglängen λ bei $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg umgekehrt proportional. Die Umladungsweglängen können aber nie kleiner sein als die Weglängen λ_s zwischen zwei Zusammenstößen. Nicht bei jedem Zusammenstoß muß eine Umladung statthaben. Es ist möglich, daß wenn z. B. ein neutrales Kanalstrahlatom mit einem ruhenden Gasmolekül zusammenstößt, nur bei letzterem ein Elektron abgespalten und frei wird, oder daß beim Zusammenstoß das neutrale Kanalstrahlatom sein Elektron verliert, aber gleich wieder eines von einem ruhenden Gasmolekül einfängt und so unverändert neutral bleibt.

Ähnliches gilt für die Umladung des positiven Strahles, der z. B. mit einem Gasmolekül zusammenstoßen und es ionisieren kann, ohne sich selbst zu neutralisieren. Daher ist stets die Umladungsweglänge größer; ihr reziproker Wert φ ist kleiner als der reziproke Wert von λ_s.

Mit zunehmender Geschwindigkeit v erfolgt die Assoziation eines Elektrons an den positiven Strahl erheblich seltener als bei geringerem v. Die Dissoziation des neutralen Strahles nimmt auch, aber weniger stark mit v ab. Daher wächst mit zunehmendem v die positive Differenz der Umladungweglänge gegen λ_s. Also dürfte φ nur kleiner sein als der reziproke Wert der gaskinetischen λ_g bzw. der unter Berücksichtigung der Influenz λ_i berechneten Stoßweglänge des Ions. Für $\frac{1}{\lambda_g}$ gilt nach Boltzmann $\frac{\pi N}{4}(s_1 + s_2)^2 = \frac{\pi N}{4}\left[s_1^2\left(1 + 2\sqrt{\frac{s_2^2}{s_1^2}}\right) + s_2^2\right]$. Hierin ist $\frac{\pi N}{4}$ bei $1 \cdot 10^{-3}$ mm $Hg = 2{,}83 \cdot 10^{-3}$; s sind die Durchmesser von Strahlatom bzw. ruhendem Gasmolekül. Die in § 3 gegebenen Zahlen in Hg-Dampf [für $\varphi_6' = \frac{1}{\lambda_m}$ von $H_- = 0{,}7$ und $\varphi_1' = \frac{1}{\lambda_p}$ von $H_+ = 0{,}2$ und in H_2 $\varphi_6'' = 0{,}007$; $\varphi_1'' = 0{,}0065$] würden unter der üblichen Annahme gleichen gaskinetischen Querschnitts und gleicher elektrischer Influenzwirkung zeigen, daß das negative H-Atom etwas, aber nicht viel leichter umgeladen wird und daher nicht viel instabiler ist als das positive H-Atom. Für eine Aufstellung eines verbesserten H-Moleküls nach der Theorie von Bohr ist beachtenswert, daß H_- relativ stabil, hingegen ein negatives H_2 im Kanalstrahl überhaupt nicht nachgewiesen werden kann. Bei Versuchen, die wir anstellten, könnte negatives H_2 nur zu einem Betrag von höchstens 0,2 Proz. des positiven H_2 vorhanden gewesen sein, während unter denselben Bedingungen O_- etwa 60 Proz. von O_+ und H_- 40 Proz. von H_+ war. Man wird, um H_- eine einigermaßen stabile Konfiguration zu geben, an eine Struktur mit zwei zueinander senkrechten Elektronenkreisen denken, wie sie Landé[1]) für Parhelium annimmt.

Aus weiteren Versuchen[2]) läßt sich entnehmen, daß die Weglänge λ_{ap} des neutralen Wasserstoffatoms in H_2 und O_2 sich mit abnehmender Geschwindigkeit für höhere Drucke dem Wert von etwa 35 cm, von λ_p für H_+ dem Wert von etwa 15 cm nähert, und zwar sind die Werte in H_2 kaum von denen in O_2 verschieden.

λ_g bzw. λ_s müssen kleiner sein. Für s^2 von H_2 sei der von Reinganum[3]) angegebene Wert $6{,}3 \cdot 10^{-16}$ angenommen, in $O_2 = 6 \cdot 8 \cdot 10^{-16}$, also kaum davon verschieden. Daher erklärt sich der geringe Unterschied auch in den Umladungsweglängen von H in H_2 und O_2. s^2 für H muß etwa zwischen dem gaskinetischen Wert für Helium : $4 \cdot 10^{-16}$ und dem aus dem Atommodell von Bohr für H berechneten Durchmesser des einquantigen Elektronenkreises $s^2 = 1 \cdot 10^{-16}$ liegen. Mit dem zu hohen Wert $4 \cdot 10^{-16}$ ergibt sich $\frac{1}{\lambda_g} = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$, während der beobachtete Wert von φ_3'' bei $3 \cdot 10^{-2}$ liegt; der wahrscheinlich richtige Wert von $s_2^2 = 2 \cdot 10^{-16}$ gibt $3 \cdot 10^{-2}$, ist also gerade so groß wie $\frac{1}{\lambda_{ap}}$, während er größer sein müßte. Das beruht z. T. wohl etwas darauf, daß der Radius des neutralen Kanalstrahls H_a im Mittel größer ist als der des einquantigen H-Atoms. Für H_+ berechnet sich mit dem theoretischen Wert des s^2 von Reinganum[3]) nach der Theorie von Langevin, welcher Wert für H_2-Ionen auch für das H-Ion[4]) angenähert gilt, $\frac{1}{\lambda_i} = 1{,}2 \cdot 10^{-1}$, mit dem aus Ionenversuchen in H_2 entnommenen experimentellen Wert von $s^2 = 60 \cdot 10^{-16}$ ist $\frac{1}{\lambda_i} = 2{,}7 \cdot 10^{-1}$. Der an Kanalstrahlen mit kleinem v gefolgerte Grenzwert $\varphi_1'' = 6 \cdot 10^{-2}$

---

1) A. Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919 (vgl. auch J. Franck und O. Reiche, Zeitschr. f. Phys. **1**, 154, 1920.

2) A. Rüttenauer, l. c.

3) M. Reinganum, diese Zeitschr. **12**, 579, 1911.

4) K. T. Compton und S. M. Benade, Phys Rev. **8**, 451, 1916. Nach der Theorie von Compton wäre allerdings der Wert für ein Elektron, von dem H_+ in seiner Wirkung nicht wesentlich verschieden sein sollte, viel geringer.

st kleiner als der berechnete, wie das die vorhergehenden Überlegungen verlangten.

Für H_--Strahlen in Hg liegen nur Messungen bei zwei größeren Geschwindigkeiten vor (vgl. § 3). Sie zeigen deutlich eine Geschwindigkeitsabhängigkeit, und die Umladung wird, wie die Messungen am H-Strahl in H_2 und O_2 zeigen, durch das Molekulargewicht des ruhenden Gases kaum beeinflußt. Auch für die negativen Kanalstrahlen ist, wie die Zahlen in § 3 zeigen, eine Geschwindigkeitsabhängigkeit da. Daher ist auch in Hg der maximale Grenzwert für $\frac{1}{\lambda_p}$ bei kleinen v etwa 8 mal und für $\frac{1}{\lambda_a}$ etwa 6 mal so groß zu veranschlagen wie bei 28500 Volt. Demgemäß ist $\varphi_3{}'$ etwa $= 0{,}25$ und $\varphi_4{}' = 0{,}3$, während das theoretische $\frac{1}{\lambda_g} = 1{,}7 \cdot 10^{-1}$ etwas kleiner statt größer ist. Hierbei ist s^2 für Hg aus den Tabellen von Landolt und Börnstein $= 33 \cdot 10^{-16}$ gesetzt worden, s^2 für den H-Strahl $= 4 \cdot 10^{-16}$ (vgl. oben). Auch hier wäre also der derart aus der elementaren Stoßtheorie errechnete Radius des neutralen Kanalstrahlatoms größer als der gaskinetische, z. T. wohl weil ersterer im Mittel höher als einquantig ist. Außergewöhnlich groß sind aber die Werte $\varphi_1{}' = 0{,}25$ und $\varphi_6{}' = 0{,}7$ der H_+-Ionen in Hg für 28500 und 31500 Volt. Selbst wenn man den größten experimentell gefundenen Wert für langsame Ionen von $\pm H_2$ in H_2, $s^2 = 60$, zugrunde legt, ist $\frac{1}{\lambda_i} = 5{,}6 \cdot 10^{-1}$, erreicht also nicht einmal $\varphi_6{}'$ für 28500 Volt. Die Grenzwerte für $\varphi_1{}'$ und $\varphi_6{}'$ bei kleinen v sind wohl 8 mal größer und daher viel größer als die berechneten Werte von $\frac{1}{\lambda_\gamma}$, statt wie die Überlegungen verlangen würden, kleiner. Hieran ändern auch starke Ungenauigkeiten in den Werten von $\varphi_1{}'$ und $\varphi_6{}'$, die hier für Hg-Dampf nur der Größenordnung nach errechnet sind, nichts. Es bleibt kaum eine andere Erklärung, als im metallischen Charakter, in der verstärkten Influenzwirkung des Hg-Atoms auf die Ionen, die Ursache der außergewöhnlichen Vergrößerung der φ-Werte zu erblicken. Zwar macht sich eine metallische Leitung bedingende Nahewirkung erst im Abstand von etwa $2{,}5 \cdot 10^{-9}$ cm geltend, wie aus den Versuchen von Julie Bender[1]) folgt. Doch influenzierend muß die Wirkung schon auf größere Abstände hin bemerkbar sein.

Die Wirkung auf H_- ist größer wie auf H_+. Dies bedeutet, daß die Abtrennung des Elektrons von H_-, wodurch die Neutralisierung von H bewirkt und die Umladungweglänge von H_- begrenzt wird, beim Zusammenstoß von H_- mit Hg leichter vor sich geht als die Lostrennung eines Elektrons vom neutralen Hg-Atom (Hg_a), wodurch die Neutralisierung und damit die Weglänge von H_+ bedingt wird. Es ist auch durchaus wahrscheinlich, daß Hg_a stabiler ist als H_-.

Ergebnisse: 1. Eine Theorie zur Beschreibung der Umladung von wechselnd neutralen, positiven und negativen Kanalstrahlatomen für reine und gemischte Gase wurde aufgestellt.

2. Es wurden Beobachtungen in Gemengen von H_2 mit Hg Gas angestellt und aus ihnen die Umladungsfunktionen für H_-, H_+, H_a in reinem H_2 und Hg Gas berechnet. Die Theorie erweist sich in erster Näherung als brauchbar.

3. Die Umladungsfunktionen lassen sich mit den Weglängen vergleichen, die für neutrale Atome aus der Gastheorie und für langsame Ionen aus der Theorie von Langévin durch M. Reinganum berechnet wurden. Die Vergleichung deutet darauf, daß das neutrale Kanalstrahlatom im Mittel einen größeren Radius haben dürfte als der einquantigen Bahn entspricht. Das negative H-Ion verliert leichter ein Elektron als das neutrale Hg-Atom. Negatives H_2 war nicht zu beobachten; seine Existenz als Ion ist daher noch zweifelhaft. Das Hg-Atom übt auf H_+-Kanalstrahlen eine starke Influenzwirkung aus, die aus dem metallischen Charakter seiner äußersten Elektronenschale erklärt werden kann. — Die Versuche wurden mit Apparaten ausgeführt, die wir der Preußischen Akademie der Wissenschaften und der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft verdanken.

(Eingegangen 9. Dezember 1920.)

1) J. Bender, diese Zeitschr. 19, 410, 1918.

Die Berechnung des Absorptionsverlustes der Streustrahlung innerhalb des streuenden Körpers.

Von R. Glocker und M. Kaupp †[1]).

Die Intensität der aus einem bestrahlten Körper austretenden Streustrahlung, sowie die räumliche Verteilung der im Innern eines bestrahlten Körpers vorhandenen Streustrahlung auf rechnerischem Wege zu ermitteln, ist eine Aufgabe, die in verschiedener Hinsicht von Interesse ist.

1) M. Kaupp hat die Vollendung dieser Arbeit nicht mehr erlebt; er starb am 21. Juni 1920 an einer tückischen Krankheit.

Bei der technischen Anwendung der Röntgenstrahlen in der medizinischen Therapie hat neuerdings die Frage, um wieviel die in einem Volumelement des bestrahlten Körpers absorbierte Dosis (absorbierter Bruchteil der Primärstrahlung) durch die Streustrahlungsbeiträge der benachbarten Volumelemente erhöht wird, große praktische Bedeutung erlangt.

Bei Absorptionsmessungen an Röntgenstrahlen kann bei Verwendung von Strahlenbündeln, welche nicht gerade extrem engen Querschnitt besitzen, leicht der Fall eintreten, daß ein Teil der im absorbierenden Körper entstehenden Streustrahlung in das Meßgerät (z. B. eine Ionisationskammer) gelangt und das Ergebnis der Absorptionsmessung fälscht.

Bei der Messung kurzwelliger Strahlen in einer Ionisationskammer wird ferner durch die Zerstreuung der Strahlung auf ihrem Weg durch die Kammer eine Erhöhung des Ionisationseffektes bewirkt. Eine Korrektion dieses Einflusses erfordert die Kenntnis der in ein Volumelement eintretenden Streustrahlung der Umgebung als Funktion der Lage des betreffenden Volumelements.

Ein weiteres Beispiel für eine Untersuchung, bei der die Ermittlung des im streuenden Körper selbst wieder zur Absorption gelangenden Teiles der entstehenden Streustrahlung notwendig ist, bildet die Bestimmung der absoluten Größe des Zerstreuungskoeffizienten eines Stoffes.

Diese verschiedenen Probleme lassen sich auf die Lösung folgender Grundaufgabe zurückführen:

Auf eine Platte von der Dicke D trifft ein paralleles Röntgenstrahlenbündel (Energie E_0) senkrecht auf; wie groß ist die Energie der nach P gelangenden Streustrahlung, wenn von P aus der bestrahlte Teil der Platte unter dem körperlichen Winkel w gesehen wird und wenn P

1. der Vorderseite
2. der Rückseite der Platte gegenüberliegt.

(Vorder- bzw. Rückseite beurteilt vom Standpunkt eines am Ort der Röntgenröhre sich befindenden Beobachters aus.)

In einer früheren Arbeit[1]) hat der eine von uns unter der vereinfachten Voraussetzung, daß die Streuwirkung eines Volumelements nach allen Richtungen des Raumes in gleicher Weise erfolgt, d. h. daß der Streukoeffizient s in bezug auf den Azimutwinkel eine Konstante ist, eine Lösung dieser Grundaufgabe mitgeteilt.

Wie die experimentellen Beobachtungen von Barkla, Crowther u. a. zeigen, ist diese vereinfachte Annahme nur eine sehr grobe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse; der Streukoeffizient ist eine komplizierte Funktion des Winkels (ϑ) zwischen Primärstrahl und Streurichtung. Die Form dieser Funktion hängt von der Atomstruktur und der Wellenlänge der Primärstrahlung ab und kann mit Hilfe der von Debye[1]) gegebenen Theorie der Streustrahlung berechnet werden. Für ganz kurze Wellen nimmt diese Funktion einen für alle Elemente universellen Charakter an. Mit Ausnahme eines sehr kleinen Winkelbereiches in der Umgebung des Primärstrahls ist die Streuung proportional mit $1 + \cos^2\vartheta$. Für das Kohlenstoffatom beträgt dieser Bereich bei einer Wellenlänge $\lambda = 0{,}25$ Å etwa 10 Grad.

Bei der Beschränkung auf kurzwellige Röntgenstrahlen — hier ist der Einfluß des Streueffektes übrigens besonders groß, da auch noch relativ weit entfernte Volumelemente wegen des geringeren Absorptionsverlustes auf dem Streuweg dem ins Auge gefaßten Volumelement Streustrahlungsbeiträge liefern — läßt sich eine gute Annäherung an die Wirklichkeit dadurch erreichen, daß man der Berechnung der Streuwirkung $1 + \cos^2\vartheta$ als Funktion der Winkelabhängigkeit[2]) zugrunde legt und nachträglich die erhöhte Streuwirkung des kleinen Winkelbereiches in der Umgebung des Primärstrahles als Zuschlag berechnet und hinzuaddiert.

§ 1. Berechnung der vorderseitigen Streustrahlung der Platte bei „normaler“ Verteilung.

Bei der üblichen Definition des Streukoeffizienten s (eine homogene Röntgenstrahlung von der Energie E_0 erleidet beim Durchgang durch ein Medium infolge Zerstreuung auf dem Wege x in der Primärstrahlrichtung einen Energieverlust $= 1 - E_0\, e^{-s\cdot x}$), ist s ein Mittelwert, genommen über alle möglichen Richtungen. Trifft auf das Volumelement dx, dy, dz die primäre Strahlungsenergie E auf, so ist die gesamte von dem Volumelement ausgehende Streustrahlung $= s \cdot dx\, dy\, dz \cdot E$. Ist s_ϑ bzw. s_{90} der Wert des Streukoeffizienten bezogen auf den Elementarkegel dw, dessen Achse mit der Primärstrahlrichtung den Winkel ϑ bzw. 90^0 bildet, so besteht bei „normaler“ Verteilung die Beziehung

$$s_\vartheta = s_{90}\,(1 + \cos^2\vartheta).$$

Der Mittelwert ergibt sich dann aus Gleichung 1 zu

1) Diese Zeitschr. **19**, 249 ff., 1918.

1) Ann. d. Phys. **46**, 809 ff., 1915; Anwendung dieser Theorie auf Kohlenstoff und Aluminium bei Glocker und Kaupp, Ann. d. Phys. **64**, Nr. 6, 1921.

2) In dieser Arbeit kurz als „normale“ Verteilung bezeichnet.

$$s = 2\pi \int_0^\pi s_\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi s_{90} \int_0^\pi (1 + \cos^2\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi 8}{3} s_{90}. \quad (1)$$

Die vom Volumelement 1 ausgesandte und im Elementarkegel dw mit Achsenwinkel ϑ gegenüber der Primärstrahlrichtung enthaltene Streustrahlung ist dann

$$s_\vartheta \cdot dw \cdot E = 2\pi s_\vartheta \sin\vartheta d\vartheta E =$$

$$= \frac{3}{8} s (1 + \cos^2\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta E. \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung des Absorptionsverlustes der primären und der zerstreuten Strahlung erhält man dann für die aus der Vorderseite der Platte austretende und nach P

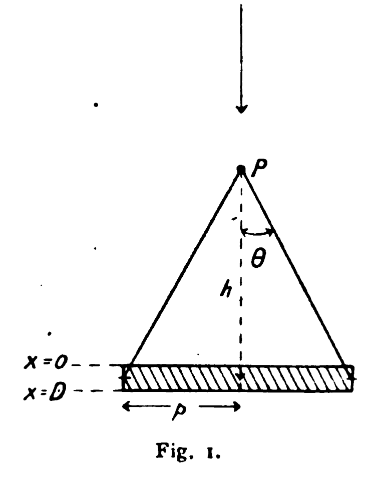


Fig. 1.

(Fig. 1) gelangende Streustrahlungsintensität Z folgendes Doppelintegral

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8} s \int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} (1 + \cos^2\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{s}{\mu} G. \quad (3)$$

E_0 = auf die Flächeneinheit der Vorderfläche der Platte auftreffende Primärstrahlungsintensität,

D = Dicke der Platte,

μ = Schwächungskoeffizient[1]) der Primärstrahlen, $\mu = \bar{\mu} + s$,

$\bar{\mu}$ = Absorptionskoeffizient.

Der erste Teil des Integrales

$$\int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{F}{\mu} \quad (4)$$

wurde früher berechnet und ergab

$$F = 1 - C + \lg\left(\frac{C+1}{2}\right) - e^{-2\mu D} + C e^{\left(1+\frac{1}{C}\right)\mu D}$$

$$+ Ei\left\{-2\mu D\right\} - Ei\left\{-\left(1 + \frac{1}{C}\right)\mu D\right\} + \quad (5)$$

$$+ \left(1 + \mu D\right) e^{-\mu D}\left[Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\} - Ei\left\{-\mu D\right\}\right].$$

Hierbei ist

$$C = \cos\Theta$$

und

$$Ei\{-x\} = \int_\infty^x \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

(sogenanntes Exponentialintegral)[1]).

Der zweite Term, das Integral

$$\int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta d\vartheta = J \quad (6)$$

läßt sich durch Partialbruchzerlegungen und Umformungen auf eine Anzahl der früher berechneten Integrale zurückführen. Die Auswertung ergibt schließlich

$$6\mu J = 5 - e^{-2\mu D}(5 + 2\mu D + \mu^2 D^2) -$$
$$- 2A_1 - A_2 A_3 + e^{-\mu D B}[2A_1 + A_2 A_3 + \quad (7)$$
$$+ \mu D \sqrt{A_2} A_3 + \mu^2 D^2 C] + e^{-\mu D}(\mu^3 D^3 +$$
$$+ 3\mu^2 D^2 + 6\mu D + 6)\left[Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\} - Ei\left\{-\mu D\right\}\right]$$
$$+ 6\left(Ei\left\{-2\mu D\right\} - Ei\left\{-\mu D B\right\}\right) + 6\lg\left(\frac{C+1}{2}\right)$$

mit den Abkürzungen

$$A_1 = \frac{C}{C+1}(3 + b^3)$$

$$A_2 = \frac{C^2}{(C+1)^2} \qquad A^3 = 3 + 2C - C^2$$

$$B = 1 + \frac{1}{C}.$$

Aus Gleichung (4) und (6) folgt somit

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8} \frac{s}{\mu} G = \frac{3}{8} \frac{s}{\mu}(F + \mu J). \quad (8)$$

Die aus Gleichung (6) und (7) sich ergebende Formel für die Funktion G ist so umfangreich, daß es wünschenswert erscheint, für die praktische

1) Diese Zeitschr. 19, 249, 1918.

1) Tabuliert bei Jahnke und Emde, Funktionentafeln, S. 19.

Anwendung geeignete Näherungsformeln abzuleiten.

Für verschiedene Werte des Parameters C wurde G als Funktion von μD nach Gleichung (5) und (7) berechnet (Tabelle I) und aufgezeichnet (Fig. 2).

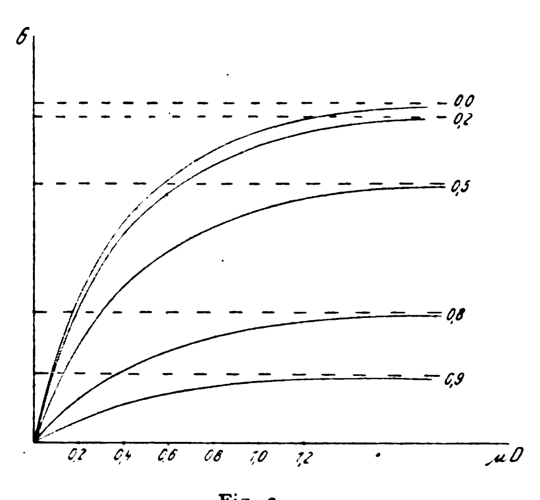


Fig. 2.

Tabelle I.

μD	Werte von G für $C=0$	$C=0{,}2$	$C=0{,}5$	$C=0{,}8$	$C=0{,}9$
0	0	0	0	0	0
0,2	0,190	0,171	0,126	0,058	0,0243
0,4	0,292	0,275	0,206	0,096	0,0502
0,7	—	0,349	0,273	0,130	0,0717
0,8	0,388	—	0,286	—	—
1,0	0,413	0,393	0,309	0,153	0,0818
1,2	—	—	—	0,160	—
∞	0,447	0,429	0,342	0,173	0,0927

Die Kurven lassen sich sämtlich durch die Formel

$$G = A(1 - e^{-\alpha\mu D}) \tag{9}$$

darstellen, wobei die Werte A und α von Kurve zu Kurve verschieden sind. Der Faktor A ist der Wert für G im Falle $\mu D = \infty$. Berechnet man aus den Formeln (5) und (7) G für $\mu D = \infty$, so läßt sich an Hand einer graphischen Darstellung leicht einsehen, daß die Abhängigkeit des G von C mit guter Näherung durch die Gleichung

$$G_\infty = 0{,}447 + 0{,}041\,C - 0{,}485\,C^2 \tag{10}$$

geliefert wird. Der Exponent α in Gleichung (9) ist als lineare Funktion von C darstellbar,

$$\alpha = -0{,}67\,C + 2{,}63\,, \tag{11}$$

so daß die endgültige Fassung der Näherungsformel lautet

$$G = (0{,}447 + 0{,}041\,C - 0{,}485\,C^2)\,(1 - e^{-\mu D(2{,}63 - 0{,}67\,C)}). \tag{12}$$

Die durchschnittlichen Abweichungen der von der Näherungsformel gelieferten Werte von den genauen Werten betragen nur 2 Proz.; ausgenommen ist der Fall, daß gleichzeitig $C > 0{,}85$ und $\mu D < 0{,}3$ ist, hier versagt die Formel, indem sie viel zu große Werte liefert. Dieser Fall kann aber mit Hilfe der unten angegebenen Formel (15) erledigt werden, so daß es möglich ist die aus der Vorderseite der Platte austretende Streustrahlung auf einfache Weise (Gleichung 12 bzw. 15) in allen vorkommenden Fällen zu berechnen.

Spezialfälle.

Für die praktische Anwendung ist auch die genaue Formel infolge weitgehender Vereinfachung in einigen Spezialfällen gut geeignet;

1. $D = \infty$ $\Theta = 90^0$, also $C = 0$.

Dann ist nach Gleichung (7)

$$\mu J = \frac{1}{6}(5 - 6 \lg \text{nat}\, 2) \tag{13}$$

und nach früherem

$$F = 1 - \lg \text{nat}\, 2\,, \tag{14}$$

somit

$$\frac{Z_1}{E^1} = 0{,}153 \cdot \frac{s}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{Z_2}{E_2} = 0{,}167 \cdot \frac{s}{\mu}\,.$$

Z_2 bedeutet die unter Annahme der „normalen" Verteilung, Z_1 die unter der vereinfachten Annahme (gleiche Streuung nach allen Richtungen) berechnete Streuintensität.

Der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten ist also im Fall einer ∞ dicken Platte und einem Öffnungswinkel von $\Theta = 90$ Grad (gesamte aus der Vorderseite der Platte austretende Streustrahlung) von der Härte der Primärstrahlung unabhängig und beträgt etwa 10 Proz.

2. D beliebig, Θ klein, $\cos\Theta = 1 - \delta$, wobei $\delta \ll 1$ ist.

Dann ergibt sich in erster Näherung aus der genauen Formel

$$G = \delta(1 - e^{-2\mu D}),$$

somit

$$\frac{Z_2}{E_s} = \frac{3}{8}\frac{s}{\mu}\delta(1 - e^{-2\mu D}), \tag{15}$$

$$\frac{Z_1}{E_1} = \frac{1}{4}\frac{s}{\mu}\delta(1 - e^{-2\mu D}), \tag{16}$$

hieraus

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50\,.$$

Unabhängig vom Öffnungswinkel, solange dieser klein ist, beträgt für beliebige Dicke der Platte der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsweisen 50 Proz.

Zusammenfassend ist zu bemerken, daß bei „normaler" Verteilung die zerstreute Intensität durchweg etwas größer gefunden wird, als bei der früheren Rechnungsmethode (gleiche Streuung in allen Richtungen).

§ 2. Berechnung der rückseitigen Streustrahlung der Platte bei „normaler" Verteilung.

Im Falle der rückseitigen Streustrahlung (Fig. 3) lautet das Grundintegral, betreffs dessen

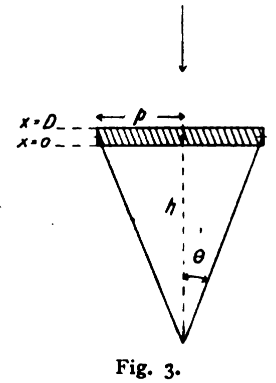


Fig. 3.

Ableitung auf die frühere Arbeit und § 1 dieser Arbeit verwiesen wird:

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8} s \int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}}$$

$$(1 + \cos^2\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{3}{8} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} \cdot g. \tag{17}$$

E_0 die auf die Vorderseite der Platte auftreffende Primärintensität.

Für den ersten Term

$$\int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{e^{-\mu D}}{\mu} \cdot f \tag{18}$$

ergab sich früher

$$f = 0{,}5772 + C + \lg\text{nat}(\mu D - \mu D C) +$$
$$+ \left(\mu D - 1\right) e^{\mu D} \left[Ei\left\{-\mu D\right\} - Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\}\right] -$$
$$- C e^{-\left(\frac{1}{C} - 1\right)\mu D} - Ei\left\{-\left(\frac{1}{C} - 1\right)\mu D\right\}. \tag{19}$$

Für den zweiten Term

$$\int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta = J' \tag{20}$$

erhält man nach langwieriger Rechnung

$$6\mu J' = e^{-\mu D}(\mu^2 D^2 - 4\mu D + 3{,}462 +$$
$$6 \lg\text{nat}\, \mu D(1 - C) + A_4) + e^{-\frac{\mu D}{C}}(A_5 - A_4) +$$
$$\left(\mu^3 D^3 - 3\mu^2 D^2 + 6\mu D - 6\right)\left(Ei\left\{-\mu D\right\} - Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\}\right)$$
$$- 6 e^{-\mu D} Ei\left\{+\mu D B'\right\}, \tag{21}$$

wobei

$$B' = 1 - \frac{1}{C}$$

$$A_4 = \frac{2(C^3 - 3)}{B'} + \frac{(C^2 - 3)}{B'^2} + \frac{2(C - 1)}{B'^3}$$

$$A_5 = \frac{2\mu D(C - 1)}{B'^2} + \frac{\mu D(C^2 - 3)}{B'} - \frac{\mu^2 D^2 (C - 1)}{B'}$$

gesetzt ist.

Beachtet man, daß wegen Gleichung (18) und (20)

$$e^{-\mu D} \cdot g = f \cdot e^{-\mu D} + \mu J' \tag{22}$$

ist, so liefert Gleichung (19) und (21) in Verbindung mit Gleichung (17) die Lösung der gestellten Aufgabe[1]).

In ähnlicher Weise wie in § 1 lassen sich für die Funktion g Näherungsformeln angeben. Einige nach der genauen Formel berechnete Werte von g sind in Tabelle II enthalten und in Fig. 4 graphisch dargestellt.

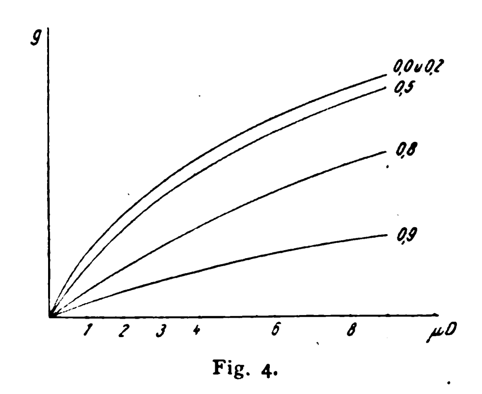


Fig. 4.

Tabelle II.

Werte von g für

μD	$C = 0$	$C = 0{,}2$	$C = 0{,}5$	$C = 0{,}8$	$C = 0{,}9$
0	0	0	0	0	0
1	0,855	0,829	0,675	0,348	0,194
2	1,39	1,368	1,183	0,643	0,335
3	—	1,782	1,586	0,942	0,476
4	2,13	2,114	1,911	1,186	0,600
6	2,69	2,655	2,453	1,657	—
8	3,08	3,052	2,873	2,023	—
9	—	—	—	—	1,080

1) Eine auf eine andere Endformel führende Lösung für den Fall der rückseitigen Streustrahlung wurde von

Die gezeichneten Kurven lassen sich alle durch Näherungsparabeln dritter Ordnung darstellen

$$g = \mu D (K_1 - K_2 \mu D + K_3 \mu^2 D^2). \quad (23)$$

Für die Abhängigkeit der Konstanten K_1, K_2 und K_3 vom Parameter C genügt, wie die Rechnung zeigt, eine Parabel zweiter Ordnung. Die gesamte Näherungsformel lautet dann

$$g = \mu D [1{,}005 - 0{,}983 C^2 - (0{,}175 - 0{,}13 C - - 0{,}0778 C^2) \mu D + (0{,}0116 - 0{,}0128 C - - 0{,}00089 C^2) \mu^2 D^2]. \quad (24)$$

Mit Ausschluß des Bereiches $C > 0{,}85$, wo die Formel keine gute Näherung (zu große Werte) liefert, beträgt der Fehler gegenüber der genauen Formel höchstens 5 Proz. Für C nahe bei 1 kann aber die einfache Formel (27) benützt werden.

Spezialfälle (Bezeichnungen wie in § 1).

1. D beliebig, Θ klein, $\cos\Theta = 1 - \delta$, $\delta << 1$.

Aus Gleichung (18) und (21) ergibt sich in erster Näherung

$$J' = \delta \cdot e^{-\mu D} \left(\frac{1 + \mu D}{\mu} \right), \quad (25a)$$

während nach früherem

$$f = \mu D \delta \quad (25b)$$

ist, somit

$$\frac{Z_1}{E_1} = \frac{1}{2} \frac{s}{\mu} \cdot \mu D \delta e^{-\mu D}, \quad (26)$$

$$\frac{Z_2}{E_2} = \frac{3}{8} \frac{s}{\mu} \delta e^{-\mu D} (2 \mu D + 1), \quad (27)$$

hieraus folgt

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50 + 0{,}75 \cdot \frac{1}{\mu D}, \quad (28)$$

also unabhängig von der Öffnung des Streukegels, solange diese klein ist.

2. μD sehr groß, Θ klein.

Dann ist nach obigem

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50.$$

Übereinstimmend mit dem Ergebnis im Falle der vorderseitigen Streustrahlung beträgt für großes μD und sehr engen Streukegel unabhängig von der Härte der Unterschied zwischen beiden Berechnungsweisen 50 Proz., und zwar ergibt sich bei der „normalen" Verteilung der größere Wert für die Streuintensität.

Klein, Phil. Mag. **37**, 207, 1919, angegeben; dort ist von Gleichung (3) ab überall der versehentlich weggebliebene Faktor e^{-k} hinzuzufügen.

§ 3. Berechnung des Streuzuschlages für den Winkelbereich in der Umgebung des Primärstrahles.

Wie oben erwähnt, unterscheidet sich die wirkliche azimutale Verteilung der Streuung von der der Berechnung bisher zugrunde gelegten „normalen" Verteilung (Proportionalität mit $1 + \cos^2\vartheta$) dadurch, daß in dem kleinen Winkelbereich $\vartheta = 0^0$ bis $\vartheta = \psi^0$ in der Umgebung des Primärstrahles die Streuung wesentlich größer ist. Man kann diesem Sachverhalt am einfachsten dadurch Rechnung tragen, daß der Mehrbetrag an Streustrahlung dieses Winkelbereiches, soweit er den in der früheren Rechnung enthaltenen Streuungsbeitrag dieses Winkelbereiches übersteigt, als „Streuzuschlag" besonders berechnet und dem früheren Resultat hinzuaddiert wird.

Ist s_0 und s_ψ der Streukoeffizient in Richtung 0^0 und ψ^0 (Definition in § 1) bei „normaler" Verteilung und w_0 und w_ψ die entsprechenden Werte bei der tatsächlichen Verteilung, dann gilt

$$w_0 = s_0 + s_z \qquad w_\psi = s_\psi,$$

s_z und ψ sind abhängig von der chemischen Natur des streuenden Stoffes und der Wellenlänge der Primärstrahlung. In Fig. 5 ist die

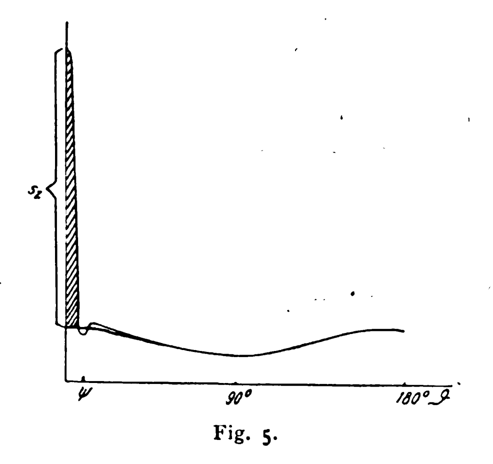


Fig. 5.

von uns[1]) früher aus der Atomstruktur berechnete Verteilung für Kohlenstoff bei einer Wellenlänge $\lambda = 0{,}25$ Å dargestellt (das schraffierte Gebiet entspricht dem Streuzuschlag).

Für die Berechnung des Streuzuschlages, der im allgemeinen im Verhältnis zu den Beiträgen der übrigen Winkelgebiete als klein anzusehen ist (bei der Integration über den Elementarkegel ist bei gleichem Streukoeffizienten der Beitrag eines Winkelbereiches $d\vartheta$ proportional mit $\sin\vartheta d\vartheta$), darf näherungsweise angenommen werden, daß im ganzen Gebiet 0^0

1) Ann. d. Phys. **64**, Nr. 6, 1921.

bis ψ^0 überall der zusätzliche Streukoeffizient durch den Mittelwert $\frac{s_z}{2}$ ersetzt werden darf.

Ist nun gegeben der Streukoeffizient s als Maß für die gesamte nach allen Richtungen des Raumes ausgesandte Streustrahlung eines Volumelementes, so ist zu erwarten, daß die Streukoeffizienten s_ϑ bzw. s_{90} für die Elementarkegel mit Achsenrichtung ϑ bzw. 90^0, einen anderen Bruchteil von s ausmachen, wenn die Art der azimutalen Verteilung der Streuung geändert wird. Bei der Berücksichtigung des Streuzuschlages gilt, wenn die Koeffizienten bei dieser Verteilung mit einem Index ′ bezeichnet werden analog wie früher

$$s'_\vartheta = s'_{90}(1 + \cos^2\vartheta)$$

und anders als früher

$$s = \int_0^\psi 2\pi \frac{s_z}{2} \sin\vartheta\, d\vartheta + \int_0^\pi 2\pi s'_\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta, \quad (29)$$

hieraus

$$s = \pi s_z \delta + 2\pi s'_{90} \cdot \frac{8}{3} = 2\pi s_{90}\left(\alpha\delta + \frac{8}{3}\right), \quad (30)$$

wobei

$$\delta = 1 - \cos\psi$$

und

$$\alpha = \frac{s_z}{2 s'_{90}}$$

bezeichnet ist.

In dem Falle des Kohlenstoffatomes ist

$\psi = 16^0 \quad \delta = 0{,}04 \quad \alpha = 5 \quad$ für $\lambda = 0{,}5$ Å

$\psi = 10^0 \quad \delta = 0{,}01_5 \quad \alpha = 5 \quad$ „ $\lambda = 0{,}25$ Å.

Bei der Berechnung der nach P gelangenden vorderseitigen Streustrahlung der Platte (Fig. 1) ändert sich nur der Zahlenfaktor vor dem Integral, weil jetzt die Beziehung zwischen s und s'_{90} aus Gleichung (30) zu entnehmen ist an Stelle der früher hierfür geltenden Gleichung (1). Es ergibt sich dann

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{1}{\alpha\delta + 2{,}666} \cdot \frac{s}{\mu} G. \quad (31)$$

Der Unterschied des Faktors vor $\frac{s}{\mu}G$ von dem früheren Wert $0{,}375_0$ ist nur gering (für Kohlenstoff für $\lambda = 0{,}5$ Å etwa 7 Proz., für $\lambda = 0{,}25$ Å etwa 3 Proz.).

Im Falle der rückseitigen Streustrahlung (Fig. 3) ändert sich der Zahlenfaktor des früheren Resultates in gleicher Weise, wie eben besprochen.

Dazu kommt aber noch der Streuzuschlag Δ

$$\Delta = 2\pi \frac{s_z}{2} \int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\psi e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (32)$$

Aus Gleichung (32), (30) und (18) ergibt sich sodann

$$\Delta = \frac{\alpha}{\alpha\delta + 2{,}666} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} f(D, \psi). \quad (33)$$

Somit ist die nach P gelangende rückseitige Streustrahlung insgesamt

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{1}{\alpha\delta + 2{,}666} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D}\Big(g(D, \Theta) + \alpha f(D, \psi)\Big). \quad (34)$$

Wenn δ sehr klein ist, kann die Näherungsformel (25b) benutzt werden, so daß

$$\Delta = \frac{\alpha}{\alpha\delta + 2{,}66} \cdot s D \delta e^{-\mu D} \quad (35)$$

wird.

Bei der Anwendung der Methode ist außer der Kenntnis des Streukoeffizienten s die Kenntnis der Werte α und ψ erforderlich. In allen Fällen, in denen Δ die Rolle eines Korrektionsgliedes spielt, können die für Kohlenstoff angegebenen Werte von α und ψ auch für andere niederatomige Elemente Anwendung finden. Vorsicht ist dagegen geboten, sobald der Winkel Θ klein wird, weil dann Δ einen großen Teil des Gesamtresultates darstellt. In diesem Fall wird die Berechnung mit den angegebenen Werten des Kohlenstoffes nur eine sehr grobe Näherung liefern, und zwar ist hieran nicht die Methode der Berechnung, sondern das Fehlen experimenteller Daten für α und ψ schuldig. Zur Orientierung möge die Angabe dienen, daß beim Kohlenstoff und $\lambda = 0{,}25$ Å der Streuzuschlag Δ etwa $^1/_{10}$ des gesamten Resultates für $\cos\Theta = 0$, etwa $^1/_8$ für $\cos\Theta = 0{,}5$, etwa $^1/_3$ für $\cos\Theta = 0{,}9$ beträgt.

§ 4. Berechnung der Streustrahlung für ein innerhalb des streuenden Körpers gelegenes Raumelement.

Liegt P innerhalb des streuenden Körpers (Fig. 6), welcher zunächst als Zylinder mit

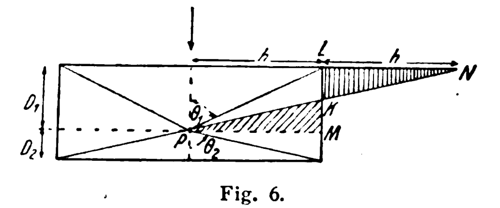


Fig. 6.

rechteckigem Querschnitt und der Höhe $D_1 + D_2$ angenommen werden möge, so ist das Verhältnis der in das betrachtete Volumelement P gelangenden Streuintensität zu der Primärintensität in P nach Gleichung (31), (34) und (35)

$$\frac{Z}{E} = \frac{1}{\alpha\delta + 2{,}66} \frac{s}{\mu} [G(\mu D_2, \Theta_2) + g(\mu D_1, \Theta_1) + \\ + \alpha\mu D\delta], \quad (36)$$



wobei zu beachten ist, daß in den früheren Formeln E_0 stets die Primärintensität auf der Vorderseite der strahlenden Schicht bedeutete.

Berechnet man die in Gleichung (36) vorkommenden Winkel aus

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{h}{D_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{h}{D_2}, \quad (37)$$

so findet man die Streustrahlung zu klein, weil der Beitrag des Bezirkes *PLM* (um die Symmetrieachse der Fig. 6 rotierend gedacht) nicht berücksichtigt ist; entsprechendes gilt für Θ_2. Setzt man Θ_1 und Θ_2 je $= 90$ Grad, das heißt denkt man sich den Körper als seitlich unendlich ausgedehnt, so findet man die Streustrahlung zu groß. Zwischen diesen beiden Grenzen liegt der wahre Wert von $\frac{Z}{E}$.

Wie aus der Fig. 6 zu ersehen ist, kann man mit guter Annäherung $\frac{Z}{E}$ dadurch bestimmen, daß man

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{2h}{D_2}$$

setzt (entsprechendes gilt für Θ_2). Der in der Berechnung nicht enthaltene Beitrag von *PKM* wird kompensiert durch den Beitrag von *KLN*. Die beiden Bezirke sind dem Volumen nach gleich und jedes Volumelement liefert (im Mittel für beide Bezirke genommen) annähernd gleiche Streubeiträge nach *P*, da die Elemente von *KLN* zwar größere Primärintensität erhalten, andererseits aber von *P* weiter entfernt sind (Absorptionsverluste auf dem Streuweg) als die Elemente von *PKM*.

Für den Fall eines seitlich unendlich ausgedehnten Wasservolumens von 20 cm Dicke (in der Primärstrahlrichtung) enthält Tabelle III die Werte von $\frac{Z}{E}\cdot\frac{\mu}{s}$ für eine Primärstrahlung mit dem Schwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$.

Es ist zu beachten, daß infolge der tertiären Streustrahlung in jedem Volumelement, das nach *P* hin einen Streubeitrag liefert, nicht nur die Primärintensität vorhanden ist, wie bisher bei der Berechnung angenommen wurde, sondern daß zu dieser noch die von Ort zu Ort verschiedene Streuintensität (Streubeiträge der Umgebung) hinzukommt. Der Einfluß der tertiären Streustrahlung läßt sich rechnerisch dadurch berücksichtigen, daß auf der rechten Seite der Gl. 36 hinzugefügt wird

$$\frac{Z}{E}q + \frac{Z}{E}q'.$$

Die Werte von $\frac{Z}{E}\cdot\frac{\mu}{s}$ in Spalte 2 der Tabelle III

Tabelle III.

D in cm	$\frac{Z}{E}\cdot\frac{\mu}{s}$	$\frac{Z'}{E}\cdot\frac{\mu}{s}$
0	0,16	0,18
2	0,32	0,40
4	0,43	0,57
6	0,56	0,75
8	0,66	0,88
10	0,76	1,01
12	0,84	1,12
14	0,91	1,21
16	0,97	1,27
18	1,00	1,25
20	0,96	1,10

sind somit zu multiplizieren mit $\frac{1}{1-q-q'}$. Hierbei ist q bzw. q' der tertiäre Streubeitrag der Ober- bzw. Unterschicht. Der Absorptionsverlust der Streustrahlen von *P* nach dem Volumelement mit den Koordinaten x und ϑ ist $\frac{\mu x}{\cos\vartheta}$; ebenso groß ist der Absorptionsverlust der tertiären Streustrahlen von diesem Volumelement nach *P* hin. Der gesamte tertiäre Streubeitrag[1]), den alle Volumelemente der Oberschicht nach *P* hin liefern, ist dann

$$q = \frac{s}{2}\int_0^{D_1} dx \int_0^{\Theta_1} e^{-\frac{2\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta \quad (38)$$

(entsprechend q, wenn D_2 und Θ_2 eingesetzt wird).

Das Integral läßt sich in früher berechnete Teilintegrale zerlegen, so daß sich schließlich ergibt

$$\begin{aligned}\frac{4\mu}{s}\cdot q &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\mu D_1} + \mu D_1 e^{-2\mu D_1} + \\ &+ 2\mu^2 D_1^2 Ei\{-2\mu D_1\} - \frac{\cos^2\Theta_1}{2} + \\ &+ \left(\frac{\cos^2\Theta_1}{2} - \mu D_1\cos\Theta_1\right)e^{-\frac{2\pi D_1}{\cos\Theta_1}} - \\ &- 2\mu^2 D_1^2 Ei\left\{-\frac{2\mu D_1}{\cos\Theta_1}\right\}.\end{aligned} \quad (39)$$

In dem oben betrachteten Fall des seitlich unendlich ausgedehnten Körpers enthält dieser Ausdruck nur die vier ersten Terme.

Macht man nun, um den größtmöglichen Wert der tertiären Streustrahlungsbeiträge zu ermitteln, die Annahme, daß $\frac{s}{\mu} = 1$ ist, so er-

1) Zur Vereinfachung ist angenommen, daß die Streuung nach allen Richtungen in gleicher Stärke erfolgt. Wegen der experimentell beobachteten größeren Streuung in Richtung der erregenden Strahlung wird q eher kleiner sein als der aus Gl. 38 sich ergebende Wert.



hält man für das Verhältnis der Streuintensität (einschließlich der Tertiärstrahlung) zu der Primärintensität in dem betreffenden Volumelement die in Spalte 3 der Tabelle III angegebenen Werte von $\frac{Z'}{E}$.

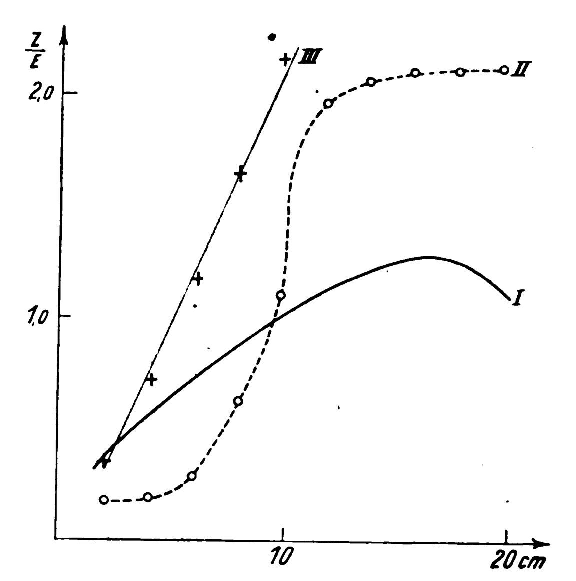
Es ist von Interesse, das Ergebnis der Berechnung mit den vorliegenden Messungen zu vergleichen. Friedrich[1]) hat mit einer kleinen Ionisationskammer, welche durch einen bleigeschützten, gut isolierten Draht mit einem Elektrometer verbunden ist, die Abnahme der Röntgenstrahlenintensität mit der Tiefe in einem Wasservolumen (Zylinder von 35 cm Durchmesser und 20 cm Höhe) gemessen und die Werte (A) ausgedrückt in Proz. der für $D = 0$ cm gemessenen Intensität. Außerdem ist angegeben ebenfalls ausgedrückt in Proz. der Oberflächenintensität, die Intensität (B) für jede Tiefenlage, die vorhanden wäre bei Ausschluß der Streustrahlung (Werte B sind berechnet aus dem Schwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}21$ und der Fokusdistanz der Röhre). Durch eine kleine Umrechnung, bei der zu beachten ist, daß die Werte A auf die tatsächliche Oberflächenintensität, also $E_0 + Z_0$, die Werte B auf die ohne Streuung vorhandene Oberflächenintensität E bezogen sind, erhält man die Werte $\frac{Z}{E}$ (Tab. IV). Der Querschnitt der Primärstrahlung betrug auf der Wasseroberfläche 20 cm im Quadrat.

Tabelle IV.

D in cm	$\frac{Z}{E}$ (Friedrich)	$\frac{Z}{E}$ (Dessauer)
2	0,69	0,18
4	1,43	0,21
6	2,35	0,28
8	3,30	0,66
10	4,32	1,10
12	—	1,96
14	—	2,08
16	—	2,10
18	—	2,11
20	—	2,14

In Fig. 7 entspricht Kurve I dem Ergebnis der Theorie für $\mu = 0{,}2$ im Fall des seitlich unendlich ausgedehnten Körpers, so daß der wirkliche Wert für $\frac{Z}{E}$ eher kleiner ist. Die Kurve III stellt die Messungen von Friedrich dar. Beide Kurven zeigen ähnlichen Verlauf und sind bis zu 10 cm Tiefe nahezu linear. Da-

1) Friedrich u. Körner, Strahlentherapie 11, 970, 1920.



Bei Kurve III sind die Ordinatenwerte mit 2 zu multiplizieren.

Fig. 7.

gegen sind die absoluten Werte für $\frac{Z}{E}$ von Friedrich etwa 3 bis 4 mal so groß wie die theoretischen, wobei sogar der Extremfall $\frac{s}{\mu} = 1$ der Berechnung zugrunde gelegt worden ist. Wenngleich die Größen α und δ in Gleichung (36) für Wasser nicht genau bekannt sind, so überzeugt man sich doch leicht durch eine überschlägige Rechnung, daß beträchtliche Änderungen von α und δ niemals das Rechnungsergebnis auf das Dreifache erhöhen können.

Eine zweite Meßreihe, unter Benützung photographischer Films ist kürzlich von Dessauer[1]) angestellt worden. Der Schwächungskoeffizient ist $\mu = 0{,}15$, die bestrahlte Oberfläche nahezu gleich wie bei Friedrich, nämlich 18×24 cm. Die Kurve II zeigt einen wesentlich andersartigen Verlauf. Die Form der Kurve unterscheidet sich beträchtlich von der theoretischen Kurve I, dagegen ist die Übereinstimmung der absoluten Werte mit den theoretischen im allgemeinen besser als bei den Friedrichschen Messungen. Aus den Angaben von Friedrich über die Betriebsweise der Röntgenröhre[2]) kann man vermuten, daß das μ seiner Strahlung kleiner als 0,2 war. Dann vermindern sich zwar die absoluten Beträge, aber die nahezu lineare Form der Kurve bleibt bei

1) Dessauer und Vierheller, Zeitschr. f. Phys. 4, 131, 1921.

2) Dessauer und Friedrich benutzen teilweise einen Röntgenapparat gleicher Bauart bei gleicher Sekundärspannung (180000 Volt) und gleicher Filterung der Primärstrahlung.



einer Umrechnung auf $\mu = 0,15$ erhalten. Die typischen Unterschiede zwischen Kurve II und III finden sich auch bei Verwendung weniger weit geöffneter Strahlenbündel. Man wird als Ursache dieser Verschiedenheit charakteristische Einflüsse der angewandten Meßmethode ansehen müssen. Auch die wesentlich größeren Absolutwerte, als der Theorie entspricht, können dadurch bedingt[1]) sein, daß das Meßgerät auf Strahlen verschiedener Richtung in verschieden starker Weise entspricht (verschieden großer Absorptionsweg in der Substanz des Meßgerätes u. a.). Mit zunehmender Tiefe rührt ein immer größer werdender Bruchteil der gesamten Wirkung auf das Meßgerät von den schief einfallenden Streustrahlen her, so daß die Intensität bei der Messung in der Tiefe zu groß gefunden wird.

Nachdem nunmehr durch die vorliegende Arbeit die mathematische Seite des Problems erledigt ist, muß der nächste Schritt darin bestehen, die Ursache für die Verschiedenheit der Resultate der verschiedenen Meßmethoden aufzufinden. Wir haben daher eine experimentelle Bestimmung der Streustrahlung in Angriff genommen, und zwar unter Verwendung einer Methode, bei welcher der oben erhobene Einwand der Richtungsabhängigkeit des Meßeffektes wegfällt. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn das Meßgerät nach allen Richtungen symmetrisch gebaut ist. Diese Bedingung läßt sich dadurch verwirklichen, daß kleine kugelförmige Glasfläschchen mit einer röntgenempfindlichen Flüssigkeit oder mit photographischer Emulsion gefüllt werden und daß die bei Bestrahlung auftretende chemische Veränderung als relatives Intensitätsmaß benutzt wird.

1) Vgl. hierzu: Glocker, Münch. med. Wochenschr. Nr. 6, 178, 1921: Eine Ionisationskammer der in der Röntgentechnik üblichen Form ergibt je nach der Orientierung gegenüber der Strahlenrichtung ein Ansteigen des Ionisationsstromes auf das 2 bis 3fache.

Stuttgart, Röntgenlaboratorium an der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 18. Februar 1921.)

Die Röntgen-Bremsstrahlung.

Von A. March.

Das kontinuierliche Röntgenspektrum bildete in den letzten Jahren wiederholt den Gegenstand eingehender Untersuchungen[1]). Es wurde festgestellt, daß die Intensitätsverteilung dieser Strahlung sich stets durch eine Kurve darstellen läßt, deren Verlauf einigermaßen an die Intensitätskurve einer Temperaturstrahlung erinnert. Doch steht der Auffassung des kontinuierlichen Spektrums als einer Temperaturstrahlung die Tatsache entgegen, daß die Intensität der Röntgenstrahlung nach der Seite der kurzen Wellenlängen nicht asymptotisch gegen Null abnimmt, sondern an einer bestimmten Minimumwellenlänge λ_0 schroff abbricht. Die Größe von λ_0 bestimmt sich, nach den übereinstimmenden Untersuchungen von Duane und Hunt, Webster, Wagner u. a. einzig aus der Röhrenspannung V nach dem Einsteinschen Gesetz $\frac{c}{\lambda_0} h = eV$. Lilienfeld[1]) findet zwar, im Gegensatz zu den genannten Autoren, daß auf λ_0 auch die Stromfrequenz sowie die Brennfleckbelastung von Einfluß seien. (Bei der neuesten Apparattype „Radiosilex" der Firma Koch & Sterzel soll es lediglich die hohe Stromfrequenz von 500 Per. sein, der die mit dem Apparat erreichte kürzeste Wellenlänge von $\lambda_0 = 0{,}087$ Å zuzuschreiben sei.) Doch dürfte der beobachtete Einfluß seinen Grund wohl in einer versteckten Spannungssteigerung haben; denn man kann schwer an die Ungültigkeit einer Beziehung glauben, die mit Erfolg zu einer Präzisionsmessung von h benutzt worden ist.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) zeigte Wagner, daß der von W. Wien vorhergesehene Dopplereffekt nicht die Grenzwellenlänge λ_0, sondern lediglich die Art der Intensitätsverteilung betrifft. Die erstere ist vom Winkel zwischen Kathoden- und Röntgenstrahl unabhängig. Dagegen besteht ein Einfluß dieses Winkels auf den Verlauf der Intensitätskurve, in dem Sinne, daß die Intensität der transversal zum Kathodenstrahl gerichteten Strahlung im kurzwelligen Teil des Spektrums größer ist als die einer rückläufigen Strahlung, während die Intensitäten im langwelligen Gebiet sich relativ nur wenig voneinander unterscheiden.

Außer der Tatsache einer Grenzwellenlänge λ_0 sind für eine Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung noch die Ergebnisse der C. T. Ulreyschen Untersuchungen[3]) von Wichtigkeit, wonach die Wellenlänge $\lambda_{max.}$ der maximalen Intensität sich umgekehrt proportional zu $V^{1/2}$ ändert, während in Analogie zum Wienschen Verschiebungsgesetz Proportionalität zu V^{-1} erwartet werden möchte. Ferner fand Ulrey,

1) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von E. Wagner im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 16, 190, 1919, sowie J. E. Lilienfelds Bericht über Hochvakuumröhren, ebd. 16, 105, 1919.

1) J. E. Lilienfeld, Ber. der sächsischen Akad. 1919.
2) Diese Zeitschr. 21, 621, 1920.
3) C. T. Ulrey, Phys. Rev. 11, 401, 1918.



daß die Gesamtintensität S der kontinuierlichen Strahlung proportional zu V^2 ist und in Abhängigkeit vom Antikathodenmetall annähernd proportional der Atomnummer des Strahlers ansteigt. Diesen Ergebnissen kommt freilich, ungeachtet der einwandfreien Versuchsanordnung, ein verminderter Grad von Sicherheit zu, da z. B. unbekannt ist, in welcher Abhängigkeit der am Kristall des Spektrometers reflektierte Intensitätsbruchteil vom Glanzwinkel steht und außerdem eine Ausmessung des Spektrums nach der Ionisationsmethode auf der Voraussetzung beruht, daß Ionisation und absorbierte Strahlenenergie in einem von der Wellenlänge unabhängigen Verhältnis stehen. In Wirklichkeit mag aber die ionisierende Wirkung einer und derselben absorbierten Strahlenmenge je nach der Wellenlänge sehr verschieden sein, so daß die Ionisation nicht ohne weiteres als Intensitätsmaß verwendet werden darf.

Eine Theorie des Bremsspektrums muß von der Erwägung ausgehen, daß ein auf die Antikathode aufprallendes Elektron nicht auf einen Ruck abgebremst wird, sondern seine Energie stets in einer Reihe von Zusammenstößen verliert. Für die Häufigkeit dieser Zusammenstöße sind, nach Lenard und Rutherford, nicht die Atomquerschnitte maßgebend; ein Elektron kann mitten durch ein Atom hindurchfliegen, ohne dabei eine Einbuße an Geschwindigkeit zu erfahren. Ein Geschwindigkeitsverlust findet nur statt, wenn das Elektron so nahe an einem der elektrisch geladenen Atombestandteile (Kern, Elektronen) vorbeifliegt, daß es von diesen eine genügend starke Kraft erfährt, um aus der bisherigen Bahn abgedrängt zu werden und einen Teil der Energie auf das Zentrum des einwirkenden Feldes zu übertragen. Es ist zweifelhaft, ob diese Einwirkung sich nach dem Zweikörperproblem berechnen läßt, da jedenfalls auch Quantengesetze mit im Spiele sind. Wir nehmen an, daß das Elektron nach N Zusammenstößen zum Stillstand kommt und berechnen, wie sich die Energie $E_0 = eV$ des Elektrons auf die N getroffenen Kraftfeldzentren verteilt. Es sei $NwdE$ die Zahl der Zentren, die durch den Zusammenstoß eine Energie zwischen E und $E + dE$ erhalten, wobei w eine Funktion von E ist. Es ist

$$\int_0^{E_0} w\,dE = 1\,; \tag{1}$$

ferner ist, da die gesamte Energie der getroffenen Zentren $= E_0$:

$$N\int_0^{E_0} w\,E\,dE = E_0\,. \tag{2}$$

Die Entropie des Systems ist

$$S = -kN\int_0^{E_0} w \log w\,dE\,.$$

S wird ein Maximum, wenn

$$\log w + \beta E + \text{const.} = 0$$

oder

$$w = \alpha e^{-\beta E}. \tag{3}$$

Die Konstanten α und β bestimmen sich aus (1) und (2). Es ist

$$\int_0^{E_0} w\,dE = \alpha\int_0^{E_0} e^{-\beta E}\,dE = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta E_0}) = 1$$

und

$$\int_0^{E_0} w\,E\,dE = \alpha\int_0^{E_0} e^{-\beta E}E\,dE = \frac{\alpha}{\beta}\Big(-e^{-\beta E_0}\cdot E_0 + \\ + \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta E_0})\Big) = \frac{E_0}{N}\,.$$

Diese beiden Gleichungen geben durch einander dividiert:

$$\frac{-E_0}{e^{\beta E_0} - 1} + \frac{1}{\beta} = \frac{E_0}{N}\,,$$

oder, wenn wir $\beta E_0 = x$ setzen:

$$\frac{-1}{e^x - 1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{N}\,.$$

Zur Auflösung dieser Gleichung setzen wir $y = \frac{1}{x}$ und $y' = \frac{1}{e^x - 1}$. Die erste dieser Kurven ist eine gleichseitige Hyperbel; die zweite deckt sich für kleine x mit der ersten, weicht dann von der Hyperbel nach unten ab und sinkt rasch gegen Null. Die Differenz $y - y'$ ist für kleine x Null, steigt dann vor $x = 1$ zu einem Maximum auf und verläuft weiter annähernd wie $\frac{1}{x}$. Den Wert $\frac{1}{N}$ erreicht $y - y'$ zweimal, das erste Mal zwischen $x = 0$ und $x = 1$, das zweite Mal für x nahe $= N$. Der erste Wert führt zu keiner physikalisch möglichen Lösung; wir setzen daher $x = \beta E_0 = N$; $\alpha = \beta$ und erhalten für die Verteilungsfunktion

$$w = \frac{N}{E_0}e^{-\frac{NE}{E_0}}. \tag{4}$$

Wir legen nun dem folgenden die Annahme zugrunde, daß ein getroffenes Atom, wenn es überhaupt die beim Zusammenstoß aufgenommene Energie E in Strahlung umsetzt, nur monochromatische Strahlung von der Schwingungs-

zahl $\nu = \frac{E}{h}$ aussenden könne. Anders als durch diese Annahme[1]), die übrigens durchaus dem Sinne der Bohrschen Atomtheorie entspricht, läßt sich die Tatsache der Grenzwellenlänge nicht erklären. Diese Grenzwellenlänge kommt darnach dann zustande, wenn das Elektron seine ganze Energie durch einen einzigen Zusammenstoß verliert.

Bekanntlich ist der Nutzeffekt der Röntgenstrahlenerzeugung außerordentlich gering; von der an einer *Pt* Antikathode auftreffenden Kathodenstrahlenenergie wird nach den Messungen von W. Wien, Seitz und Carter nur etwa 1 Prom. in Röntgenstrahlung umgesetzt. Wir müssen daraus schließen, daß es nur ein kleiner Teil der getroffenen Atome ist, der die Strahlung aussendet, während der größte Teil die Energie durch Wärmeleitung abgibt.

Ist i die Stromstärke, so treffen in der Sekunde $\frac{i}{e}$ Elektronen die Antikathode und verursachen, daß

$$Z = \frac{i}{e} N w \, dE = \frac{i}{e} \frac{N^2}{E_0} e^{-\frac{NE}{E_0}} dE$$

Atome eine Energie zwischen E und $E + dE$ erhalten. Dabei ist angenommen, daß an der Röhre eine konstante Spannung, etwa die einer Hochspannungsbatterie liegt, so daß die Elektronen mit durchwegs gleicher Geschwindigkeit an der Antikathode ankommen. Von Energieverlusten durch Zusammenstöße der Elektronen mit den Gasatomen können wir absehen, da die mittlere freie Weglänge des Elektrons im weitgehend verdünnten Gas der Röhre größer ist als der vom Elektron durchlaufene Weg. Von den getroffenen Z Elektronen strahlt ein Teil kZ die Energie kZE in der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$ aus. Nach der Theorie des Oszillators ist die von Z Oszillatoren pro Sekunde abgegebene Strahlungsenergie proportional $\nu^2 ZE$, wenn E den Energieinhalt eines Oszillators bedeutet. Wir setzen daher $k = c \cdot \nu^2$, unter c eine Konstante verstanden und erhalten für die im Intervall von $\nu = \frac{E}{h}$ bis $\nu + d\nu = \frac{E + dE}{h}$ pro Sekunde ausgestrahlte Energie:

$$c\nu^2 ZE = c \cdot \frac{i}{e} \frac{N^2}{E_0} e^{-\frac{EN}{E_0}} \nu^2 E dE \qquad (5)$$

oder, wenn wir $E = h\nu$ und $E_0 = h\nu_0$ setzen:

1) Auch Wagner legt in der zitierten Arbeit diese Annahme seinen Betrachtungen zugrunde.

$$R_\nu d\nu = c' \cdot i \frac{N^2}{\nu_0} e^{-\frac{N\nu}{\nu_0}} \nu^3 d\nu. \qquad (6)$$

Dieser Ausdruck gibt die Energie an, die im Intervall ν, $\nu + d\nu$ von der Antikathode $\sec^{-1}$ ausgesandt wird. Beziehen wir die Intensität statt auf die Schwingungszahl auf die Wellenlänge, so erhalten wir, wegen $d\nu = -\frac{1}{\lambda^2} d\lambda$:

$$R_\lambda d\lambda = CiN^2 \lambda_0 e^{-\frac{N\lambda_0}{\lambda}} \frac{1}{\lambda^5} d\lambda. \qquad (7)$$

Die Funktion R_λ gibt, in ein Koordinatensystem eingetragen, die Art der beobachteten Intensitätsverteilungen gut wieder. Die Wellenlänge λ_{max} der maximalen Intensität berechnet sich nach (7) aus der Bedingung

$$-\frac{5}{\lambda^6} + \frac{N\lambda_0}{\lambda^7} = 0$$

zu

$$\lambda_{max} = \frac{N\lambda_0}{5}. \qquad (8)$$

Aus den von Ulrey an Wolfram aufgenommenen Kurven ergibt sich bei einer Spannung von 50 KV

$$\lambda_0 = 0{,}25 \text{ Å}, \qquad \lambda_{max} = 0{,}47 \text{ Å},$$

somit $\lambda_{max} = 1{,}88\,\lambda_0$. Die Röhre wurde dabei allerdings nicht mit der konstanten Spannung einer Hochspannungsbatterie, sondern mit der gleichgerichteten Spannung eines Transformators betrieben; da aber die Spannungsänderungen durch Kondensatoren möglichst ausgeglichen wurden, so kann man annehmen, daß der beobachtete Intensitätsverlauf nur wenig vom Falle konstanter Spannung abweicht. Der Wert von λ_{max} gibt in (7) eingesetzt $N = 9{,}4$. Aus unseren Annahmen folgt also, daß ein mit 50 KV Geschwindigkeit auf der Antikathode aufprallendes Elektron seine Energie in durchschnittlich 10 Zusammenstößen verliert.

Da das Elektron beim Eindringen in die Antikathode größtenteils mit den in der Mehrzahl vorhandenen Elektronen und nur in Ausnahmefällen mit dem positiven Kern der Metallatome zusammenstößt, so kann eine Änderung des Antikathodenmetalles auf die Zahl N nur von geringem Einfluß sein. Denn von dieser Änderung werden nur die Bedingungen beim Zusammentreffen mit einem positiven Kern betroffen, der eine mit wachsender Atomnummer zunehmende Anziehung auf das Elektron ausübt; die zunehmende Anziehung bedingt einen größeren Geschwindigkeitsverlust und damit eine (wegen der geringen Häufigkeit der Kernzusammenstöße kleine) Abnahme von N und entsprechende Abnahme von λ_{max}. In der Tat

ergaben die Beobachtungen, daß die Lage des Intensitätsmaximums nur in geringem Maße von der Art des Antikathodenmetalles abhängt und sich mit steigender Ordnungszahl um ein Geringes nach der Seite der kurzen Wellenlängen verschiebt.

Aus der beobachteten Beziehung $\lambda_{max} V^{1/2} =$ const. müssen wir nach (8) schließen, daß N sich proportional $V^{1/2}$ ändert; denn es ist

$$N = \frac{5\lambda_{max}}{\lambda_0} = \frac{5 eV \lambda_{max}}{c \cdot h}.$$

Die Zahl der mit Geschwindigkeitsverlust verbundenen Zusammenstöße ändert sich also proportional der Geschwindigkeit des Elektrons. Wir benützen dieses Ergebnis, um die gesamte pro Sekunde ausgesandte Strahlungsenergie S zu berechnen. Es ist nach (6):

$$S = c' i \frac{N^2}{\nu_0} \int_0^\infty e^{-\frac{N\nu}{\nu_0}} \nu^3 d\nu = c' i \frac{N^2}{\nu_0} 6 \frac{\nu_0^4}{N^4} = 6 c' i \frac{\nu_0^3}{N^2},$$

da $\nu_0 = \frac{eV}{h}$, so ergibt sich, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, Proportionalität der Gesamtintensität S zu $i V^2$.

Die maximale Intensität R_{max} berechnet sich nach (7) und (8) zu

$$R_{max} = C \cdot i N^2 \lambda_0 e^{-5} \frac{5^5}{N^5 \lambda_0^5} = C \cdot i \frac{e^{-5} \cdot 5^5}{N^3 \lambda_0^4},$$

ist also proportional $V^{5/2}$. Dieses Ergebnis, wonach R_{max} rascher als die Gesamtintensität mit V ansteigt, würde bedeuten, daß mit zunehmender Spannung ein immer größerer Teil der gesamten Strahlungsenergie sich in der Nähe des Maximums zusammendrängt.

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, daß das Bremsspektrum offenbar in engen Beziehungen zur Temperaturstrahlung steht. Diese Beziehungen, auf die schon die beobachteten Intensitätsverteilungen hinweisen, treten besonders deutlich hervor, wenn wir die Röntgenstrahlung als eine Temperaturstrahlung betrachten, die von einzelnen besonders stark erhitzten Atomen der Antikathode ausgeht. Die Temperatur der strahlenden Oszillatoren bestimmt sich dann, wenn wir annehmen, daß die Energie eV des Elektrons sich gleichmäßig auf N-Oszillatoren verteilt, aus der Beziehung

$$kT = \frac{eV}{N}. \tag{9}$$

Dieser Temperatur entspricht eine schwarze Strahlung, deren Intensitätsverteilung nach Planck gegeben ist durch

$$k_\lambda = \frac{2c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}. \tag{10}$$

Die Wellenlänge λ_{max} der maximalen Intensität bestimmt sich daraus zu

$$\lambda_{max} = \frac{ch}{4{,}9651\, kT}.$$

Setzen wir darin für kT den Wert (9) ein, so erhalten wir

$$\lambda_{max} = \frac{chN}{4{,}9651 \cdot eV}.$$

Daß dieser Ausdruck zu richtigen Zahlenwerten für λ_{max} führt, erkennt man, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{ch}{eV} = \lambda_0$, so daß

$$\lambda_{max} = \frac{N\lambda_0}{4{,}9651}$$

wird, ein Wert, der mit dem der Gleichung (8) nahe übereinstimmt.

Doch darf nicht verkannt werden, daß gegen den Fall der Temperaturstrahlung wesentliche Unterschiede bestehen; die durch (10) bestimmte Strahlung des schwarzen Körpers entspricht einem Gleichgewichtszustande zwischen der vom Körper absorbierten Energie einerseits und der ausgesandten Strahlung andererseits; eine Energieänderung der Körperelemente durch Wärmeleitung ist infolge der überall gleichen Temperatur nicht möglich. Im Gegensatz dazu handelt es sich im Falle der Röntgenstrahlung um einen strahlenden Körper, der in den einzelnen Punkten höchst ungleich temperiert ist. An Atome, die durch den Zusammenstoß mit einem Elekron auf eine enorme Temperatur erhitzt sind, grenzen unmittelbar andere, die relativ kalt sind. Infolge dieser innerhalb kleinster Räume rapid abfallenden Temperatur findet ein fortgesetzter Abfluß der Energie von den getroffenen Atomen weg statt. Ein weiterer wesentlicher Unterschied der Röntgen- gegenüber der Temperaturstrahlung ist dadurch gegeben, daß dem Energieinhalte der strahlenden Atome eine obere Grenze E_0 und damit dem Spektrum, zufolge der Bohrschen Frequenzbedingung eine Grenzwellenlänge λ_0 gesetzt ist. Eine solche Grenze ist der Temperaturstrahlung, bei der die Energie sich lediglich nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen auf die einzelnen Atome verteilt, naturgemäß fremd.

Den schwierigsten Punkt einer vollständigen Theorie des Bremsspektrums bildet die Berechnung des Nutzeffektes bei der Umsetzung von Kathoden- in Röntgenstrahlen. Eine vor Jahren von Sommerfeld entwickelte Bremstheorie

(Berechnung der Strahlung nach der klassischen Theorie unter Zugrundelegung des Ansatzes: Bremsdauer mal Kathodenstrahlenergie $= h$) war imstande, diesen Wirkungsgrad zahlenmäßig (allerdings nicht in seiner Abhängigkeit vom Antikathodenmetall) zu erklären. Die im Vorhergehenden entwickelten Anschauungen lassen den Faktor c des Wirkungsgrades (Gleichung 5) unbestimmt; wenigstens fand ich keine Möglichkeit, über ihn Näheres zu ermitteln. Aus den Messungen geht hervor, daß c in erster Näherung proportional der Atomnummer der Antikathode ansteigt.

(Eingegangen 7. Februar 1921.)

Zur Theorie des Gleit- und Rollwiderstandes der festen Körper. II. (Rollende Reibung.)

Von Sigmund Fuchs.

II. Wir gehen nun zu den Widerständen beim Abrollen zweier Oberflächen aufeinander über. Das Gesetz der sog. „rollenden Reibung" wurde ebenfalls von Coulomb aufgestellt. Bezeichnet P den gesamten Normaldruck an der Berührungsstelle zwischen der Unterlage und dem rollenden Körper und ist $\mathfrak{M}$ das Widerstandsmoment, welches von dem beim Rollvorgange aufgewandten Drehmomente in jedem Augenblicke zu überwinden ist, dann besteht die Beziehung:

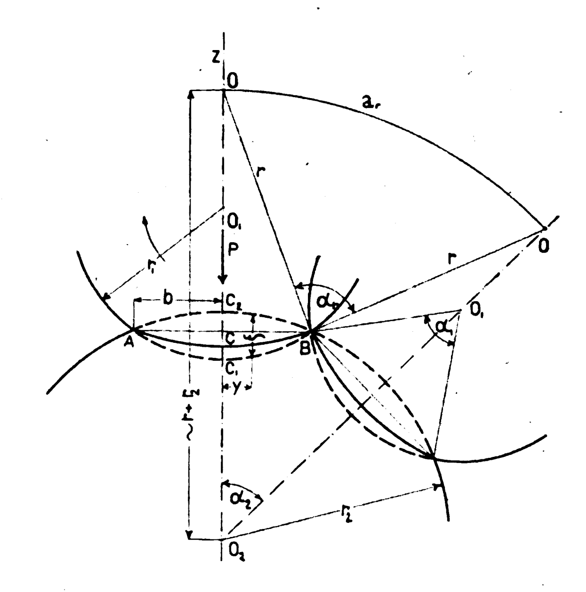
$$\mathfrak{M} = f P, \tag{8}$$

worin f ein „Koeffizient der rollenden Reibung" von der Dimension der Länge ist und als Material- bzw. als Oberflächenkonstante angesehen wird.

Es wurde schon längst erkannt, daß f nicht eine Materialkonstante, sondern eine Funktion der Krümmungsradien des rollenden Körpers und der Unterlage, der Belastung P usw. ist. Wir wollen das im Falle, daß ein elastischer Körper auf einer elastischen Unterlage rollt, beweisen.

Zunächst möge die Ursache des Rollwiderstandes in diesem Falle näher erklärt werden. Es ist eine bekannte Tatsache, daß der Belastungsvorgang bereits innerhalb der Elastizitätsgrenze irreversibel ist, und zwar, daß der gleichen Kraft beim Entlasten eine größere Deformation entspricht als beim Belasten. Der Vorgang ist der in den magnetischen Erscheinungen bekannten Hysteresis analog und wird oft elastische Hysteresis genannt. Innerhalb der Elastizitätsgrenze ist der momentane Formänderungsrest hauptsächlich eine Folge der zeitlich verzögerten Deformation. Daß diese Erscheinung von der Deformationsgeschwindigkeit und Temperatur beeinflußt wird, ist wohl erklärlich, wenn wir an die von William Thomson begründete „innere Reibung" der festen Körper denken.

Wir nehmen nun im folgenden an, daß eine elastische kreiszylindrische Walze vom Radius r_1 und der axialen Länge l auf einem zu ihr parallelen elastischen Kreiszylinder vom Radius r_2 rollt, wobei an der gemeinsamen



Berührungsstelle die normale Druckkraft P ausgeübt wird. Im Ruhezustande wäre die Berührungsfläche eine Zylinderfläche, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformiertem Zustande liegt und der Begrenzung derjenigen Walze ähnlicher ist, deren Elastizitätskoeffizient größer ist. Nach Hertz kann man die Größe ihres Halbmessers r aus der Beziehung berechnen:

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{r} = \frac{\vartheta_2}{r_1} - \frac{\vartheta_1}{r_2}, \tag{9}$$

hierin bezeichnen ϑ_1 und ϑ_2 die Hertzschen Elastizitätskonstanten der beiden Zylinder, die mit der Youngschen E bzw. Poissonschen Elastizitätskonstante $\frac{1}{m}$ durch die Beziehung:

$$\vartheta = 4\,\frac{m^2 - 1}{m^2 E}$$

verbunden sind; die in das Innere des Körpers 1 gehenden Radien sind positiv gerechnet. Es ist demnach:

$$r = (\vartheta_1 + \vartheta_2)\,\frac{r_1 r_2}{\vartheta_2 r_2 - \vartheta_1 r_1}. \tag{9'}$$

Die Größe der „Drucksehne" im Querschnitte der Walzen beträgt:

$$2b = 2\sqrt{\frac{P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\pi l(\varrho_1 + \varrho_2)}}, \quad (10)$$

worin

$$\varrho_1 = \frac{1}{r_1}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{r_2}$$

die Krümmungen der beiden Flächen bezeichnen [1]).

Der Druck pro Flächeneinheit in der Berührungsfläche parallel der gemeinsamen Normalen während der ursprünglichen mathematischen Berührung (z-Achse), also in der Richtung des ausgeübten Druckes P beträgt:

$$p = \frac{2P}{\pi b^2 l}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad (11)$$

wo y die Abszisse des Flächenelementes bezeichnet. Die Druckverteilung ist demnach eine elliptische. Die Resultierende des Gegendruckes der Unterlage fällt mit P zusammen.

Während des Rollens kommt folgende Umgruppierung der Druckkräfte in der Berührungsfläche zustande: Rollt die Walze 1 im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers auf der Walze 2, so wird der vordere Teil BC der Berührungsfläche weiter belastet und erweitert, und zwar über B hinaus, während der hintere Teil AC in demselben Maße entlastet wird. Nun sind aber Belastungs- und Entlastungsvorgang aneinander nicht kongruent, und zwar erfolgt beim Entlasten die Wiederherstellung des alten Zustandes der deformierten Teile bei geringeren Druckkräften als beim Belasten, wodurch die Resultierende des Druckes in der Berührungsfläche von der Mittellinie in den vorderen Teil, also im Sinne der Bewegung verschoben wird. Berücksichtigen wir, daß infolge der elastischen Hysteresis die überrollten Teile beider Walzen nicht sogleich in die ursprünglichen Oberflächen zurückkehren, sondern eine kleine Niederdrückung aufweisen, so müssen wir annehmen, daß während des Rollens der hintere Teil AC des Berührungsbogens stets etwas kürzer sein muß als der vordere Teil BC. Dieses hat auch eine Verschiebung der Resultierenden des Druckes nach vorne zur Folge. Es muß demnach dem das Rollen fördernden Moment ein Widerstandsmoment entgegentreten, das wir wohl auf die ursprüngliche mathematische Berührungslinie beider Walzen beziehen und durch die Formel (8) ausdrücken können; nur verliert der „Hebelarm der Rollreibung" f den Namen einer Materialkonstanten.

Die Kenntnis der hysteresen elastischen Erscheinungen ist noch nicht so weit fortgeschritten, daß man f auf Grund des Verteilungsgesetzes der Druckkräfte in der Berührungsfläche während des Rollens ermitteln könnte. Wir wollen deshalb ein Näherungsverfahren anwenden. Es ist einleuchtend, daß wegen der genannten Abweichungen der elastischen Prozesse wirklicher Körper von den Formänderungen eines ideell elastischen Körpers, ein Teil der Formänderungsarbeit beim Rollen unausgenützt verloren geht, und zwar hauptsächlich wegen der verzögerten Rückfederung der deformierten Teile. Berechnen wir nun die Formänderungsarbeit bei der Berührung zweier elastischer Zylinder längs einer erzeugenden Geraden, die einen Druck P gegenseitig ausüben. In diesem Näherungsverfahren wollen wir auch die tangentialen Druckkomponenten in der Berührungsfläche ausschließen, also die Oberflächen als reibungsfrei ansehen. Dann gelten die Hertzschen Formeln. Die Summe der Einsenkungen ζ zweier einander entsprechenden Flächenelemente der Druckfläche in der Richtung des Druckes ist mit hinreichender Genauigkeit wegen der Kleinheit von y gegenüber den Radien r_1 und r_2 gleich:

$$\zeta = \frac{b^2 - y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \quad (12)$$

Setzen wir für die Summe der Krümmungen den Wert aus (10) ein, dann ist:

$$\zeta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi}\frac{P}{b^2 l}(b^2 - y^2). \quad (12')$$

Die innere Formänderungsarbeit ist gleich der äußeren von der Größe:

$$L = \frac{1}{2}\int p\zeta dA;$$

dA bezeichnet ein Flächenelement der Druckfläche, wofür unbedenklich $l\,dy$ eingesetzt werden kann. Wir erhalten demnach nach Einsetzen der Werte:

$$L = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\pi^2}\frac{P^2}{b^4 l}\int_0^b (b^2 - y^2)^{3/2} dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich:

$$J = \left|\left\{\frac{(\sqrt{b^2 - y^2})^3}{4} y + \frac{3b^2}{8}\left[y\sqrt{b^2 - y^2} - b^2 \arcsin\frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}\right]\right\}\right|_0^b.$$

Nach Einsetzen der Grenzen ergibt sich:

$$L = \frac{3}{16\pi}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{l}. \quad (13)$$

1) In der Figur ist die Drucksehne der Deutlichkeit wegen übertrieben groß verzeichnet worden.

Man denke sich nun die Walze 1 um ein kleines Stück fortgerollt, und zwar so, daß die Berührung längs des nächsten Streifens $2b$ erfolge. Der dieser Bewegung entsprechende Drehungswinkel α_r des Radius r ergibt sich genau genug aus der Beziehung (s. Fig.):

$$\widehat{a}_r = r\alpha_r = (r + r_2)\,\alpha_2,$$

worin $\alpha_2 = \frac{2b}{r_2}$ gesetzt werden kann. Es ist demnach:

$$\alpha_r = \frac{r + r_2}{r r_2}\, 2b$$

oder

$$\alpha_r = (\varrho + \varrho_2)\, 2b,$$

worin $\varrho = \frac{1}{r}$.

Berücksichtigen wir die Gleichung (9), dann ist:

$$\alpha_r = \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\varrho_1 + \varrho_2)\, b. \qquad (14)$$

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{M}$ den mittleren Wert des Widerstandsmomentes beim Rollen um den bezeichneten Betrag, dann ist:

$$\mathfrak{M}\alpha_r = \psi L,$$

worin ψ ein Zahlenkoeffizient kleiner von 1 ist und den unausgenützt verbliebenen Teil der Formänderungsarbeit anzeigt.

Für zwei Walzen ergibt sich laut (10), (13) und (14):

$$\mathfrak{M} = \frac{3\psi}{32}\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2}\, bP.$$

Stellen wir den Wert für b ein und führen ein die Bezeichnung:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_x,$$

worin ϱ_x ein Maß der Krümmung ist, dann folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{3\psi}{32}\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2}\sqrt{\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\pi}\frac{P}{l\varrho_x}}\, P. \qquad (15)$$

Berühren sich die Walzen von innen, rollt also der Zylinder 1 in dem Zylinder 2, dann ist ϱ_2 in der Formel für ϱ_x negativ einzusetzen. Setzt man $\varrho_2 = 0$, dann gilt die Formel für das Rollen einer Walze auf einer Platte. Der Hebelarm des Rollwiderstandes ist demnach keine Materialkonstante, sondern außer von der Materialbeschaffenheit noch von der Krümmung der Körper, der Größe des Druckes auf die Längeneinheit des Zylinders und der Rollgeschwindigkeit abhängig; mit zunehmender Geschwindigkeit muß nämlich der Koeffizient ψ wegen des zunehmenden Einflusses der verzögerten Rückfederung der deformierten Teile wachsen. Dupuit und Perry haben aus den Rollversuchen einer Walze auf einer Platte festgestellt, daß das Widerstandsmoment der Wurzel aus dem Durchmesser proportional sei, was die Formel (15) auch ergibt.

Im Falle der Berührung zweier elastischen Kugeln von den Halbmessern r_1 und r_2 unter normalem Gesamtdruck P ist die Berührungsfläche eine Kugelkalotte vom Radius r, dessen Größe ebenfalls die Formel (9') bestimmt. Die Größe des Halbmessers des die Kugelkalotte abgrenzenden „Berührungskreises" beträgt nach Hertz:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3P}{16}\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\varrho_1 + \varrho_2}}. \qquad (16)$$

Der Einheitsdruck in der Berührungsfläche in der Richtung des ausgeübten Druckes P ist gleich:

$$p = \frac{3}{2\pi}\frac{P\sqrt{b^2 - y^2}}{b^3}. \qquad (17)$$

Die Summe der Einsenkungen der einander entsprechenden Flächenelemente ist laut (12) und (16):

$$\zeta = \frac{3(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{32}\frac{P}{b^3}(b^2 - y^2). \qquad (12'')$$

Bezeichnen wir mit hinreichender Genauigkeit durch $2\pi y\,dy$ die Größe dA eines Flächenelementes in der Druckfläche, dann ist die Formänderungsarbeit:

$$L = \frac{1}{2}\int p\zeta\, dA$$

oder nach Einsetzen der Werte:

$$L = \frac{9}{64}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{b^6}\int_0^b (b^2 - y^2)^{3/2} y\, dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich:

$$I = -\Big|_0^b \frac{1}{5}(b^2 - y^2)^{5/2} = \frac{b^5}{5}$$

und demnach:

$$L = \frac{9}{320}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{b}. \qquad (18)$$

Rollt die Kugel 1 auf der Kugel 2, dann gilt die vorige Beziehung:

$$\mathfrak{M}\alpha_r = \psi L.$$

Mit (14), (16) und (18) ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{40}\psi\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2}\, bP,$$

oder mit (16) und der Bezeichnung der Summe der Krümmungen durch ϱ_x:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{40}\psi\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{\vartheta_2}\sqrt[3]{\frac{3(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16}\frac{P}{\varrho_x}}\,P. \quad (19)$$

Rollt eine Kugel auf einer Platte, dann ist $\varrho_x = \varrho_1$.

Wären der rollende Körper und die Unterlage vollkommen elastisch, so müßte trotzdem ein Rollwiderstand auftreten, und zwar aus folgenden Gründen: Wird z. B. ein Zylinder vom Radius r_1 auf eine Platte unter Druck P aufgelegt, dann wird der der „Drucksehne" $2b$ entsprechende Bogen $2s_1$ des Zylinders auf die dem Radius r des Berührungszylinders entsprechende Länge $2s$ verkürzt; gleichzeitig wird die entsprechende Länge $2b$ der Platte zum Bogen $2s$ ausgedehnt. Es tritt somit eine relative gleitende Bewegung zwischen Zylinder und Unterlage auf, wodurch Gleitreibung geweckt wird. Während des Rollens geschieht nun folgendes: Im Bereiche der vorderen Hälfte der Drucksehne $2b$ werden die Flächenelemente der Unterlage vor der tiefsten Berührungsstelle ausgedehnt und nach vorne geschoben und die entsprechenden Elemente der Walze komprimiert und nach der Mitte verrückt. Die bei dieser relativen Bewegung entstehende Gleitreibung ist in bezug auf die Walze nach vorne gerichtet. Im Bereiche der zweiten Hälfte der Drucksehne geht die Entlastung vor; es werden demnach die Flächenelemente des Zylinders von dem äußersten Berührungsstreifen an ausgedehnt und nach hinten verschoben und entsprechende Teile der Unterlage verkürzt und nach der Mitte verrückt, wodurch wieder eine Gleitreibung entsteht, die auf die Walze nach vorne wirkt. Es wird also während der Bewegung der Walze ein das Rollen bremsendes Moment der Gleitreibung entwickelt.

Es muß bemerkt werden, daß während des geschilderten Rollvorganges die Walze nicht ihren ursprünglichen Umfang und nicht auf der ursprünglichen Oberfläche der Unterlage abwickelt; es rollt vielmehr ein verkürzter Umfang auf einer gedehnten Oberfläche. Der nach einer Umdrehung der Walze auf der ebenen Unterlage wirklich zurückgelegte Weg ist demnach etwas kürzer als der Umfang der Walze.

Rollt eine Walze aus einem in hohem Grade dehnbaren elastischen Materiale auf einer verhältnismäßig harten ebenen Unterlage, dann muß neben der vertikalen Zusammendrückung der Walze auch ihre horizontale Ausdehnung berücksichtigt werden. Die Größe der Drucksehne $2b$ ist in diesem Falle größer als die nach der Hertzschen Formel berechnete und dem Drehungswinkel der Walze α_1 um ihren Mittelpunkt O_1 entsprechende Länge; der Berührungsbogen $2s$ ist trotz der teilweisen Verkürzung länger als der ursprüngliche Bogen $2s_1$ in undeformiertem Zustande. Die von einer Kautschukwalze auf einer eisernen schiefen Ebene oder die von einem Automobillaufrad auf hartem Pflaster rollend durchlaufene Strecke muß demnach größer sein als die dem Radius r_1 entsprechende geometrische Rollstrecke. Die Walze gleitet demnach einen kleinen Teil der Strecke schlittenartig durch.

Ist die Walze erheblich härter als die Unterlage, dann findet das Umgekehrte statt. Die Länge $2b$ ist größer als der Abstand der betreffenden Endpunkte A und B auf der undeformierten Platte. Durch das teilweise seitliche Verdrängen der Oberflächenteilchen der Unterlage über die Ränder der Berührungsfläche hinaus entsteht von beiden Seiten derselben eine wulstförmige, komprimierte Erhebung, wodurch die Berührungsfläche noch vergrößert wird. Es ist zu beachten, daß wegen der seitlichen Kompression außerhalb der Berührungsfläche die Entfernung der entsprechenden Flächenelemente auf der Platte kurz vor dem Überrollen durch die Walze kleiner ist als in natürlichem Zustande der Oberfläche, wodurch bei der folgenden Ausdehnung durch die Walze die Gleitungsstrecke an derselben noch vergrößert wird.

Die Grundzüge der Erklärung über den Anteil der gleitenden Reibung an den Rollwiderständen stammen von O. Reynolds[1]), der auch das Vorhandensein der Gleitung experimentell nachgewiesen hat.

Sind die Körper nicht vollkommen elastisch, treten also hystere Erscheinungen auf, dann werden die Gleiterscheinungen wohl etwas modifiziert, doch bleibt ihr Gesamtbild dasselbe. Es ist klar, daß man in diesem Falle für den Rollwiderstand die Summe des Widerstandes infolge der unvollkommenen Umkehrbarkeit der elastischen Deformation und der durch die Elastizität des Materials bedingten Gleitung einsetzen muß.

Wir wollen nun die Größe der Gleitung für den Fall berechnen, daß die Formänderung den Hertzschen Formeln entspricht und die inneren Materialverschiebungskräfte die in der Berührungsfläche auftretende Haftreibung zu überwinden vermögen. Bezeichnet nun wie früher $2s_1$ die Länge des Bogens AC_1B (s. Fig.) des rollenden Körpers und $2s_2$ die Größe des Bogens AC_2B der Unterlage, beide der Drucksehne $AB = 2b$ entsprechend, dann ist

1) „On rolling Friction". London, Philos. Transact., Vol. 166, Part I (1876).

die relative Gleitung, bezogen auf die Längeneinheit des Umfanges des rollenden Körpers, gleich:

$$S = \frac{s_1 - s_2}{s_1},$$

wobei:

$$2 s_1 = r_1 \alpha_1,$$
$$2 s_2 = r_2 \alpha_2.$$

Nun ist aber:

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{b}{r_1},$$
$$\sin \frac{\alpha_2}{2} = \frac{b}{r_2},$$

oder, weil

$$-1 < \frac{b}{r_{1,2}} < +1$$

ist

$$\frac{\alpha_{1,2}}{2} = \arcsin \frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{b}{r_{1,2}} + \frac{1}{6}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^3 + \\ + \frac{3}{40}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^5 + \frac{15}{336}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^7 + \ldots$$

Wegen der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{b}{r_{1,2}}$ genügt es, nur die zwei ersten Glieder der Reihe zu behalten. Wir erhalten demnach:

$$S = \frac{b^2\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}{6 + \frac{b^2}{r_1^2}},$$

oder hinreichend genau:

$$S = \frac{b^3}{6}(\varrho_1^2 - \varrho_2^2). \qquad (20)$$

Sind beide Körper Walzen, dann ist mit (10):

$$S = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{6\pi}(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{P}{l}. \qquad (21)$$

Für starre Körper: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ ist $S = 0$. Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, dann soll $S = 0$ sein; berücksichtigen wir aber neben der Zusammendrückung der Walzen auch ihre senkrecht zur Richtung des Druckes vollzogene Ausdehnung, dann wird je nach der Größe des Verhältnisses $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ ein gewisser „Schlupf" sich ergeben. Für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ und $\varrho_1 = \varrho_2$ muß selbstredend $S = 0$ sein. Berühren sich die Walzen von innen, dann ist ϱ_2 negativ in die Formel (21) einzusetzen. Rollt eine Walze auf einer Platte, dann ist $\varrho_2 = 0$.

Rollt eine Kugel auf einer Kugelfläche, dann ist mit (16) und (20):

$$S = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{2/3}}{8\sqrt[3]{12}} \varrho_x^{1/3} (\varrho_1 - \varrho_2) P^{2/3}, \qquad (22)$$

worin

$$\varrho_x = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Für eine Kugel auf einer Platte folgt mit $\varrho_2 = 0$.

$$S = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{2/3}}{8\sqrt[3]{12}} \varrho_1^{4/3} P^{2/3}. \qquad (22')$$

Wir wollen nun den Einfluß der Verteilung der Masse des rollenden Körpers über sein Volumen auf die Größe des das Rollen bremsenden bzw. fördernden Momentes untersuchen. Es genügt bei dieser Aufgabe die kleinen Deformationen der Körper außer acht zu lassen und die Körper als starr zu behandeln. Wir nehmen nun an, daß eine Walze vom Radius r_1 auf einer zweiten ihr parallelen vom Radius r_2 bzw. eine Kugel auf einer Rotationsfläche längs eines Meridians, dessen Radius r_2 ein Maximum oder Minimum ist, rollt, wobei der Schwerpunkt Σ des rollenden Körpers um e in der Richtung des Radius r_1 vom Mittelpunkte verschoben ist. Unseren Betrachtungen legen wir ein rechtwinklig-geradliniges Koordinatensystem zugrunde, und zwar derart, daß sein Anfang mit dem Mittelpunkte O_2 des Kreises r_2 zusammenfällt und die vertikale z- und die horizontale x-Achse in der durch die Kreise r_1 und r_2 bezeichneten Querschnittsebene liegen. Der Schwerpunkt Σ beschreibt während des Rollens eine Epitrochoide, deren Ordinate gleich ist:

$$z = (r_1 + r_2)\cos\left(\frac{r_1}{r_2}\alpha_1\right) - e\cos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha_1\right),$$

wenn die Anfangslage des rollenden Körpers den Bedingungen $x = 0$, $z = r_1 + r_2 - e$ entspricht, also Σ auf der positiven z-Achse, und zwar unterhalb des Mittelpunktes O_1 des Kreises r_1 liegt. α_1 ist der Umdrehungswinkel des rollenden Körpers von der Anfangslage an gerechnet um seinen geometrischen Mittelpunkt O_1. Wir bezeichnen durch α_2 den Winkel, den die gemeinsame Normale $O_1 O_2$ mit der positiven Richtung der z-Achse einschließt. Bei „reinem" Rollen muß die Bedingung:

$$\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

erfüllt sein. Wächst α_1 um $d\alpha_1$, so entspricht diese Bewegung einer Drehung des rollenden Körpers um die durch den Berührungspunkt der beiden Kreise gehende Momentanachse um den Winkel:

$$d\beta = d\alpha_1 + d\alpha_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\alpha_1.$$

Dabei ändert sich z um:

$$dz = \left[-r_1 \sin\left(\frac{r_1}{r_2}\alpha_1\right) + \right.$$
$$\left. + e \sin\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha_1\right)\right] \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\alpha_1.$$

Bezeichnet Q das Eigengewicht des rollenden Körpers und $\mathfrak{M}$ ein das Rollen beeinflussendes Moment, dann besteht die Beziehung:

$$Q\,dz = \mathfrak{M}\,d\beta$$

und nach Einsetzen der Werte ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \{e \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - r_1 \sin \alpha_2\}\, Q. \quad (23)$$

Je nachdem $\mathfrak{M}$ positiv oder negativ wird, ist es ein das Rollen bremsendes oder förderndes Moment.

Rollt der Körper 1 auf einer Platte, dann ist mit $\alpha_2 = 0$

$$\mathfrak{M} = Q\, e \sin \alpha_1. \quad (23')$$

Während beim äußeren Rollen der Körper aufeinander die die beiden Winkel α_1 und α_2 kennzeichnenden Pfeile denselben Umdrehungssinn anzeigen, sind sie beim inneren Rollen entgegengesetzt gerichtet. Es ergibt sich demnach die Formel für das innere Rollen, wenn in (23) α_1 negativ eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = \{e \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - r_1 \sin \alpha_2\}\, Q; \quad (23'')$$

die Anfangslage des rollenden Körpers entspricht dabei der Bedingung:

$$x = 0, \quad z = r_2 - r_1 + e.$$

Ist die Geschwindigkeit des auf einer Ebene rollenden exzentrischen Körpers ziemlich groß, dann tritt die Wirkung der Zentrifugalkraft ins Spiel. Der Druck an der Berührungsstelle wird durch dieselbe periodisch beeinflußt. Sind Rollkörper und Unterlage elastisch, dann ist die Enveloppe der momentanen Berührungsflächen in der Unterlage, also die Rollbahn, eine Wellenfläche und der Rollkörper wogt auf der Unterlage. Körper und Unterlage werden in Schwingungen versetzt, die sich weiter ausbreiten und unter Bildung von Schallwellen wegen der inneren Reibung gedämpft, die nutzbare Energie zerstreuen.

Zusammenfassung.

Es werden:

I. Die sog. „trockene" gleitende Reibung der festen Körper durch die hydrodynamische Reibung der die Körper trennenden Luftschicht begründet und die bekannten empirischen Reibungsgesetze ihrem physikalischen Sinne nach erläutert [1];

die Reibungserscheinungen zwischen besonders gereinigten Oberflächen in einem evakuierbaren Raume (Versuch von Ch. Jakob) auf Grund des hydrodynamischen Ansatzes erklärt und die beobachtete Abhängigkeit zwischen dem Reibungswinkel und der Geschwindigkeit durch eine exponentielle Funktion ausgedrückt;

II. der Rollwiderstand der elastischen Körper bei Annahme einer unvollkommenen Elastizität auf Grund eines Näherungsverfahrens ermittelt und die Abhängigkeit des „Hebelarmes der Rollreibung" von den Materialkonstanten, den Krümmungen des rollenden Körpers und der Unterlage, der Belastung und der Rollgeschwindigkeit erwiesen;

die Ursache des „Schlupfs" beim Rollen elastischer Körper behandelt und der Anteil der gleitenden Reibung an dem Rollwiderstande für den Fall ermittelt, wenn die Körper verhältnismäßig hart sind;

der Einfluß der Verteilung der Masse des rollenden Körpers über sein Volumen auf die Größe des Widerstandsmomentes untersucht.

---

1) Kurz vor dem Absenden der Handschrift bin ich auf die Schrift des Herrn Prof. Dr-Ing. L. Gümbel: „Wer ist wirklich blind?" (mit einem Beitrag: Die unmittelbare Reibung fester Körper, Berlin, 1920) aufmerksam gemacht worden, in der ebenfalls der Einfluß der durch die Körperoberflächen adsorbierten Gasschicht auf die Größe der Reibung hervorgehoben wird; bezüglich der Rollreibung findet man dort sehr interessante Untersuchungen.

Lemberg, Technische Hochschule, Juli 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik.

Von M. Born.

Einleitung.

Das mathematische Handwerkszeug, das der Physiker zur Darstellung der klassischen Gebiete seiner Wissenschaft braucht, ist ziemlich eng begrenzt; Systeme partieller Differentialgleichungen beherrschen diejenige Periode der Physik, die heute, zur Zeit des anbrechenden Quanten-Säkulums, abgeschlossen hinter uns liegt. Überdies ist es nur eine überraschend kleine Zahl von Differentialgleichun-



gen, die immer wieder vorkommen; es gibt ja z. B. kein Gebiet der Kontinuumsphysik, wo die Poissonsche Gleichung nicht eine Rolle spielt. Diese Tatsache, die dem Anfänger schon auffällt, beruht nicht auf Zufall, sondern auf einem Forschungsprinzip, das aus der Ökonomie des Denkens entspringt. Die von der Mathematik gelieferten Formen sind da, und zwar in relativ geringer Anzahl soweit durchgebildet, daß der Physiker damit etwas anfangen kann. Daher wird er sein empirisches Material und die daraus gewonnenen Gesetze solange umformen und umkneten, bis sie in eine der vorbereiteten Formen passen. Erst dann gilt in der klassischen Physik die logische Durcharbeitung eines Gebietes für abgeschlossen, wenn es auf ein Kapitel der „normalen" Mathematik zurückgeführt ist.

Nur eine auffällige Ausnahme gibt es: Die klassische Thermodynamik.

Die Methoden, die in dieser Disziplin zur Ableitung der Grundsätze gewöhnlich angewandt werden, weichen durchaus von den sonst üblichen Wegen ab. Man sieht das schon daraus, daß es kein anderes Gebiet der Physik gibt, wo Überlegungen und Schlüsse angewandt werden, die mit dem Carnotschen Kreisprozesse u. dergl. irgendeine Ähnlichkeit haben. Fragt man weiter, welche Formen und Sätze der Mathematik es eigentlich sind, die bei den thermodynamischen Schlußweisen gebraucht werden, so wird man diese schwer als solche kennzeichnen können; sie sind eben der physikalischen Lehre, deren Darstellung sie dienen sollen, so spezifisch eigentümlich, daß nach Abzug des physikalischen Inhalts nichts übrig zu bleiben scheint. Und doch kann das nicht der Fall sein; denn die Thermodynamik gipfelt in einer typisch mathematischen Behauptung, nämlich der Existenz einer gewissen Funktion der Zustandsparameter, der Entropie, und gibt Vorschriften zur Berechnung derselben. Man wird zugeben müssen, daß die Thermodynamik in ihrer traditionellen Form das logische Ideal der Scheidung des physikalischen Inhalts von der mathematischen Darstellung noch nicht verwirklicht hat.

Dabei ist im Jahre 1909 eine Abhandlung von C. Carathéodory[1]) erschienen, die jenes Ziel vollständig erreicht. Diese Arbeit ist in der physikalischen Welt fast gar nicht beachtet worden. Das liegt zum Teil an der sehr abstrakten und auf größte Allgemeinheit abzielenden Darstellungsweise, zum Teil an dem Erscheinungsort; die meisten Physiker werden einer in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlung über Thermodynamik, in der nicht einmal Kreisprozesse vorkommen, keine Beachtung schenken. Und doch verdiente sie es, gelesen zu werden, nicht nur zur Klärung der Grundbegriffe, sondern auch wegen der Vorteile, die die neue Darstellung für den Unterricht bietet.

Um das Studium dieser Abhandlung von Carathéodory zu erleichtern, habe ich hier den Versuch gemacht, ihre Grundgedanken in ganz einfacher Weise darzustellen und den Fachgenossen vorzulegen. Ich weiß, daß die Thermodynamik in der durch die großen Meister geschaffenen Gestalt einen starken intellektuellen Reiz ausübt und sehr fest im Bewußtsein der Physiker verankert ist. Vielleicht gewinnt trotzdem die neue Begründung Freunde; fehlen ihr auch jene wunderbaren Einfälle, die auf fast zauberhafte Weise von einfachen Erfahrungstatsachen zu den Hauptsätzen führen, so ist sie dafür durchsichtiger und bedient sich eben „normaler" Mathematik, die jeder gelernt hat.

Ich werde im folgenden die Gedankenkette, die von den Erfahrungstatsachen zu den mathematischen Formeln der Hauptsätze führt, lückenlos mitteilen; dabei werde ich aber die Glieder, die mit der gewöhnlichen Darstellungsweise übereinstimmen, ganz kurz behandeln und nur solche Punkte ausführlicher beleuchten, bei denen neue Wendungen erscheinen. Hier muß auch eine gewisse Kritik des klassischen Beweisganges einsetzen; diese soll aber keineswegs eine Herabsetzung der großartigen Leistungen der Meister bedeuten, deren Intuition den Weg gewiesen hat, sondern nur Schutt wegräumen, den allzu pietätvolle Tradition bisher nicht zu entfernen wagte.

§ 1. Definitionen.

Wir wollen unsere Betrachtungen auf die allereinfachsten Systeme beschränken, nämlich solche, die aus chemisch unveränderlichen Gasen und Flüssigkeiten zusammengesetzt sind. Unsere Methode überträgt sich aber ohne jede Schwierigkeit auf ganz beliebige Systeme, wie sie die Thermodynamik zu betrachten pflegt; wir werden am Schlusse kurz darauf zurückkommen.

Wir setzen die mechanischen Grundbegriffe (wie Volumen, Masse, Kraft, Druck usw.) als bekannt voraus, nicht aber die thermischen (wie Temperatur, Wärmemenge usw.), die streng zu definieren unser Ziel ist.

1) C. Carathéodory, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Math. Ann. 61, 355, 1909.

Bei rein mechanischer Betrachtungsweise ist der innere Zustand einer Flüssigkeit von gegebener Masse bestimmt, sobald ihr Volumen bekannt ist; der Druck ist dann eine Funktion des Volumens. Tatsächlich ist letzteres aber nicht der Fall; man kann bei konstantem Volumen den Druck ändern, und umgekehrt, nämlich durch jene Prozesse, die man Erwärmung oder Abkühlung nennt und die von den Empfindungen des Heißer- oder Kälterseins begleitet werden. Die thermodynamische Betrachtungsweise besteht nun darin, neben dem Volumen V den Druck p als unabhängig veränderlich einzuführen. Wir nehmen an, daß durch Angabe von V, p der innere Zustand des Körpers (Flüssigkeit) vollkommen bestimmt sei.

Die einzelnen Körper dieser Art sollen nach außen und voneinander durch „Wände" getrennt sein, die wir nicht zu den betrachteten Körpern zählen, sondern über deren physikalisches Verhalten wir besondere, idealisierende Annahmen machen. Und zwar betrachten wir hier nur zwei Arten von Wänden, die das Gemeinsame haben, für Substanz undurchlässig zu sein; bekanntlich spielen in der theoretischen Thermochemie auch substanzdurchlässige Wände eine große Rolle, doch bringt deren Zulassung keinerlei neue, prinzipielle Schwierigkeiten mit sich und wird von uns nur in dem Schlußabsatz kurz gestreift. Wir beschränken uns hier also auf die für Wärme undurchlässigen (adiabatischen) und die für Wärme durchlässigen (diathermanen) Wände; aber da wir den Begriff Wärme nicht eingeführt haben, müssen wir auch die Definitionen der Wände so fassen, daß dieser Begriff nicht vorkommt.

Die adiabatische Wand soll durch folgende Eigenschaft definiert sein: Wenn ein Körper in einer adiabatischen Hülle im Gleichgewicht ist, so soll dieses bei Ausschluß von Fernkräften nur durch Bewegung von Teilen der Wand, aber durch keine anderen äußeren Vorgänge gestört werden können.

Unter Vorwegnahme der thermischen Begriffe heißt das eben, daß eine solche Wand Gleichgewichtsänderungen durch Erwärmung nicht zuläßt, sondern nur durch Aufwendung mechanischer Arbeit, die bei Ausschluß von räumlich verteilten Fernkräften nur durch Bewegung von Teilen der Wand (Umrühren, Kompression u. dergl.) geleistet werden kann. Dieser Begriff der adiabatischen Hülle ist für die Theorie nicht zu entbehren und wird in der gewöhnlichen Thermodynamik in derselben Weise verwandt; aber auch praktisch ist seine möglichst vollkommene Verwirklichung im „Kalorimeter" die Voraussetzung jeder thermodynamischen Messung.

Die diathermane Wand wird durch folgende Eigenschaft definiert: Wenn zwei Körper, die sonst adiabatisch umhüllt sind, durch eine diathermane Wand voneinander getrennt sind, so sollen sie nicht bei beliebigen Werten ihrer Zustandsparameter p_1 V_1 und p_2 V_2 im Gleichgewichte sein können, sondern damit das der Fall ist, muß eine bestimmte Relation zwischen diesen 4 Größen bestehen:

$$F\,(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0. \tag{1}$$

Eine solche Gleichung ist also der Ausdruck der thermischen Berührung; die Wand führen wir nur ein, um Massenaustausch auszuschließen. Wände, bei denen solcher möglich ist (semipermeable Wände) müssen in ganz analoger Weise definiert werden, wie wir im Schlußabsatz andeuten werden.

§ 2. Empirische Temperatur.

Dem Temperaturbegriff liegt der Erfahrungssatz zugrunde, daß, wenn zwei Körper mit einem dritten im thermischen Gleichgewichte sind, sie auch untereinander im thermischen Gleichgewichte sind. Benützt man die Formel (1) als Ausdruck der thermischen Berührung, so lautet dieser Satz offenbar so:

Aus dem Bestehen der Gleichungen

$$F_1\,(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0,\quad F_2\,(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0$$

folgt das Bestehen der Gleichung

$$F_3\,(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0;$$

oder allgemeiner: Aus der Gültigkeit je zweier dieser Relationen folgt die der dritten.

Das ist aber nur dann möglich, wenn diese 3 Gleichungen den folgenden äquivalent sind:

$$f_1\,(p_1, V_1) = f_2\,(p_2, V_2) = f_3\,(p_3, V_3).$$

Man kann also die Gleichgewichtsbedingung (1) zwischen zwei Körpern immer in der Form

$$f_1\,(p_1, V_1) = f_2\,(p_2, V_2) \tag{2}$$

schreiben.

Den einen der beiden Körper kann man nun als Thermometer benützen und den Wert der Funktion

$$f_2\,(p_2, V_2) = \vartheta$$

als (empirische) Temperatur einführen; dann besagt die Gleichgewichtsbedingung in der Form (2), daß der erste Körper mit dem zweiten, dem Thermometer, im Gleichgewicht ist, wenn eine bestimmte Beziehung

$$f_1\,(p_1, V_1) = \vartheta \tag{3}$$

zwischen den Zustandsparametern p_1, V_1 und der empirischen Temperatur ϑ besteht. Diese Beziehung heißt die Zustandsgleichung des Körpers. Die zugehörigen Kurven der

pV-Ebene heißen die Isothermen. Jede beliebige Funktion von ϑ kann mit gleichem Rechte als empirische Temperatur gewählt werden; die Isothermen bleiben dabei immer dieselben. Beschränkt ist die Auswahl nur durch praktische Gesichtspunkte. Man wird nämlich nur solche Körper als thermometrische Substanzen wählen, bei denen je zwei verschiedene Zustände nicht im thermischen Gleichgewichte sind (also Flüssigkeiten nur im Bereiche des tropfbaren oder nur in dem des gasförmigen Zustandes), weil sonst die Eindeutigkeit der Thermometerangaben gefährdet wird.

Aber es ist durchaus notwendig, die außerordentliche Willkür bei der Wahl bestimmter Temperaturskalen zu betonen. Die Bevorzugung der Gasthermometer läßt sich dadurch rechtfertigen, daß erfahrungsgemäß ihre Angaben unabhängig von der Wahl des Gases in beträchtlichem Umfange übereinstimmen; das beruht darauf, daß bei allen Gasen im Zustande hoher Verdünnung die Isothermen durch die Hyperbeln $pV =$ konst. dargestellt werden. Daß man aber gerade dieses Produkt $pV = \vartheta$ als Gastemperatur wählt, und nicht irgendeine andere Funktion davon, etwa $(pV)^2 = \vartheta$ oder $\sqrt{pV} = \vartheta$, läßt sich bei diesem Standpunkte der Theorie logisch nicht begründen, höchstens durch das zweifelhafte Argument der „Einfachheit" oder durch Vorwegnahme späterer Resultate der Thermodynamik (vergl. § 8).

Ist die Temperaturskala festgelegt, so kann man statt p, V auch p, ϑ oder V, ϑ als Zustandsvariable benützen.

§ 3. Der erste Hauptsatz.

Man pflegt nun den Begriff der Wärmemenge zu definieren und glaubt damit der historischen Entwicklung der thermodynamischen Begriffe gerecht zu sein. Dann muß man aber konsequenterweise die Wärme als Substanz einführen, die vom wärmeren nach dem kälteren Körper strömt, was doch die Auffassung bis zu Mayers Entdeckung der Verwandelbarkeit der Wärme in andere Energieformen war. Mit dieser Entdeckung aber hört die substantielle Auffassung der Wärme auf; sobald man erkannt hat, daß Körper erwärmt werden können, ohne daß die umgebenden Körper ihnen Wärme abgeben, nämlich etwa durch Aufwendung mechanischer Arbeit, verliert der Begriff der Wärmemenge zweifellos seinen Inhalt. Erst muß das Gesetz dieser Verwandelbarkeit bekannt sein, bevor man wissen kann, unter welchen speziellen Vorsichtsmaßregeln die Warmheit durch eine Quantitätsgröße „Wärmemenge" gemessen werden darf.

Wir werden daher den Begriff der Wärmemenge zunächst nicht einführen und ihn erst nachträglich an die im ersten Hauptsatze formulierten Erfahrungen anschließen. Damit gewinnen wir nicht nur größere logische Klarheit, sondern knüpfen auch ganz unmittelbar an die Experimente an, durch die Joule den ersten Hauptsatz bewiesen hat.

Die Experimente bestehen darin, daß ein adiabatisch eingeschlossener Körper (Wasser) durch Aufwendung mechanischer oder elektrischer Arbeit aus einem Zustande 1 in einen Zustand 2 gebracht und bewiesen wird, daß es dazu bei fest gegebenem Anfangs- und Endzustand immer derselben Arbeit bedarf, ganz gleich, in welcher Form, in welcher Art und Weise diese aufgewandt wird. Das ist der eigentliche Inhalt des ersten Hauptsatzes. Nebensache ist, daß die Zustandsänderung des Körpers durch die Temperaturänderung nach einer empirischen Skala gemessen und schließlich in die historisch überlieferten Wärmeeinheiten umgerechnet wird; es wird dabei angenommen, daß die zweite Zustandsgröße, das Volumen, praktisch konstant bleibt (keine merkliche Ausdehnungsarbeit geleistet wird). Wenn wir also alles begrifflich Überflüssige fortlassen, so können wir das Resultat der Jouleschen Versuche so formulieren:

1. Hauptsatz: Um einen Körper (oder ein System von Körpern) von einem bestimmten Anfangszustande zu einem bestimmten Endzustande auf adiabatische Weise zu bringen, ist immer ein und dieselbe mechanische Arbeit (bzw. äquivalente elektrische Energie) notwendig, unabhängig von der Art des Überganges.

Zur vollständigen Charakterisierung einer solchen adiabatischen Zustandsänderung dienen daher folgende Daten: 1. Die Gleichgewichtsparameter des Anfangszustandes (bei einem Körper p_0, V_0); 2. die des Endzustandes (p, V); 3. die aufgewandte Arbeit A. Hält man den Anfangszustand fest, so ist demnach die Arbeit A nur noch von den Parameterwerten des Endzustandes abhängig; man schreibt

$$A = U - U_0. \tag{4}$$

wo U eine Funktion des Zustandes (also im Falle eines Körpers von p, V) und U_0 ihr Wert im Anfangszustande ist. U heißt die Energie des Systems.



Der Unterschied zwischen dieser Art der Einführung der Energiefunktion und der gewöhnlichen ist also der, daß hier nur adiabatische Prozesse benutzt werden, während man sonst U als Summe von zugeführter Arbeit und Wärme bei beliebigen Prozessen definiert. Letztere Definition geht aber über das hinaus, was die unmittelbare, experimentelle Erfahrung gibt, und benutzt überdies den Begriff der Wärmemenge, dem der atavistische Charakter einer unzerstörbaren Substanz anhaftet. Überdies verschleiert sie die Tatsache, daß U eine direkt meßbare Größe ist, die durch das Joulesche Experiment unmittelbar als Funktion der Zustandsparameter geliefert wird. In der Tat, wenn der Anfangszustand ein für allemal festgehalten wird, kann man für jeden Zustand, der adiabatisch erreichbar ist, die dazu nötige Arbeit messen, wodurch direkt der Wert von U für den Endzustand gegeben ist. Auf diese Weise kann man prinzipiell auch jeden Zustand erreichen; denn die Beschränkung, die der zweite Hauptsatz für die erreichbaren Zustände statuiert, läßt sich immer durch Vertauschung von Anfangs- und Endzustand beseitigen.

Die messende Thermodynamik verfährt nun tatsächlich genau nach diesem Schema. Das tritt vielleicht am deutlichsten bei den ganz modernen Verfahren von Nernst zur Bestimmung des Energieinhalts (spezifische Wärme) hervor; bei diesen ist der untersuchte Körper selber das „Kalorimeter", d. h. er wird nach Möglichkeit adiabatisch isoliert, und man mißt, welche (elektrische) Arbeit man ihm zuführen muß, um eine bestimmte Zustandsänderung zu erreichen, die durch die Angabe eines Thermoelements und die Annahme $V =$ konst. gekennzeichnet wird.

Erst nach der Aufstellung des ersten Hauptsatzes ist eine vernünftige Einführung des Begriffes Wärmemenge möglich. Die Chemiker bezeichnen die Energie eines Körpers selbst als Wärmeinhalt, die Energieänderung als Wärmetönung; das ist auch ganz berechtigt, insofern sich die mit der Energieänderung verknüpfte Zustandsänderung hauptsächlich in einer Temperaturänderung zeigt. Der Anschluß an den historischen Begriff der Wärmemenge wird erreicht, indem man als kalorische Einheit die Energie benutzt, die zu einer bestimmten Temperaturänderung von 1 g Wasser (bei konstantem Volumen) nötig ist; diese Energie, im mechanischen Maße (erg) ausgedrückt, ist das Wärmeäquivalent. Der 1. Hauptsatz gibt Auskunft darüber, wie weit es möglich ist, mit der Wärme in der traditionellen Weise als Substanz zu operieren, wie es z. B. beim Gebrauche des Wasser-Kalorimeters geschieht; damit die Wärme (ohne Verwandlung) „strömt", muß jede Arbeitsleistung ausgeschlossen werden. So mißt die Energiezunahme des Wassers im Kalorimeter nur dann die Energieabnahme des eingetauchten Körpers, wenn Volumenänderungen (bzw. andere Arbeit leistende Vorgänge) verhindert werden oder von selbst unbeträchtlich sind. So selbstverständlich diese Einschränkung nach der Aufstellung des 1. Hauptsatzes ist, so sinnwidrig ist sie vorher. Jetzt können wir die Wärmemenge auch für ganz beliebige Prozesse definieren; dazu muß angenommen werden, daß die Energie als Funktion des Zustandes bekannt und die bei einem beliebigen Prozeß aufgewandte Arbeit gemessen sei, dann ist die bei dem Prozeß zugeführte Wärme

$$Q = U - U_0 - A \tag{5}$$

Im folgenden spielt der Begriff der Wärme keine selbständige Rolle; wir gebrauchen ihn durchaus nur als kurze Bezeichnung der Differenz von Energiezunahme und zugeführter Arbeit.

Die Energiefunktion denken wir uns nun für jeden Körper durch „kalorimetrische" Messungen bekannt. Über die Energie von Systemen von Körpern ist folgendes zu sagen: Sind zwei Körper adiabatisch isoliert, so ist nach Definition die Energie des Systems gleich der Summe der Energien der einzelnen Körper:

$$U = U_1 + U_2. \tag{6}$$

Im allgemeinen ist aber bei Berührung zweier Körper die Energie nicht additiv, doch ist die Abweichung nur der Oberfläche proportional und daher bei größerem Volumen zu vernachlässigen. Indem wir das tun, können wir die Erfahrung konstatieren, daß auch bei thermischer Berührung die Energie sich additiv verhält. Da wir es hier nur mit adiabatischen und diathermanen Wänden zu tun haben, werden wir also stets die Gleichung (6) anwenden können.

§ 4. Quasistatische (reversible) Zustandsänderungen.

Bei der Formulierung des 1. Hauptsatzes wird die mechanische Arbeit als prinzipiell meßbar angesehen. Damit das bei jedem Prozeß, mag er so stürmisch verlaufen wie er wolle, tatsächlich möglich sei, müßte man annehmen, daß die auf die beweglichen Teile der Wände ausgeübten Kräfte in ihren Momentanwerten registrierbar seien; denn die Arbeit berechnet sich als Produkt von Verschiebung und Kraft. Praktisch ist das aber nur in we-

nigen Fällen zu erreichen; denn bei schnellen Bewegungen entstehen im Innern der Flüssigkeit turbulente Strömungen und Wellen, die in gänzlich unkontrollierbarer, regelloser Weise Drucke auf die Wände erzeugen. Um solche Vorgänge auszuschließen, sind in der Hauptsache zwei Verfahren zur meßbaren Zufuhr von Arbeit gebräuchlich:

1. Man benutzt stationäre Vorgänge, z. B. einen mit konstanter Drehungsgeschwindigkeit laufenden Rührer (wie bei einem Jouleschen Experiment zur Bestimmung des Wärmeäquivalents); es bildet sich dann eine stationäre Flüssigkeitsströmung aus, wobei der Rührer einen konstanten Widerstand zu überwinden hat. Vernachlässigt man die relativ beliebig kurz zu machenden Zeiten der Beschleunigung zu Anfang und Ende des Versuchs, so ist also die Arbeit als Produkt von Winkelgeschwindigkeit und Drehmoment des Rührers bestimmbar.

Hierher gehört im Prinzip auch die Heizung durch einen stationären, elektrischen Strom.

2. Man leitet den Prozeß unendlich langsam, derart, daß der Zustand in jedem Momente als Gleichgewicht angesehen werden kann. Man sollte solche Vorgänge quasistatische nennen, aber man gebraucht gewöhnlich das Wort reversibel, weil sie im allgemeinen die Eigenschaft haben, umkehrbar zu sein. Wir wollen hier auf die Bedingungen, unter denen das der Fall ist, nicht näher eingehen, sondern annehmen, daß sie erfüllt sind, und werden beide Bezeichnungen als synonym verwenden.

In der gewöhnlichen Thermodynamik läßt man jede Kurve des Zustandsraumes (im Falle einer Flüssigkeit der pV-Ebene) als Bild eines reversibeln Prozesses gelten; dabei ist die Meinung, daß reversible Wärmezufuhr dadurch bewirkt werden kann, daß man den betrachteten Körper der Reihe nach mit großen Wärmereservoiren in thermischen Kontakt bringt, die sich nur um unendlich kleine Temperaturintervalle unterscheiden. Solche Gedankenexperimente sind sicherlich erlaubt; das vorliegende aber entfernt sich allzu weit von den wirklich ausgeführten Experimenten und hat für den mathematisch Geschulten etwas Abstoßendes. Daher ist es sicherlich ein Vorteil, daß es sich ganz vermeiden läßt. Wir können uns durchaus auf adiabatische, quasistatische (reversible) Prozesse beschränken, diese sind tatsächlich ausführbar und werden überall experimentell ausgeführt, denn sie bestehen in hinreichend langsamen Bewegungen der (adiabatischen) Wände. Bei solchen Prozessen läßt sich auch streng zeigen, daß im Limes für unendlich kleine Geschwindigkeiten jeder Zwischenzustand ein Gleichgewichtszustand ist; denn die kinetische Energie verschwindet quadratisch mit den Geschwindigkeiten.

Die bei einer reversibeln infinitesimalen Volumenänderung dV einer Flüssigkeit zugeführte Arbeit ist

$$dA = -p dV, \tag{6}$$

wo p der Gleichgewichtsdruck ist. Der 1. Hauptsatz (5) nimmt daher die Form an:

$$dQ = dU + p dV = 0. \tag{7}$$

Für Systeme von Körpern, die durch adiabatische und diathermane Wände getrennt sind, erhält man die entsprechende Gleichung durch Addition, da sowohl die Energiefunktionen als die Arbeitsleistungen additiv sind; z. B. für 2 Körper:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dQ_1 + dQ_2 \\ &= dU_1 + dU_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Endliche quasistatische, adiabatische Zustandsänderungen sind stetige Folgen von Gleichgewichten, also Kurven im Zustandsraume (bei einem Körper Kurven in der pV-Ebene), die in jedem Punkte Bedingungen der Form (7) oder (8) genügen. Diese Kurven heißen Adiabaten.

Die Formeln (7) bzw. (8), die den 1. Hauptsatz ausdrücken, sind Differentialgleichungen für die Adiabaten. Denn drückt man U als Funktion zweier Zustandsparameter, etwa V und ϑ, aus, so wird

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Demnach lautet die Gleichung (7):

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0. \tag{7'}$$

Die Gleichung (8) hat nur Interesse für den Fall thermischer Berührung der beiden Körper; dann wird das System durch 3 unabhängige Zustandsparameter charakterisiert, etwa die beiden Volumina V_1, V_2 und die gemeinsame Temperatur ϑ, durch welche sich die Drucke aus den Zustandsgleichungen

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = \vartheta$$

ausdrücken lassen. Dann wird die Gleichung (8):

$$\left.\begin{aligned} dQ = \left(\frac{\partial U_1}{\partial V_1} + p_1\right) dV_1 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial V_2} + p_2\right) dV_2 + \\ + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = 0. \end{aligned}\right| \tag{8'}$$

Solche Gleichungen wie (7') und (8') heißen Pfaffsche Differentialgleichungen; die Adiabaten müssen ihnen genügen.

Es ist unumgänglich notwendig, die Eigenschaften dieser Differentialgleichungen näher zu studieren. Auch in der traditionellen Darstellung der Thermodynamik kommt man darum nicht herum; ist es doch das Ziel des Aufbaues der Thermodynamik, zu zeigen, daß „die absolute Temperatur integrierender Nenner des Differentials der Wärme" ist. Nur wird diese Untersuchung gewöhnlich recht oberflächlich vorgenommen; in manchen Lehrbüchern fehlt überhaupt eine Definition des integrierenden Faktors oder Nenners, geschweige daß die Bedingungen der Existenz eines solchen entwickelt werden. Es soll aber hier nicht unsere Aufgabe sein, an einzelnen Büchern Kritik zu üben, sondern wir wollen zeigen, daß man die Untersuchungen über die Integrabilität Pfaffscher Differentialgleichungen nur einen kleinen Schritt weiter zu treiben braucht, als es in den besseren Darstellungen der klassischen Theorie geschieht, damit einem die fertigen Formeln der Thermodynamik als reife Früchte in den Schoß fallen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Mit 109 Abbildungen. 36 Bogen. 8°. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. Geh. M. 25.—, geb. M. 28.60. Ausschließlich Sortimentszuschlag.

Von Sommerfelds ausgezeichnetem Buche (siehe d. Zeitschr. **21**, 1920) ist innerhalb eines Jahres die zweite Auflage erfolgt. Wenn eine Auflage so schnell vergriffen ist wie die erste des genannten Buches, so spricht das schon genug für sich. — An dem eigentlichen Texte hat Sommerfeld nur kleinere Unebenheiten ausgeglichen und einige Kürzungen vorgenommen. Dagegen hat er für den mathematisch geschulten Physiker die überaus wichtigen Zusätze am Schlusse seines Buches weiter ausgeführt und durchgearbeitet, indem er zunächst die Theorie der Berührungstransformationen und der Winkelkoordinaten entwickelt, auf denen er dann das ertragreiche Bohrsche Korrespondenzprinzip aufbaut. — Neu hinzugekommen sind dann noch: „Bandenspektren und Molekularmodelle", aus der Überlegung heraus, daß die ersteren, wenn sie einmal theoretisch gedeutet sind, eine unzweideutige Probe auf die Richtigkeit unserer Molekularmodelle gestatten müssen, gerade so wie die Linienspektren die Richtigkeit unserer Atommodelle verbürgen. Sodann wird an der Hand einer lehrreichen Figur von Kossel noch klargelegt, wie man sich das Ineinandergreifen vom Atominneren und Atomäußeren, d. h. den stetigen Übergang aus den Röntgenserien in die sichtbaren Spektren zu denken hat, und schließlich wird ein magnetooptischer Zerlegungssatz aufgeführt, der Klarheit in die Dunkelheit der komplizierten Zeemaneffekte und des schwer entwirrbaren Neonspektrums bringen wird. Wir wünschen der zweiten Auflage das gleiche Geschick wie der ersten! Karl Bergwitz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Wien Dr. Ludwig Moser zum ord. Professor für analytische Chemie an derselben Hochschule, Dr. John E. Schott zum a. o. Professor für Chemie am Pennsylvania State College, George D. Mc. Laughlin zum Direktor des Forschungsinstitutes für Kolloidchemie am College of Engineering der Universität von Cincinnati, der Professsor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Ludwig Bieberbach in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der Professor für höhere Mathematik an der Universität Freiburg i. Schw. Dr. Michel Plancherel in gleicher Eigenschaft an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, die wissenschaftlichen Hilfsarbeiter am astronomischen Recheninstitut der Universität Berlin Dr. Gustav Stracke und Dr. Werner Strehlow zu Observatoren an derselben Anstalt, der Konservator der Landeswetterwarte in München Professor Dr. Eugen Alt zum Direktor der Sächsischen Landeswetterwarte (an Stelle des in den Ruhestand getretenen Oberregierungsrats Professor Dr. Paul Schreiber), der Privatdozent für Chemie an der Universität Münster Dr. Ernst Weitz zum Abteilungsvorsteher am chemischen Institut der Universität Halle, der Professor der Chemie B. Mouatt Jones Aberystwyth zum Leiter des Manchester College der Technologie, der ord. Professor an der Universität Greifswald Dr. Felix Hausdorff zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Bonn, E. A. Goodhue vom California Institut für Technologie zum Dozenten für Chemie an der Universität Vermont, Dr. Anton Wisner zum ord. Professor der chemischen Technologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn.

Verliehen: Dem Privatdozent der Chemie an der Universität Wien Dr. Alfons Klemenc der Titel Professor.

Gestorben: Der Professor der Chemie am Technischen Institut in Varese (Italien) Ing. Chemiker Ugo Rossi, der frühere ord. Honorarprofessor für Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Paul Jannasch, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Jena Geheimer Rat Dr. Johannes Thomae.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. 15. April 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 10 am 20. April 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Bestimmung der Dichte und Ladung von Selen-Partikeln.

Von R. Bär und F. Luchsinger.

§ 1. Die von Ehrenhaft und seinen Schülern nach der Ehrenhaft-Millikanschen Methode errechneten elektrischen Ladungen submikroskopischer Partikeln sind bekanntlich sehr viel kleiner als die Ladung $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. E. des Elektrons. Diese Ladungsbestimmungen haben nun zur wesentlichen Voraussetzung zwei Annahmen:

I. Es gilt für die Bewegung der Partikeln unter einer äußern Kraft das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz:

$$\text{Kraft} = 6\,\pi\mu a v\left(1 + A\frac{l}{a}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

wobei μ = Koeffizient der inneren Reibung des betreffenden Gases, a = Teilchenradius, v = Geschwindigkeit, l = freie Weglänge ist. A bedeutet eine nur ungefähr bekannte Konstante, für welche Ehrenhaft den Wert 0,815 annimmt.

II. Die Partikeln besitzen Kugelform und ihre Dichte ist diejenige des Materials, aus dem sie hergestellt wurden.

Da beide Annahmen nicht ohne weiteres einleuchtend sind, haben Ehrenhaft und seine Mitarbeiter Radius und Ladung der Teilchen weiterhin optisch bestimmt und hierbei eine bemerkenswerte Übereinstimmung der Radien mit den aus dem Fallgesetz errechneten gefunden. Dagegen haben die nach der Theorie der Brownschen Bewegung berechneten Ladungen dieser Teilchen nie sehr wesentliche Unterschreitungen der Elektronenladung ergeben.

§ 2. Der eine von uns hat nun auf eine weitere Möglichkeit der Prüfung der beiden obengenannten Ehrenhaftschen Annahmen I und II hingewiesen[1]).

Da es nämlich bei passender Kondensatorkonstruktion leicht gelingt, dasselbe Teilchen bei verschiedenen Gasdrucken zu beobachten, so kann man erstens den vom Stokes-Cunninghamschen Gesetz geforderten linearen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und freier Weglänge einer direkten experimentellen Prüfung unterziehen, indem man die Fallgeschwindigkeit des Partikels bei verschiedenen Gasdrucken mißt. Zweitens kann man, wenn dieser lineare Zusammenhang wirklich vorhanden ist, unter der Annahme eines plausiblen numerischen Wertes für die Konstante A die Dichte des Teilchens, oder unter der Voraussetzung, daß das Teilchen die Dichte des Materials, aus dem es hergestellt wurde, besitze, die Konstante A berechnen. Man erhält so entweder die Möglichkeit einer Dichtebestimmung, oder man kann den berechneten Wert von A vergleichen mit demjenigen, den Ehrenhaft seinen Messungen zugrunde legt, d. h. man hat ein weiteres Mittel, um die Annahmen I und II auf ihre Gültigkeit zu prüfen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es nun, erstens die Gültigkeit der Annahmen I und II an Teilchen zu prüfen, die zwar durch die Art ihrer Herstellung möglichste Gewähr für Kugelform bieten, aber doch so klein sind, daß auf ihnen Ladungsunterschreitungen nachweisbar sein müssen. Zweitens sollte, falls sich diese Annahmen als unrichtig erweisen würden, durch Messung der Ladung dieser Partikeln untersucht werden, ob sich ein Zusammenhang zwischen dem Maße des Nichterfülltseins dieser Voraussetzungen und der Größe der Ladungsunterschreitungen feststellen läßt.

1) R. Bär, Ann. d. Phys. 59, 394, 1919.

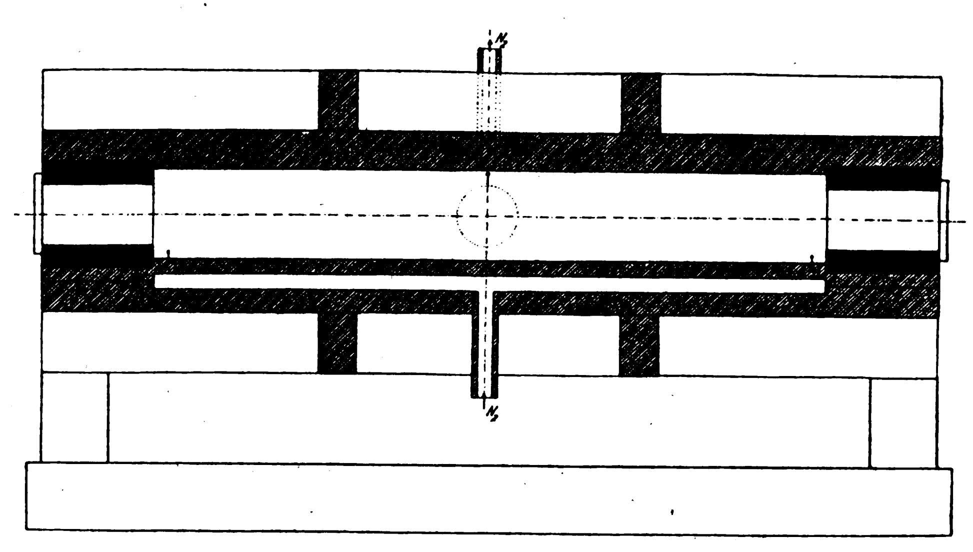


Fig. 1.

§ 3. Versuchsanordnung. Der verwendete Kondensator, in dem dasselbe Partikel bei verschiedenen Gasdrucken beobachtet werden kann, ist in Fig. 1 abgebildet. Der innere Durchmesser der kreisförmigen Platten beträgt 120 mm, der Plattenabstand 12 mm. Das Gas (Stickstoff) strömt durch 24 2 mm weite Löcher, die am Rande der unteren Platte in gleichen Abständen angebracht sind, in den Kondensator und wird durch eine 0,6 mm weite Öffnung im Zentrum der oberen Platte aus dem Kondensator gesaugt[1]).

Hierdurch wird erreicht, daß die Strömungslinien des Gases im Falle des Auspumpens und des Einströmens dieselben sind; es gelingt nun ebenso leicht, dasselbe Partikel bei zunehmenden wie bei abnehmenden Gasdrucken im Auge zu behalten. Zur Dunkelfeldbeleuchtung dienten zwei Bogenlampen, mit denen das Teilchen abwechselnd von links und rechts beleuchtet wurde, um die sog. Photophorese zu kompensieren. Die Beobachtung der Partikeln geschah durch ein Fernrohr. Als inertes Gas, in dem die Teilchen erzeugt und beobachtet wurden, gelangte Stickstoff zur Verwendung. Auf die Trocknung desselben wurde besondere Sorgfalt verwendet. Der Stickstoff wurde einer Bombe entnommen und zur Entfernung der Sauerstoffreste durch alkalische Lösung von Pyrogallol und über glühendes Kupferdrahtnetz geleitet. Zur Trocknung strömte er durch ein 60 cm langes, $CaCl_2$ enthaltendes Rohr und schließlich durch drei je 60 cm lange mit Phosphorpentoxyd gefüllte Rohre. Diese Gastrocknung erwies sich aber als unzureichend, da die Masse der Teilchen nicht konstant blieb. Es zeigten sich nämlich bei stundenlangem Ausschweben der Teilchen kleine, in einer Richtung verlaufende Änderungen des Haltepotentials. Kühlung mit flüssiger Luft[1]) vermochte an dieser Erscheinung nichts zu ändern, doch traten durch Temperaturdifferenzen hervorgerufene störende Luftströmungen im Kondensator auf. Daß diese Änderungen des Haltepotentials trotzdem auf mangelhafte Trocknung zurückzuführen waren, wurde dadurch bewiesen, daß vollkommene Konstanz der Schwebespannung und mithin der Masse dadurch erreicht werden konnte, daß der Stickstoff, bevor er in den Kondensator gelangte, in ein zirka 7 Liter haltendes Vorratsgefäß, dessen Boden und Wände mit Phosphorpentoxyd bestrichen waren, geleitet wurde. Der Stickstoff blieb nun, bevor er zur Verwendung gelangte, tagelang in dem Vorratsgefäß. An dessen Wänden zeigten sich bald Spuren von Feuchtigkeit, während die P_2O_5-Röhren vollkommen trocken blieben. Dieser Befund, daß nämlich wirksame Trocknung nicht durch Hinüberstreichen des Gases über P_2O_5, sondern nur durch langes Lagern in P_2O_5 enthaltenden Gefäßen erreicht wird, stimmt mit anderen Beobachtungen überein[2]). An den Kondensator konnte eine zwischen 0 und 1030 Volt kontinuierlich veränderliche und kommutierbare Spannung angelegt werden.

1) Auf diese Möglichkeit des Gaseinlassens hat uns in dankenswerter Weise Herr Konstantinowsky aufmerksam gemacht.

1) Für die Überlassung der flüssigen Luft sind wir Herrn Weinmann, Sauerstoffwerke Rümlang, sehr zu Dank verpflichtet.

2) E. Meyer, Arch. d. Gen. 2, 259, 1920.



Dieselbe wurde einer Hochspannungsbatterie von Klingelfuß entnommen.

Beobachtet wurden durch Verdampfung von metallischem, schwarzen Selen erzeugte Partikeln, die durch das Loch in der Mitte der oberen Platte in den Beobachtungsraum gelangten. Die elektrischen Ladungen wurden den Partikeln erteilt entweder durch Ionisierung des Stickstoffs mittelst eines *Ra*-Präparates, oder durch Bestrahlung der Teilchen mit dem Licht einer Aluminiumfunkenstrecke. Es zeigte sich wiederum bei manchen Teilchen der schon früher von dem einen von uns[1]) an Paraffinteilchen beobachtete „inverse Photoeffekt", d. h. negative Aufladung der Partikeln bei ultravioletter Bestrahlung.

§ 5. Die Ganzzahligkeit der Ladungen. Um die kleinste auf jedem Partikel feststellbare Ladung zu bestimmen, haben wir durch Ausschweben jedes Teilchens nach der Ehrenhaft-Konstantinowskyschen Gabelungsmethode bei einer Reihe von Ladungen die Vielfachheiten derselben bestimmt. Dabei ergab sich ausnahmslos, daß sich die einzelnen Ladungen eines Teilchens verhalten wie die kleinsten ganzen Zahlen. Wir halten daher dieses Resultat, das der eine von uns[2]) schon früher festgestellt hatte, in vollem Umfang aufrecht, trotz einer dies bestreitenden Erwiderung der Herren Ehrenhaft und Konstantinowsky[3]). Diese beiden Autoren konnten sich bei ihrer Erwiderung im wesentlichen nur auf die Erfahrungen stützen, die Frl. Parankiewicz[4]) bei Gabelungsversuchen an Ölteilchen gesammelt hatte, und bei denen sie in der Tat keine kleinen ganzen Zahlen fand[5]). Nun ist es aber gerade bei Ölteilchen besonders schwierig, Massenkonstanz zu erhalten, und da Frl. Parankiewicz sich nie durch langes Ausschweben eines Teilchens von der Konstanz der Masse überzeugte, so verdienen ihre Messungen schon aus diesem Grunde kein Zutrauen. Außerdem engte Frl. Parankiewicz die Haltepotentiale ihrer Teilchen in Grenzen ein, die sich oft nur um 1 Proz. voneinander unterscheiden. Es wirkt also auf das Teilchen nunmehr eine Kraft $eE - mg$, die nur noch $^1/_2$ Proz. derjenigen Kraft beträgt, unter welcher das Partikel frei fällt. Da nun aber die Geschwindigkeit des Teilchens beim freien Fall von der Größenordnung 10^{-3} cm/sec ist (bei Schwankungen der Fallzeiten untereinander von mehr als 50 Proz. infolge der Brownschen Bewegung), so hat das Partikel beim Ausschweben eine Geschwindigkeit von wenigen 10^{-5} cm/sec, sodaß das sichere Einengen auch nur einer Ladung innerhalb solch enger Grenzen infolge der Brownschen Bewegung viele Stunden beanspruchen würde.

Eine von den Herren Ehrenhaft und Konstantinowky gemeinsam mit dem einen von uns begonnene Untersuchung der Ganzzahligkeit der Ladungen von Selenteilchen mußte leider aus äußeren Gründen vorzeitig abgebrochen werden.

§ 5. Bevor wir die Versuchsresultate mitteilen, müssen wir noch folgende Bemerkung vorausschicken, die den Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den aus den Ehrenhaftschen Annahmen I und II folgenden ermöglicht:

Da das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz eine lineare Beziehung zwischen Fallgeschwindigkeit v und freier Weglänge l annimmt, d. h. in der vl-Ebene eine Gerade darstellt, so hat man zu deren Festlegung nur die Kenntnis zweier Punkte nötig. Wir haben daher die Fallzeiten unserer Partikeln nur bei zwei Gasdrucken gemessen. Außerdem haben wir nicht sehr weit evakuiert, damit das Verhältnis $\frac{l}{a}$ von freier Weglänge zu Teilchenradius nicht größer als zirka 2,5—3,0 wurde. Wir befanden uns daher sicher noch im Intervall 0—5, in dem Ehrenhaft selbst das Stokes-Cunninghamsche Gesetz verwendet.

Sind v_1 und v_2 die Fallgeschwindigkeiten des Teilchens bei den freien Weglängen (reziproken Gasdrucken) l_1 und l_2, so ergeben sich die beiden Konstanten α und β der Geraden

$$v = \alpha + \beta \cdot l \tag{2}$$

daraus zu

$$\alpha = \frac{v_1 l_2 - v_2 l_1}{l_2 - l_1}; \qquad \beta = \frac{v_2 - v_1}{l_2 - l_1}. \tag{3}$$

Andererseits erhält man aus (1), wenn man für die Kraft das Gewicht

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma g$$

des kugelförmigen Teilchens von der Dichte σ einsetzt,

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\sigma g}{\mu}\left(a^2 + aAl\right). \tag{4}$$

Durch Vergleich mit (2) erhalten wir zur Berechnung von a die Gleichung

1) F. Luchsinger, Arch. d. Gen. 1, 544, 1919.
2) R. Bär, Ann. d. Phys. 57, 166, 1918.
3) Ann. d. Phys. 58, 199, 1919.
4) Ann. d. Phys. 53, 551, 1917.
5) Diese Versuche werden von Herrn Ehrenhaft auch in seiner Arbeit „Über die Teilbarkeit der Elektrizität" (Ann. d. Phys. 56, 1, 1918) als hauptsächlicher Einwand gegen das Bestehen der Ganzzahligkeit benutzt.

$$a^2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{\mu}{\sigma g} \cdot \alpha. \tag{5}$$

Ferner wird

$$\beta = \frac{2}{9} \cdot \frac{\sigma g}{\mu} \cdot A \cdot a. \tag{6}$$

Statt nun hieraus und aus (5) den Wert von A zu berechnen und mit dem Ehrenhaftschen $A = 0{,}815$ zu vergleichen, bemerken wir[1]), daß

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{2}{9} \cdot \frac{g}{\mu} \cdot \sigma \cdot A^2 \tag{7}$$

wird. Es muß sich also, wenn die Annahmen I und II zutreffen, aus den Versuchen die Größe $\frac{\beta^2}{\alpha}$ als Konstante ergeben. Da bei Selen die Dichte je nach der Modifikation 4,3—4,8 beträgt, so ergeben sich als mögliche Werte von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ für $\mu = 1{,}76 \cdot 10^{-4}$ und $A = 0{,}815$, d. h. jenen Wert der Konstanten A, den Ehrenhaft durch optische Größenbestimmung bestätigt hat,

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = 3{,}53 - 3{,}94 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}.$$

Größere Werte von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ würden, da die Dichte der Partikeln sicher nicht wesentlich größer ist als die des kompakten Materials, bedeuten, daß A größer ist als unserer Annahme entspricht. Nach der Cunninghamschen Theorie könnte zwar A alle Werte zwischen 0,815 — 1,63 annehmen, d. h. $\frac{\beta^2}{\alpha}$ könnte Beträge bis $7{,}92 \cdot 10^6$ erreichen, aber die so errechneten Radien würden der optischen Größenbestimmung Ehrenhafts widersprechen. Größere Werte als $7{,}92 \cdot 10^6$ dürften überhaupt nicht auftreten. Kleinere Werte als $3{,}53 \cdot 10^6$ heißen, daß die Dichte des betreffenden Teilchens kleiner als 4,3 ist, der kleinste Wert, der bei Partikeln, die aus reinem Selen bestehen, noch vorkommen kann.

§ 6. **Versuchsresultate.** In der folgenden Tabelle geben wir die Versuchsresultate an sämtlichen von uns untersuchten Selenteilchen wieder. In der ersten Kolonne ist die Partikelnummer, in der zweiten der aus Formel (5) für $\sigma = 4{,}3$ [2]) sich ergebende Radius eingesetzt. In der dritten Kolonne ist bei den größeren Partikeln, die sich leicht ausschweben lassen, der aus den Vielfachheiten der Ladungen sich ergebende Wert für die kleinste auf dem Teilchen nachweisbare Elektrizitätsmenge angegeben. Bei den kleinen Partikeln, bei denen das Ausschweben unter großen Gasdrucken fast unmöglich und auch unter kleinen Drucken noch mühsam ist, ermittelten wir die Ladung aus den Steigzeiten im elektrischen Feld, und zwar wurde Wert darauf gelegt, durch oftmaliges Umladen der Partikeln es zu erreichen, daß wirklich die kleinstmögliche Ladung des betreffenden Teilchens zur Messung gelangte. In der vierten Kolonne ist der Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$, der, wenn die Annahmen I und II zutreffen, zwischen 3,53 und $3{,}94 \cdot 10^6$ liegen muß, eingetragen. In der fünften Kolonne endlich ist der zu dem kleinern der beiden Gasdrucke, bei denen ein Teilchen jeweils untersucht wurde, gehörige Wert $\left(\frac{l}{a}\right)_{max}$ angegeben, um zu zeigen, daß wir uns wirklich innerhalb der von Ehrenhaft

Tabelle.

No.	$a \cdot 10^5$	$e \cdot 10^{10}$	$\frac{\beta^2}{\alpha} 10^{-6}$	$\left(\frac{l}{a}\right)_{max}$
359	5,72	4,31	3,77	0,66
360	5,50	4,53	4,44	0,66
361	4,77	4,48	4,17	0,70
363	3,92	3,83	2,19	0,85
364	2,09	1,25	6,67	2,1
365	5,10	4,48	3,14	0,74
367	5,39	2 × 4,86[1])	2,82	0 71
368	5,39	4,84	2,82	0,71
370	6,32	4,97	2,77	0,58
371	3,42	4,97	3,22	1,1
373	3,81	4,22	5,12	0,87
375	1,24	0,97	11,5	2,9
379	1,56	1,34	4,34	2,3
380	0,897	0,538	20,9	3,9
381	0,908	2,01	7,48	2,6
382	3,19	4,03	5,07	1,3
384	1,61	2,43	1,93	1,5
387	1,11	3,95	1,68	2,4
389	1,51	2 × 3,13[1])	0,824	1,7
392	1,94	2 × 3,11[1])	0,547	1,5
396	1,54	1,28	9,27	1,7
399	0,840	0,352	44,2	2,7
401	0 853	0,602	23,7	3,1
404	1,92	1,36	4,03	1,3
405	2,07	3,53	2,12	1,2
407	3,13	3,12	3,78	0,77
408	1,86	3,58	4,27	1,3
409	2,89	2,20	6,02	0,85
412	0,868	1,40	10,7	2,4

1) Bei diesen Partikeln ist es uns trotz mehrfachem Umladen offenbar nicht gelungen, die kleinstmögliche Ladung aufzufinden. Wir haben daher der gemessenen kleinsten Ladung noch die Vielfachheit „2" zugesprochen.

1) Siehe auch: F. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 63, 784, 1920 Anmerkung 2.

2) Trotzdem das von uns verdampfte Selen die Dichte 4,8 hatte, glauben wir doch mit $\sigma = 4{,}3$ rechnen zu müssen, weil die Selenteilchen durch Abkühlung hocherhitzten Selendampfes entstehen (siehe Erdmann, Lehrb. d. anorgan. Chem., 5. Aufl., S. 286, Braunschweig 1910). Außerdem zeigten unsere Teilchen die rote Eigenfarbe des amorphen Selens.

angenommenen Gültigkeitsgrenzen für das Widerstandsgesetz befanden. Als freie Weglänge des Stickstoffs bei 760 mm Hg wurde der Wert $l = 1{,}01 \cdot 10^{-5}$ cm, mit welchem Ehrenhaft rechnet, benutzt.

§ 7. Diskussion der Resultate. Man ersieht aus der Tabelle sofort den Zusammenhang zwischen der aus den Ausschwebungen oder Steigzeiten errechneten Ladung e der Partikeln und der lediglich aus den Fallzeiten berechneten konstant-sein-sollenden Größe $\frac{\beta^2}{\alpha}$. Diesen Zusammenhang veranschaulicht nochmals die Fig. 2, in der als Abszissen die $\frac{\beta^2}{\alpha}$- und als Ordinaten die e-Werte eingetragen

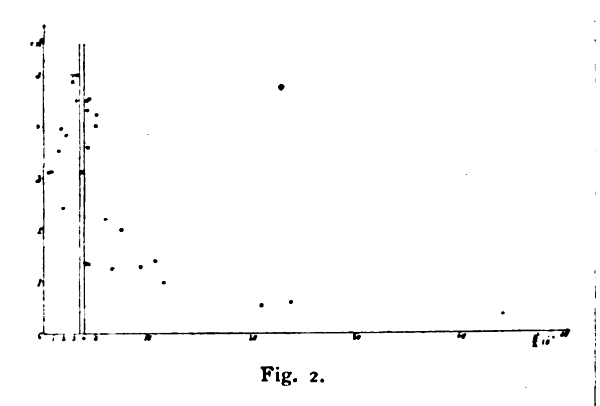


Fig. 2.

sind. Der durch die beiden vertikalen Geraden begrenzte Streifen stellt das Intervall $\frac{\beta^2}{\alpha} = 3{,}53 - 3{,}94 \cdot 10^6\,\text{cm}^{-1}\,\text{sec}^{-1}$ dar.

Bei einer ersten Gruppe von Partikeln (Nr. 359, 360, 361, 365, 367, 368, 370, 371) mit einem Radius größer als $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm ergeben sich die ziemlich gut mit der Elektronenladung übereinstimmenden e-Werte $4{,}31 - 4{,}97 \cdot 10^{-10}$ elst. E. und Beträge für $\frac{\beta^2}{\alpha}$, die zwischen 2,88 und $4{,}41 \cdot 10^6$ schwanken, also ebenfalls ziemlich gut mit dem Ehrenhaftschen Wert übereinstimmen. Für diese Teilchen erweisen sich also die Ehrenhaftschen Annahmen als angenähert richtig, und es ergibt sich bei ihnen, wie nicht anders zu erwarten war, ein ebenfalls angenähert richtiger e-Wert.

Bei einer zweiten Gruppe von Teilchen (Nr. 364, 375, 380, 381, 396, 399, 401, 409, 412) mit kleineren Radien erhält man e-Werte bis herab zu $0{,}35 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. E., d. h. Ladungen bis herab zum 14. Teil der Elektronenladung, gleichzeitig aber ergeben sich für $\frac{\beta^2}{\alpha}$ Werte von $6{,}0 - 44{,}2 \cdot 10^6$, und zwar sind die Werte von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ umso größer je kleinere e-Werte sich ergeben. Sie sind sämtlich nicht nur viel größer als es die Ehrenhaftschen Annahmen erlauben, sie sind in ihrer Mehrzahl — und gerade für die großen Ladungsunterschreitungen — auch mit dem größeren Intervall, das Cunningham selbst für $\frac{\beta^2}{\alpha}$ zuläßt, durchaus unverträglich. Diese großen $\frac{\beta^2}{\alpha}$-Werte sind auch nicht durch die Annahme zu erklären, daß unsere Partikeln nicht die Dichte des Selens hatten. Denn in diesem Falle kann ihre Dichte zwar kleiner als 4,3 aber nicht größer als 4,8 gewesen sein, und das ergibt wegen (7) für $\frac{\beta^2}{\alpha}$ noch kleinere Werte als $3{,}53 \cdot 10^6$ aber keine größeren als $3{,}94 \cdot 10^6\,\text{cm}^{-1}\,\text{sec}^{-1}$.

Da dieses Versuchsergebnis also durch die Annahme einer anderen Dichte der Partikeln nicht erklärt werden kann, so folgt, daß das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz bei den kleineren Partikeln nicht mehr gültig ist.

In der dritten Gruppe aller übrigen Partikeln findet man kleinere Unterschreitungen der Elektronenladung. Die zugehörigen Werte von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ sind teilweise mit dem Ehrenhaftschen verträglich, teilweise sind sie aber beträchtlich zu klein oder zu groß. Zu kleine Werte von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ können, wenn man nicht für A kleinere Werte als 0,815 zuläßt, nur durch die Annahme einer kleineren Dichte als 4,3 erklärt werden. Wenn man aber die Möglichkeit des Vorhandenseins von Teilchen mit kleinerer Dichte, als sie das kompakte Material besitzt, zugeben muß, so sieht man, daß ein mit den Ehrenhaftschen Annahmen verträglicher Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ allein noch keine Gewähr dafür bietet, daß diese Annahmen auch wirklich zutreffen. Es kann sehr wohl σ wesentlich kleiner als 4,3 und A größer als 0,815 sein, derart, daß sich beide Abweichungen gerade kompensieren und einen richtigen Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ vortäuschen, während sich der errechnete e-Wert, der proportional $\sigma^{-1/2}$ ist, dann zu klein ergibt.



Dies gilt aber nur für eine bestimmte Partikelgröße. Bei noch kleiner werdendem Teilchenradius vermögen sich die Änderungen von A^2 und σ nicht mehr gegenseitig aufzuheben. Die aus den Versuchen sich ergebende Konstante A wird dann so groß, daß die vorkommenden Dichteunterschreitungen die Zunahme von A^2 nicht mehr zu kompensieren vermögen.

§ 8. Zusammenfassung.

1. Die Ehrenhaft-Millikansche Methode der Größen- und Ladungsbestimmung mikroskopischer und submikroskopischer Partikeln liefert so lange für die Ladung des Elektrons den richtigen Wert, als ihre Grundlagen, die in § 1 genannten Annahmen I und II zutreffen. Bei in Stickstoff durch Verdampfung erzeugten Selenpartikeln ist dies bis herab zu einem Teilchenradius von ungefähr $3{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm meist der Fall.

2. Mit kleiner werdendem Partikelradius erhält man Unterschreitungen der Elektronenladung in dem Maße, wie das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz seine Gültigkeit verliert.

3. Es zeigen sich bei den einzelnen auf die angegebene Weise hergestellten Partikeln beträchtliche Dichteunterschiede.

Während die Nichtgültigkeit des verwendeten Widerstandsgesetzes bei den kleineren Partikeln eine Fehlerquelle bedingt, die sicher bei den Ladungsmessungen Ehrenhafts und seiner Schüler eine wesentliche Rolle spielt, vermögen wir natürlich nicht mit Sicherheit zu behaupten, daß die von diesen Autoren untersuchten Selenpartikeln ebenso große Dichteunterschreitungen zeigen, wie wir sie beobachtet haben.

Das Ziel einer im Gange befindlichen Arbeit ist es, das Widerstandsgesetz zu finden, das bei den kleinen Partikeln an die Stelle des Stokes-Cunninghamschen zu treten hat.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer zu danken für das fördernde Interesse, das er dem Fortschreiten dieser Untersuchungen entgegenbringt.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Februar 1921.)

Die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsexponent von Flüssigkeiten.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Héctor Isnardi.

(Ergänzt und mitgeteilt von Richard Gans.)

Ich bin damit beschäftigt, Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur zu messen und die Resultate mit der von Gans entwickelten Theorie, die demnächst in den Annalen der Physik erscheinen wird, zu vergleichen. Die an Äthyläther gewonnenen Resultate möchte ich schon jetzt mitteilen.

Die Versuchsanordnung ist folgende. Der mit Turbinenunterbrecher betriebene Induktor J speist die Löschfunkenstrecke E, die im Erregerkreise K Wellen erzeugt und mit dem Primärkreise P gekoppelt ist. Dieser enthält den Flüssigkeitskondensator F und ist lose gekoppelt mit dem Sekundärkreise S, der einen variablen Meßkondensator enthält. In die Kreise P und S ist je eine Spule des Kurzschlußdynamometers[1]) D eingeschaltet, das bekanntlich bei Resonanz von P und S keinen Ausschlag gibt.

Die Zurückführung auf absolutes Maß erfolgte mittels Ersetzens von F durch einen Meßkondensator bekannter Kapazität.

So ergaben sich für Äther die Zahlen der Tabelle I. In dieselbe sind die Werte von Tangl[2]), die sich von $+18^0$ bis $+160^0$ erstrecken, mit aufgenommen. Die Dichte D ist den Messungen von Seitz, Alterthum und Lechner[3]) und für hohe Temperaturen Beobachtungen von Young[4]) entnommen.

Für den festen Zustand habe ich sie noch nicht gemessen und einstweilen durch den Näherungswert 0,9 ersetzt.

Fig 2 gibt ε als Funktion von t. Etwas oberhalb des Gefrierpunktes $-116{,}3^0$ hat ε ein Maximum. Die Lorentz-Lorenzsche Beziehung, nach der $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{1}{D}$ von der Temperatur unabhängig sein sollte, gilt auch nicht genähert, wie ein Blick auf die vierte Kolumne der Tabelle I zeigt. Ebensowenig ist gemäß der Figur $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{T}{D}$

1) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Ann. d. Phys. (4) **33**, 490, 1910.

2) K. Tangl, Ann. d. Phys. (4) **10**, 761, 1903.

3) W. Seitz, H. Alterthum und G. Lechner, Ann. d. Phys. (4) **49**, 91, 1916.

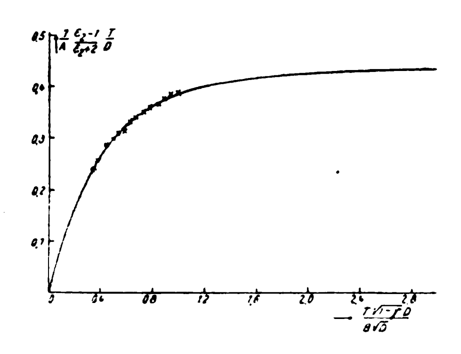
4) S. Young, Phil. Mag. **33**, 153, 1892; zitiert nach Tangl, l. c. S. 764.

Tabelle I.

t	ε	D	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}$
— 180	1,51	(0,9)	0,1614
— 160	1,65	(0,9)	0,1979
— 130	2,30	(0,9)	0,3359
— 120	3,16	0,8612	0,4862
— 115	4,36	0,8562	0,6267
— 110	6,38	0,8512	0,7560
— 108	8,95	0,8490	0,8538
— 104	8,41	0,8453	0,8420
— 98	7,92	0,8389	0,8316
— 80	7,01	0,8205	0,8130
— 54	6,33	0,7930	0,8069
— 35	5,60	0,7729	0,7832
— 16	5,10	0,7530	0,7669
0	4,60	0,7359	0,7414
+ 18	4,36	0,7150	0,7386
40	3,97	0,6892	0,7212
60	3,65	0,6652	0,7056
80	3,38	0,6395	0,6936
100	3,12	0,6120	0,6783
120	2,89	0,5768	0,6703
140	2,66	0,5390	0,6602
160	2,41	0,4927	0,6482

eine lineare Funktion der Temperatur, wie es nach der Debyeschen Theorie[1]) sein sollte, und wie Debye aus dem beschränkten Tanglschen Beobachtungsmaterial noch schließen konnte.

Die Debyesche Theorie nimmt an, daß die Molekel ein permanentes elektrisches Moment hat, dem sich ein durch das äußere Feld influenziertes überlagert, und daß die Molekel sich demnach im äußeren Felde zu orientieren



sucht. Er vernachlässigt aber die Molekularfelder, d. h. die Wechselwirkung der Teilchen untereinander.

Nach der Gansschen Theorie gilt unter Berücksichtigung jener Wechselwirkung, also des Einflusses der Dichte D, und unter der Annahme isotroper Bindungen für die Dielektrizitätskonstante ε

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}=\frac{4\pi N_0}{3M}g+\frac{16\sqrt{\pi}\mu^2 N_0^2}{9RMT}\Phi(\tau). \quad (1)$$

Hier bedeutet N_0 die Loschmidtsche Zahl pro Mol, M das Molekulargewicht, g die Konstante der quasielastischen Bindung, d. h. das durch die erregende Kraft 1 in der Molekel induzierte Moment, μ das permanente Moment der Molekel, R die universelle Gaskonstante, T die absolute Temperatur.

Ferner ist

$$\tau=\frac{kT}{\mu E_0}=\frac{3R}{4N_0^2\mu^2}\sqrt{\frac{s^3MN_0}{\pi}}\cdot\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{\sqrt{D}}=$$

$$=\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}}, \quad (2)$$

wo

$$\gamma=\frac{8\pi N_0 g^2}{3s^3M}. \quad (2a)$$

s bedeutet den kleinsten Abstand der Mittelpunkte zweier Molekeln (Molekulardurchmesser), $k=\frac{R}{N_0}$ die Boltzmann-Plancksche Konstante, E_0 das wahrscheinlichste elektrische Molekularfeld.

$\Phi(\tau)$ ist eine Funktion, die der eine von uns[1]) in seiner Theorie des Paramagnetismus als $\Phi(\tau)=\tau\cdot\psi(\tau)$ eingeführt und tabellarisch niedergelegt hat.

Der erste Term der rechten Seite von (1) gibt den Beitrag der quasielastischen Verschiebungen zur Dielektrizitätskonstante, wie er in der Lorentz-Lorenzschen Formel ausgedrückt ist, der zweite Term berücksichtigt die Orientierung der Teilchen im äußeren Felde infolge ihres permanenten Moments. Die Ableitung dieses zweiten Terms ist genau analog der der entsprechenden Formel in der zitierten magnetischen Arbeit von Gans.

Für unendlich große Argumente τ, d. h. für sehr hohe Temperaturen und geringe Dichten (nicht komprimierte Gase) nimmt $\Phi(\tau)$ den konstanten Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ an, so daß für diesen Spezialfall (1) in

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}=a+\frac{b}{T} \quad (1a)$$

übergeht. In der Debyeschen Formel, die

1) P. Debye, diese Zeitschr. 13, 97, 1912.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. (4) 50, 163, 1916.

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=a+\frac{b}{T}$$

lautet, fehlt also links der Faktor $\frac{1}{D}$, im zweiten Gliede rechts der Faktor

$$\Phi\left(\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}}\right).$$

Unsere Beziehung (1) gilt für den quasistatischen Fall äußerst langer Wellen. Wollen wir dieselbe für den sichtbaren Teil des Spektrums anwenden, so können wir den zweiten Term rechts unterdrücken, da die Orientierungen wegen des großen Trägheitsmoments der Molekel nicht zum Brechungsexponenten sehr schneller (sichtbarer) Schwingungen beitragen. Der erste Term rechts ist aber dann noch durch $1-\frac{n^2}{n_0^2}$ zu dividieren, wie die elektromagnetische Lichttheorie lehrt[1]), unter n die Schwingungszahl des Lichts, unter n_0 die (ultraviolette) Eigenschwingungszahl der quasielastischen Verschiebungen verstanden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{16\sqrt{\pi}\,\mu^2 N_0^2}{9RM}=A; \quad \frac{4\pi N_0 g}{3M}=C, \tag{3}$$

so berechnet sich die Dielektrizitätskonstante also aus

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}=C+\frac{A}{T}\Phi\left(\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}}\right) \tag{4}$$

und der Berechnungsexponent m im sichtbaren Gebiet aus

$$\frac{m^2-1}{m^2+2}\frac{1}{D}=\frac{C}{1-\frac{n^2}{n_0^2}}=\frac{C}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \tag{5}$$

Für unendlich lange Wellen ($\lim n=0$) geht also (5) in den ersten Term der rechten Seite von (4) über, so daß C sich bereits aus der Dispersionskurve für sichtbares Licht ergibt und nicht etwa eine frei verfügbare Konstante in der für die D.E.C. gültigen Gleichung (4) ist. Insofern ist (4) eine zweikonstantige Formel für ε mit den Konstanten A und B, genau wie die Debyesche Beziehung; denn auch γ ist keine neue Konstante, sondern es gilt nach (2), (2a) und (3)

$$\gamma=\frac{8}{3\pi}\left(\frac{BC}{A}\right)^2.$$

Die Gleichung (4) beansprucht, die D.E.C. für den flüssigen und gasförmigen Zustand quantitativ darzustellen.

1) Siehe z. B. M. Planck, Berl. Ber. **24**, 470, 1902.

Um C zu bestimmen, benutzen wir folgende Beobachtungen von Brühl[1]) für $t=17{,}^01$ ($D=0{,}7183$).

Tabelle II.

λ in $\mu\mu$	m	$\frac{m^2-1}{m^2+2}$ beob.	$\frac{m^2-1}{m^2+2}$ ber.
434,07	1,36189	0,30869	0,30869
486,14	1,35854	0,30612	0,30606
535,05	1,35616	0,30431	0,30425
589,32	1,35424	0,30282	0,30278
656,29	1,35246	0,30146	0,30147
670,82	1,35216	0,30123	0,30123

Die letzte Kolumne haben wir nach (5) berechnet mit

$$C=0{,}29608; \quad \lambda_0=87{,}75\,\mu\mu.$$

Die Eigenschwingung liegt also weit im Ultravioletten.

Ziehen wir C von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}$ ab, so erhalten wir den Beitrag der Orientierungen zur D.E.C. Diesen wollen wir ε_2 nennen, und es ergibt sich nach (4)

$$\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2+2}\frac{T}{D}=A\,\Phi\left(\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}}\right). \tag{6}$$

Aus den Beobachtungen Tangls und Isnardis (Tabelle I) folgt somit für die Temperaturen, bei denen der Äther flüssig ist.

Mit $A=390{,}0$; $B=517{,}0$ ergeben sich die letzten beiden Kolumnen.

Zeichnen wir die theoretische Kurve Φ als Funktion von τ und tragen die Werte dieser letzten beiden Kolumnen in das Diagramm ein, so erkennen wir die befriedigende Übereinstimmung.

Wir können unsere Theorie zunächst noch durch Berechnung der D.E.C. des dampfförmigen Äthers prüfen.

Für unendlich großes Argument $\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}}$ nimmt Φ, wie gesagt, den konstanten Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0{,}4431$ an, also muß nach (4) für den Dampf gelten

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{1}{D}=C+\frac{0{,}4431\,A}{T}. \tag{7}$$

1) J. W. Brühl, Ber. chem. Ges. **30**, 165, 1897; zitiert nach Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, 4. Aufl., Berlin 1912, S. 1024.

Tabelle III.

T	$\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2+2}\frac{1}{D}$	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{T}{D}$	$\frac{T}{\sqrt{D}}$	$\frac{1}{A}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{T}{D}$	$\frac{1}{B}\frac{\sqrt{D}}{T\sqrt{1-\gamma D}}$
169	0,5459	92,26	183,9	0,2365	0,3317
175	0,5355	93,71	191,1	0,2402	0,3467
193	0,5166	99,77	213,1	0,2558	0,3875
219	0,5108	111,6	246,0	0,2869	0,4415
238	0,4871	116,0	270,7	0,2972	0,4878
257	0,4708	121,0	296,1	0,3101	0,5333
273	0,4453	121,6	318,3	0,3119	0,5775
261	0,4425	128,7	341,2	0,3301	0,6167
313	0,4251	133,0	377,0	0,2410	0,6723
333	0,4095	136,3	408,3	0,3494	0,7241
353	0,3975	140,3	441,5	0,3597	0,7752
373	0,3822	142,6	476,7	0,3655	0,8389
393	0,3742	147,1	517,5	0,3770	0,8796
413	0,3641	150,4	562,6	0,3856	0,9324
433	0,3521	152,4	616,9	0,3608	0,9874

Für $T = 273 + 100$ und $p = 1$ Atm. ist $D = 0{,}002418$. Somit ergibt sich $\varepsilon = 1{,}00551$, während Bädeker[1]) $\varepsilon = 1{,}00516$ beobachtet hat. Berücksichtigt man, daß für diese Messung das Argument $\frac{T\sqrt{1-\gamma D}}{B\sqrt{D}} = 13{,}8$ ist, während es beim flüssigen Äther (Tabelle III) sich zwischen 0,332 und 0,987 bewegt, so muß man die Übereinstimmung als befriedigend anerkennen.

Des weiteren können wir den Temperaturkoeffizienten des Brechungsexponenten aus der Dichteänderung berechnen und mit den Messungen von Oudemans[2]) (l. c.) vergleichen. Nach (5) gilt

$$\frac{dm}{dt} = \frac{(m^2-1)\,(m^2+2)}{6m}\,\frac{1}{D}\,\frac{dD}{dt}. \tag{8}$$

Daraus berechnet sich

λ	$-\frac{dm}{dt}\cdot 10^4$ ber.	$-\frac{dm}{dt}\cdot 10^4$ beob.
434,07	6,58	6,06
656,29	6,38	5,91

Auch diese Übereinstimmung ist noch angängig.

Überzeugend wird die Gültigkeit von (5) durch Berechnung des Brechungsexponenten für Ätherdampf bei 0° und 1 Atm. (Dichte 0,00332) und $\lambda = 589\,\mu\mu$ aus dem für flüssigen Äther gültigen Werte $\frac{m^2-1}{m^2+2}\frac{1}{D} = 0{,}3028$ (siehe Tabelle II) nachgewiesen. Es ergibt sich $m = 1{,}00151$, während Lorenz[1]) $m = 1{,}00152$ gemessen hat.

1) K. Bädeker, siehe Landolt-Börnstein, 4. Aufl. S. 1220.
2) Siehe Landolt-Börnstein, 4. Aufl. S. 1024.

Schließlich wollen wir noch einige molekulare Konstanten berechnen.

Mit $N_0 = 6{,}07\cdot 10^{23}$; $R = 8{,}315\cdot 10^7$; $M = 74{,}08$ folgt aus (3) $\mu N_0 = 8{,}730\cdot 10^5$; $\mu = 1{,}435\cdot 10^{-18}$; $g = 8{,}626\cdot 10^{-24}$.

Aus (2) ergibt sich ferner für 0° Celsius das wahrscheinlichste elektrische Molekularfeld $E_0 = 4{,}485\cdot 10^4$ elektrostatische Einheiten und für den Molekulardurchmesser $s = 33{,}9\cdot 10^{-9}$ cm in verhältnismäßiger guter Übereinstimmung mit dem aus der kinetischen Gastheorie folgenden Wert[2]) $s = 44\cdot 10^{-9}$ cm, wenn man die Verschiedenheit der Definition des Molekulardurchmessers in Rücksicht zieht.

Es wäre wichtig, die elektrische und ultrarote Dispersion mit unserer Theorie zu vergleichen, weil daraus das Trägheitsmoment der Molekel zu berechnen wäre. Auch wäre die Ermittlung des elektrischen Kerreffekts in seiner Temperaturabhängigkeit interessant, weil seine Existenz auf anisotrope Bindungen hinwiese und damit den Weg zeigte, in welcher Richtung unsere Theorie noch geändert werden müßte, um auch diese Erscheinung zu umfassen und damit die Konstitution der Molekel noch genauer anzugeben[3]).

Demnächst sollen die Messungen an anderen Stoffen mitgeteilt werden.

1) Siehe Landolt-Börnstein, 4. Aufl. S. 1018.
2) Siehe Landolt-Börnstein, 4. Aufl. S. 141.
3) Die Depolarisation des Tyndall-Lichts, das von Ätherdampf ausgesandt wird, beweist schon eine solche anisotrope Bindung; siehe meine Annalenarbeit über die Asymmetrie von Gasmolekeln.

La Plata, Instituto de Fisica, 5. Dez. 1920.

(Eingegangen 7. Februar 1921.)

Schwere und Trägheit.

Von Ernst Reichenbächer.

I. Gegen die Einsteinsche verallgemeinerte Relativitätstheorie sind sehr viele Einwände erhoben worden, von denen sich manche nicht ohne weiteres von der Hand weisen lassen. Da nun Einstein auf diese Theorie seine Lehre von der Gravitation gründet, die, wenn sie richtig ist, den tiefsten Einblick in das Wesen der Dinge gewährt, hielt ich es für wünschenswert, die Gravitationstheorie unabhängig von der Relativität zu machen, und warf daher in einer Zuschrift[1]) an die Herausgeber der „Naturwissenschaften" die Frage auf: Inwiefern läßt sich die moderne Gravitationstheorie ohne die Relativität begründen? In seiner Antwort[1]) auf diese meine Betrachtung geht Herr Prof. Einstein leider nur wenig auf den von mir erhobenen und meiner Ansicht nach entscheidenden Einwand ein, daß von der Materie unabhängige Gravitationsfelder unmöglich sind. Er betont zwar an einer Stelle, daß das $g_{\mu\nu}$-Feld von allen Massen der Welt zusammen bestimmt und erzeugt würde, fügt aber hinzu, daß dies Feld verschieden ausfällt je nach dem Weltkörper (vielmehr nach dessen — relativem — Bewegungszustand), von dem es aus beurteilt wird.

Hiermit wird aber ein von den erzeugenden Massen unabhängiges Moment eingeführt, und die Folgerung, daß es annähernd und auch völlig massenunabhängige Gravitationsfelder geben müßte, ist unvermeidlich. Letzterer, der krasseste, Fall tritt z. B. ein, wenn man, wie Herr Einstein es in seiner großen Annalenarbeit[2]) tut, ein Gravitationsfeld durch bloße Koordinatentransformation (in der ungestörten Minkowskischen Raumzeitmannigfaltigkeit) „erzeugt", also unter anderen bei der Deutung des Bezugssystems eines gleichmäßig beschleunigten Körpers als Gravitationsfeld oder bei dem von Herrn Kottler[3]) durchgeführten Beispiel des sogenannten Gravitationsdrehfeldes im Innern einer gleichförmig sich drehenden homogenen Hohlkugel. Der erste Fall mit seinen schlimmen Folgen für sehr große[4]) Abstände ist aber im Außengebiet einer solchen Hohl-(oder Voll-)Kugel verwirklicht, wobei man wieder für den Grenzfall, daß die Masse dieser Kugel unendlich klein wird, zu völlig massenunabhängigen Feldern kommt.

Damit dies vermieden wird, muß das Schwerefeld von der bloßen Koordinaten-Transformation unabhängig gemacht werden. Dann ist es natürlich nicht im Einsteinschen Sinne durch die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors zu beschreiben[1]), denn es würde durch sie überbestimmt sein. Wodurch ist aber dann das Schwerefeld gegeben? Die Antwort darauf hat auf die Tatsachen Rücksicht zu nehmen, daß — aktiv betrachtet — seine Wirkungen an erzeugende Massen gebunden und passiv gesehen — „unabhängig von Material und Zustand der beeinflußten Körper sind". Letzterer trägt Herr Einstein durch das Äquivalenzprinzip Rechnung; erstere übersieht er und benennt daher, über Newton hinausgehend, mit dem Ausdruck Schwerewirkungen auch etwas, was wir bisher nur als Trägheitserscheinungen zu bezeichnen gewohnt waren.

Man wird aber der ersten Forderung gerecht durch die Annahme einer von den schweren Massen ausgehenden und an sie gebundenen durchgreifenden Änderung der geometrischen Verhältnisse der vierdimensionalen Welt, einer Änderung, die ich Verzerrung genannt habe, und die ohne die Massen nicht vorhanden wäre, so daß die Welt rein Minkowskisch sein würde. In diese Minkowskiwelt kann man nun schrittweise die Verzerrung durch die einzelnen Massen nacheinander nach vorgeschriebenen (allerdings in engen Grenzen noch näher zu bestimmenden) Gesetzen einführen, wie ich das in meinen Arbeiten getan habe.

Auf dieser Verzerrung der Minkowskischen Raumzeitmannigfaltigkeit durch die schweren Massen beruht allein das Wesen der Gravitation. Die Verzerrung ist durchaus nötig; daher die Aussichtslosigkeit aller anfänglich unternommenen Versuche, die Gravitation in die Minkowskiwelt hineinzuarbeiten. Dem widerspricht auch nicht, daß in dem besonderen Falle des homogenen Gravitationsfeldes die Verzerrung so ausfällt, daß die verzerrte Raumzeitmannigfaltigkeit auf die Minkowskische[2]) abgebildet werden kann, indem nun dem System eines im Gravitationsfeld ruhenden Punktes das eines gleichmäßig beschleunigten entspricht[3]).

1) Naturwiss. 8, Heft 51, S. 1008 u. 1010, 1920.

2) Ann. d. Phys. 49, 773, 1916.

3) Ann. d. Phys. 56, 457, 1918.

4) Ich vermeide den Ausdruck unendliche, weil man mit Herrn Einstein deren Vorhandensein aus kosmologischen Gründen bestreiten kann, wiewohl eine zulängliche Gravitationstheorie auch alle nur logisch möglichen Verhältnisse, d. h. also den unserer Vorstellung doch am nächsten liegenden unendlichen Raum mit umfassen müßte.

1) Damit ist zugleich Herrn Einsteins Zweifel über meine Stellung zur allgemeinen Relativitätstheorie beseitigt.

2) Richtiger: nur auf einen Teil von ihr; das Feld der gleichmäßigen Beschleunigung kann nicht die ganze Welt umfassen.

3) Darauf, daß dies Gravitationsfeld wahrscheinlich nirgends und niemals rein verwirklicht ist, ist selbstverständlich geringer Wert zu legen, da eine zulängliche Theorie auch alle nur denkmöglichen Fälle mit umfassen

Daß in diesem Falle die Äquivalenz von Schwere und Trägheit herauskommt, ist gewiß ein schönes Ergebnis und wird von mir durchaus anerkannt; aber mit dem so gewonnenen Äquivalenzprinzip kommt man meines Erachtens nicht weiter. Äquivalenz (Gleichwertigkeit) ist nicht Identität (Wesensgleichheit). Das Äquivalenzprinzip führt nicht weiter als bis zur Erkenntnis der Tatsache, daß das Schwerefeld genau wie das Trägheitssystem irgendwie allein durch die Komponenten des Fundamentaltensors (oder, um Mißdeutungen vorzubeugen, durch die vierdimensionale Geometrie der — absolut zu setzenden — Raumzeitmannigfaltigkeit) zu bestimmen sei, damit „die Schwerebeschleunigung unabhängig von Material und Zustand der durch die Schwerkraft beeinflußten Körper ist“[1]). Damit ist aber noch nicht gesagt, daß die Art und Weise dieser Bestimmung für Trägheits- und Schwerefelder dieselbe sei. Hier besteht vielmehr der grundlegende Unterschied, daß erstere durch eine Transformation innerhalb einer veränderlichen Raumzeitmannigfaltigkeit, letztere durch deren Verzerrung gegeben werden.

Ich will jetzt einmal von der Kritik absehen, die Kottler in seinen von mir angeführten Arbeiten[2]) an dem Äquivalenzbegriff geübt hat, indem er zeigte, daß bei strenger Durchführung der von der gleichförmigen Bewegung her bekannten Transformation dem Felde der gleichmäßigen Beschleunigung nicht ein Gravitationsfeld äquivalent ist, wie es aus Einsteins kugelsymmetrischem sich durch Übergang auf unendlich große Entfernungen (bei gleichzeitig ins Unendliche wachsender Masse) ergibt, sondern ein anderes, das (in endlichem Abstand) nur die halbe Perihelwanderung zuläßt. Dagegen halte ich den Sprung für bedenklich, das Äquivalenzprinzip durch ein Identitätsprinzip zu ersetzen und dies dann auf den Fall des allgemeinen Gravitationsfeldes auszudehnen. Wenn Herr Einstein nicht mehr für erforderlich hält, als daß man berechtigt ist, das mechanische Verhalten eines materiellen Punktes in einem Augenblick nach Willkür (je nach Wahl des Bezugssystems) auf Schwere oder auf Trägheit zurückzuführen, so liegt doch die Frage nahe: Wie sieht das Trägheitsfeld aus, das das Schwerefeld eines Massenpunktes ersetzt, und wie das Schwerefeld, das der gleichförmigen Umdrehung entspricht[1])? Meines Erachtens gibt es weder das eine, noch das andere, das erstere schon deswegen nicht, weil das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nicht mehr Minkowskisch ist. Die Notwendigkeit, das „Bezugssystem“ der beschleunigten Bewegung, das diesem Schwerefelde gleichen soll, von Augenblick zu Augenblick ändern zu müssen, da es ihm ja nur „in einem Augenblick“ äquivalent sein kann, wird wohl nicht nur mir als Zwang erscheinen. Weshalb begnügt man sich denn nicht mit dem Bezugssystem der speziellen Relativitätstheorie, das ja auch in einem Augenblick das mechanische Verhalten des materiellen Punktes wiedergibt? Nun, weil das der beschleunigten Bewegung um eine Ordnung genauer sich anschmiegt; es entspricht dem Schwerefelde wie in einem geometrischen Bilde der Krümmungskreis und nicht nur die Tangente einer Kurve.

Aber damit kann doch Einsteins grundlegender Satz, daß die Komponenten des Fundamentaltensors das Gravitationsfeld beschreiben, nicht ausreichend begründet werden. Daß ich diesen Satz überhaupt für anfechtbar halte, habe ich schon gesagt; besonders verwerfe ich die Fassung[2]), daß man ein Gravitationsfeld durch bloße Änderung des Koordinatensystems „erzeugen“ kann. Herr Einstein wendet diese da auf das Bezugssystem der gleichmäßigen Beschleunigung an, wobei aber wieder die „reale“ Existenz des Gravitationsfeldes die Streitfrage ist. Die Überzeugung von dessen Realität kann selbstverständlich nicht daraus gewonnen werden, daß es irgendwie aufgestellten Feldgleichungen genügt; umgekehrt muß deren Brauchbarkeit danach beurteilt werden, ob sie den Unterschied zwischen „realen“ und „fiktiven“ Feldern nicht verwischen. Das Merkmal der Unterscheidung dieser Felder liegt eben allein darin, ob sie von schweren Massen erzeugt werden; dies trifft aber für das System der künstlich hervorgerufenen Beschleunigung nicht zu.

Ich will aber noch ein anderes Beispiel anführen. Bei Abwesenheit der Gravitation gilt das System der gewöhnlichen Relativitätstheorie mit konstanten Komponenten des Fundamentaltensors, die natürlich auf die kanonische Form $g_{\mu\mu} = \pm 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ gebracht werden können, d. h. also räumliche und zeitliche Parameterlinien sind in jedem Punkte aufeinander senkrechte Gerade. Jetzt ändert man das Koordinatensystem, indem man im Raum etwa Polar- oder Zylinderkoordinaten einführt; heißt denn das auch ein Gravitationsfeld erzeugen?

muß. Schwerer wiegt für diese grundsätzliche Untersuchung schon der Umstand, daß das homogene Gravitationsfeld nur durch einen Grenzübergang zu unendlichen Massen und unendlichen Entfernungen erzeugt werden kann; doch soll auch darüber hinweggegangen werden.

1) Dieser Fassung gebe ich gern den Vorzug vor der unbestimmteren, die ich angewandt hatte.

2) Vgl. Naturwiss. **8**, Heft 51, S. 1008, 1920.

1) Auf das letztere Beispiel muß ich auch in dieser Arbeit noch eingehend zurückkommen.

2) Ann. d. Phys. **49**, 773, 1916.

Nach Herrn Einstein gewiß; es verschwinden ja auch die $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$, die Einsteinschen Komponenten des Gravitationsfeldes, nicht mehr sämtlich[1]).

Aber wenn wir uns auch auf diesen Einsteinschen Standpunkt stellen wollten, so ändert das doch nichts daran, daß die Bahn eines von allen anderen hinreichend entfernten Massenpunktes auch im neuen System eine gerade Linie bleibt, wenn ihre Gleichung sich auch nicht mehr linear in den neuen Koordinaten ausdrücken läßt. In Herrn Einsteins Formulierung des Galileischen Trägheitsgesetzes[2]) ist somit wenigstens der Zusatz, der sich auf das passend bewegte Koordinatensystem bezieht, überflüssig — oder Herr Einstein verbindet mit dem Worte „geradlinig" einen anderen Begriff als der Sprachgebrauch, wonach wir unter „Geraden" die kürzesten oder geodätischen Linien unseres Raumes verstehen, den wir so lange als vollkommen euklidisch ansehen werden, bis uns Beobachtungen oder theoretische Schlüsse zu — immerhin äußerst geringen — Abweichungen zwingen.

Nun könnte man ja die Einsteinsche Auffassung dadurch stützen, daß man sagt: der Benutzer des krummlinigen Koordinatensystems gebraucht seine Parameterlinien, als ob sie Gerade wären, und stellt dann natürlich Abweichungen vom Galileischen Trägheitsgesetz fest, die er als Gravitationskräfte deutet[3]). Damit aber nimmt Einstein, wie gesagt, Gravitationswirkungen an, die von erzeugenden Massen völlig unabhängig sind, und erweitert demnach den Begriff der Schwere in einem den üblichen Sprachgebrauch weit übersteigenden Maße. Innerhalb der Gesamtheit der Einsteinschen Gravitationswirkungen kann man nun diejenigen auswählen, die von Massen erzeugt sind, und kommt damit zu denen, die ich in Übereinstimmung mit der bisherigen Gewöhnung allein als Gravitation bezeichne[1]). Das sind dann diejenigen, die ich „real" nenne im Gegensatz zu den übrigen, die für mich „fiktiv" sind.

Da der Umstand der Verknüpfung der Schwerefelder mit Massen, die eine Verzerrung der Minkowskiwelt bewirken, für mich das entscheidende Kriterium ist, behaupte ich, daß eine Verwechselung von Schwere- und Beschleunigungsfeldern nur möglich ist, wenn wir nicht sämtliche Erfahrungen, die uns auf physikalischem Gebiete zur Verfügung stehen, insbesondere elektromagnetische (Licht-)Wirkungen. verwerten. Diese belehren uns darüber, ob die eine oder die andere Art Feld vorliegt (ganz abgesehen davon, daß beide Arten meist nur bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen können) und zeigen uns insbesondere im Makrokosmos, daß wir es dort ausnahmslos mit Schwerefeldern zu tun haben, schließen also das Seil am Einsteinschen Kasten aus.

Andererseits aber lehrt uns die Einsicht der Unvollkommenheit unserer Erfahrung, daß wir die Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit nicht völlig kennen (geschweige denn analytisch formulieren können), und deshalb können wir kein Koordinatensystem angeben, in dem die Feldgleichungen besonders einfach würden; deshalb und nur deshalb sind wir gezwungen, für sie die allgemein kovariante Gestalt zu wählen. Ganz abgesehen davon, daß diese den Gesetzen eine elegante Einkleidung gibt, könnte auch die Vereinfachung in einem bevorzugten System, etwa in einem solchen[2]), in dem alle Massen ruhen, nur gering sein, indem nämlich die gemischt zeiträumlichen Komponenten des Fundamentaltensors verschwinden würden. Abstrahiert man aber auf besonders einfache Fälle wie das Feld eines Massenpunktes, so können in den diesen angepaßten Systemen[3]) (hier räumliche

1) Um diese, der gebräuchlichen Auffassung vom Wesen der Schwere gerade zuwiderlaufende Folgerung zu vermeiden, hatte ich ja den Fundamentaltensor, der von der Wahl des Koordinatensystems wesentlich abhängt, als Gravitationspotential von vornherein abgelehnt und durch einen mit der Lichtgeschwindigkeit zusammenhängenden Skalar ersetzt. (Vgl. meine Arbeiten in den Ann. d. Phys. **52**, 134, 1917 und **61**, 1, 1920.) — Weil Herr Einstein bei der Wahl eines räumlichen Polarkoordinatensystems das Vorhandensein eines „Gravitations"-Feldes annehmen muß, rechnet er auch für den kugelsymmetrischen Fall nicht mit diesem, sondern mit dem der Aufgabe weniger angepaßten kartesischen System und erschwert sich so die Rechnung.

2) Wegen der Unmöglichkeit der unmittelbaren Vergleichung zweier Zeitspannen ist selbstverständlich die Zeitdefinition und daher auch die Zeitmessung an sich beliebig; die Galileische Formulierung entspricht aber dem Grundsatz der größten Einfachheit.

3) Tatsächlich verfahren wir in den realen, d. h. massenerzeugten, Gravitationsfeldern nicht anders.

1) Herr Einstein sagt ja selbst: Die Trägheit ist eine Wechselwirkung zwischen den Massen der Welt wie diejenigen Wirkungen, welche die Newtonsche Theorie als Gravitationswirkungen betrachtet. Damit gibt er doch die Unterscheidungsmöglichkeit beider Arten von Wirkungen zu.

2) Ein solches System ist möglich, da die Menge aller Massen endlich oder abzählbar unendlich ist, ihre — irgendwie beliebig vorauszusetzenden — Weltlinien also (selbst wieder auf unendlich viele Weise) Scharen von orthogonalen Trajektorien-Räumen zulassen. Die Kenntnis dieses Systems — die elektromagnetischen Wirkungen mögen hier zunächst unberücksichtigt bleiben — würde aber wenigstens die Kenntnis eines solchen Raumes voraussetzen; denn es ist ein Gaußsches System (vgl. Hilbert, Gött. Ber. 1917, S. 58); d. h. wir müßten mit Du Bois Reymond wenigstens in einem Augenblicke die Verteilung und den Bewegungszustand sämtlicher Massen kennen, um Vergangenheit und Zukunft eindeutig festlegen zu können.

3) Vgl. Mies' vernunftgemäßes System. Ann. d. Phys. **62**, 46, 1920.

Polarkoordinaten und auf Ruhe der schweren Masse transformiert) die Feldgleichungen sich sehr vereinfachen.

Man könnte vielleicht meinen, der ganze Gegensatz zwischen der Einsteinschen Auffassung der Schwerkraft und der meinigen liefe auf einen Streit um Worte hinaus, da wir die durch bloße Koordinatentransformation hervorgerufenen, also massenunabhängigen, Felder anders bezeichnen. Einstein nennt sie eben auch Gravitationsfelder, ich nur Beschleunigungsfelder oder Trägheitssysteme. Aber mir möchte scheinen, daß man damit doch dem Wesen dieses Gegensatzes nicht gerecht wird; denn, wenn nach meiner Auffassung diese Felder keine Gravitationsfelder sind, so kann auch die Einsteinsche Theorie, die die Komponenten des Fundamentaltensors, die sich schon bei der bloßen Transformation ändern, als Potentiale der Gravitation setzt, nicht richtig sein, sondern man muß sich nach einer andern umsehen, bei der die Gravitationsvektoren von der Transformation unberührt bleiben[1]).

II. Während man sonst der Einsteinschen Theorie das Zugeständnis eines geschlossenen, in sich widerspruchsfreien Systems machen muß, wenn man sie auch wegen ihrer Vermischung des Unterschiedes zwischen Trägheit und Schwere aus den angeführten Gründen nicht anerkennen kann, ist dies nicht mehr der Fall bei seiner Behandlung der gleichförmigen Umdrehung. Dabei ist er in den Fehler verfallen, die ältere Theorie der Relativität — ich will sie einmal die Machsche nennen — mit seiner eigenen zu vermengen. Jene kann man aus dieser erhalten, wenn man die Konstante c, die bei Einstein gleich der Lichtgeschwindigkeit wird, unendlich groß annimmt. Dann und nur dann ist es nämlich in Einsteins Beispiel der beiden in bezug aufeinander rotierenden Körper S_1 und S_2 möglich, von einem Raume R_2 zu sprechen, in welchem der Körper S_2, der im Ruhraum R_1 des Körpers S_1 sich dreht, in Ruhe ist. Alle Punkte jenes Raumes R_2 müßte man doch gegenüber dem Raum R_1 als in gleichförmiger Umdrehung mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine beiden Räumen gemeinsame Achse begriffen ansehen. Dann aber werden ihre Weltlinien, von R_1 aus beurteilt[2]) zu Schraubenlinien gleicher Ganghöhe, und ihre Schar entbehrt der orthogonalen Trajektorien, d. h. der Ruhräume.

Herr Einstein empfindet selbst das Peinliche dieses Rotationssystems, indem er auf die Abhängigkeit der Ganggeschwindigkeit einer Uhr von dem Ort uud auf die Verschiedenheit des tangentialen und des radialen Maßstabes hinweist; aber den Hauptmangel dieses Systems, die Unmöglichkeit, die gemischt zeiträumlichen Komponenten des Fundamentaltensors außer in einzelnen Punkten zum Verschwinden zu bringen, übergeht er. Treten aber die g_{14}, g_{24}, g_{34} irgendwo auf, so bedeutet das doch, daß hier Bewegung herrscht, also dieser Raum nicht als Ruhraum angesehen werden kann. Die Schwierigkeit verschwindet erst bei unendlichem c (oder bei anderer Festsetzung des Gesetzes der Umdrehung, z. B. einer solchen mit gleicher Flächengeschwindigkeit, die aber hier nicht in Frage kommt), also für Mach, aber nicht für Einstein. Wenn Herr Einstein dies Beispiel zum Anlaß nimmt, um sich mit kühnem Sprung in das Gebiet der allgemeinen Kovarianz hinüberzuschwingen, so löst er nicht den Knoten, sondern durchhaut ihn.

Da Herr Einstein aber Wert darauf legt, nur immer Bezugskörper zu benutzen, so ist dazu zu sagen, daß auch der von ihm als starr vorausgesetzte Körper S_2 nicht existiert, selbst nicht der relativstarre Körper Borns, der bekanntlich nicht in Umdrehung gesetzt werden kann, Wir befinden uns in diesem Beispiel natürlich noch innerhalb des durch die spezielle Relativitätstheorie geschaffenen Minkowskikontinuums — Herr Einstein wollte ja in diesem Falle nur eine Transformation des Koordinatensystems vornehmen — und daher gelten auch alle auf Grund der speziellen Relativitätstheorie vorgebrachten Bedenken gegen den starren Körper, da diese natürlich von der Wahl des zeiträumlichen Koordinatensystems unabhängig sind. Man wird von selbst darauf geführt, für den rotierenden Körper unendlich viele Freiheitsgrade anzunehmen, d. h. jedem seiner Punkte freien Lauf zu lassen oder seine Starrheit völlig aufzulösen[1]).

1) Daß deren Komponenten dabei ein Potential zulassen müssen, ist damit nicht gesagt; ich halte es aber für das einfachste, ein solches, und zwar ein skalares, anzunehmen.

2) Übrigens sollte der Charakter der Weltlinien unabhängig vom Bezugssystem sein; Abhängigkeit besteht nur für die Bahnlinien, d. h. ihre Projektionen in eine räumliche Mannigfaltigkeit. Das vierdimensionale Kontinuum ist absolut.

1) Um die Machsche mit der Einsteinschen Relativitätstheorie zu versöhnen, müßte man schon so weit wie Herr Remy (Unsere Welt 1920, Heft 3) gehen uud die Absolutheit der Raumzeitmannigfaltigkeit leugnen. Was hat es dann aber für einen Sinn, von den $g_{\mu\nu}$, den Komponenten des Fundamentaltensors der geometrischen Maßbeziehungen zu sprechen, wenn es keine vom Bezugssystem unabhängige Mannigfaltigkeit mehr gibt, auf die sie sich beziehen? Ein solches Verfahren setzt an die Stelle des Kosmos das Chaos; es läuft im Grunde genommen darauf hinaus, krumm für gerade anzusehen, d. h. Linien, die die Eigenschaften der kürzesten nicht besitzen, diese zuzuschreiben. Das wäre nur durch eine Abänderung der Eichung, d. h. der relativen Maßzahl möglich und würde

Allerdings möchte ich das gleich wieder einschränken, da ja die spezielle Relativitätstheorie nicht genau, sondern nur angenähert gilt; denn jeder Körper verzerrt das Kontinuum durch sein Gravitationsfeld; das hat zur Folge, daß wir die Massenpunkte durch kleinste Teile endlicher Ausdehnung, Elektronen und H-Kerne (wenn diese sich wirklich als die kleinsten Unteilbaren herausstellen sollten) zu ersetzen haben. Zwar ist der Zusammenhang noch nicht klar gelegt; aber gerade der Einsteinsche Ansatz für das Feld eines Massen-„Punktes" gibt uns wenigstens einen Fingerzeig für die Richtung, in der wir zu suchen haben. Er zeigt uns nämlich, daß wir nicht bis in die Mitte der anziehenden Massen unsere Maßvorschrift fortsetzen können; ein sehr kleiner, aber immerhin endlicher Abstand α vom Mittelpunkt kann nicht unterschritten werden. Die nichteuklidische Geometrie in dem Ruhraum eines Massen-„Punktes" ist gerade von der Art, daß ein solcher Punkt gar nicht existiert, sondern durch eine Kugel von endlichem Halbmesser zu ersetzen ist. Jede Ebene durch den Mittelpunkt wird nämlich nach Einsteins Maßvorschrift zu einer Umdrehungsfläche, die von einer um ihre Leitlinie rotierenden Parabel erzeugt wird; eine solche Fläche hat einen Kehlkreis mit dem Halbmesser $\frac{p}{2} = \alpha$, und der Ruhraum eines gravitierenden Punktes ist demnach nach Einstein die Gesamtheit dieser Rotationsflächen, der eine Kehlkugel mit gleichem Halbmesser zukommt. Daß die Größe von α so sehr viel geringer als alle bisherigen Annahmen über den Elektronenradius (und auch den des H-Kerns) ist, rührt daher, daß bei obigen Betrachtungen nur die Gravitations-, nicht die viel stärkeren elektrischen Wirkungen berücksichtigt sind. Gelingt es, das kugelsymmetrische Feld für beide Wirkungen zu berechnen, wozu Ansätze in den Theorien von Weyl und mir gegeben sind, so ist es nicht unmöglich, auch größere Werte dieses Minimalabstandes α zu bekommen, der dann als der Radius der Elektronen oder der H-Kerne anzusehen wäre. Von einem „Inneren" dieser Gebilde zu sprechen, wäre dann selbstverständlich ebenso unmöglich wie bei den oben besprochenen Umdrehungsflächen von einem Inneren des Kehlkreises; eine Explosion dieser Elektronen usw. mit Poincaré zu befürchten oder Kräfte anzunehmen, die diese Explosion verhindern, ist überflüssig, da ein solches Gebilde völlig unteilbar, ein „Quasi-Punkt", ist, daher nicht in Teile zerlegt werden kann, die aufeinander eine Anziehung oder Abstoßung ausüben. Das tun diese Gebilde nur gegenseitig[1]).

Wenn nun aber der Machsche Standpunkt, auf den sich Einstein stellt und das rotierende System als völlig gleichberechtigt mit dem ruhenden oder gleichförmig fortschreitenden ansieht, unzulässig ist, so fragt es sich, in bezug worauf nun eigentlich diese Rotation stattfindet und nachzuweisen wäre. Man könnte zunächst sagen, das wäre zwar nicht der Newtonsche absolute Raum, wohl aber die als absolut zu setzende Raumzeitmannigfaltigkeit, das durch die Gravitation verzerrte Minkowskikontinuum, für das Mie[2]) die Bezeichnung Hilbertkontinuum eingeführt hat. Ich habe vorhin nachgewiesen, daß dessen Ableugnung äußerst bedenklich ist, will aber Herrn Einstein, der sich mit diesem Bezugsgebilde wohl kaum befreunden wird, entgegenkommen, zumal er hier auch den Standpunkt des Empirikers vertritt.

Herr Einstein schlägt als solche Körper ferne Massen vor, die so weit weg sich befinden, daß ihre Gravitationswirkungen zu vernachlässigen sind. Ich will über die Unklarheit hinweggehen, die darin liegt, diesen Körpern Einfluß zuzuschreiben, obwohl das von ihnen erzeugte Feld als quasi-konstant, d. h. Minkowskisch und gravitationsfrei, bezeichnet wird, und mich wieder darauf berufen, daß eine zulängliche Gravitationstheorie alle auch nur denkmöglichen Fälle umfassen muß. Ein solcher ist es doch aber — und wir wissen nicht, ob er nicht vielleicht zu irgendeiner Zeit verwirklicht war oder sein wird, zumal wenn man mit Einstein einen endlichen Raum annimmt — daß es solche ferne Massen gar nicht gibt, sondern die gesamte Materie sich zu einem einzigen Körper zusammengeballt hat, also eine ins Riesige vergrößerte Sonne darstellt[3]). Was nun?

nach den Arbeiten von Weyl (Ann. d. Phys. **59**, 101, 1919) und mir (ebenda **63**, 93 u. 115, 1920) einen Eingriff in das Gebiet des Elektromagnetismus bedeuten. Die spezielle Relativitätstheorie würde hinfällig werden und gerade in einem Augenblick verlassen werden, wo sie ihre schönsten Triumphe durch die Sommerfeldsche Erklärung der Feinstruktur der Spektren erlebt. Nur, wenn man die Absolutheit der Welt leugnet, kann man zu so ungeheuerlichen Werten der Lichtgeschwindigkeit wie die Anhänger der allgemeinen Relativität gelangen. Selbstverständlich halte auch ich an der völligen Konstanz dieser Geschwindigkeit nicht fest, da ja die Schwere sich in einer Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit äußert. Aber die Änderung hält sich, soweit wir wissen, in ganz engen Grenzen, wie aus der geringen Lichtstrahlkrümmung hervorgeht.

1) Vgl. meine Arbeit in den Ann. d. Phys. **52**, 134, 1917, sowie Erich Becher, Naturphilosophie (Kult. d. Gegenw. **3**, 7).

2) G. Mie, Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems usw. Ann. d. Phys. **62**, 46, 1920.

3) Der Einwand, der von astronomischer Seite hiergegen erhoben werden kann, daß solche Körper wegen des in ihrem Innern herrschenden Strahlungsdruckes keinen Bestand haben können, gehört nicht hierher, wo

Dreht sich diese Riesensonne oder tut sie es nicht? Die Antwort darauf würden etwaige auf ihrer Oberfläche lebende Wesen, wenn sie ganz genaue Messungen vornehmen könnten, auch ohne jeden fremden Bezugskörper geben können, genau wie die in meiner Betrachtung[1]) erwähnten Bewohner eines Planeten, denen ein unzerreißbarer Wolkenschleier immer den Anblick des Himmels verhüllt. Wie ist das nun aber möglich? Andere Körper, in bezug auf die die Umdrehung festgestellt werden könnte, gibt es nicht, und doch wäre es widersinnig zu behaupten, daß aus diesem Grunde die Oberflächengestalt, die nur von inneren Kräften beherrscht wird, unbestimmt würde, da es auch unbestimmt wäre, ob der Körper sich dreht oder nicht. Das Gedankenexperiment des isolierten Weltkörpers, dessen Zulässigkeit doch nicht gut bestritten werden kann, scheint demnach die allgemeine Relativität zu widerlegen.

Doch wäre dies vorschnell geschlossen; denn gerade die Überlegung, daß der Einsteinsche starre Bezugskörper bei der Rotation gar nicht bestehen kann, und daß es innere Kräfte sind, die die Oberflächengestalt beeinflussen und daher die Tatsache der Umdrehung feststellen lassen, führt darauf, die Bezugskörper im Innern der Masse, d. h. in ihren Atomen und Atomsystemen zu suchen. In Wirklichkeit handelt es sich gar nicht um einen Körper, sondern um eine Unmenge kleinster Teile, die alle ihr — annähernd — selbständiges Dasein führen, einander wohl beeinflussen, aber doch nur so weit, daß die Weltlinie eines jeden durch eine Differentialgleichung mindestens 2. Ordnung bestimmt wird, also noch wenigstens zwei Integrationskonstanten zuläßt. Selbstverständlich ist das Vielkörperproblem weit davon entfernt, analytisch lösbar zu sein; soviel ist aber sicher, daß die Einzelteile, wenn man sie so kurze Zeit betrachtet, daß sie sich nicht gegenseitig stören, den Trägheitsgesetzen unterworfen sind. Also wird ein einzelnes ein geradliniges Bahnstück mit gleichbleibender Geschwindigkeit zurücklegen, zwei werden umeinander rotieren, aber mit Erhaltung der Bahnebene im Raum usw. Man müßte also die Körper, in bezug auf welche die Umdrehung des Ganzen, die grundsätzlich ohne Zweifel festgestellt werden könnte, erfolgt, in dessen eigener Atomistik suchen. Das ist auch insofern befriedigend, als es nur die zwischen den einzelnen Atomen — das Wort im eigentlichen, nicht im konventionellen Sinne gebraucht — bestehenden Kräfte sind, die die Oberfläche des Ganzen beeinflussen.

es sich um eine alleinige Theorie der Gravitation und die dabei denkmöglichen Fälle handelt.

1) Naturwiss. 8, Heft 51, S. 1008, 1920.

Nun könnte man aber das Gedankenexperiment noch weiter treiben und die Frage aufwerfen: Wie verhält sich ein wirklich unteilbares Körperchen, etwa ein Elektron, das allein im Weltall vorhanden ist?

Ehe ich aber so weit gehe, will ich den nächst einfachen Fall, den der 2 Körper besprechen. Dabei will ich, weil wir sonst die Sachlage analytisch nicht beherrschen, von elektrischen Ladungen dieser Körper und auch von der schweren Masse des einen absehen, also das Problem des völlig isolierten Sonne-Planet-Systems behandeln. Die Lösung der Feldgleichungen der Gravitation ergibt dann, daß zwar die Weltlinie des Planeten eine geodätische Linie im vierdimensionalen Gebiet darstellt, dasselbe aber nicht von seiner Bahnlinie, d. h. der Projektion der Weltlinie auf den Ruhraum der Sonne, in diesem gilt. Sie wird vielmehr annähernd ein Kegelschnitt, insbesondere, wenn geschlossen, eine Ellipse mit Perihelwanderung, was im Ruhraum der Sonne als Umlauf des Planeten um diese gedeutet werden muß, so daß also Kopernikus allein und nicht auch Ptolemäus recht behält. Ja, aber im Ruhraum des Planeten? Nun, wie will man diesen eigentlich definieren? Vielleicht so, daß man auf der im Ruhsystem der Sonne bekannten Weltlinie des Planeten in jedem Punkte die orthogonalen Geodäten errichtet und so die einzelnen auf der Weltlinie aufgereihten Ruhräume erhält[1]). Die Projektion der geraden Weltlinie der Sonne auf diese Ruhräume wäre aber keineswegs eine um den Planeten als Brennpunkt gelegte Ellipse oder ähnliches, wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Welt durch die Minkowskische und die Weltlinie des Planeten durch eine Schraubenlinie gleichbleibender Krümmung annähert. Bei Einführung der Masse des Planeten wird das zwar anders, läßt sich aber wegen der analytischen Schwierigkeiten noch nicht völlig übersehen; immerhin würde die Bahnkurve der Sonne im Ruhraum des Planeten auch dann weit davon entfernt sein, eine Ellipse um diesen Körper darzustellen, wenn letzterer nicht etwa eine der Sonne fast gleichkommende Masse besitzt. Also ist es nichts mit Ptolemäus, dessen System eben den durch die Massenverteilung gegebenen Geodäten der Raumzeitmannigfaltigkeit keine Rechnung trägt. Was man gewöhnlich als Ruhsystem des Planeten bezeichnet, beruht auf einer Täuschung über die Massenverhältnisse.

1) Ein solches Verfahren müßte man einschlagen, wenn man auch die Masse des Planeten berücksichtigen will; man sieht an den verwickelten Transformationsformeln, welche Schwierigkeit schon das Zweikörperproblem bei der verfeinerten Auffassung der Gravitation bereitet.



Erst wenn wir den letzten Schritt tun und in der sonst völlig verödeten Welt ein einziges Elektron oder einen einzigen unteilbaren Atomkern annehmen, besteht die Behauptung der Relativitätstheoretiker, daß wir uns diesen in beliebiger Bewegung begriffen denken können, zu Recht. Trotzdem könnte ich natürlich an dies Körperchen ein Bezugssystem anschließen, in dem es ruht oder mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich bewegt, wodurch man Raum und Zeit „definieren" könnte; ein solches System würde ja auch dem Charakter der Raumzeitmannigfaltigkeit sich dadurch am besten anpassen, daß es so weit wie möglich geodätische Parameterlinien benutzt. Das geht uns hier aber nur mittelbar an. Wichtig dagegen ist, daß eine Umdrehung dieses Körperchens an sich völlig belanglos ist; denn es ist, wie gesagt, eines Massenpunktes Vertreter, der nur durch die Verknüpfung von Elektromagnetismus und Gravitation von endlicher Ausdehnung geworden ist. Ebensowenig wie ein rotierender Punkt etwas anderes ist als ein ruhender, gilt dies auch vom Elektron; es hat ja keine inneren Kräfte, genau genommen gar kein Inneres. An dies Körperchen ein Rotationssystem anschließen zu wollen, ist also unsinnig; wohl aber läßt es solche Systeme zu, die ihm eine beliebige fortschreitende Bewegung zuschreiben, von denen das Ruhsystem das einfachste ist.

Hiermit sind wir an der Grenze der Abstraktion angekommen; noch einen Schritt weiter, denken wir uns also auch das letzte Elektron weg, dann geraten wir ins Nichts.

Die Rotation hat sich also in jedem Falle, wo dieses Wort einen Sinn zuläßt, wenigstens grundsätzlich als absolute Bewegung erwiesen. An ihr allein schon würde die allgemeine Relativitätstheorie scheitern, wenn nicht, wie im ersten Teil nachgewiesen, die aus ihr hergeleitete Gravitationslehre Einsteins schon an sich mit dem Mangel der Verwischung des Unterschiedes zwischen Schwere und Trägheit behaftet wäre.

III. Soeben nach Fertigstellung dieser Arbeit kommt mir die Kopffsche Abhandlung: „Das Rotationsproblem in der Relativitätstheorie"[1]) zu Gesicht. Diese stellt bei richtiger Würdigung der Tatsachen eine Bestätigung meiner Ausführungen dar, wenn auch der Herr Verf. glaubt, zu einem anderen Ergebnis kommen zu müssen. Ich werde dies im folgenden nachzuweisen haben.

Zunächst zeigt die Arbeit ganz in meinem Sinne die Undurchführbarkeit der allgemeinen Relativitätstheorie bei der Zugrundelegung der vom Verf. so genannten Einsteinschen Gravitationsgleichungen I. Art $G_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}$[1]) (auf Grund der Thirringschen Lösung des Rotationsproblems; die vom Verf. nicht angeführte, davon abweichende Kottlersche Lösung[2]) führt zu denselben Folgerungen).

Nun glaubt der Verf. das Relativitätsprinzip retten zu können, dadurch daß er diese Gleichungen I. Art verwirft und an ihre Stelle die II. Art: $G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}$[3]) setzt, zu denen Einstein nur aus kosmologischen Rücksichten gekommen war und die ihn selbst nicht als durch unser Wissen von der Gravitation gerechtfertigt erschienen[4]). Muß es schon auffallen, daß die Relativitätstheorie nicht von dem besonderen Ansatz für die Feldgleichungen unabhängig ist und übrigens gerade bei demjenigen scheitert, der ein Minimum von Willkür darstellt, so wird es sich bald herausstellen, daß auch der Rettungsversuch des Herrn Kopff unzulänglich ist.

Zunächst enthält der vom Verf. an die Spitze dieses Versuchs gestellte Satz, daß die $g_{\mu\nu}$ bei dem abgeänderten Ansatz ausschließlich durch die Materie des Weltalls bedingt werden im Gegensatz zu denen der ersten Annahme, eine Unrichtigkeit, die nur auf Unklarheit in der Auffassung der „Bedingtheit" zurückgeführt werden kann. Denn gesetzt den Fall, wir hätten eine Lösung für die $g_{\mu\nu}$ ermittelt, die also allein von den Massen abhängen soll, so können wir sie ja doch durch eine ganz beliebige von diesen Massen unabhängige Transformation wieder ändern. Das gilt offenbar nicht nur für Einsteins Ansatz I. Art, sondern auch für den II. Art, natürlich ebenso für jeden anderen beliebigen Ansatz der Feldgleichungen. Darin liegt ja gerade das „Erzeugen" des sogenannten Gravitationsfeldes durch bloße Koordinatentransformation, von dem Herr Einstein spricht, während Herr Kopff sich des vorsichtigeren, aber unklaren Ausdruckes: „Aus-

1) Naturwiss. 9, Heft 1, S. 9, 1921.

1) $S_{\mu\nu}$ ist der Materietensor $-\varkappa\,(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$.

2) Ann. d. Phys. 56, 401, 1918.

3) Da ich gewöhnt bin, in dem Ansatz für das Linienelementquadrat die Realitätsverhältnisse gerade umgekehrt wie Herr Einstein zu bezeichnen, indem ich räumliche ds reell, zeitliche imaginär nenne, haben meine $g_{\mu\nu}$ das entgegengesetzte Zeichen wie bei Herrn Einstein; in den Komponenten $G_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors hebt sich das dagegen wieder auf; so muß ich der Konstanten λ das entgegengesetzte Zeichen geben, um mit Herrn Einstein in der Sache übereinzustimmen.

4) Der von Herrn Einstein beklagte Mangel ist ja durch die Weylsche Theorie (Ann. d. Phys. 59, 101, 1919) behoben worden; aber erstens hält Weyl selbst seinen Ansatz nicht für den glücklichsten, und zweitens, was wohl wesentlicher ist, zerstört er die Eleganz seiner Gleichungen dadurch, daß er sich von vornherein auf einen konstanten Krümmungsskalar $-F = \alpha$ festlegt. Übrigens kommt bei Weyl wesentlich der Elektromagnetismus ins Spiel, von dem in der Einsteinschen Gravitationstheorie so gut wie gar nicht die Rede ist.

lösen der Gravitationskräfte“ bedient. Auch dieser Ausdruck scheint mir völlig unangemessen. Mit nichts verbinden wir wohl so sehr und meiner Überzeugung nach mit vollstem Recht den Begriff des Unbeeinflußbaren wie mit der Materie und der ihr anhaftenden Gravitation; dem schlägt aber das Wort „Auslösen“ gerade ins Gesicht. Selbstverständlich bedeutet es nichts anderes, als daß durch bloße Transformation der Koordinaten Gravitationsfelder erzeugt werden können, während ich wiederhole, daß sie nur durch die Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit infolge der in ihr befindlichen Materie gegeben sind und von Ewigkeit zu Ewigkeit, jedem menschlichen Eingriff entzogen, dauern. Wohl können wir durch Änderung des Bezugssystems von der Masse und von dem Schwerefeld ein anderes Bild bekommen, indem sie sich in das System anders projizieren, aber erzeugen und wegtransformieren lassen sie sich nicht. Weil die auf der allgemeinen Relativitätstheorie beruhende Einsteinsche Gravitationstheorie dies behauptet, wird sie dem Wesen der Schwere, die sie mit der Trägheit vermengt, nicht gerecht, und der Versuch Kopffs, die notwendige Verbindung der Gravitation mit der Materie zu retten, ist, weil im Rahmen der Einsteinschen Theorie unternommen, von vornherein zum Scheitern verurteilt. Daran kann auch der neue und ein etwaiger anderer Ansatz für die Feldgleichungen nichts ändern.

Wegen der Wichtigkeit der Sache aber lohnt es sich, auf die Darlegungen Herrn Kopffs im einzelnen näher einzugehen, Der springende Punkt in seiner Beweisführung ist der: Bei Annahme der Feldgleichungen I. Art könnte man (logisch) Rotationsfelder konstruieren, auch wenn man zu dem jedenfalls denkmöglichen Falle übergeht, daß alle Massen der Welt verschwinden[1]). Setzt man dagegen die Feldgleichungen II. Art an, so ist es ausgeschlossen, daß die Massen der Welt verschwinden; denn dann verschwindet auch der Radius des gekrümmten Raumes, der sich auf einen Punkt reduziert. Das ist aber voreilig geschlossen; dazu bedarf es ganz wesentlich der weiteren Annahme, daß die Massen in der Welt gleichmäßig verteilt sind, weil sonst die von Einstein in seinen kosmologischen Betrachtungen abgeleiteten Formeln nicht gelten. Ich bin allerdings der Ansicht, daß es genügt, zu fordern, daß es im Weltall kein einigermaßen ausgedehntes (d. h. bei Annahme eines endlichen Raumes mit dem gesamten Universum in der Größenordnung vergleichbares) Gebiet gibt, das ganz massenlos wäre. Wie weit das in Wirklichkeit zutrifft, soll später untersucht werden; jetzt genügt es, darauf hinzuweisen, daß mit dieser für die Schlüsse des Verf. notwendigen Voraussetzung seine Behauptung identisch ist, daß die Gesamtmasse der Welt nicht verschwinden könne. Dann muß es selbstverständlich immer ferne Körper geben, die als Bezugskörper gewählt werden können. Damit wäre zwar die Relativitätstheorie noch nicht gerettet; wie sich nachher herausstellen wird; aber die Klippe, an der sie unter der Herrschaft der Einsteinschen Gleichungen I. Art gescheitert ist, wäre vermieden. Aber, wie gesagt, nur deshalb, weil man ausdrücklich fordern muß, daß stets ferne Körper existieren.

Deren Vorhandensein ist nicht etwa durch die Feldgleichungen II. Art gegeben. An sich sind diese auch lösbar, wenn ihre rechte Seite, d. h. der Einsteinsche Materietensor, verschwindet. Setzt man nämlich für den einfachsten Fall, das Feld eines Massenpunktes im sphärischen Raume mit dem Radius R, das Linienelementarquadrat diesem Raum entsprechend an:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = g_{00}\, dx^{0\,2} + g_{11}\, dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R}\, d\varphi^2 + \\ + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi\, d\vartheta^2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so erhält man als Lösung der Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0: \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} g^{00} G_{00} &= \frac{1}{2} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} (g_{00} g_{11})^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \frac{d \lg g_{00}}{dr} \right], \\ g^{11} G_{11} &= g^{00} G_{00} - \frac{1}{R g_{11}} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} \left[\frac{d \lg (g_{00} g_{11})}{dr} + \frac{2}{R} \operatorname{tg} \frac{r}{R} \right], \\ g^{22} G_{22} &= g^{33} G_{33} = R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} \left[\frac{1}{g_{11}} \cos \frac{2r}{R} - 1 \right] + \frac{1}{2 R g_{11}} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} \cdot \frac{d \lg \frac{g_{00}}{g_{11}}}{dr}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese sämtlichen Größen müssen unter sich gleich und gleich der Konstanten $-\lambda$ oder dem vierten Teile der skalaren Krümmung der Welt sein. Für die beiden letzten ist die erste Be-

1) Man braucht übrigens nicht so weit zu gehen, sondern nur zu fordern, daß alle Massen außer der einen, um deren Drehung es sich eben handelt, gleich 0 werden.

dingung von selbst erfüllt; damit die beiden ersten gleich werden, muß

$$g_{00} g_{11} = a \cos^2 \frac{r}{R} \text{ [1]} \tag{4}$$

werden. Setzt man hieraus $g_{11} = \frac{a}{g_{00}} \cos^2 \frac{r}{R}$ in die Gleichung $g^{00} G_{00} = g^{22} G_{22}$ ein, so erhält man für g_{00} eine leicht lösbare Differentialgleichung 2. Ordnung, die den Wert

$$g_{00} = a - \frac{b}{R \sin \frac{r}{R}} - c \cdot R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \tag{5}$$

liefert[2]). Das ergibt für λ den immer konstanten Wert $\frac{3c}{a}$, d. h. es wird

$$c = \frac{\lambda}{3} a \text{ [3]}). \tag{6}$$

Die Gleichungen II. Art geben also (für die räumlich geschlossene Welt) wohl diskutierbare Lösungen, auch wenn die gravitierende Masse in einem Punkt konzentriert und sonst das Weltall leer ist. Geschlossen muß der Raum sein, weil sonst g_{00} mit wachsendem r laut Gl. 5 negativ werden würde. Es wird zweckmäßig sein, die Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß im Äquator der geschlossenen Welt (für $r = \frac{\pi}{2} R$) g_{00} verschwindet, weil sonst nach Gl. 4 das gleiche für g_{11} einträte. Das gibt die Bedingung

$$0 = a - \frac{b}{R} - c \cdot R^2.$$

Ferner muß, damit g_{00} nicht etwa schon früher 0 oder negativ werden kann,

$$\left[\frac{d g_{00}}{d \sin \frac{r}{R}}\right]_{r = \frac{\pi}{2} R} = \frac{b}{R} - 2c \cdot R^2 < 0$$

sein. Man erhält dann für g_{11} den Wert

$$[g_{11}]_{r = \frac{\pi}{2} R} = \frac{2a}{2cR^2 - \frac{b}{R}} = \frac{2cR^2 + \frac{2b}{R}}{2cR^2 - \frac{b}{R}} > 1,$$

wenn $b > 0$ ist.

Es würde sich, da der Ausdruck $\frac{1}{2} \frac{d g_{00}}{dr}$ angenähert die Gravitationsfeldstärke angibt, für diese der Wert

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - 2cR \sin \frac{r}{R} \right) \cdot \cos \frac{r}{R}$$

ergeben. Sie würde also kleiner ausfallen als im ebenen Raum und für $\lambda = 0$; für große r würde die Anziehung in eine Abstoßung übergehen. Ob das zulässig ist, will ich jetzt nicht entscheiden; jedenfalls aber müssen die Einsteinschen Feldgleichungen II. Art, wenn sie überhaupt gelten sollen, im Felde der Sonne mit großer Annäherung in der Gestalt der Gl. 2 angenommen werden, da das Gravitationsfeld der Sterne als quasikonstant zu betrachten ist. Daraus würde folgen, daß in großen Entfernungen die Materie von der Sonne fortstrebt; ob diese allerdings so groß sind, daß dort das Feld der Sterne abändernd eingreift, will ich dahingestellt sein lassen. Auf jeden Fall aber sind wir zu einer wohl zu erörternden Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen II. Art gekommen, auch wenn die Materie verschwindet — wie es ja auch nicht anders sein kann, da sonst das Sonnensystem keinen Bestand hätte.

Es ist also wohl denkbar, daß auch unter der Herrschaft dieser Gleichungen die Gesamtmaterie zu einem einzigen Körper zusammengeballt ist, und dann gelten für dessen Rotationsrelativität genau dieselben Bedenken wie bei Annahme der Gleichungen I. Art im unendlichen Raume.

Ganz abgesehen davon müssen aber die Voraussetzungen des endlichen Raumes und der annähernd gleichmäßigen Verteilung und Ruhe der Materie einer Kritik unterzogen werden. Eine Gravitationstheorie, die diesen nicht unterworfen ist, scheint mir von vornherein vorzuziehen. Wo bleibt sonst ihre Einfachheit? Bedürfte es nicht, um mit Herrn Einstein zu reden, vieler unabhängiger Hypothesen, um zu ihren Folgerungen zu gelangen?

Nun zum einzelnen. Denknotwendig ist der endliche Raum nicht. Ob er verwirklicht ist oder nicht, läßt sich durch unmittelbare Beobachtungen äußerst schwer entscheiden; es würde also so lange die allgemeine Relativitätstheorie einer notwendigen, aber längst nicht hinreichenden, Grundlage entbehren, bis der Raum sicher als endlich erkannt wäre. Das kann aber noch sehr lange dauern; immerhin ist es nicht unmöglich, daß durch theoretische, natürlich von der Relativitätstheorie unabhängige Schlüsse diese Endlichkeit sich herausstellen könnte. Davon erhoffe ich eher etwas als von der unmittelbaren astronomischen Erfahrung wegen deren Schwierigkeit. Selbstverständlich ist es nicht angängig zu sagen: der

1) Vgl. hierzu meine demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinende Arbeit: Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld in einer elektrizitätsfreien Welt, Abschnitt II.

2) a, b und c sind Integrationskonstanten.

3) Die Ergebnisse können durch Annahme von unendlichen oder imaginären Werten von R auch auf den ebenen oder pseudosphärischen Raum übertragen werden. Es ist bemerkenswert, daß man zwangsläufig zur Annahme eines konstanten λ in der Feldgleichung 2 kommt.

Raum muß endlich sein; denn es geht nicht ohne Relativitätstheorie.

Ob ferner die Materie im großen gleichmäßig verteilt ist, möchte mir zweifelhaft erscheinen. Das trifft vielleicht in unserem Milchstraßensystem zu, wenn wir genügend große Gebiete miteinander vergleichen und es mit den Abweichungen nicht allzu genau nehmen; aber dies System ist, wie Herr Kopff im Einverständnis mit de Sitter gegen Schwarzschild annimmt, nicht das Universum, und wie es in diesem aussieht, wissen wir noch zu wenig. De Sitters Theorie selbst ist doch wieder an so viele Voraussetzungen gebunden, daß mir die Annahme der gleichmäßigen Verteilung im ganzen Universum als verfrüht erscheint.

Schließlich aber die Ruhe des Weltalls! Auf den ersten Blick scheint nichts unwandelbarer als der ewige Himmel; aber völlige Ruhe für die Sterne annehmen zu wollen, ist ein Unding und mit keinem Gravitationsgesetz zu vereinbaren, und nur angenäherte hilft uns nichts. Einstein weist in seiner Antwort auf meine Betrachtung darauf hin, daß es von der Relativitätstheorie zu viel verlangt sei, durch dieselbe Koordinatenwahl das mechanische Verhalten zweier oder mehrerer Massen als bloße Trägheitswirkungen zu deuten. Hier handelt es sich um grundsätzliche Fragen, und wenn man sagt, Rotationen lassen sich in bezug auf den Fixsternhimmel feststellen, so muß dem entgegengehalten werden, daß es einen Fixsternhimmel als Bezugskörper nicht gibt; es gibt nur Sterne, die alle, wenn auch in geringem Maße, in Bewegung gegeneinander sind. Man hat also ebensoviel Bezugssysteme wie Einzelkörper, und wie soll man zu einem mittleren System kommen, das ja vielleicht noch als Ausweg aus diesem Wirrsal erscheinen könnte? Nach welchem Grundsatz sollte denn eine solche Mittelbildung vorgenommen werden? Schließt nicht jeder solcher Satz wieder die Bevorzugung irgendeines Koordinatensystemes ein, zu der kein innerer Grund vorliegt? Die Sachlage wird noch bedenklicher, wenn wir uns überlegen, daß jeder dieser Weltkörper aus einer Unmasse von kleinsten Teilen, die alle ihre selbständige Bewegung haben, besteht. Deshalb sind grundsätzlich nur solche Systeme gestattet, die an einen solchen kleinsten Teil, etwa ein Elektron, gebunden sind; denn es fehlt uns nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Möglichkeit der eindeutigen Mittelbildung. Und selbst wenn diese gegeben wäre, so würden wir wieder Bewegungen und Trägheitswirkungen in bezug auf ein gedachtes System feststellen, was ja die Relativitätstheorie nicht will. Die notwendige Voraussetzung der völligen Ruhe der Bezugskörper (gegeneinander), die die allgemeine Relativitätstheorie, wenigstens das Rotationsproblem verlangt, ist also nicht erfüllt und kann nicht erfüllt werden; denn in der Welt herrscht, wie Weyl hervorhebt, zwar Ruhe im Großen, aber Unruhe im Kleinen. Natürlich wäre die Erfüllung dieser Bedingung ebenfalls nicht hinreichend, da das Bezugssystem der Sterne doch immer nur ein — allerdings von Natur — bevorzugtes Koordinatensystem wäre, der Übergang zu anderen, aber immer in unserer Willkür stände und von den Massen der Gestirne unabhängig wäre.

Nach alledem wird man sich des Eindruckes nicht erwehren können, daß die allgemeine Relativitätstheorie erstens an inneren Widersprüchen krankt und zweitens dem Wesen der Schwere nicht gerecht wird.

Wilhelmshaven, den 5. Februar 1921.

(Eingegangen 18. Februar 1921.)

Elemententwicklung und Atomkernbau. I.

Von Emil Kohlweiler.

In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich eine Theorie des Atomkernbaus und der Isotopie der chemischen Elemente, sowie, damit zusammenhängend, eine Theorie des genetischen bzw. konstitutionellen Zusammenhangs der einzelnen Atomarten entwickelt. Darnach lassen sich die Elemente in zwei Reihenpaaren darstellen, einem Reihenpaar der Elemente mit geraden Ordnungszahlen und einem Reihenpaar mit ungeraden Nummern ihrer Komponenten. Beide Reihenpaare bestehen analog den beiden aktiven Zerfallsreihen des U und des Th, die das Ende des geraden Entwicklungsreihenpaars bilden, aus zwei isotopen Reihen, und die Entwicklung erfolgt in beiden Reihenpaaren entsprechend den radiologischen Verschiebungssätzen durch Einlagerung von He^{++} bzw. Elektronen (e^-) in den Kern der in der Reihe vorhergehenden Atomart. Die isotopen Komponenten jedes Reihenpaares unterscheiden sich, abgesehen von Alternationsisotopen derselben Reihen, die um 1 He^{++} und 2 e^- differieren, dadurch, daß das schwerere Isotop 2 H^+ und 2 e^- mehr enthält als wie das leichtere.

Von den Isotopen der Theorie kann in Wirklichkeit nur eine Komponente vertreten sein, während die andern fehlen können, infolge Instabilität ihrer Kernkonfiguration, was aus dem Verbindungsgewicht des betreffenden Element-

1) Diese Zeitschr. **21**, 203, 1920 und **21**, 311, 1920.

typus gefolgert werden kann. So sagte ich für C, N und O je die Existenz nur eines Isotops voraus, was durch Versuche von Stern und Vollmer und Aston als richtig bestätigt wurde. Die Berechtigung einer Gliederung in H^+-haltige und H^+-freie Atome erwiesen die Rutherfordschen Atomanalysen, die mit der Theorie ergaben, daß der N-Kern H^+ enthält, während den C- und O-Kernen diese subatomaren Partikelchen fehlen. Eine Korrektur der aufgestellten Atomkernbautheorie erzwingt dagegen die Entdeckung des x_3^{++} durch Rutherford in N und O als vierten zunächst elementaren Baustein der Grundstoffe. Als die Elemententwicklung bedingender Faktor tritt dieses x_3^{++} aber im geraden Reihenpaar z. B. nur bis zum Elementtyp 6 auf, den Gesetzen der He^{++}-Entwicklung gehorchend, und da hierbei für das Schlußglied C dieser Entwicklungsperiode $4\,x_3^{++}$ in der Masse die $3\,He^{++}$ der Theorie ersetzen, ist evident, daß die Atommassen der folgenden Isotopen von der Theorie richtig gegeben werden. Die Meldung F. W. Astons von der Existenz des (allerdings nur schwach vertretenen) Ne 21 ließen mich für die ersten Elemente des geraden Reihenpaares noch eine dritte isotope Zwischenreihe annehmen.

Die Annahme der Atommassen zu geraden Zahlen wurde durch Aston für das gerade Reihenpaar bestätigt. Dagegen konnte ich nach Bekanntwerden des Ergebnisses der Massenanalyse für Cl, $Cl(35{,}46) = Cl\,35 + Cl\,37$, bereits in der Schlußanmerkung der zweiten meiner eingangs genannten Arbeiten auf eine notwendige Verschiebung der ebenfalls als gerade angenommenen Atommassenzahlen um eine Einheit für die Glieder des ungeraden Reihenpaares hinweisen[1]). Auch hier haben wir für die allerersten Elemente die Existenz einer dritten (Zwischen-)Reihe anzunehmen, die leichtere der ursprünglichen geraden Reihe (natürlich unter Einführung der „x_3^{++}-Korrektur"), die zu N 14 führt.

Unter Berücksichtigung dieser neuen Daten, x_3^{++}-Gehalt des N und O, Existenz eines Ne 21, eines N 14 und eines Cl 35 und Cl 37, ergibt nun meine Theorie für die ersten Elementtypen das Bild der beigegebenen Tabelle, das, speziell für die Isotopen des geraden Reihenpaares, nur durch die Einschaltung einer ungeraden Reihe für den Anfang und für die Isotopen des ungeraden Reihenpaares nur durch die Änderung der Atommassen um eine Einheit, auf die bereits hingewiesen wurde, von den Schemata meiner oben genannten Arbeit abweicht. Die in Klammern beigefügten Ziffern bedeuten die Zahl der Kernbestandteile der betreffenden Atomart, in der Reihenfolge He^{++}, x_3^{++}, H^+, e^-. Eine eckige Klammer bedeutet das auf Grund des Verbindungsgewichtes gefolgerte Nichtvorhandensein der betreffenden Komponente, und ein Fragezeichen soll die Möglichkeit des Fehlens bzw. Vorhandenseins der skizzierten Atomart andeuten. Die experimentell bestätigten Komponenten sind halbfett gedruckt. Die theoretischen Urtypen aller Elemente besitzen die Massen 6, 7 und 8, durch Addition von x_3^{++} und e^- bilden sich zunächst noch Li 9, sowie die ersten Glieder der geraden Reihen Be 9, Be 10, Be 11.

Bestätigt wurden aus der (nicht geänderten) Theorie der geraden Elemente durch F. W. Aston die Elemente C 12 und O 16, sowie auch das alleinige Vorhandensein dieser beiden Komponenten der Typen C und O, d. h. die Elementnatur beider. Weiter findet Aston in Über-

6 (0201)	7 (0212)	8? (0223)	3 *Li*	6 (0201)	7 (0212)	8 (0223)
9? (0303) = *Li* 6 + 0102						
			4 *Be*	9 (0302)	10 (0313)	11? (0324)
12? (0403)	**10** (0312)	**11** (0323)	5 *B*			
			6 *C*	**12** (0402)[2])	[13 (0413)]	[14 (0424)]
[15(0503)]	[13(0412)]	**14** (0423)[1])	7 *N*	N 14 + (0001) = C 14		
			8 *O*	**16** (1402)	[17]	[18]
19 (N 15 + 1000)	[17]		9 *F*			
			10 *Ne*	**20** (C 12 + 2000)	**21**? (C 13 + 2000)	**22** (C 14 + 2000)
23 (N 15 + 2000)	[21]		11 *Na*			
			12 *Mg*	**24** (C 12 + 3000)	**25**? (C 13 + 3000)	**26** (C 14 + 3000)
27 (N 15 + 3000)	25? (N 13 + 3000)	29 (N 13 + 4002)	13 *Al*			
		29 (N 13 + 4001)	14 *Si*	**28** (C 12 + 4000)		**30**? (C 14 + 4000)
31 (N 15 + 4000)	[29 (N 13 + 4000)]	33? (N 13 + 5002)	15 *P*			
			16 *S*	**32** (C 12 + 5000)		34? (C 14 + 5000)
35 (N 15 + 5000)		**37** (N 13 + 6002)	17 *Cl*			
			18 *Ar*	**36**? (C 12 + 6000)	**40** (C 12 + 7002)	38 (C 14 + 6000)
			19 *K*		40 (C 12 + 7001)	
			20 *Ca*	40 (C 12 + 7000)	44? (C 12 + 8002)	42 (C 14 + 7000)

1) Wie auch auf eine hieraus folgende Alternation zwischen P und Al. Ich hatte, wie auch Soddy, für Cl die Komponenten Cl 34 und Cl 36 angenommen.

2) Mit Rutherford. Den Herrn Prof. Dr. St. Meyer und Dr. W Bein danke ich für die freundliche Übermittlung der Inhalte der jeweilig neuen, mir schwer zugänglichen ausländischen Literatur bestens.

einstimmung mit der Theorie $Ne20$ und $Ne22$, $Si28$ und $Si30$?, $S32$, $Ar36$? und $Ar40$. Speziell die letzte Komponente bestätigt die Richtigkeit einer Alternation der leichteren Reihe zwischen Ca und Ar. Von den beiden Isotopen $Ar36$ und $Ar38$ der Theorie muß mindestens eine in Anbetracht des Mischgewichtes Ar (<40) vorhanden sein, eine kann natürlich fehlen. Für S ist das alleinige Auftreten von $S32$ unter Berücksichtigung des Verbindungsgewichts S (>32) nicht wahrscheinlich; eine Beimischung von zirka 5 Proz. $S34$ ist anzunehmen. A. Dempster berichtet über $Mg24$ und $Mg26$. Das von ihm ebenfalls gefundene $Mg25$ beweist die Realität der Zwischenreihe, die aus $Ne21$ gefolgert wurde. Ob diese Zwischenreihe für die allerersten Glieder real ist, sowie ob sie über Mg weiter- oder in die $N13$-Reihe übergeht, läßt sich nicht entscheiden. Astons $Si29$ folgt als Alternationsisotop der leichteren ungeraden Reihe zwischen P und Al.

Auf der Seite der ungeraden Elemente bestätigt Aston die Elementnatur des N als $N14$. Aus den auf Grund des Falles Cl korrigierten ungeraden Reihen findet Aston sodann $B10$, $B11$ und die Elementnatur von F und P als $F19$ und $P31$. Die Komponente $B12$ konnte Aston noch nicht nachweisen, da die Linie $B12^+ = C12^+$ ist; die Linie 50 ist nach Aston nicht als $B12F_2^+$, sondern als $Hg200^{++++}$ zu deuten; doch muß auch nach Aston wegen der relativ großen Intensität der Linie $B10^+$ verglichen mit dem Mischwert 10,9 noch eine Komponente >11 vorhanden sein. Die Fortsetzung der Reihen ergibt sodann für As (74,96) statt $As74 + As76$ die Komponenten $As75 + As77$ (wie statt $Cl34$ und $Cl36$ die Isotope $Cl35$ und $C37$ zu setzen waren), von denen das schwerere unter Berücksichtigung des Verbindungsgewichtes als fehlend anzunehmen ist, und für das folgende Br ergeben sich $Br79$ und $Br81$. Aston findet alle 3 Elemente und nur diese 3.

Bemerkenswert ist, daß bei den geraden Elementen die Komponenten der anfänglich leichteren Reihe stabiler sind ($C12$ gegen [$C14$], $O16$ gegen [$O18$], $Ne20$ gegen $Ne22$, $Mg24$ gegen $Mg26$ usw.) und auch nach der Alternation der leichteren Reihe (entgegen den Regeln betreffs Stabilität der α-Strahler der Radioreihen) stabiler bleiben ($Ar40$ gegen [$Ar38$]), während für die Elemente mit ungeraden Ordnungszahlen die schwereren Komponenten die beständigeren und häufigeren sind ($F19$ gegen [$F17$]), $Na23$ gegen [$Na21$], $P31$ gegen $P33$ usw.), welcher Zustand ebenfalls durch Alternation nicht gestört wird ($Cl35$ gegen $Cl37$)[1]. Die Theorie der Kernbaupartikelchen zeigt, daß die häufigeren Komponenten, von $C12$ bzw. $N15$ abstammend, diejenigen sind, die im Kern keine H^+-Teilchen besitzen. H^+-Gehalt scheint somit die Stabilität eines Atoms herabzusetzen. Das Erhaltenbleiben dieser Beziehung auch nach den anfänglichen Alternationen zeigt, daß in diesen relativ einfachen Atomen noch die Wirkung der zentralen H^+ durch die periphere Umgruppierung infolge der Alternationspartikelchen nicht beeinträchtigt wird, während bei den komplizierteren Radioelementen, bei denen das H^+-Zentrum viel „weiter" vom Kernrand entfernt ist, die Änderungen im letzteren durch Alternationen bestimmender sind, weshalb z. B. das Th, das stabiler ist als das isotope Jo, nach einer Alternation das im Vergleich zu Jo instabilare $RaTh$ liefert (Regel für α-strahlende Isotope von Fajans).

Durch Aston wurde die „Whole-number"-Regel der Elemente ausnahmslos bestätigt, von H abgesehen, für den auch aus dem Massenspektrum eine Atommasse von 1,00799 folgt. Dies muß bei der Ermittlung der genauen Atomgewichte der Isotopen berücksichtigt werden, wie auch die Masse der e^- zu 0,00054, die eventuelle Abweichung der x_3^{++}-Partikel von der Atommasse 3 und der Massenverlust beim Zusammentritt der subatomaren Partikelchen zu den komplexen Atomen unter Energie-Lieferung. He hat die Atommasse 4, und da der Einlagerung eines He^{++} stets die Aufnahme von $2e^-$ ins äußere Elektronensystem parallel geht, kann für die α-Entwicklung unter Einschluß der äußeren Elektronen eine Massenzunahme von genau 4,000 eingesetzt werden. Der H^+-Kern wiegt $H - e^- = 1{,}00799 - 0{,}00054 = 1{,}00075$ relative Einheiten. Der Massenverlust ist äquivalent der bei der Bildung der chemischen Elemente frei gewordenen Energie, und dieser entspricht wieder der zur Auflösung eines Atoms erforderliche Energieaufwand, der sich aus den Rutherfordschen Versuchen ermitteln läßt. Würde der Zusammenstoß zwischen α-Partikel und O-Atom (die Dissoziationsarbeit $O_2 \rightarrow 2O$ ist von weit kleinerer Größenanordnung und daher zu vernachlässigen) ohne Demolierung des letzteren, elastisch verlaufen, so würde das O-Atom dadurch eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 M_{He} \cdot c_{He}}{M_H + M_0} = \frac{2}{5} c_{He} \quad ^{2)}$$

erhalten; die kinetische Energie des O würde wachsen um $\frac{1}{2} M_0 v^2$, woraus sich ein Massen-

1) $N14$ und $B11$ bilden Ausnahmen hiervon.

2) Die Eigengeschwindigkeit des O ist gegen c_{He} zu vernachlässigen.

Element	Korrektion der Atommasse.				Atommasse (Verbindungsgewicht)	
	x_3^{++}	H^+	e^-	Massenverlust	berechnet	experiment.
O16 (1402), 8	4.0,001	0	8.0,00054	$^{16}/_{16}$.0,008	16.000	16,000
C12 (0402), 6	4.0,001	0	(2 + 6).0,00054	$^{12}/_{16}$.0,008	12,002	12,0
S32 (5402), 16	4.0,001	0	(2 + 6).0,00054	$^{32}/_{16}$.0,008	31,99	32,06
P31 (4503), 15	5.0,001	0	(3 + 7).0,00054	$^{31}/_{16}$.0,008	30,99	31,04
N14 (0423), 7	4.0,001	2.0,0075	(3 + 7).0,00054	$^{14}/_{16}$.0,008	14,017	14,01
F19 (1503), 9	5.0,001	0	(3 + 7).0,00054	$^{19}/_{16}$.0,008	19,001	19,0
Na23 (2503), 11	5.0,001	0	(3 + 7).0,00054	$^{23}/_{16}$.0,008	22,999	23,00
Ar40 (7404), 18	4.0,001	0	(4 + 6).0,00054	$^{40}/_{16}$.0,008	39,989	39,88
Mg24 (3402), 12	4.0,001	0	(2 + 6).0,00054	$^{24}/_{16}$.0,008		
Mg25 (3413), 12	4.0,001	1.0,0075	(3 + 6).0,00054	$^{25}/_{16}$.0,008	24,37 [1]	24,32
Mg26 (3424), 12	4.0,001	2.0,0075	(4 + 6).0,00054	$^{26}/_{16}$.0,008		
Ne20 (2402), 10	4.0,001	0	(2 + 6).0,00054	$^{20}/_{16}$.0,008	19,998	
Ne21 (2413), 10	4.0,001	1.0,0075	(3 + 6).0,00054	$^{21}/_{16}$.0,008	21,006	
Ne22 (2424), 10	4.0,001	2.0,0075	(4 + 6).0,00054	$^{22}/_{16}$.0,008	22,013	
Ca40 (7402), 20	4.0,001	0	(2 + 6).0,00054	$^{40}/_{16}$.0,008	39,988	40,07
Cr52 (10404), 24	4.0,001	0	(4 + 6).0,00054	$^{52}/_{16}$.0,008	51,98	52,0

zuwachs vom $m = \frac{1}{2} M_0 \frac{v^2}{c^2} = 0{,}0056$ ergeben würde. Verläuft der Stoß dagegen völlig unelastisch, derart, daß die gesamte kinetische Energie der α-Partikel zur Auflösung des O-Atoms verbraucht wird, so resultiert hieraus ein Massenzuwachs von $\frac{1}{2} M_{He} \frac{c_{He}^2}{c^2} = 0{,}0088$. Der tatsächliche Wert dürfte nun wohl zwischen 0,0056 und 0,0088 liegen, und zwar näher dem letzteren Wert, weshalb der Wert des Massenverlustes bei der O-Bildung aus 1 He^{++}, 4 x_3^{++} und $(2 + 8)e^-$ zu 0,008 gesetzt werden mag. So berechnet sich die Atommasse für O16(1402) zu $4 + 4 \cdot x + (2 + 6) \cdot 0{,}00054$ (die beiden Außenelektronen $C \rightarrow O$ sind bereits in $He = 4$ enthalten) — $0{,}008 = 3{,}996 + 4x$. Dieser Wert ist gleich 16,000 zu setzen, so daß sich für x_3^{++} die Atommasse zu 3,001, die Korrektion für $x_3^{++} = 3$ somit zu 0,001 ergibt. Hat sich He^{++} aus 4 H^+ und 2 e^- gebildet, so ist der Massenverlust bei diesem Vorgang $4 \cdot 0{,}008 = 0{,}032$; für x_3^{++} dürfte sich bei analoger Bildung ein etwas kleinerer, der Größenordnung nach aber gleicher Betrag wie für He und ein erheblich kleinerer Betrag wie für O erwarten lassen (denn x_3^{++} geht aus dem O-Bombardement gleich He^{++} unversehrt hervor); aus den Berechnungen folgt hierfür $3 \cdot 1{,}008 - 3{,}001 = 0{,}023$, eine befriedigende Übereinstimmung. Unter diesen Voraussetzungen berechnen sich nun die genauen Atomgewichte der folgenden Zusammenstellung, wobei der Massenverlust proportional der Atommasse berechnet ist.

Die Übereinstimmung der errechneten Werte mit den experimentell ermittelten ist besonders für C, N, F und Na sehr gut. Für S folgt aus den Werten wahrscheinlich das schwache Vorhandensein einer Komponente S34, deren Nachweis durch Massenspektralanalyse schwer gelingen dürfte (vielleicht durch außerordentlich lange dauernde Einwirkung; die Linie 34 für S^+ kann aber verdeckt werden durch die Linie $34 = S32H_2^+$ wie auch die Linie zweiter Ordnung 17 für $S34^{++}$ durch OH^+ verdeckt werden könnte, doch müßte eine Linie $36 = S34\,H_2^+$ zu erwarten sein, vorausgesetzt, daß deren Intensität nicht zu schwach zum Nachweis ist, was ziemlich wahrscheinlich scheint). Für P ist ebenfalls die Existenz eines Isotops P33 anzunehmen, aber auch nur in durch Massenanalyse kaum nachweisbarer Menge. Für Ar ist die von Aston nicht sicher nachgewiesene Komponente Ar36 schwach vorhanden, selbst wenn sein Verbindungsgewicht nach Leduc 39,91 ausmacht. Für Ca ist außer Ca40 in geringer Menge noch ein schwereres Isotop zu erwarten, während Cr wohl ein reines Element sein dürfte.

Stuttgart, Februar 1921.

(Eingegangen 21. Februar 1921.)

1) Die Intensitäten der 3 Mg-Linien verhalten sich nach Dempster wie 6 : 1 : 1.

Tabelle der Farbenhalbe nach Ostwalds Farbenlehre.

Von Hans Maurer.

In dieser Zeitschrift **22**, 91, 1921 gibt Herr Ostwald eine Tabelle der 100 Farbenhalbe nach Intervallen der Wellenlängen, die den Farbtönen Nr. 0 bis 99 entsprechen. Er bezeichnet die Verhältnisse als ziemlich verwickelt und erläutert sie deshalb noch durch eine Figur. Der Eindruck, daß diese Verhältnisse verwickelt seien, scheint mir nur durch die wenig glückliche Anordnung der Zahlentabelle zu entstehen, die folgende Form hat:

Nr.	Ultrarot bis	bis	bis Ultraveil	Nr.
0		487		50
1		500		51
.		.		.
.		.		.
19		564		69
20	420	565		70
21	423	565		71
.	.	.		.
.	.	.		.
48	486	655		98
40	486	662		99

Dies ist allerdings schwer verständlich, denn ohne ausführliche Erläuterungen wird niemand auf den Gedanken kommen, daß hierin z. B. dem Farbton Nr. 21 entsprechen soll die Gesamtheit aller Wellenlängen über 566 und unter 423, und andererseits dem Farbton 98 die Gesamtheit aller Wellenlängen zwischen 486 und 655. Die Tabelle ist um so weniger übersichtlich, als in ihr von links nach rechts folgen: Ultrarot (größte Wellen), dann eine Spalte mit kleinen sichtbaren, darauf eine mit großen sichtbaren Wellen und schließlich Ultraveil (kleinste Wellen).

In Wirklichkeit aber sind die Verhältnisse einfach, wie sofort ersichtlich ist, wenn man der Zahlentabelle folgende Form, deren Annahme ich Herrn Ostwald empfehle, gibt:

Außerhalb	innerhalb	der Wellenlängen		
Nr.	Nr.			
0	50	Ultraveil	bis	487
1	51	"	"	500
.	.	"	"	.
.	.	"	"	.
19	69	"	"	564
20	70	420	"	565
21	71	423	"	566
.	.	.	"	.
.	.	.	"	.
48	98	486	"	655
49	99	486	"	662

Hier ist ohne Erläuterung klar: Jeder Farbton von Nr. 50 bis 99 entspricht der Gesamtheit aller Wellenlängen des angegebenen Intervalls, jeder von 0 bis 49 dem Rest außerhalb des Intervalls. Nur aus Wellenlängen des sichtbaren Spektrums setzen sich also die Farbtöne 70 bis 99 zusammen; an jenen von 50 bis 69 nimmt Ultraveil teil, an jenen von 0 bis 19 Ultrarot, da stets wenigstens Wellenlängen > 564 bis ins Ultrarot dazu gehören, und an jenen von 20 bis 49 sowohl Ultraveil als auch Ultrarot.

Berlin, Februar 1921.

(Eingegangen 21. Februar 1921.)

Zur Nomenklatur der radioaktiven Familien.

Von M. C. Neuburger.

Durch die Untersuchungen von Otto Hahn und Lise Meitner, sowie von Stefan Meyer u. a. über die Genesis des Actiniums, ist der Zusammenhang der Actiniumfamilie mit der Uranfamilie mit großer Sicherheit festgestellt worden.

Es wurde bisher immer von drei radioaktiven Familien gesprochen, womit die Uran-Radium-, die Actinium- und die Thoriumfamilie gemeint war. Aus den Ergebnissen der Arbeiten der genannten Forscher folgt jedoch, daß heute dieser Ausdruck seine Berechtigung verloren hat.

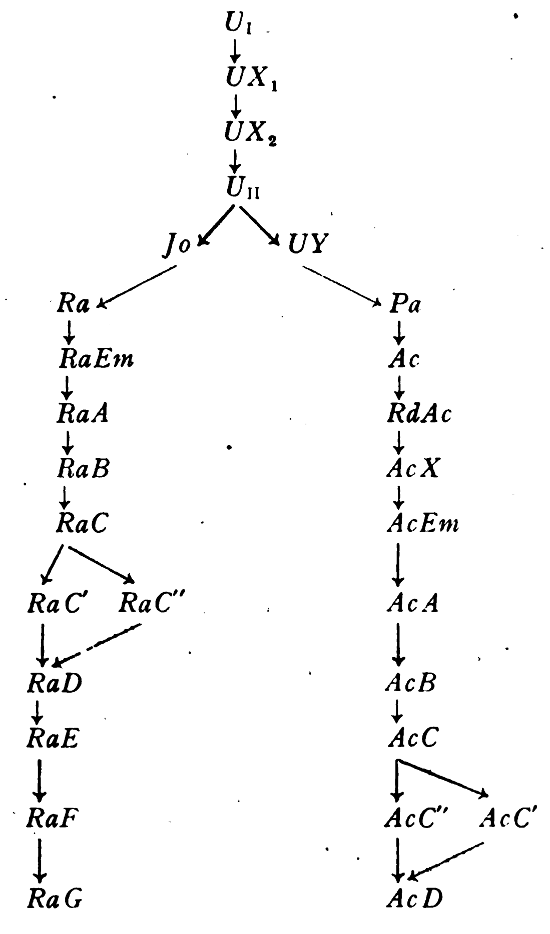
Danach sind Uran- und Thorium als die Urelemente des radioaktiven Zerfalls aufzufassen, so daß es nur mehr zwei große Familien der Radiumelemente gibt.

Auf Grund dieser Auffassung schlagen wir die nachfolgenden Bezeichnungen der radioaktiven Familien vor.

Wir unterscheiden

1. Hauptfamilien und
2. Zweigfamilien.
3. Stammfamilien.

Als Hauptfamilien werden die Uranfamilie, worunter die Reihe



verstanden werden soll und die ganze Thorium-

familie bezeichnet, von welcher heute noch keine Zweigfamilie bekannt ist.

Die Reihe

$$U_{I} \xrightarrow{\alpha} UX_1 \xrightarrow{\beta} UX_2 \xrightarrow{\beta} U_{II}$$

bezeichnen wir als Stammfamilie des Urans.

Als Zweigfamilien bezeichnen wir die Radiumfamilie

$$Jo \xrightarrow{\alpha} Ra \xrightarrow{\alpha} RaEm \xrightarrow{\alpha} RaA \xrightarrow{\alpha} RaB \xrightarrow{\beta} RaC \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} RaC'' \\ \xrightarrow{\beta} RaC' \xrightarrow{\alpha} RaD \text{ usw.} \end{cases}$$

und die Actiniumfamilie

$$UY \xrightarrow{\beta} Pa \xrightarrow{\alpha} Ac \xrightarrow{(\beta)} RdAc \xrightarrow{\alpha} AcX \xrightarrow{\alpha} AcEm \xrightarrow{\alpha} AcA \xrightarrow{\alpha} AcB \xrightarrow{\beta} AcC \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} AcC'' \xrightarrow{\beta} AcD. \\ \xrightarrow{\beta} AcC' \xrightarrow{\alpha} AcD. \end{cases}$$

Da für die Reihe

$U_{I} \rightarrow UX_1 \rightarrow UX_2 \rightarrow U_{II} \rightarrow Jo \rightarrow Ra \rightarrow RaEm$ usw.

die Bezeichnung Uran-Radiumfamilie in Gebrauch ist, so soll auch, wenn nur die Reihe

$U_{I} \rightarrow UX_1 \rightarrow UX_2 \rightarrow UX_{II} \rightarrow UY \rightarrow Pa \rightarrow Ac$ usw.

betrachtet wird, dafür die Bezeichnung Uran-Actiniumfamilie eingeführt werden.

Sollte, wie G. Kirsch auf Grund theoretischer Annahmen vermutet, eine zweite Actiniumfamilie existieren, würde dies für die von uns vorgeschlagenen Bezeichnungen der radioaktiven Familien keine Schwierigkeiten bedeuten.

Es wäre uns sehr erwünscht, wenn die auf dem Gebiete der Radioaktivität tätigen Forscher zu den vorgeschlagenen Bezeichnungen Stellung nehmen möchten, damit eventuelle Mängel derselben aufgedeckt werden.

Insbesondere möchten wir die Frage zur Diskussion stellen, aus welchen Gründen die Zuzählung von Uran Y zur Stammfamilie des Urans, wie dies bisher immer geschehen ist, notwendig sein soll. Bei der Anwendung der neuen in Vorschlag gebrachten Nomenklatur ist diese Einbeziehung von Uran Y nur dann durchzuführen, wenn auch das Ionium der Stammfamilie hinzugerechnet wird. Im Gegensatz zu Uran Y ist aber bisher immer üblich gewesen, das Ionium der Radiumfamilie zuzuzählen. Mit der gleichen Berechtigung rechnen wir das Uran Y der Actiniumfamilie zu, da ja doch das Mutterelement der beiden Radioelemente ein und dieselbe Substanz ist. Die Stelle der Abzweigung in der Uranfamilie ist zwar noch nicht sicher festgestellt worden, doch aus theoretischen und experimentellen Ergebnissen folgt mit sehr großer Wahrscheinlichkeit, daß die Verzweigung bei Uran II eintritt.

Sollte sich die Mehrzahl der Forscher jedoch für die Einbeziehung von Uran Y zur Stammfamilie des Urans aussprechen, so müßte unter der Bezeichnung „Stammfamilie" dann die Reihe

$$U_{I} \xrightarrow{\alpha} UX_1 \xrightarrow{\beta} UX_2 \xrightarrow{\beta} U_{II} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} Jo \\ \xrightarrow{\alpha} UY \end{cases}$$

verstanden werden und die Radium- und die Actiniumfamilie müßten dann mit den Radioelementen, Radium, bzw. Protactinium beginnen.

Zusammenfassung.

Es wird zur Nomenklatur der radioaktiven Familien der Vorschlag gemacht, Haupt-, Stamm- und Zweigfamilien zu unterscheiden. Hauptfamilien sind die Uran- und die Thoriumfamilie. Die Hauptfamilie des Urans geht bei Uran II in zwei Zweigfamilien über, in die Radium- und in die Actiniumfamilie. Außer der Bezeichnung Uran-Radiumfamilie soll noch die Bezeichnung Uran-Actiniumfamilie Anwendung finden. Die neue in Vorschlag gebrachte Bezeichnungsweise entspricht dem derzeitigen Stand der Forschung über die Radioelemente weit besser wie die bisher übliche. Als Stammfamilie wird die eigentliche Uranfamilie (von U_{I} bis U_{II}) bezeichnet. Die vorgeschlagene Nomenklatur sollte in allen Lehrbüchern und Abhandlungen Anwendung finden.

(Eingegangen 16. Februar 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik.

Von M. Born.

(Fortsetzung.)

§ 5. Mathematische Hilfssätze.

Die jetzt folgenden Entwicklungen sind der eigentliche mathematische Formalismus der Thermodynamik. Um das in der Einleitung gepriesene Ideal der Trennung des physikalischen Inhalts von der mathematischen Form zu erreichen, werden wir die Theorie der Pfaffschen Differentialgleichungen an sich zu entwickeln haben. Es handelt sich dabei um Sätze der einfachsten Art, die auch ein Anfänger verstehen kann.

Zunächst betrachten wir eine xy-Ebene und einen Pfaffschen Differentialausdruck der zwei Variabeln x, y:

$$dQ = X dx + Y dy, \tag{9}$$

wo X, Y Funktionen von x, y sind.

Von dieser Form ist die thermodynamische Gleichung (7'). dQ ist im allgemeinen kein vollständiges Differential; wäre es das, wäre also $dQ = d\varphi$, wo φ eine Funktion von x und y ist, so müßte

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

sein; es müßten also die Koeffizienten des Pfaffschen Ausdrucks die Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{10}$$

erfüllen.

Die zugehörige Pfaffsche Gleichung $dQ = 0$ hat als Lösungen eine einparametrige Schar von Kurven der xy-Ebene, $y = y(x, c)$ oder $\varphi(x, y) = c$; denn man kann sie als gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y} \tag{11}$$

schreiben, deren rechte Seite eine bekannte Funktion von x und y ist. Die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung ist die, daß in jedem Punkte der Ebene eine Richtung (11) vorgegeben ist, und die Differentialgleichung integrieren heißt, solche Kurven ziehen, deren Tangenten in jedem Punkte mit den vorgegebenen Richtungen übereinstimmen.

Für diese Kurvenschar gilt also sowohl $dQ = 0$ als auch $d\varphi = 0$; folglich müssen die linken Seiten proportional sein. Wir setzen

$$d\varphi = \frac{dQ}{\lambda} \tag{12}$$

und nennen λ integrierenden Nenner von dQ, weil durch Division mit λ dQ in das vollständige Differential $d\varphi$ übergeht. λ ist natürlich eine Funktion von x und y.

Ein Pfaffscher Differentialausdruck von 2 Veränderlichen besitzt also immer einen integrierenden Nenner.

Ersetzt man φ durch irgendeine Funktion von φ, etwa $\varphi^*(\varphi)$, so stellt $\varphi^* = c$ ebenfalls die Lösungen der Differentialgleichung dar. Es ist dann

$$d\varphi^* = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} d\varphi = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} \cdot \frac{dQ}{\lambda} = \frac{dQ}{\lambda^*},$$

d. h. auch

$$\lambda^* = \lambda \frac{d\varphi}{d\varphi^*} \tag{13}$$

ist integrierender Nenner von dQ. Demnach gibt es immer unendlich viele integrierende Nenner, die durch die Relation (13) zusammenhängen.

Wir wenden uns jetzt zu einem Pfaffschen Ausdruck von 3 Veränderlichen:

$$dQ = X dx + Y dy + Z dz, \tag{14}$$

wo X, Y, Z stetige Funktionen von x, y, z sind.

Von dieser Form ist die thermodynamische Gleichung (8').

Die Verhältnisse der Differentiale $dx : dy : dz$ bedeuten eine Richtung im xyz-Raume. Die Pfaffsche Gleichung $dQ = 0$ sagt also aus, daß diese Richtungsverhältnisse einer linearen Gleichung genügen, daß demnach in jedem Raumpunkte die hindurchgehende Richtung auf eine bestimmte Ebene beschränkt ist. Die Differentialgleichung integrieren, heißt solche Kurven ziehen, deren Tangente in jedem Punkte in eine solche Richtung fällt.

dQ ist im allgemeinen kein vollständiges Differential; wäre es das, wäre also $dQ = d\varphi$, wo φ eine Funktion von x, y, z ist, so müßte

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sein, also müßten die Koeffizienten des Pfaffschen Ausdrucks die 3 Bedingungen

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{15}$$

erfüllen. Dann würde jede Lösungskurve die Gleichung $\varphi(xyz) = c$ befriedigen, d. h. in einer Fläche der hierdurch dargestellten Schar verlaufen.

Die nächste Frage ist, ob man hier immer einen integrierenden Nenner $\lambda(xyz)$ finden kann, so daß

$$d\varphi = \frac{dQ}{\lambda}$$

ein vollständiges Differential ist. Wäre das der Fall, so müßte jede Lösungskurve der Differentialgleichung $dQ = 0$ auch $d\varphi = 0$ befriedigen, also in einer der Flächen der Schar

$$\varphi(xyz) = c$$

verlaufen. Geometrisch bedeutet das, daß die durch die Differentialgleichung $dQ = 0$ dargestellten Ebenen, welche die zugelassenen Fortschreitungsrichtungen enthalten, mit den Tangentialebenen einer einparametrigen Flächenschar zusammenfallen.

Das braucht aber bei beliebig gegebenen Koeffizienten X, Y, Z keineswegs der Fall zu sein Man kann in stetiger Weise jedem Raumpunkte eine durch ihn gehende Ebene so zuordnen, daß diese Ebenen n i c h t eine Schar von Flächen umhüllen. Das einfachste Beispiel einer solchen Konfiguration ist der l i n e a r e K o m p l e x oder das N u l l s y s t e m, das man so beschreiben kann: Man lege durch jeden Raumpunkt P eine Schraubenlinie um die z-Achse, und alle diese Schraubenlinien sollen dieselbe Ganghöhe k haben; die Normalebenen der Tangenten dieser Kurven bilden dann die Ebenen eines linearen Komplexes und haben die Eigenschaft, k e i n e Flächen zu umhüllen. Um das anschaulich zu sehen, betrachte man die Nachbarschaft der z-Achse selbst. Die zu einem Punkte P der z-Achse gehörige Ebene steht auf der z-Achse senkrecht; in allen unendlich benachbarten Punkten dieser Ebene, die von der z-Achse gleich weit entfernt sind, haben die zugehörigen Ebenen zur z-Achse windschiefe Normalen und gehen durch Drehung um die z-Achse ineinander über. Es ist evident, daß eine solche Ebenenkonfiguration keine Fläche tangiert.

Man kann dasselbe aber auch analytisch einsehen; die zu dem linearen Komplex gehörige P f a f f sche Differentialgleichung [1]) lautet, wie leicht zu sehen:

$$dQ = -y\,dx + x\,dy + k\,dz = 0.$$

Gäbe es einen integrierenden Nenner, wäre also $dQ = \lambda d\varphi$, so müßte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k}{\lambda}$$

sein. Daraus würde folgen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$

oder

$$2\lambda = x\frac{\partial \lambda}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{y}{k}\frac{\partial \lambda}{\partial z}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x}{k}\frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Hieraus schließt man $\lambda = 0$.

Es ist durchaus notwendig, durch solche Beispiele deutlich zu machen, daß die Existenz eines integrierenden Nenners eine Ausnahme, eine Besonderheit ist; sonst kann man den Sinn des zweiten Hauptsatzes gar nicht verstehen, da dieser eben aussagt, daß gerade diese Besonderheit bei den P f a f f schen Differentialgleichungen der Thermodynamik vorliegt. Bis hierher muß also eine sorgfältige Darstellung auch der „klassischen" Form der Theorie mitgehen.

Wir gehen aber noch einen kleinen Schritt weiter, und dieser Schritt erlaubt uns, alle die recht verwickelten Betrachtungen, die man gewöhnlich zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes gebraucht, fortzuwerfen und durch die formale Anwendung eines höchst einfachen und anschaulichen mathematischen Satzes zu ersetzen.

Wir haben gesehen, daß alle P f a f f schen Differentialausdrücke in zwei Klassen zerfallen, solche mit integrierendem Nenner und solche ohne. Es wird sich nun darum handeln, ein a n d e r e s Merkmal für diese Unterscheidung zu suchen, das weniger abstrakt ist und sich leicht mit denjenigen Erfahrungstatsachen in Verbindung bringen läßt, aus denen in der Thermodynamik der zweite Hauptsatz entspringt. Dieses Merkmal ist die Erreichbarkeit eines Punktes von einem andern durch eine Lösungskurve der P f a f f schen Differentialgleichung (d. h. in der Thermodynamik durch eine Adiabate).

Betrachten wir zuerst wieder den Fall der Ebene, so geht durch jeden Punkt x, y genau eine Kurve der Schar $\varphi(x, y) = c$. Daher läßt sich von diesem Punkte aus keineswegs j e d e r Nachbarpunkt durch eine Lösungskurve erreichen.

Jetzt gehen wir zum Raume über. Da ist es klar, daß für die Klasse von P f a f f schen Differentialgleichungen, welche einen integrierenden Nenner haben, die Sache ebenso liegt wie in der Ebene; denn dann verlaufen alle

1) Analytisch noch einfacher ist das Beispiel:

$$dQ = x\,dy + k\,dz = 0.$$

Hier müßte bei Existenz eines integrierenden Nenners

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k}{\lambda}$$

sein; aus der ersten Gleichung folgt, daß φ nur von y und z abhängt, aus der letzten, daß dasselbe für λ gilt, und die zweite zeigt dann einen Widerspruch.

Lösungskurven in den Flächen der Schar $\varphi(x, y, z) = c$, daher kann man von einem Punkte x, y, z keineswegs alle Nachbarpunkte erreichen, sondern nur solche, die in derselben Fläche liegen, auch wenn man geknickte Kurvenzüge zulassen wollte, die aus mehreren differenzierbaren Stücken zusammengesetzt sind. Unerreichbare Punkte aber gibt es in jeder beliebigen Nähe des Ausgangspunktes.

Nun kehren wir den Satz um und fragen: Wenn in jeder beliebigen Nähe eines Punktes unerreichbare Punkte liegen, hat dann der Pfaffsche Differentialausdruck einen integrierenden Nenner?

Es ist anschaulich klar, daß das der Fall sein wird. Denn aus Stetigkeitsgründen werden die nicht erreichbaren Punkte einen ganzen Raumteil erfüllen, dessen Grenze aus erreichbaren Punkten bestehen wird; diese Grenze ist aber eine Fläche. Da ferner offenbar jedem nicht erreichbaren, infinitesimal benachbarten Punkte ein zweiter in entgegengesetzter Richtung entspricht, so enthält die Grenzfläche alle erreichbaren Punkte, d. h. es gibt einen integrierenden Nenner.

Um diesen Gedankengang zu einem strengen Beweise zu gestalten, bemerken wir zunächst, daß alle Lösungen der Pfaffschen Gleichung

$$dQ = X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

die in einer gegebenen Fläche F

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

verlaufen, einer Pfaffschen Gleichung der Form

$$dQ = U du + V dv = 0$$

genügen, wo

$$U = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$V = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}$$

gesetzt ist. Daher geht durch jeden Punkt der Fläche F genau eine Lösungskurve.

Wir setzen nun voraus, in beliebiger Nähe eines Punktes P gebe es nicht erreichbare Punkte; ein solcher sei Q. Sodann läßt sich leicht einsehen, daß es auf jeder, durch P gehenden Geraden g, deren Richtung nicht gerade selbst in P der Pfaffschen Gleichung genügt, in beliebiger Nähe von P, nicht erreichbare Punkte gibt. Wir legen (Fig. 1) durch Q und g die Ebene E; dann gibt es in dieser gerade eine, durch Q gehende Lösungskurve der Pfaffschen Gleichung, und diese wird, wenn Q hinreichend nahe an P liegt, die Gerade g in einem Punkte R treffen. Dann muß R von P aus unerreichbar sein;

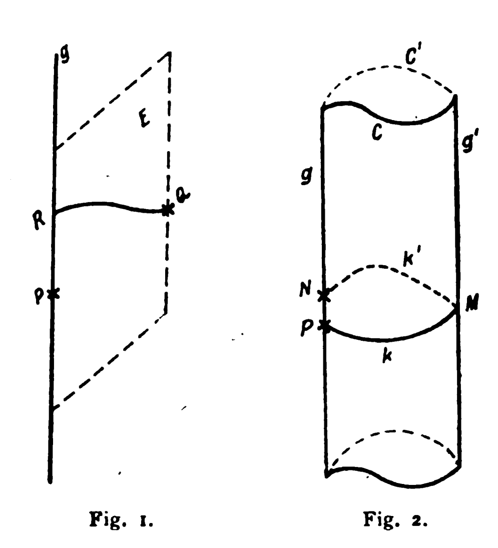


Fig. 1. Fig. 2.

denn gäbe es eine Lösung, die von P nach R führt, so könnte man auch nach Q auf einer stetigen (geknickten) Lösungskurve gelangen, was der Voraussetzung widerspricht. Der Punkt Q kann aber immer so nahe an P gewählt werden, daß R beliebig nahe an P fällt.

Jetzt denken wir uns die Gerade g mit einer hinreichend benachbarten, parallelen Geraden g' durch eine beliebige Zylinderfläche C verbunden (Fig. 2); dann gibt es auf dieser genau eine durch P gehende Lösungskurve k, die g' in M treffen möge. Nun verbinden wir die beiden Geraden g und g' durch eine zweite Zylinderfläche C'; dann gibt es auf dieser genau eine durch M gehende Lösungskurve k', die g in N treffen möge.

Wir behaupten nun, daß N mit P zusammenfallen muß. Denn man kann die Fläche C' stetig in C überführen; dabei muß die Kurve k' stetig in k übergehen und N stetig nach P rücken. Man kann sodann durch weitere Deformation N über P hinaus wandern lassen. N ist aber ein erreichbarer Punkt, auf dem stetigen (geknickten) Kurvenzuge k, k'. Es gäbe also auf der Geraden g ein endliches Intervall um P, das nur aus erreichbaren Punkten besteht, und das widerspricht der vorher bewiesenen Tatsache, daß in beliebiger Nähe von P auf g unerreichbare Punkte liegen.

Wenn nun N mit P zusammenfällt, so beschreibt die Kurve k bei einer Deformation des Zylinders C eine Fläche F, die alle von P ausgehenden Lösungen enthält (Fig. 3).

Damit ist folgender Satz bewiesen, der, wie wir sehen werden, den mathematischen Extrakt des zweiten Hauptsatzes enthält:

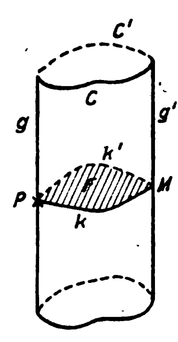


Fig. 3.

Satz: Wenn ein Pfaffscher Differentialausdruck

$$dQ = Xdx + Ydy + Zdz$$

die Eigenschaft hat, daß es in jeder beliebigen Nähe eines Punktes $P(xyz)$ Punkte gibt, die durch Lösungen der Gleichung $dQ = 0$ nicht erreichbar sind, so hat er einen integrierenden Nenner.

Wir fügen noch hinzu, daß es dann auch unendlich viele integrierende Nenner gibt, die aus einem von ihnen nach der Formel (13) gebildet werden können.

Alle diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf Pfaffsche Differentialausdrücke von mehr als 3 Veränderlichen übertragen.

§ 6. Der zweite Hauptsatz.

Bis hierher unterscheidet sich unsere Darstellung der Thermodynamik nicht wesentlich von der traditionellen, nur daß wir etwas schärfere Begriffsbildungen anstrebten. Der eigentliche Unterschied tritt erst jetzt bei der Aufstellung des zweiten Hauptsatzes hervor. Natürlich ist der Ausgangspunkt genau derselbe, nämlich die Erfahrungstatsache, daß gewisse Prozesse unmöglich sind; aber schon in der Formulierung dieser Tatsache und noch mehr in der Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus ihr gehen die beiden Darstellungen auseinander. Um den Vergleich zu erleichtern, schicken wir eine Skizze der gewöhnlichen Theorie voraus, die wir so knapp und so streng wie möglich formulieren.

I. Die traditionelle Darstellung.

Die empirische Grundlage wird gewöhnlich als eines der Prinzipien von Clausius und von Thomson ausgesprochen, welche lauten:

Prinzip von Clausius: Es gibt keine Vorrichtung, welche gestattet, Wärme aus einer kälteren Wärmequelle in eine heißere überzuführen, derart, daß dabei weder mechanische Arbeit geleistet würde noch mit den beteiligten Körpern sonstige Veränderungen eintreten.

Prinzip von Thomson: Es gibt keine Vorrichtung, welche gestattet, einer Wärmequelle Wärme zu entziehen und in Arbeit zu verwandeln, ohne daß mit den beteiligten Körpern noch andere Veränderungen vor sich gehen (Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zweiter Art).

Beide Prinzipien sind einander völlig äquivalent. Man betrachtet nun einen Carnotschen Kreisprozeß; gewöhnlich beschränkt man sich dabei auf einfache Gase, bei denen alle Prozesse als Kurven in der pV-Ebene gedeutet werden können, aber zur allgemeinen Ableitung des zweiten Hauptsatzes genügt das natürlich nicht. Wohl aber kann man sich auf Systeme mit 3 unabhängigen Veränderlichen beschränken, weil eine weitere Vermehrung der Variabeln keine neuen Überlegungen erfordert. Dann ist der Zustandsraum dreidimensional; Zustände derselben Temperatur liegen auf Flächen $\vartheta =$ konst.

Aus einer beliebigen anderen Fläche F schneiden diese Isothermenflächen eine einparametrige Isothermenschar heraus; zugleich wird diese zweidimensionale Fläche F von einer einparametrigen Schar von Adiabaten, d. h. Lösungen der Pfaffschen Differentialgleichung $dQ = 0$, bedeckt. Das von zwei Isothermen ϑ_1 und ϑ_2 und von zwei Adiabaten gebildete, krummlinige Viereck in der Fläche F stellt einen Carnotschen Kreisprozeß dar; man kann diesen näherungsweise verwirklichen, indem man das System zuerst mit einer sehr großen Wärmequelle W_1 von der praktisch konstanten Temperatur ϑ_1 in Berührung bringt, es dann adiabatisch beeinflußt, bis seine Temperatur ϑ_2 ist, sodann es mit einer zweiten Wärmequelle W_2 von der Temperatur ϑ_2 in Berührung bringt und es schließlich adiabatisch zum Ausgangszustand zurückkehren läßt. Ist A die vom System bei dem ganzen Kreisprozeß geleistete Arbeit, Q_1 die von W_1 aufgenommene, Q_2 die von W_2 abgegebene Wärme, so ist nach dem ersten Hauptsatze

$$A = Q_2 - Q_1.$$

Ist $\vartheta_1 < \vartheta_2$, so bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_1} - 1 \qquad (16)$$

als „Wirkungsgrad" der durch das System mit den Wärmequellen gebildeten „Maschine".

Sodann folgt aus einem der Prinzipe von Clausius oder von Thomson, daß der

Wirkungsgrad bei gegebenen ϑ_1, ϑ_2 nicht nur von der Art des Carnotschen Kreisprozesses bei ein und demselben System unabhängig ist, sondern auch für verschiedene Systeme, die zwischen denselben Wärmequellen arbeiten, denselben Wert hat. Dazu betrachtet man einen zusammengesetzten Vorgang, bei dem eine Maschine einen Carnotschen Prozeß im einen Sinne, eine andere im andern Sinne durchläuft und richtet es so ein, daß entweder die Arbeiten gleich sind, $A = A'$, oder die dem kühleren Wärmebehälter W_1 zugeführten Wärmemengen, $Q_1 = Q_1'$. Wäre nun

$$\frac{A}{Q_1} > \frac{A'}{Q_1'},$$

so folgte aus $A = A'$ sogleich $Q_1 - Q_1' < 0$ und $Q_2 - Q_2' < 0$, d. h. dem kälteren Behälter würde Wärme entzogen und dem wärmeren zugeführt; und aus $Q_1 = Q_1'$ folgte $A - A' > 0$ und $Q_2 - Q_2' > 0$, d. h. das System würde Arbeit leisten allein auf Kosten des Wärmeinhalts von W_2. Wäre aber

$$\frac{A}{Q_1} < \frac{A'}{Q_1'},$$

so würde die Betrachtung des umgekehrten Prozesses dieselben Widersprüche gegen die Prinzipien von Clausius oder von Thomson liefern.

Folglich muß

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = G(\vartheta_1, \vartheta_2) \tag{17}$$

eine universelle Funktion der beiden Temperaturen ϑ_1, ϑ_2 der Wärmequellen sein, unabhängig von der Art des Systems, der gewählten Fläche F und der beiden Adiabaten.

Setzt man nun $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2 = \vartheta + \Delta\vartheta$ und läßt man $\Delta\vartheta$ gegen Null konvergieren, so erhält man, weil offenbar $G(\vartheta, \vartheta) = 0$ ist:

$$\frac{dQ}{Q} = g(\vartheta)\, d\vartheta,$$

wo zur Abkürzung

$$g(\vartheta) = \left(\frac{\partial G(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial \vartheta_2}\right)_{\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta}$$

gesetzt ist; auch $g(\vartheta)$ ist eine universelle Funktion von ϑ. Daraus folgt für die auf einer Isotherme dem System zugeführte Wärme

$$Q = \Psi e^{\int g(\vartheta)\, d\vartheta}, \tag{18}$$

wo Ψ von den Bestimmungsstücken der beiden Adiabaten abhängt und für jedes System verschieden sein kann.

Nun betrachtet man insbesondere eine einfache Flüssigkeit, deren Zustand durch zwei Variable bestimmt wird; dann hat der Pfaffsche Differentialausdruck der Wärme einen integrierenden Nenner, $dQ = \lambda d\varphi$, und man kann neben ϑ die Größe φ als unabhängige Veränderliche wählen. Jetzt kann Ψ nur von den Parametern φ_1, φ_2 der beiden Adiabaten des Carnotschen Prozesses abhängen; setzt man nun $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi$ und läßt $\Delta\varphi$ gegen Null konvergieren, so erhält man mit Rücksicht darauf, daß offenbar $\Psi(\varphi, \varphi) = 0$ ist:

$$dQ = \Phi(\varphi)\, d\varphi\, e^{\int g(\vartheta)\, d\vartheta},$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi(\varphi) = \left(\frac{\partial \Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2}\right)_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}$$

gesetzt ist.

Man führt nun die absolute Temperatur

$$T = C e^{\int g(\vartheta)\, d\vartheta} \tag{61}$$

ein, wo die Konstante C dadurch festgelegt ist, daß man für irgend zwei Fixpunkte den absoluten Temperaturunterschied vorschreibt, etwa gleich 100^0 setzt.

Ferner definiert man die Entropie

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi(\varphi)\, d\varphi \tag{20}$$

und erhält dann die übliche Formulierung des zweiten Hauptsatzes:

$$dQ = T dS. \tag{21}$$

Aber diese Formel gilt zunächst nur für einfache Flüssigkeiten mit 2 Veränderlichen; ihre Ausdehnung auf beliebige Systeme erfordert noch besondere Überlegungen. Es genügt wieder die Betrachtung des Falles von 3 Veränderlichen, wo bereits die Existenz eines integrierenden Nenners nicht trivial ist. Zunächst kann man den Wirkungsgrad eines beliebigen Systems durch die absolute Temperatur ausdrücken; denn es gilt nach (18) und (19)

$$Q = \Psi \frac{1}{C} T,$$

und da Ψ für die beiden Isothermen des Carnotschen Kreisprozesses denselben Wert hat, so folgt

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

oder

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Hierfür kann man schreiben, daß das Linienintegral über einen Carnotschen Kreisprozeß

$$\int_C \frac{dQ}{T} = 0$$

ist.

Dasselbe gilt aber für jede stetige, geschlossene Kurve K; denn legt man durch diese eine Fläche F, so kann man in F ein Netz von Isothermen und Adiabaten konstruieren, und es ist offenbar

$$\int\limits_K \frac{dQ}{T} = \lim \Sigma \int\limits_C \frac{dQ}{T},$$

wo die Summenglieder den einzelnen Carnotschen Prozessen des Netzes innerhalb der Kurve K entsprechen und der Grenzprozeß den Übergang zu unendlich engen Netzmaschen bedeutet. Folglich ist für jede geschlossene Kurve

$$\int\limits_K \frac{dQ}{T} = 0,$$

d. h. das von einem Punkte aus nach einem zweiten auf irgendeinem Wege erstreckte Integral

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

ist vom Wege unabhängig, also eine Zustandsfunktion.

In derselben Weise läßt sich allgemein beweisen, daß die absolute Temperatur für jedes thermodynamische System integrierender Nenner des Differentials der Wärme ist.

(Schluß folgt.)

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1921.

Universität Basel. **Hagenbach**: Experimentalphysik I; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht); Physikalisches Kolloquium. — **Bernoulli**: Allgemeine physikalische Chemie: Photochemisches Praktikum; Physikalisch-chemisches Praktikum; Chemisches Kolloquium (mit Rupe, Fichter und Ruggli). — **Matthies**: Theorie der elektromagnetischen Felder, mit Übungen; Vektor- und Tensor-Analysis; Mathematisch-physikalisches Seminar: Praktische und repetitorische Übungen aus der analytischen Mechanik der Theorie deformierbarer Medien und der Wärmelehre. — **Veillon**: Elementare Übungen in mathematischer Physik; Handfertigkeitspraktikum (mit Zickendraht). — **Zickendraht**: Farbenlehre in allgemeinverständlicher Darstellung; Repetitorium der Physik. — **Zehnder**: Geschichte der Physik: Mechanik, Akustik, Wärme; Übersicht über die Maschinentechnik; Exkursionen in technische Großbetriebe. —

Universität Berlin. **Rubens**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Mathematische Ergänzung; Kolloquium, für Fortgeschrittene (mit v. Laue); Physikalische Forschungsarbeiten für Geübtere (mit Wehnelt, Westphal und Pringsheim. — **Planck**: System der theoretischen Physik; Mathematisch-physikalische Übungen. — **Wehnelt**: Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittenere (mit Pringsheim); Praktische Übungen für Anfänger (mit Blasius), II: Elektrizität und Magnetismus, für Pharmazeuten; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik. — **Hellmann**: Meteorologische Instrumente und Beobachtungen; Meteorologisches Kolloquium für Vorgerücktere. — **v. Laue**: Mechanik der deformierbaren Körper; Physikalisches Proseminar (mit Einstein und Westphal); Mathematisch-physikalische Übungen. — **Hergesell**: Die Strahlungsverhältnisse der Atmosphäre. — **Schmidt**: Graphische Methoden mit geophysikalischen Anwendungen; Luftelektrizität. — **Schweydar**: Schwerkraft und Erdgestalt. — **Warburg**: Kathodenstrahlen und andere elektrische Konvektionsstrahlen. — **Blasius**: Praktische Übungen für Anfänger (mit Wehnelt) I: Mechanik, Schall, Wärme und Licht, Übungen. — **Guthnick**: Photographie der Gestirne; Astronomisches Kolloquium (mit Kohlschütter). — **E. Meyer**: Technische Mechanik, Übungen. — **Neesen**: Geometrische Optik. — **Riesenfeld**: Elektrochemie und technische Anwendungen. — **Byk**: Absolutes Maßsystem und Dimensionen. — **Fock**: Physikalische Chemie; Kristallchemie. — **Gehrcke**: Elemente der höheren Mathematik. — **Grüneisen**: Elektrische Erscheinungen in Metallen. — **Hahn**: Radioaktive Untersuchungen. — **Henning**: Einführung in die Mechanik. — **Kiebitz**: Elektrische Schwingungen. — **Krigar-Menzel**: Theorie des Lichts. — **Marcuse**: Luftschiffahrt, mit Lichtbildern; Allgemeine Himmelskunde, mit Lichtbildern und Fernrohrbeobachtungen. — **Pringsheim**: Elektrische Entladungsvorgänge in Gasen. — **Reiche**: Moderne Atomtheorien. — **Witt**: Optik des Fernrohrs; Übungen am Fernrohr. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie; Wissenschaftliche Grundlagen der Mikroskopie. —

Technische Hochschule Berlin. **Cranz**: Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Physik. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente; Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik; Elektromagnetismus und Induktion mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik; Grundzüge der Elektrochemie. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie. — **Krigar-Menzel**: Theorie des Lichtes; Theorie der Wärmeleitung und der Strahlung. — **Kurlbaum**: Experimentalphysik; Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben. — **Berndt**: Technische Längenmessungen und Meßgeräte. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen II; Die Meßinstrumente des Chemikers. — **Gehlhoff**: Elektronentheorie der Metalle. — **Kassner**: Der Wind nach Entstehung, Messung und Ausnutzung für technische Zwecke. — **Kock**: Methoden zur Aufnahme von schnell verlaufenden elektrischen und magnetischen Erscheinungen: Oszillographen usw.; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie. — **Lichtenstein**: Funktionentheorie II: Ausführung der Theorie, Anwendungen. — **Luyken**: Der Erdmagnetismus und seine Anwendung. — **Möller**: Physikalische Probleme aus Fernsprechtechnik und Meßinstrumentenbau. — **Petzoldt**: Positivistische Weltanschauung. — **Pirani**: Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung graphischer Verfahren. — **Weidert**: Die optischen Bildfehler und ihre Behebung. — **Miethe**: Spektralanalyse; Photochemie und photochemische Prozesse; Konstruktionstypen photographisch-optischer Instrumente; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen. —

Universität Bern. **Forster**: Experimentalphysik I: Allgemeine Physik, Akustik, Optik; Wärmelehre (Schluß); Repetitorium der Physik; Physikalisches Praktikum; Arbeiten im physikalischen Institut, für Vorgerückte; Physikalisches Praktikum für Mediziner. — **Gruner**: Einführung in die Relativitätstheorie; Analytische Mechanik, mit Übungen; Seminar für theoretische Physik. — **Luterbacher**: Dynamik I; Meteorologie. — **Blattner**: Elektrische Bahnen (Fortsetzung). — **Köstler**: Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik; Einführung in die Hochspannungs-Elektrotechnik; Anwendung der höheren

Mathematik auf die Naturwissenschaften II; Zweifach statisch unbestimmte Systeme. —

Universität Bonn. **Konen**: Experimentalphysik II; Laboratorium für Anfänger; Praktikum für Fortgeschrittene; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Eversheim, Grebe). — **Pflüger**: Theorie des Lichtes; Übungen. — **Bucherer**: Die neueste Entwicklung der Physik. — **Eversheim**: Elektrische Meßinstrumente; Grundzüge der Elektrotechnik. — **Grebe**: Röntgenphysik für Mediziner und Physiker. —

Universität Breslau. **Lummer**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler (mit Waetzmann, Ladenburg und Buchwald), für Mediziner (mit Waetzmann und Ladenburg), für Pharmazeuten (mit Waetzmann und Buchwald), für Geübtere (mit Waetzmann, Ladenburg und Buchwald); Physikalisches Kolloquium (mit Waetzmann und Ladenburg). — **Schrödinger**: Allgemeine Thermodynamik; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar; Dynamik der Atomstruktur. — **Waetzmann**: Die physikalischen Grundlagen der Leuchttechnik. — **Ladenburg**: Theorie der optischen Abbildung der optischen Instrumente. — **Buchwald**: Maß und Messen in der Physik. —

Technische Hochschule Breslau. **Lummer**: Experimentalphysik II; Physikalisches Praktikum. —

Technische Hochschule Danzig. **N. N.**: Experimentalphysik II; Kleines physikalisches Praktikum; Großes physikalisches Praktikum; Schwankungserscheinungen in der Physik. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum; Optik; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, mit Übungen; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten. — **v. Brunn**: Potentialtheorie; Elemente der Meteorologie. — **Försterling**: Elektromagnetische Schwingungen, mit Experimenten. — **Reinkober**: Röntgenstrahlen; Physikalische Meßtechnik und Meßmethoden; Handfertigkeitspraktikum. —

Technische Hochschule Dresden. **Hallwachs**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität; Physikalisches Praktikum I, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene; Praktikum für größere physikalische Arbeiten. — **Dember**: Beziehungen zwischen Elektrizität, Magnetismus und Licht vom Standpunkte der Elektronentheorie. — **Luther**: Photochemie; Photographisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene; Selbständige Arbeiten; Kolloquium über Sensitometrie (mit Goldberg). — **Erich Müller**: Physikalische Chemie I; Praktikum für Elektrochemie; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und Physikalischen Chemie. — **Toepler**: Theoretische Physik I: Mechanik, elastische Schwingungen, Übungen; Optik, Interferenz und Beugung. —

Universität Erlangen. **Wiedemann**: Experimentalphysik; Wärme, Akustik, Optik; Physikalisches Anfängerpraktikum, Halbpraktikum und Vollpraktikum. — **Reiger**: Allgemeine Mechanik; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik; Elektrotechnisches Praktikum (mit Frank). — **Würschmidt**: Einführung in die Wetterkunde; Physik der Legierungen; Vektorenrechnung. — **Hauser**: Photographie mit Übungen; Anwendung der Elektrizität. — **Frank**: Physikalische Chemie: Thermo- und Elektrochemie. —

Universität Frankfurt a. M. **Wachsmuth**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Radioaktivität; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum für Anfänger und Fortgeschrittene; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten. — **Madelung**: Prinzipien der Physik; Theorie des Lichts; Seminar über neuere Probleme der Physik (mit Stern und Landé). — **Stern**: Theorie der Wärme: Wärmeleitung und Thermodynamik. — **Landé**: Relativitätstheorie in elementarer Darstellung; Quantentheorie. — **Gerlach**: Höhere Experimentalphysik I: Elektromagnetische Strahlung; Neuere Anschauungen über Atom- und Molekülbau. — **Seddig**: Über optische Projektionen und Demonstrationstechnik, mit Übungen; Projektionsübungen und Übungen im Anstellen von Vorlesungsversuchen; Photographisches Praktikum; Wissenschaftlich-photographische Leitung selbständiger Arbeiten. — **Déguisne**: Wechselstrom; Wechselstrom-Messungen; Einführung in die drahtlose Telegraphie; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik (mit Dessauer); Kleines elektrotechnisches Praktikum; Großes elektrotechnisches Praktikum; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Dessauer**: Bau und Betrieb von Röntgenapparaten; Einführung in die physikalischen Grundlagen der Medizin II; Medizinische Elektrizitätslehre; Seminar für medizinische Physik: Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten (mit Bachem); Wissenschaftliche Arbeiten für Physiker und Mediziner. — **Gramberg**: Maschinenkunde II: Technische Einrichtung in chemischen Fabriken. — **Bachem**: Licht- und Wärmestrahlen in ihrer Beziehung zur Medizin. — **Linke**: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Meteorologie; Meereswellen, Ebbe und Flut; Meteorologisch-geophysikalische Übungen (mit Georgii). — **Georgii**: Spezielle Klimatologie, Europa und Mittelmeerländer. —

Universität Freiburg i. Br. **Himstedt**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, Elektrooptik; Übungen aus der theoretischen Physik; Physikalisches Kolloquium; Anleitung zu selbständigen Arbeiten; Physikalisches Praktikum. — **Cohn**: Partielle Differentialgleichungen der theoretischen Physik; Übungen aus der theoretischen Physik. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik: Elemente der Mechanik und Hydrodynamik, mit Übungen; Repetitorium der mathematischen Physik, mit Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten; Elemente der Geophysik, mit Übungen; Neuere Fortschritte der Geophysik; Kanal- und Alphastrahlen und die Struktur der Materie, mit Demonstrationen. — **Friedrich**: Moderne Atomistik; Physik der Elektro- und Strahlen-Therapie mit Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Meyer**: Physikalische Chemie; Photographie mit Demonstrationen und Übungen; Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf physikalische und chemische Probleme; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten. —

Universität Freiburg (Schweiz). **Joye**: Allgemeine Physik II: Wärme; Mathematische Physik, Thermodynamik; Praktisch physikalische Übungen für Anfänger; Physikalisches Laboratorium für Fortgeschrittene; Untersuchungsarbeiten im Laboratorium. — **Gockel**: Experimentalphysik II; Physik der Atmosphäre II: Sonnenstrahlung und Luftelektrizität; Physikalisches Praktikum; Übungen aus dem Gebiete der Radioaktivität, Elektrizität und Elektronik; Arbeiten im Laboratorium für Geübtere. —

Universität Gießen. **König**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum (mit Uller und Cermak); Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak); Physikalisches Kolloquium (mit Fromme). — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum; Kinetische Gastheorie. — **Uller**: Elementare technische Mechanik II. — **Jentzsch**: Die moderne Leuchttechnik, ihre Grundlagen, Ziele und Grenzen. — **Fromme**: Thermodynamik; Theoretisch-physikalische Übungen. — **Peppler**: Grundzüge der Meteorologie; Aerologie und die Methoden der Erforschung der freien Atmosphäre. — **Schaum**: Einführung in die allgemeine und physikalische Chemie; Besprechung wichtiger physikalisch-chemischer Fragen; Chemisch-mikroskopische Übungen: Ultramikroskopie, Polarisationsmikroskopie usw.; Physikalisch-chemische Übungen; Physikalisch-chemisches Praktikum. — **Stintzing**: Physikalisch-chemische Methoden. —

Universität Graz. **Benndorf**: Experimentalphysik IV: Optik; Physikalische Übungen für Anfänger; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vor-



geschrittene, Besprechung physikalischer Fragen (mit Radaković). — **Hess**: Experimentalphysik II. — **Streintz**: Die Wärmesätze in ihrer Anwendung auf Probleme der Chemie. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche. — **Wassmuth**: Anwendungen der statistischen Mechanik. — **Radaković**: Theorie der Strahlung; Seminar für theoretische Physik. — **Brell**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. — **Hillebrand**: Praktische Astronomie; Interpolationsrechnung und numerische Integration. — **Ficker**: Allgemeine Klimatologie; Luftelektrizität; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. —

Universität Greifswald. **Krüger**: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärmelehre; Praktikum für Naturwissenschaftler; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen; Physikalisches Kolloquium (mit Bestelmeyer und Seeliger). — **Seeliger**: Theoretische Optik; Differentialgleichung der Physik; Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen. —

Universität Halle. **Mie**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Mathematische Ergänzungen; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler; Kleines physikalisches Praktikum; Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten. — **Schmidt**: Theoretische Optik; Übungspraktikum für angewandte Physik; Physikalisches Kolloquium; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Herweg**: Ausgewählte neuere Kapitel aus der Wärmelehre und Optik, mit Experimenten; Praktische Übungen aus den modernen Forschungsgebieten. — **Wigand**: Luftelektrizität; Aerophysikalisches Praktikum: Meteorologie, Aerologie, atmosphärische Elektrizität und Strahlung. —

Universität Hamburg. **Koch**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik; Physikalisches Praktikum (mit Goos und Müller); Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen (mit Möller, Tams, Goos, Jensen, Classen und Voege). — **N. N.**: Wärmestrahlung. — **Möller**: Quantentheorie und ihre Beziehungen zur Strahlungstheorie und zum Atombau als Einleitung in die moderne theoretische Physik. — **Goos**: Die Photographie als Forschungsmittel. — **Voege**: Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Elektrizitätslehre. — **Schorr**: Bahnbestimmung der Himmelskörper II, mit Übungen; Astronomisches Praktikum: Zeit- und Ortsbestimmung (mit Dolberg), Übungen in astronomischen Beobachtungen für Fortgeschrittene (mit Dolberg). — **Schwassmann**: Photometrie der Gestirne. — **Dolberg**: Einführung in die Geodäsie; Geodätische Übungen. — **Wegener**: Aerologie. — **Jensen**: Die Lichterscheinungen der Atmosphäre in ihrer Beziehung zu Vulkanausbrüchen und zur Sonnentätigkeit. — **Tams**: Geophysikalische Fragen der Gebirgsbildung und des Vulkanismus. —

Universität Heidelberg. **Lenard**: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Ramsauer); Physikalisches Seminar: Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker und Ramsauer). — **Becker**: Wärmetheorie; Kinetische Gastheorie; Besprechung theoretisch-physikalischer Fragen. — **Ramsauer**: Radiologie; Die Korpuskularstrahlungen mit Demonstrationen. — **Rasch**: Aus dem Anwendungsgebiet der Elektrizitätslehre II. —

Universität Innsbruck. **Schweidler**: Experimentalphysik II; Einführung in die messende Physik II; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene. — **Lerch**: Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der Elektrizität; Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der Wärmelehre. — **Hammerl**: Elektrotechnik II: Über Transformatoren, ein- und mehrphasige Wechselstrommaschinen und Motoren. — **Scheller**: Astrophotometrie; Praktische Übungen auf der Sternwarte. — **Tumlirz**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar. — **Defant**: Synoptische Meteorologie: Wetter und Wettervorhersage; Erdmagnetismus. —

Universität Jena. **Wien**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum für Mathematiker, Physiker, Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Landwirte (mit Busch), für Fortgeschrittene (mit Schumann und Busch); Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel und Busch); Physikalisches Kolloquium. — **Busch**: Experimentalphysik III, für Fortgeschrittene: Mechanik, Akustik, Wärme. — **Auerbach**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Entwicklungsgeschichte der Physik, zugleich als Übersicht der Tatsachen, Gesetze und Theorien. — **N. N.**: Elektronentheorie II. — **Ambronn**: Einführung in die Theorie des Mikroskops mit Übungen; Benutzung des Polarisationsmikroskops bei histologischen Untersuchungen (mit Siedentopf). — **Siedentopf**: Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie mit Übungen. — **Hecker**: Praktische geophysikalische Arbeiten für Fortgeschrittene. — **Schumann**: Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik II; Theorie der Wechselströme; Kleines technisch-physikalisches Praktikum; Großes technisch-physikalisches Praktikum. —

Universität Kiel. **Dieterici**: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizität, Magnetismus; Physikalisches Praktikum für Anfänger und Doktoranden. — **N. N.**: Theoretische Physik. — **Martienssen**: Mechanische und elektrische Schwingungen und ihre technischen Anwendungen. — **Schmidt**: Wärmestrahlung, mit Experimenten. — **Harzer**: Mechanik des Himmels; Mathematische Instrumente. — **Kobold**: Einleitung in die höhere Geodäsie; Geodätische Übungen. — **Wirtz**: Spektralanalyse und Strahlung der Gestirne; Kometen und Meteore. —

Tagesereignisse.

Preisaufgaben der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig. Einlieferung bis 31. Oktober 1922, Preis 2000 M. „Eine theoretische Ableitung des Rayleighschen Himmelsblau, wobei auch die Auslöschung der Strahlen die gegenseitige Widerspiegelung des Himmels und der Erde zu berücksichtigen sind. Darüber hinaus ist auch die Berechnung der Himmelshelligkeit in der Nähe der Sonne unter dem Einfluß der Beugung durch gröbere Teilchen erwünscht, ferner die Bestimmung des Einflusses dieser Helligkeit auf den übrigen Himmel, und soweit das möglich ist, ein Vergleich der in dieser Weise vereinfachten Theorie der Himmelshelligkeit mit der Erfahrung". Bezüglich alles Näheren vergleiche den Jahresbericht der Gesellschaft.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Leiter der chemischen Abteilung am Georg Speyer-Haus in Frankfurt a. M. Dr. Arthur Binz zum ord. Professor der Chemie an der landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für anorganische und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Aachen Geh. Regierungsrat Dr. Alexander Classen, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Hannover Geh. Regierungsrat Dr. Ludwig Kiepert, der Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam Geh. Regierungsrat Professor Dr. Gustav Müller.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

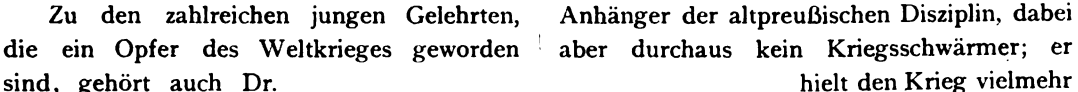
PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. | 1. Mai 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 11 am 10. Mai 1921.

INHALT:

Erich Hübner.



Zu den zahlreichen jungen Gelehrten, die ein Opfer des Weltkrieges geworden sind, gehört auch Dr. Gustav Johannes Erich Hübner, der beim Ausbruch des Krieges Assistent am Preußischen Geodätischen Institut war. Er wurde am 7. August 1886 in Lübben geboren, als ältester Sohn von Herrn Gustav Hübner, der jetzt am gleichen Institut als wissenschaftlicher Rechner und Hilfskraft des Bibliothekars tätig ist. Er besuchte das humanistische Victoriagymnasium in Potsdam von 1895—1905 und studierte dann an der Berliner Universität Mathematik, Physik, Astronomie und Geodäsie. Inzwischen genügte er auch seiner Militärpflicht als Einjährig-Freiwilliger und wurde zum Leutnant befördert. Er war mit Leib und Seele Soldat und ein begeisterter



Anhänger der altpreußischen Disziplin, dabei aber durchaus kein Kriegsschwärmer; er hielt den Krieg vielmehr für ein großes Unglück. Mit Begeisterung zog er ins Feld, doch bereitete das Versagen der Feldpost in den ersten Kriegswochen ihm, der mit inniger Liebe an Eltern und Geschwistern hing, großen Kummer. Im September erhielt er einen leichten Streifschuß am Kopfe; seit dem 5. Oktober 1914, wo er in einem Gefecht um den Wald bei Les Loges Verstärkungen heranführte, wird er vermißt, und es ist durch Aussagen von Mitkämpfern festgestellt, daß er dort den Heldentod gefunden hat. Sein etwas impulsives Temperament brachte ihm gelegentlich Unannehmlichkeiten, doch konnte ihm bei seinem auf alles Edle und Gute gerichteten

Charakter niemand dauernd gram sein. Er war ein großer Naturfreund; auch besaß er nicht unbeträchliches mechanisches Geschick; u. a. konstruierte er eine Rechenmaschine mit 11 (statt wie gewöhnlich 10, in Japan 6) Kugeln auf jedem Stäbchen, die zum Patent angemeldet und auch angenommen war, doch vereitelte sein Tod die Ausnützung des Patents.

Ostern 1910 machte ihn der Institutsdirektor Helmert zu seinem persönlichen Assistenten. Als solcher beschäftigte er sich hauptsächlich mit der Theorie und Praxis der isostatischen Reduktion der Schwerkraft; auch seine Doktorarbeit, auf Grund deren er am 15. März 1913 in Berlin zum Doktor promoviert wurde, ist diesem Gebiet entnommen. Er gibt darin Formeln für die Anziehung eines sphärischen Hohlzylinders auf den Stationspunkt, und zeigt, daß sie innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen mit den von Helmert in seinem Enzyklopädieartikel gegebenen übereinstimmen. Auch macht er, wie schon etwas vorher Schiötz, darauf aufmerksam, daß man in unmittelbarer Nähe der Station eigentlich nicht isostatisch, sondern topographisch reduzieren muß. Zur praktischen Bestimmung der isostatischen Reduktion berechnete er nach den Helmertschen Formeln Tabellen, die jedoch nur für eine Station im Meeresniveau völlig genau sind und deshalb vom Verfasser vorliegenden Nachrufes für alle in Betracht kommenden Seehöhen ergänzt wurden. Um sich die Unterlagen zu den isostatischen Reduktionen zu verschaffen, arbeitete er mehrere Wochen im Geographischen Institut der Berliner Universität, wo er die Überzeugung gewann, daß die Höhenangaben der außereuropäischen Länder meist noch außerordentlich lückenhaft sind, und daß unsere Kenntnis der Tiefenverhältnisse des Weltmeeres auf noch schwächeren Füßen steht. Die Ergebnisse, zu denen er gelangt ist, sind vom Verfasser dieser Zeilen zusammen mit seinen eigenen in den Astronomischen Nachrichten (Bd. **207**, Nr. 5067) veröffentlicht und diskutiert.

Weiterhin machte er für den Institutsdirektor selbst sowie für das Werk von Geheimrat Kühnen über das Mittelwasser der Ostsee verschiedene Ausgleichungen; auch war er Herrn Prof. Förster bei seinen Beobachtungen über Lateralrefraktion behilflich. Zweifellos waren von ihm noch bedeutende eigene Leistungen zu erwarten, aber der Krieg sollte seiner wissenschaftlichen Laufbahn ein jähes Ende setzen.

Otto Meißner.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine Bemerkung zur Langevinschen Formel für die Suszeptibilität paramagnetischer Körper.

Von W. Alexandrow.

Bei der Ableitung der Langevinschen Formel wird gewöhnlich in der Verteilungsfunktion nur die potentielle Energie berücksichtigt, da die kinetische Energie der Dipole auf das mittlere magnetische Moment offenbar keinen Einfluß hat. Jedoch muß, streng genommen (nach Gibbs), mit der Gesamtenergie gerechnet werden. Die Durchführung dieser Rechnung, die dann etwas komplizierter wird, zeigte, daß die Langevinsche Formel nur von einem endlichen Gebiet des Phasenraumes herrührt. Da dieses Verhalten kaum bemerkt worden sein dürfte, scheint es, namentlich in Rücksicht auf gewisse quantentheoretische Diskussionen[1]) von Interesse, diese Rechnung hier kurz mitzuteilen.

Die Gesamtenergie eines magnetischen Dipols sei

$$w = \frac{p_\vartheta^2}{2I} + \frac{p_\varphi^2}{2I\sin^2\vartheta} + 2mH\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

1) F. Reiche, Ann. d. Phys. **58**, 657, 1919.



φ, ϑ sind sphärische Koordinaten; p_φ, p_ϑ die zugehörigen verallgemeinerten Impulse; I das Trägheitsmoment, m das magnetische Moment eines Moleküls; H das äußere Feld.

Um die Ausrechnung mit der Gesamtenergie zu führen, muß man das Integral, welches nach der statistischen Mechanik den Mittelwert $\overline{\cos\vartheta}$ liefert, zunächst für ein endliches Gebiet des Phasenraumes auswerten, welches durch eine beliebige Fläche konstanter Energie $w = \omega$ begrenzt wird, und dann $\omega \to \infty$ konvergieren lassen. Nun wird man aber dabei feststellen, daß dieses Integral von einem bestimmten Werte von w an (nämlich $w = 2mH$) sich überhaupt nicht mehr ändert. Führen wir nämlich folgende Bezeichnungen ein (T absolute Temperatur, k die Boltzmannsche Konstante):

$$\left|\begin{aligned} I_\omega &= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{w=0}^{w=\omega} \cos\vartheta\, e^{-\frac{w}{kT}}\, d\varphi\, d\vartheta\, dp_\varphi\, dp_\vartheta, \\ K_\omega &= \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{w=0}^{w=\omega} e^{-\frac{w}{kT}}\, d\varphi\, d\vartheta\, dp_\varphi\, dp_\vartheta, \end{aligned}\right.$$

so ist der Mittelwert von $\cos\vartheta$ in dem Gebiete, das durch die Fläche $w = \omega$ begrenzt wird:

$$\overline{\cos\vartheta}_{(\omega)} = \frac{I_\omega}{K_\omega}. \tag{1}$$

Man hat unter Benutzung der Formel

$$\int\!\!\int_{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq \omega\right)} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dx\, dy = \pi ab\left(1 - e^{-\omega}\right)$$

zunächst:

$$K_\omega = 4\pi^2 IkT \cdot \frac{kT}{mH} \cdot \left(1 - e^{-2\frac{mH}{kT}}\right) + \\ + 8\pi^2 IkT e^{-\frac{w}{kT}},$$

also

$$K_\infty = 4\pi^2 IkT \cdot \frac{kT}{mH} \cdot \left(1 - e^{-2\frac{mH}{kT}}\right). \tag{2}$$

Wenn wir aber I_ω berechnen, so bemerken wir, daß sobald man in ϑ zwischen 0 und π integrieren darf — also sobald die Fläche konstanter Energie $w = \omega$ das erste an der Ebene $\vartheta = \pi$ heranreichende, durch die Fläche $w = 2mH$ begrenzte Gebiet des Phasenraumes (ϑ, p_ϑ, p_φ) schon enthält, — der Wert von I_ω nicht mehr von ω abhängt. Es ist nämlich dann:

$$I_\omega = 2\pi \int_0^\pi \cos\vartheta\, e^{-2\frac{mH}{kT}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} d\vartheta \int\!\!\int_{\left\{\frac{p_\vartheta^2}{2IkT}+\frac{p_\varphi^2}{2IkT\sin^2\vartheta} \leq \frac{\omega}{kT} - 2\frac{mH}{kT}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right\}} e^{-\left(\frac{p_\vartheta^2}{2IkT}+\frac{p_\varphi^2}{2IkT\sin^2\vartheta}\right)} dp_\varphi\, dp_\vartheta$$

$$= 4\pi^2 IkT \left| \int_0^\pi e^{-2\frac{mH}{kT}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta - e^{-\frac{\omega}{kT}} \int_0^\pi \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta \right|.$$

Hier ist nun das letzte Integral $= 0$ und I_ω ist in Wirklichkeit unter den erwähnten Bedingungen von ω unabhängig. Wir erhalten so $\left(x = \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} I_\omega &= 8\pi^2 IkT \int_0^1 e^{-2\frac{mH}{kT}x}(1 - 2x)\, dx \\ &= 4\pi^2 IkT \cdot \frac{kT}{mH}\left\{\left(1 - e^{-2\frac{mH}{kT}}\right)\left(1 - \frac{kT}{mH}\right) + 2e^{-2\frac{mH}{kT}}\right\}, \end{aligned}\right| \tag{3}$$

und es wird in der Tat, unter der Bedingung, daß die Integration in ϑ zwischen 0 und π ausgeführt wird, nach (1), (2), (3):

$$\overline{\cos\vartheta}_{(\omega)} = \frac{I_\omega}{K_\infty} = 1 - \frac{kT}{mH} + \frac{2e^{-2\frac{mH}{kT}}}{1 - e^{-2\frac{mH}{kT}}} \\ = \coth\frac{mH}{kT} - \frac{kT}{mH},$$

also die Langevinsche Formel, die auf diese Weise nur vom Bereich $w \leq 2mH$ des Phasenraumes herrührt.

Schreibt man, unter Hinzufügung einer Konstante $-2mH$, die Energie so auf:

$$w = \frac{p_\vartheta^2}{2I} + \frac{p_\varphi^2}{2I\sin^2\vartheta} - 2mH\cos^2\frac{\vartheta}{2},$$

so kann das Resultat als ein Satz der statistischen Mechanik folgendermaßen ausgesprochen werden:

Nur Moleküle, deren Gesamtenergie negativ ist, tragen zum Langevinschen Resultat bei; die Gesamtheit der übrigen erzeugt kein mittleres magnetisches Moment.

(Eingegangen 2. März 1921.)

Die Polarität einer Platinzelle.

Von Franz Streintz.

Als elektrolytische Wellenanzeiger werden zwei Elektroden aus Platindrähten, meist in Schwefelsäure verwendet, von denen die Anode aus einer feinen Spitze besteht. Wenn die Eignung zum Detektor an das Auftreten von Polarität gebunden ist, dann müßte diese auch an einer Platinzelle nachzuweisen sein. Über die galvanische Polarisation dieses Metalles liegt eine so große Zahl von Untersuchungen vor, daß es einigermaßen verwunderlich erscheinen müßte, wenn diese Eigenschaft noch von keinem Forscher aufgefunden worden wäre. Und trotzdem zeigen einfache Versuche, daß dieselben Erscheinungen, wie sie an den Grenzflächen von Kristallen und an einer Aluminiumzelle nachzuweisen waren[1], auch an Platin auftreten. Die scheinbar einfachen Beziehungen zwischen den Stromstärken nach beiden Richtungen und ihr Verhalten zum Potential der ladenden Kette sollten erst auf dem recht mühseligen Umweg über den Kristalldetektor aufgefunden werden! —

Die Methode war dieselbe, wie sie bei Untersuchung der Polarität der Aluminiumzelle in Anwendung gekommen war. An Stelle von Blechen aus diesem Metall traten Platinelektroden, als Elektrolyt diente Schwefelsäure, nunmehr von einer Dichte, wie sie beim Bleiakkumulator gebräuchlich ist. Eine aus zwei breiten Streifen bestehende geladene negative Akkumulatorplatte umgab ringsum die in entsprechenden Abständen in die Säure getauchten Platinelektroden, die aus Spitzen und Blechen von verschiedener Oberfläche bestanden. Diese Elektroden konnten durch geeignete Schaltung mit der Bleiplatte verglichen werden. Zu den Strommessungen trat für stärkere Ströme ein empfindliches Westonvoltmeter, für schwächere ein Drehspulen-Spiegelgalvanometer in Verwendung, die Spannungen an den Polen der Zelle wurden mit Hilfe eines Dolezalekschen Binantenelektrometers ermittelt.

Zunächst stellte es sich heraus, daß bei sonst unveränderter Anordnung die Stromstärke i_{21} die stärkere war, wenn Platin mit Wasserstoff beladen wurde. Die Stromrichtung soll als kathodische bezeichnet werden. Wird Sauerstoff an diesem Metall abgeschieden, so entsteht der schwächere anodische Strom i_{12}. Der Bruch $U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$ wird wieder als Strompolarität, sein Produkt mit der Spannung V der ladenden Kette als Leistungspolarität UV bezeichnet werden.

Bei den Messungen wurde der bereits erprobte Vorgang eingehalten. Zunächst wurde der kathodische Strom i_{21}, der mit Hilfe eines Rheostatenwiderstandes sorgfältig konstant gehalten worden war, durch eine Viertelstunde geschlossen belassen. Nur kurze Zeit nach erfolgtem Stromschlusse schwankte der Strom. Wenige Minuten später änderte er sich nicht mehr. Nach 15 Minuten erfolgte sofort der Stromwechsel nach i_{12}. Zunächst war meist $i_{12} > i_{21}$, eine Folge der Vereinigung beider Gase zu Wasser. Dann nahm der Strom erst langsam, bald rascher ab, um sich später etwa zwei Minuten ziemlich konstant zu halten. Endlich fiel er im Sturze ab, worauf er sich in den weiteren Minuten seinem Endwerte aperiodisch näherte. Nach einer Stromdauer von 10 Minuten trat meist entweder keinerlei Änderung oder doch nur eine sehr geringfügige ein, so daß man mit Sicherheit nach Verlauf der Viertelstunde den definitiven Endwert erhielt. Die beschriebene Art der Änderung des anodischen Stromes nach der Umkehrung tritt nur bei Elektroden von größerer Oberfläche auf und wird um so augenfälliger, je niedriger das Ladungspotential war.

Die zum Vergleiche dienende negative Akkumulatorplatte wurde von Zeit zu Zeit aufgeladen, der Vergleich mit Platin aber erst aufgenommen, wenn die Bleiplatte einen Tag lang sich selbst überlassen geblieben war.

Als Spitze wurde ein Platinfaden von 0,04 mm Durchmesser gewählt, der in ein zur Kapillare ausgezogenes Glasröhrchen eingeschmolzen war. Das in die Säure zu tauchende Ende wurde mit einer feinen Feile abgeschliffen, so daß mutmaßlich nur der Querschnitt des Fadens mit ihr in Verbindung stand. Als Elektroden von größerer Fläche kamen zwei gleich große Platinbleche von je 9,5×7,0 mm einseitiger Fläche in Verwendung. Ein Blech wurde blank belassen, das andere mit einer dichten Schicht von Platinschwarz überzogen. Durch diesen Überzug erhält bekanntlich die Elektrode eine bedeutend größere Oberfläche, als dies mit einer großen blanken Platte zu erzielen gewesen wäre. Außer diesen beiden kleinen Blechen stand noch ein größeres von 40×39 mm einseitiger Fläche zur Verfügung. Dieses wurde im blanken Zustande verwendet.

Die Versuche zeigten im Gegensatz zum Verhalten einer Aluminiumzelle, daß sich das Gesetz der Leistungspolarität in voller Klarheit ausprägte, während, wieder im Gegensatz zu diesem Metall, die Beziehungen zwischen den beiden Stromstärken sich weniger durchsichtig

1) Diese Zeitschr. **21**, 42, 316, 367 u. 477, 1920; **22**, 141, 1921.

gestalteten. Empfehlenswert ist in beiden Fällen, die Stromdichten möglichst herabzusetzen.

1. Das Gesetz der Leistungspolarität UV = konst.

Die Untersuchung der kleinen blanken Blechelektrode bei einer Säuredichte von 1,20 führte zu den in der Tabelle I angeführten Ergebnissen.

Tabelle I.

i_{21} = 0,01500 Weber					blankes Blech	
V Volt	R Ohm	i_{12} Weber	π_{12} Volt	π_{21} Volt	U	UV
8,12	515	0,01235	1,761	0,398	0,177	1,45
10,13	644	0,01300	1,761	0,501	0,133	1,35
12,22	787	0,01325	1,767	0,401	0,117	1,43
12,24	788	0,01330	1,755	0,412	0,113	1,39
14,35	936	0,01352	1,755	0,410	0,099	1,42
16,32	1074	0,01369	1,758	0,410	0,087	1,42
18,54	1207	0,01390	1,755	—	0,073	1,36
20,54	1337	0,01401	1,755	0,440	0,066	1,36
28,56	1871	0,01428	1,758	0,425	0,048	1,37
12,25	790	0,01329	1,758	0,425	0,114	1,40
						M = 1,40

Das Potential der ladenden Kette ist mit V bezeichnet; R ist der gesamte Drahtwiderstand, der Widerstand des Meßinstrumentes inbegriffen. Da die große Akkumulatorenbatterie des Hauses den Strom lieferte, so kann R als der gesamte Widerstand bis zu den Klemmen der Zelle angesehen werden. π_{12} und π_{21} geben die mit dem Elektrometer gefundenen Klemmenspannungen in der anodischen und kathodischen Richtung an. U bedeutet den als Strompolarität bezeichneten echten Bruch, UV die Leistungspolarität. Sieht man von dem ersten bei 8 Volt gefundenen Wert ab, so kann man behaupten, daß die **Leistungspolarität von 10 Volt aufwärts unveränderlich ist.** Die Messungen erfolgten in drei Tagesabschnitten. In jedem dieser Abschnitte wurden Vergleiche bei einer Spannung von 12 Volt angestellt.

Die Tabelle II enthält die Messungen, die am platinierten Bleche angestellt wurden.

Aus den Zahlen geht hervor: 1. Die Klemmenspannung π_{12} wächst zunächst mit der Ladungsspannung, um von 10 Volt aufwärts unveränderlich zu werden, die Klemmenspannung π_{21} dagegen ändert sich von 4 Volt an nicht mehr. Das negative Vorzeichen zeigt an, daß bei der geringen Stromdichte das mit Wasserstoff bedeckte Blech elektronegativ gegen die Bleiplatte war. 2. Die Strompolarität U nimmt mit der Spannungszunahme der polarisierenden Kette derart ab, daß die Leistungspolarität bei 2,27

Tabelle II.

i_{21} = 0,0100 Weber					platiniertes Blech	
V Volt	R Ohm	i_{12} Weber	π_{12} Volt	π_{21} Volt	U	UV
1,976	223,1	0,00070	1,847	— 0,224	0,930	1,84
4,008	430,3	0,00477	2,191	— 0,236	0,523	2,10
6,066	636,3	0,00640	2,006	— 0,233	0,360	2,18
8,16	842	0,00723	1,997	— 0,236	0,277	2,26
10,21	1050	0,00779	2,030	— 0,233	0,221	2,26
12,25	1251	0,00813	2,054	— 0,224	0,187	2,29
10,26	1050	0,00779	2,050	— 0,212	0,221	2,27
12,29	1256	0,00815	2,036	— 0,233	0,185	2,27
14,28	1455	0,00841	2,027	— 0,230	0,159	2,27
16,35	1657	0,00860	2,030	— 0,236	0,140	2,29
18,38	1861	0,00877	2,027	— 0,233	0,123	2,26
20,42	2071	0,00887	2,021	— 0,233	0,113	2,30
22,48	2276	0,00900	2,036	— 0,233	0,100	2,25
24,53	2481	0,00908	2,036	— 0,236	0,092	2,26
30,60	3087	0,00926	2,036	— 0,236	0,074	2,26
40,84	4119	0,00943	2,036	— 0,236	0,057	2,3
69,36	6952	0,00968	2,036	— 0,236	0,032	2,2

konstant wird. Nur bei Ladungen zwischen 2 und 8 Volt ist sie kleiner und nimmt erst rascher, dann langsamer zu. Bei $V = 10{,}2$ Volt ist $i_{12} = 0{,}00779$, bei 30,60 Volt ergibt sich für $i_{12} = 0{,}00926$. Da π_{12} unveränderlich ist, so folgt, daß **die an die Zelle in der Zeiteinheit abgegebenen Energien $i_{12}\pi_{12}$ sich wie die Stromstärken i_{12} verhalten.** Es nimmt somit die Zelle im zweiten Fall rund die 1,2fache Energie auf. Daß UV bei geringen Ladungen kleiner wird, dürfte dem Einfluß der galvanischen Polarisation, deren Wertung sich bei dem angewendeten Verfahren entzieht, zuzuschreiben sein. Bei hohen Potentialen wird eine genauere Bestimmung der Leistungspolarität unmöglich infolge der Unsicherheit der Differenzbestimmung $i_{21} - i_{12}$.

Die elektromotorische Kraft des inkonstanten Elementes $Pb/H_2SO_4/Pt$ wurde mit dem Elektrometer ermittelt. Die vorher wiederholt polarisierten Platinelektroden gaben ganz verschiedene Werte. Reste von Gasen, die noch daran gelagert waren, wahrscheinlich auch die insbesondere mit Sauerstoff geschwängerte Säure, mochten diese Unbestimmtheit verursacht haben. Die Platinelektroden wurden daher in einem mit frischer Säure gefüllten Becherglase eine halbe Stunde lang ausgekocht. Nach der Abkühlung wurde das Becherglas durch ein enges Glasrohr mit der im Troge belassenen negativen Akkumulatorplatte überbrückt. Die ermittelten Potentialdifferenzen waren folgende (s. nächste Tab.).

Die Potentialdifferenzen blieben mithin trotz der Vorsichtsmaßregel noch immer wesentlich verschieden. Wurde eine positive Akkumulatorplatte in den Trog gestellt und mit der verwendeten negativen verglichen, so erhielt man

	Volt				
	im Verlaufe einer Stunde			am nächsten Tage	
Blei gegen das platinierte Blech	0,991	1,016	1,022	1,118	1,111
„ „ „ blanke Blech	0,936	0,942	0,948	0,960	0,962
„ „ die Spitze	0,618	0,620	0,624	0,651	0,652

1,966 Volt. Der beträchtliche Abstand in der Spannungsreihe von Platin zu Bleisuperoxyd in Schwefelsäure ist auffallend.

Da Platin sich elektronegativ gegen Blei verhält, so unterstützt die Zelle unmittelbar nach dem Schließen der Ladungskette deren elektromotorische Kraft, wenn der kathodische Strom geleitet wird, bei anodischer Richtung stellt sie sich ihr entgegen. Da in beiden Fällen sofort Polarisation eintritt, so wird von einem Einfluß auf die Polarisationserscheinungen nicht die Rede sein und zur Erklärung, daß $i_{21} > i_{12}$, herangezogen werden können. Aluminium verhält sich, wie gezeigt worden ist, elektropositiv gegen Blei. Trotzdem war auch hier i_{21} stets größer als i_{12}.

Ein Vergleich der beiden Tabellen I und II zeigt, daß die Polarität des platinierten Bleches trotz der geringeren Stromstärke größer war als jene des blanken Bleches. Es steht dieses Ergebnis im Widerspruch zu der später zu besprechenden Tatsache, daß mit Zunahme der Stromstärke an einem und demselben Blech die Strompolarität zunimmt. Allein es ergaben unmittelbar nacheinander vorgenommene Vergleiche zwischen beiden Blechen bei derselben Stromstärke i_{21}, daß bald das eine, bald das andere Blech die größere Polarität aufwies. Zwei Beispiele mögen als Beleg dienen:

Vorgeschichte besitzen, zu arbeiten, wie es bei Aluminium geschehen ist, war leider nicht möglich, da es an den Mitteln zur Anschaffung des so kostspielig gewordenen Metalles gebrach.

Daß der Zustand der Elektrodenoberfläche einen ganz wesentlichen Einfluß auf die Polarität hat, geht auch daraus hervor, daß sich diese, wenn das Blech längere Zeit bald als Kathode bald als Anode gedient hatte, verändert. So ergaben sich bei

$i_{21} = 0{,}01$ Weber und $V = 12{,}27$ Volt

an der blanken Platte:

	U	UV
am 4. Januar	0,113	1,39
„ 5. „	0,107	1,30
„ 7. „	0,127	1,56
„ 17. „	0,217	2,66
„ 19. „	0,211	2,60

Da die Polarität mit der Zeit wächst, so kann möglicherweise die fortschreitende Wasserstoffokklusion die Zunahme verursachen. Es erschien aber nicht ausgeschlossen, daß eine Abhängigkeit von der Konzentration der Schwefelsäure im Spiele ist. Die Bleiplatte war in dieser Zeit wiederholt neu aufgeladen worden. Zu diesem Zwecke wurde nach Entfernung der Platinelektroden eine positive Akkumulatorplatte

$i_{21} = 0{,}0100$ Weber	blankes Blech				platiniertes Blech			
V	R	i_{12}	U	UV	R	i_{12}	U	UV
12,27	1255	0,00783	0,217	2,66	1258	0,00809	0,191	2,34
8,184	836,3	0,00684	0,316	2,60	850,3	0,00717	0,283	2,32

Das platinierte Blech zeigte also die geringere Polarität.

$i_{21} = 0{,}01500$ Weber	blankes Blech				platiniertes Blech			
V	R	i_{12}	U	UV	R	i_{12}	U	UV
10,23	675,3	0,01151	0,233	2,38	699,3	0,01149	0,234	2,39
12,29	814,3	0,01207	0,195	2,40	837	0,01208	0,195	2,40
13,97	933	0,01241	0,173	2,42	954	0,01244	0,170	2,37

Beide Bleche hatten gleiches polares Verhalten.

Wahrscheinlich macht sich bei geringen Stromdichten ihr Einfluß wenig geltend und es überwiegen andere nicht feststellbare Einflüsse, die von der jeweiligen Beschaffenheit der Elektrodenoberfläche herrühren. Mit einer größeren Zahl von gleichen Blechen, die auch dieselbe

in den Trog gebracht. Nach beendeter Ladung traten wieder die Bleche an ihre Stelle, die Säure verblieb in dem Troge. Es wurde versucht, eine Beziehung zwischen Polarität und Konzentration der Säure zu ermitteln. Das Ergebnis war folgendes (s. nächste Tabelle).

δ bedeutet die durch Wägungen ermittelte Säuredichte. Die Stromstärke i_{21} betrug in allen

δ	U	UV	δ	U	UV
1,209	0,230	2,35	1,150	0,223	2,29
1,204	0,224	2,28	1,134	0,221	2,27
1,184	0,220	2,25	1,118	0,220	2,26
1,162	0,223	2,29			

Fällen 0,0100 Weber, die elektromotorische Kraft der Ladungskette 10,21 Volt. Bei stärkerer Konzentration scheint die Polarität etwas größer zu sein, verhält sich aber schon von $\delta = 1{,}204$ abwärts unveränderlich. Von einem maßgebenden Einfluß der Säurestärke in dem Versuchsbereiche kann wohl kaum die Rede sein.

Die Prüfung des größeren Bleches auf Polarität bot nichts Bemerkenswertes. Dagegen zeigte die kleine Spitze eine weitaus größere Polarität als die beiden Bleche. So ergab z. B. ein Vergleich bei.

$i_{21} = 0{,}01500$ und $V = 10{,}26$ Volt:

	R	i_{12}	π_{12}	π_{21}	U	UV
platiniertes Blech	697	0,01161	2,113	— 0,206	0,226	2,32
blankes Blech	661	0,01142	2,440	+ 0,086	0,239	2,45
Spitze	522,3	0,01015 ± 0,00005	4,832	+ 2,251	0,323	3,31

Die Untersuchung der Spitze wurde auch bei verschiedenen Ladungspotentialen durchgeführt. Man erhielt:

Tabellle III.

Spitze	$i_{21} = 0{,}0100$ Weber		UV
V	i_{12}	U	
6,23	0,00505	0,495	3,08
8,30	0,00627	0,373	3,10
10,56	0,00714	0,286	3,02
12,46	0,00755	0,245	3,05
20,42	0,00842	0,152	3,10

Nach beiden Richtungen des Stromes, insbesondere nach der anodischen, schwingt die Nadel sehr rasch um die Ruhelage, etwa im Ausmaße eines halben Teilstriches, um so stärker, je kleiner V ist. Die gefundenen Werte sind also mit einiger Unsicherheit behaftet. Trotzdem tritt das Gesetz der Leistungspolarität genügend klar hervor.

Sowie die Dauer der Beladung mit den Gasen eine Vergrößerung der Polarität an einer größeren Oberfläche bewirkt, so ließ sich feststellen, daß derselbe Erfolg auch an der Spitze erreicht wurde und zwar derart, daß schließlich vollkommene Ventilwirkung ($U = 1$) eintrat. Diese zeigte sich dann unabhängig von der elektromotorischen Kraft der Ladungskette, und zwar innerhalb weiter Grenzen. Entfernt man die Spitze aus der Säure und spült sie mit destilliertem Wasser ab, dann ist nach ihrem Wiedereintauchen die Ventilwirkung verschwunden. Es läßt sich zeigen, daß die Polarität und die Elektrizitätsströmung abhängig ist von der Art, wie die Gasbläschen von der Spitze aufsteigen oder an ihr haften bleiben. Im letzteren Falle kann sich ein geeigneter Kondensator ausbilden, der den Stromkreis unterbricht. Ist dies erreicht, dann kann auch bei höheren Potentialen der gesamte äußere Widerstand ausgeschaltet werden: der Stromkreis bleibt offen.

Bei der Mannigfaltigkeit der Vorgänge an Spitzen, die vorläufig noch nicht vollkommen übersehen werden konnten, wird es sich empfehlen, sie einer gesonderten Untersuchung zu unterziehen.

2. Das Gesetz der Strompolarität:

$$i_{12} = b\frac{i_{21}}{i_{12}} - a.$$

Die Versuche wurden mit dem platinierten Bleche angestellt in der Weise, daß bei konstantem Ladungspotential der kathodische Strom i_{21} in Stufen verstärkt wurde. Um zu guten Vergleichswerten zu gelangen, wurde der bereits bewährte Vorgang eingehalten, daß der Strom in jeder Richtung eine Viertelstunde lang geschlossen blieb. i_{21} wurde in dieser Zeit wieder mit Hilfe von Widerständen sorgfältig konstant erhalten. Das Ergebnis bei Anwendung von schwächeren Strömen ist folgendes:

Tabelle IV.

$V = 10{,}28$ Volt. $a = 0{,}370506$, $b = 0{,}29304$

R Ohm	π_{21} Volt	π_{12} Volt	i_{21} Weber	i_{12} beob. Weber	i_{12} ber.
3534	— 0,283	1,947	0,00300	0,00236	0,00236
1762	— 0,274	2,003	0,00600	0,00468	0,00469
1173	— 0,268	2,030	0,00900	0,00697	0,00698
877,8	— 0,265	2,050	0,01200	0,00928	0,00926
702,3	— 0,265	2,068	0,01500	0,01152	0,001151

Die Messungen mit stärkeren Strömen ergaben (s. Tabelle V)).

Die Übereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werten ist wieder eine vortreffliche. Allein von einem linearen Verlauf. wie ihn die Gleichung erfordert, kann keine Rede mehr sein. Er gilt nur innerhalb gewisser Grenzen. Befremdend ist auch, daß der Koeffizient a größer als b ist, während die Gleichung

Tabelle V.

$V = 10{,}21$ Volt. $a = 6{,}75704$, $b = 5{,}16030$

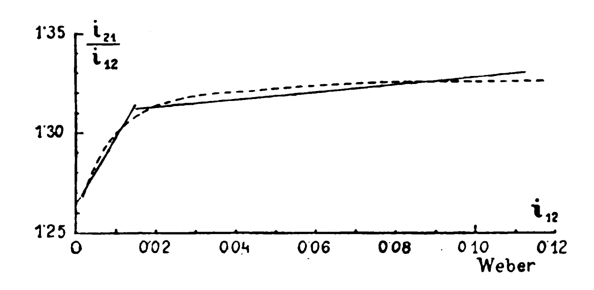
R Ohm	π_{21} Volt	π_{12}	i_{21} Weber	i_{12} beob.	i_{12} ber.
701,3	— 0,239	2,121	0,01500	0,01150	0,01143
351,3	— 0,242	2,161	0,0300	0,0228	0,0228
172,2	— 0,221	2,212	0,0600	0,0454	0,0455
113,4	— 0,204	2,251	0,0900	0,0680	0,0680
85,0	— 0,177	2,283	0,1200	0,0909	0,0904
67,6	— 0,156	2,310	0,1500	0,1127	0,1127

beansprucht, daß beim Verschwinden der Polarität

$$i_{21} = i_{12} = b - a \text{ wird.}$$

Es besteht kaum ein Zweifel, daß auch an Kristallen und der Aluminiumzelle das Gesetz nur innerhalb gewisser Grenzen Geltung hat. Nur war in der Aluminiumzelle die Polarität bei den schwächsten Strömen eine weitaus geringere, nämlich $U = 0{,}017$ bei 14 Volt und $i_{21} = 0{,}00300$, während sie in der Platinzelle noch 0,21 bei derselben Stromstärke und 10 Volt betrug. Deshalb war es statthaft, die Extrapolation bis $U = 0$ für Aluminium vorzunehmen, während dasselbe Verfahren für Platin nicht zulässig wird.

Die Beziehung zwischen beiden Stromstärken wird also nicht durch eine Gerade, sondern durch eine Kurve darzustellen sein, der jeweilig geradlinige Verlauf ist somit eine Sekante dieser Kurve, die sich für den Fall, als die Grenzen nicht zu weit gezogen sind, so eng an sie schmiegt, daß die Beobachtungsfehler überwiegen. Die beiliegende Zeichnung (Fig. 1) der beiden



aus den Tabellen IV und V ermittelten Geraden wird nach dieser Überlegung ohne weiteres verständlich.

Die Aufgabe, den Punkt $U = 0$ auszumitteln, ist trotz vieler darauf verwendeter Mühe gescheitert. Denn selbst bei einer Stromstärke i_{21} von nur 10 Mikroweber und einer Ladungsspannung von 10 Volt betrug U noch 0,09, war also fünfmal so groß als an Aluminium bei der 300fachen Stromstärke. Dazu kommt, daß diesmal die sonst bewährte Regel, nach der ein regelmäßiger Verlauf um so reiner zur Geltung kommt, je geringer die angewendeten Stromdichten sind, völlig versagte. Geht man nämlich bei derselben Spannung von schwächeren Strömen zu stärkeren über, so nimmt im allgemeinen die Polarität zu, um aber, meist mitten in einer Reihe, aus dem linearen Verlauf herauszutreten, eine Erscheinung, die bei allen angewendeten Ladungsspannungen von 8 bis 20 Volt festzustellen war. Die geringste Polarität fand sich bei einer Stromstärke von 20 Mikroweber und 20 Volt Ladungsspannung vor; sie betrug noch immer 0,045, in vollkommener Übereinstimmung mit der Bedingung $UV =$ konst, wenn man davon absieht, daß die Stromstärke i_{21} verdoppelt worden ist.

Das Ergebnis der Untersuchung läßt sich etwa in folgende Sätze formen:

1. Die Polarität des Platins wird in derselben Weise, wie an Kristallen und Aluminium nachzuweisen war, durch Bildung eines Kondensators an den Grenzschichten bei anodischer Stromrichtung erzeugt.
2. Das Gesetz der Leistungspolarität ist von 8 Volt Ladungsspannung aufwärts erfüllt.
3. Das Gesetz der Strompolarität gilt für Platin und wahrscheinlich auch an Kristallen und für Aluminium nur innerhalb gewisser Grenzen. Änderungen des Zustandes an den Oberflächen der Elektroden, deren Ursachen verborgen bleiben, machen es unmöglich, eine allgemeingültige Beziehung zwischen den Stromstärken in der kathodischen und anodischen Richtung aufzustellen.

Mein Assistent, Herr Dr. Fiala hat mich bei Ausführung der langwierigen Versuche wesentlich unterstützt. Ich drücke ihm für seine Müheleistung den Dank aus.

Graz, 2. Physik. Inst. der Techn. Hochschule,
28. Februar 1921.

(Eingegangen 3. März 1921.)

Über Potentialgefälle an Elektroden in Gasentladungsröhren.

Von Hermann Schüler.

(Vorläufige Mitteilung.)

Untersuchungen über die elektrischen Verhältnisse an einer bestimmten Art von Entladungsröhren, die in der Literatur in dieser Form wohl noch nicht beschrieben sind, führten zu Resultaten, die überraschend einfache Beziehungen in Entladungsröhren aufdeckten.

Da der Ausbau der bisher gewonnenen Resultate noch viele Arbeit erfordert, und da andererseits die von Franck und seinen Schülern be-



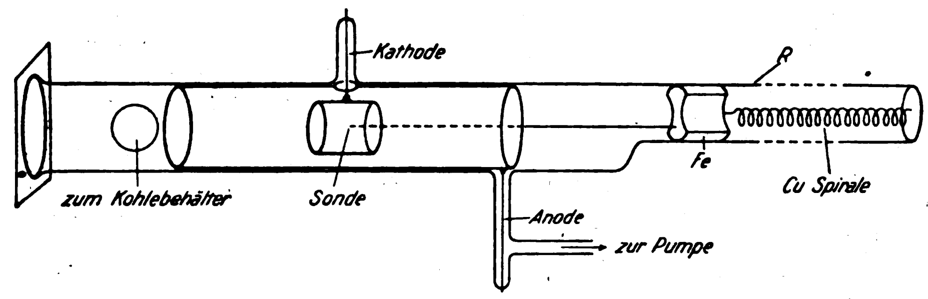


Fig. 1.

arbeiteten Probleme über die Ionisierungsspannungen von He und H_2 eine neue unerwartete Stütze finden, so glaube ich diese vorläufige Mitteilung machen zu sollen.

Fig. 1 zeigt die Form und die Anordnung der benutzten Entladungsröhre. Sie besteht aus zwei konzentrischen Zylinderelektroden. Der Kathodendurchmesser ist $2r = 19{,}8$ mm, der Anodendurchmesser $2R = 28{,}4$ mm, so daß ein Zwischenraum von etwa 4,3 mm zwischen Anode und Kathode besteht. Die Länge der Kathode beträgt $l = 22$ mm und die Länge der Anode $L = 132$ mm. Durch die Wahl solcher Größenverhältnisse, $\frac{l}{L} = \frac{1}{6}$, soll die Kathode sich in einem elektrostatisch möglichst geschützten Felde befinden und den gefährlichen Wandladungen entzogen sein. Andrerseits sind außer den Symmetriebedingungen auch die Bedingungen für ein sorgfältiges Reinigen der Elektroden durch starke Ströme günstig.

Betreibt man eine solche Röhre mit Gleichstrom, so erscheint bei höherem Druck das negative Glimmlicht in dem Raum zwischen Anode und Kathode (Form A), bei abnehmendem Druck wandert das negative Glimmlicht in das Innere der Kathode (Form B) und erfüllt in Gestalt eines konaxialen Zylinders die Kathode.

Unter diesen Bedingungen ist von dem üblichen positiven Licht nichts zu sehen.

Diese Eigentümlichkeit regte zu Untersuchungen über die elektrischen Feldverhältnisse an. Es wurden Vorrichtungen zur Sondenmessung eingebaut, wie sie Fig. 1 darstellt. Der eiserne Halter des Sondendrahtes (Fe) ist durch Magnet im Rohre R verschiebbar und drehbar, so daß man der Sonde jegliche erwünschte Stellung geben kann. Der Sondendraht ist durch ein Glasröhrchen und am Ende durch ein Quarzröhrchen geschützt. Die eigentliche Sonde besteht aus einem etwa 2 mm langen und einige Hundertstel Millimeter dicken Pt-Drähtchen, das sich bald mit dem zerstäubten Elektrodenmetall bedeckt und so eine besondere Berücksichtigung des Voltapotentiales unnötig macht.

Messungen in dem negativen Glimmlicht bei Entladungen in H_2 ergeben bei nicht zu geringen Drucken eine Konstanz des Potentialgefälles Anode—Sonde, die überrascht.

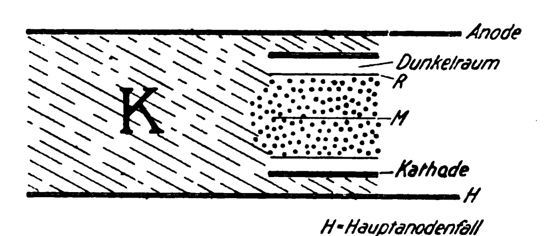


Fig. 2.

Die Potentialvermehrung von der Mitte des Glimmlichtes (M), Fig. 2, bis beinahe an den Rand des Glimmlichtes (R) beträgt 1 bis 2 Volt, oft aber weniger als 1 Volt. Bringt man nun die Sonde in den Raum K, so nimmt das Potentialgefälle Anode—Sonde auch nur um 2 bis 3 Volt, in manchen Fällen etwas mehr, in manchen etwas weniger ab. Der größte Teil des Gefälles Kathodenmitte—Anode muß unmittelbar an der Anodenoberfläche liegen, und der Raum K und der Glimmlichtraum bilden einen Raum von annähernd konstantem Potential.

Da die Elektronen im negativen Glimmlicht ihre ganze Bewegungsenergie durch Zusammenstöße einbüßen, so wird der Anodenfall (gemessen Kathodenmitte—Anode) ein richtiges Maß für die Geschwindigkeiten ergeben, mit der die Elektronen die Anodenoberfläche erreichen. Diese Geschwindigkeiten wurden in H_2 zu 16,8 Volt und 30,3 Volt gemessen. Und zwar treten diese Größen, auf deren genaue Festlegung noch nicht Wert gelegt worden ist, erst dann auf, wenn die Röhre durch starke Ströme (80 M.-A.) und unter Umständen durch O_2-Behandlung sorgfältig gereinigt ist. Bei den Messungen wurde die Röhre mit schwachen Strömen von einigen Milli-Ampère betrieben, sie stand währenddessen in Verbindung mit einem Kohlebehälter, der in flüssige Luft tauchte. Da die Ionisierungsspannungen von H_2 nach den

Angaben von Franck[1]) außer 11,5 Volt vor allem 17,1 und 30,4 Volt betragen sollen, so lag die in der Literatur[2]) schon wiederholt festgestellte Tatsache vor, daß die an der Anodenoberfläche ankommenden Elektronen eine solche Geschwindigkeit besitzen, daß sie das Gas vor der Anode ionisieren können. Und zwar haben die Potentialgefälle, Kathodenmitte—Anode, das Bestreben, das zeigte sich bei den Versuchen, sich auf einen von diesen Werten einzustellen, so daß die Zwischenwerte gewissermaßen labile Zustände darstellen.

Wie liegen nun die Verhältnisse an der Kathode? Betrachtet man eine selbständige Glimmentladung mit normalem Kathodenfall, so ist, wenn man von den Rekombinationen in der Entladungsbahn absieht, die Kathodenoberfläche die Quelle für Elektronen und die Senke für positive Ionen und die Anode die Quelle für positive Ionen und die Senke der Elektronen. An der Anode haben die Elektronen vor ihrem Versinken noch die Aufgabe, positive Ionen zu schaffen, und diese für die selbständige Entladung notwendige Bedingung können sie nur erfüllen durch Geschwindigkeiten, die mindestens gleich irgendeiner Ionisierungsspannung des betreffenden Gases sind. An der Kathode müssen die positiven Ionen neue Elektronen schaffen. Da nun die Dunkelraumlänge gleich der freien Weglänge der Elektronen ist, so werden z. B. in H_2 die aus der negativen Glimmschicht stammenden positiven Ionen auf ihrer Wanderung zur Kathode im Mittel $4\sqrt{2} = 5{,}66$ Zusammenstöße erleiden, weil ja die freie Weglänge des Elektrons $4\sqrt{2}$ größer ist als die eines H_2-Moleküls. Bei einem jeden solcher Zusammenstöße wird nun das positive Wasserstoffion entweder 17,1 oder 30,4 Volt einbüßen. Nehmen wir zuerst 30,4 Volt an. Das müßte einem Energieaufwand von $5{,}66 \cdot 30{,}4 = 171{,}9$ Volt entsprechen. Erst unter solchen Verhältnissen ist das positive Ion bis zur Kathodenoberfläche gelangt und hat die unbedingt notwendigen Elektronen geschaffen. Die Messung des Kathodenfalles an Al in H_2 ergab 173,8 Volt. Wenn dazu noch das Anodengefälle von $1 \cdot 30{,}4$ Volt kommt, so müßte das Gesamtpotential an der Röhre 202,3 Volt betragen.

Gefunden wurde 199,5 und 200,3 Volt (an Al). Es liegt also die Entladungsform

$$5{,}66 \cdot 30{,}4 + 1 \cdot 30{,}4$$

vor.

Unter besonderen Bedingungen besteht nun die Möglichkeit, daß das positive Ion beim ersten Zusammenstoß noch keine 30,4 Volt Geschwindigkeit hat, daß es also nur 17,1 Volt beim ersten Zusammenstoß verliert; dann müßte sich als Gesamtspannung

$$\left.\begin{matrix} 4{,}66 \cdot 30{,}4 \\ 1 \cdot 17{,}1 \end{matrix}\right\} + 1 \cdot 30{,}4 = 189{,}0 \text{ Volt}$$

ergeben, gemessen wurde 188,8 Volt (an Al). Genau wie beim Anodenfall sind diese gemessenen Werte stabil, die Zwischenwerte labil.

Die Frage, ob nun auch eine Entladung von Stufen mit 17,1 Volt möglich ist, konnte bejaht werden. Bei höherem Druck, wenn die Entladungsform B (s. oben) vorhanden ist, brennt sich die Röhre allmählich bei mittlerem etwa 15 M.-A. starken Strom in eine Entladungsform E ein, die bisher noch nicht bekannt zu sein scheint. Ein halbkugelförmiger Lichtwulst, der unmittelbar an der Kathodenoberfläche anliegt, ist durch einen kleinen Dunkelraum von einer Lichthaut an der Anode getrennt.

Daß hier die Entladungsform

$$5{,}66 \cdot 17{,}1 + 1 \cdot 17{,}1 = 113{,}8 \text{ Volt}$$

vorliegt, bewiesen die Messungen, es ergaben sich die Werte

$$\left.\begin{matrix} 113{,}7 \\ 115{,}8 \\ 114{,}9 \\ 114{,}6 \end{matrix}\right\} \text{ im Mittel } 114{,}8 \text{ Volt.}$$

Ja noch mehr, wird der Druck verringert, so dehnt sich das Glimmlicht bis an die Anode aus, die anodische Lichthaut verschwindet, und das Gesamtpotential muß jetzt

$$5{,}66 \cdot 17{,}1 + 0 = 96{,}7 \text{ Volt}$$

zeigen, tatsächlich ergab sich der Wert 95,3 Volt.

Hier zeigt sich, daß ein Anodenfall keine notwendige Bedingung für eine selbständige Entladung ist. Die Elektronen brauchen keine positiven Ionen zu schaffen, weil das an positiven Ionen reiche Gebiet des negativen Glimmlichtes sich bis an die Anodenoberfläche ausdehnt.

Alle diese Werte wurden in einer Röhre mit H_2-Füllung und Al-Elektroden gefunden.

Der nächste Schritt galt den Versuchen an Al mit He. Das Verhältnis der freien Weglänge des Elektrons zum He-Molekül ist 4,16, die Ionisierungsspannungen betragen nach Franck und Knipping[1]) 25,3 und 79,5 Volt. In Analogie zu H_2 muß also z. B. als Gesamtspannung $4{,}16 \cdot 25{,}3 + 1 \cdot 25{,}3 = 130{,}5$ Volt vorhanden sein; gemessen sind

$$\left.\begin{matrix} 131{,}7 \\ 131{,}0 \\ 134{,}0 \\ 129 \end{matrix}\right\} \text{ im Mittel } 131{,}4,$$

---

1) Franck, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 21, 731, 1919.
2) z. B. Skinner, Phil. Mag. 8, 397, 1904 und Thea Krüger, Ann. d. Phys. 64, 302, 1921.

1) Franck und Knipping, diese Zeitschr. 20, 481, 1919.

oder wenn das negative Glimmlicht bis an die Anode reicht

$$4{,}16 \cdot 25{,}3 + 0 = 105{,}2 \text{ Volt}$$

gefunden wurde

$$\left.\begin{array}{r} 104{,}0 \\ 107{,}8 \\ 100{,}0 \end{array}\right\} \text{ im Mittel } 103{,}9 \text{ Volt.}$$

Alsdann steht zu erwarten ein Kathodengefälle von $4{,}16 \cdot 79{,}5$. Dieser Fall ist bisher noch nicht erreicht worden, dagegen stellt sich gewöhnlich folgender stationäre Zustand ein

$$\left.\begin{array}{r} 3{,}16 \cdot 25{,}3 \\ + \; 1 \cdot 79{,}5 \end{array}\right\} = 159{,}4 \text{ Volt,}$$

gemessen sind

$$\left.\begin{array}{r} 163 \\ 160 \\ 161 \end{array}\right\} \text{ im Mittel } 161{,}3 \text{ Volt.}$$

Die Verhältnisse liegen hier anscheinend so: wenn der Hauptstrom der positiven Ionen im Mittel 3,16 Zusammenstöße erlitten hat und dabei an Energie $3{,}16 \cdot 25{,}3 = 79{,}9$ Volt aufgebraucht hat, gibt es noch eine kleine Anzahl positiver Ionen, die noch keinen Zusammenstoß erlitten haben, also an Energie 79,9 Volt besitzen und nun bei Abgabe dieser Energie ganz in der Nähe der Kathodenoberfläche die vollständige Zertrümmerung des *He*-Moleküls bewirken und damit den letzten Sprung von 79,5 Volt anregen, auf den die Röhrenspannung sich dann einstellt. Wenn man nun noch den Anodenfall (z. B. durch geeigneten Druck) sich ausbilden läßt, so ist als Gesamtspannung zu erwarten

$$\left.\begin{array}{r} 3{,}16 \cdot 25{,}3 \\ + \; 1 \cdot 79{,}3 \end{array}\right\} + 1 \cdot 25{,}3 = 184{,}7 \text{ Volt,}$$

gefunden sind

$$\left.\begin{array}{r} 186 \\ 181{,}2 \\ 184 \\ 187 \end{array}\right\} \text{ im Mittel } 184{,}5 \text{ Volt.}$$

Wie steht es nun mit dem Wert von 80 Volt, den Mey[1]) an *Na*-Elektroden im *He* gefunden hat? Vielleicht deutet sich der Wert so, daß die positiven Ionen bei ihrem ersten Zusammenstoß im Mittel noch nicht die Energie von 25,3 Volt haben und infolge elastischer Reflexion keinen Energieverlust aufweisen, so daß der Kathodenfall gleich

$$\left.\begin{array}{r} 0 \\ + \; 3{,}16 \cdot 25{,}3 \end{array}\right\} = 79{,}9 \text{ Volt ist}^{2)}.$$

Welche Faktoren beim Einstellen auf die verschiedenen Gleichgewichtszustände eine Rolle spielen, das muß später noch erst klargelegt werden. Soviel läßt sich bisher sagen, daß durch Zuführen von spektroskopisch gerade noch nachweisbaren Mengen O_2 in *He*-Entladungen, die lange Zeit stabile Spannung von 185 Volt sofort herunterging auf 150 Volt und sich dann ganz allmählich mit dem Verschwinden von O_2 auf 131 Volt einstellte. Die äußerst geringe Menge fremden Gases mit niedrigerer Ionisierungsspannung wirkt gewissermaßen als Anregung. Auf jeden Fall bleiben die erreichten Zustände tagelang erhalten.

Wie steht es nun mit den Entladungen an Elektroden aus anderen Metallen? Was für eine Rolle spielt überhaupt das Metall? Nach den Warburgschen Arbeiten[1]) mußten *Zn, Fe, Cu, Ag, Pt* andere und zwar höhere Kathodenfälle aufweisen als *Al*. Messungen an der gleichen Röhre mit *Fe*-Elektroden in H_2 ergaben nach sorgfältiger Reinigung bei Anwendung von flüssiger Luft und Kohle folgendes Resultat:

Gesamtspannung	242,9 Volt
Kathodenmitte—Anode	5,0 „
Kathodenfall	237,9 Volt.

Nun ist aber

$$\left.\begin{array}{r} 5{,}66 \cdot 11{,}5 \\ + \; 5{,}66 \cdot 30{,}4 \end{array}\right\} = 236{,}9_8 \text{ Volt.}$$

Hier taucht also der Gedanke an einen Doppeldunkelraum auf. Die Messungen Astons[2]) über die Dunkelraumlänge an verschiedenen Metallen scheinen diesem Gedanken entgegenzukommen. Bei dieser ersten Entladungsform des Eisens trat bei Strom- oder Druckregulierung ähnlich wie bei der Entladungsform *E* (*Al* und H_2 s. oben) ein anodisches Lichthäutchen auf; und das stabile Entladungspotential wurde zu 268,8 Volt gefunden, entsprechend

$$\left.\begin{array}{r} 5{,}66 \cdot 11{,}5 \\ + \; 5{,}66 \cdot 30{,}4 \end{array}\right\} + 1 \cdot 30{,}4 = 267{,}4 \text{ Volt.}$$

Der Wert von 11,5 Volt ist von Franck als diejenige Arbeit gedeutet, die notwendig ist, um 1 Elektron aus dem H_2-Molekül zu entfernen. Die gute Übereinstimmung der theoretischen und der gefundenen Größen ist vielleicht eine zufällige. Da diese Funde die Existenz von Doppeldunkelräumen noch nicht sicher stellten, so wurde nach weiteren Bestätigungen gesucht, und sie wurden gefunden. Da später ausführlich darüber berichtet werden wird, so seien der Kürze halber hier nur die Resultate vermerkt.

Es wurde beobachtet:

Gesamtentladung	271,1	267,5	273,3
Kathodenmitte—Anode .	3,7	1,9	2,3
Kathodenfall	267,4	265,6	271,0

im Mittel 268,0.

1) Mey, Ann. d. Phys. 11, 127, 1903.
2) Anmerkung bei der Korrektur: inzwischen ist auch der Wert 79,9 Volt in *He* an *Al* beobachtet worden.

1) Warburg, Wied. Ann. 31. 545, 1887; 40, 1, 1890.
2) Aston, Proc. Roy. Soc. A, 87, 428, 1912.

Das läßt sich deuten als

$$\left.\begin{array}{r} 5{,}66 \cdot 17{,}1 \\ +\ 5{,}66 \cdot 30{,}4 \end{array}\right\} = 268{,}7 \text{ Volt Kathodenfall,}$$

weiter

Gesamtentladung	258,4	258,5
Kathodenmitte — Anode	2,5	3,0
Kathodenfall	255,9	255,5

im Mittel 255,7 Volt.

Das kann sein

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}66 \cdot 17{,}1 \\ \left\{\begin{array}{l} 4{,}66 \cdot 30{,}4 \\ 1 \quad \cdot 17{,}1 \end{array}\right. \end{array}\right\} = 255{,}4 \text{ Volt.}$$

Hier büßt, wie bereits oben beim *Al* festgestellt wurde, das positive Ion nur 17,1 Volt statt 30,4 Volt beim ersten Zusammenstoß ein.

Bewirkt man eine Entladung in dem Raume zwischen Anode und Kathode und wählt den Druck so, daß die negative Glimmschicht nicht ganz bis an die Anode reicht, so stellt sich der stabile Wert

299,4 Volt ein,

identisch mit

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}66 \cdot 17{,}1 \\ 5{,}66 \cdot 30{,}4 \end{array}\right\} + 1 \cdot 30{,}4 = 299{,}1 \text{ Volt.}$$

Die Resultate weisen also auf eine Existenz der Doppeldunkelräume 11,5/30,4 und 17,1/30,4 hin. Andere Kombinationen der drei H_2-Ionisierungsspannungen sind bis jetzt noch nicht festgestellt. Es lassen sich mit diesen drei Zahlen allerlei Gesamtpotentiale zusammenstellen, deren Werte sich in dem Raume von 250 bis 300 Volt so häufen, daß man bei vorsichtiger Beurteilung keine weiteren Schlüsse ziehen kann; aber die gefundenen Doppeldunkelräume halte ich für sicher.

Über den Mechanismus solcher Doppeldunkelräume und ihren Zusammenhang mit dem Elektrodenmetall — bei *Al* sind bis jetzt nur einfache Dunkelräume gefunden — kann zurzeit nichts ausgesagt werden. Vielleicht lassen sich die Erscheinungen an den doppelfarbigen positiven Schichten des H_2 hiermit in Zusammenhang bringen. Auch die 2—4 Volt großen Anodengefälle, die neben den Ionisierungspotentialen an *Fe* gefunden wurden, sind noch nicht geklärt.

Zusammenfassend ist also folgendes festgestellt worden:

1. Der normale Kathodenfall wird definiert als die Energie, die nötig ist, positive Ionen aus der negativen Glimmschicht so an die Kathode zu bringen, daß sie bei ihren Zusammenstößen im Dunkelraum das Entladungsgas ionisieren und damit die für die selbständige Entladung notwendigen Elektronen schaffen.

2. Es bestehen einfache Beziehungen zwischen den Ionisierungsspannungen eines Gases, dem Verhältnis der freien Weglänge des Elektrons zur freien Weglänge des Gasmoleküls und dem normalen Kathoden- und Anodenfall.

3. Es sind in H_2 an *Al* zwei vollständig verschiedene und in H_2 an *Fe* zwei weitere verschiedene Entladungsformen festgestellt, so daß der Begriff des normalen Kathodenfalles eines Gases an einem Metall nicht mehr eindeutig ist.

4. Unter besonderen Umständen ist die Gesamtspannung an einer Entladungsröhre gleich dem Kathodenfall. Der Anodenfall ist keine notwendige Bedingung für eine selbständige Entladung.

5. Glimmentladungen in möglichst reinen Gasen haben das Bestreben, sich auf ganz bestimmte Werte von Entladungspotentialen einzustellen. Die Zwischenwerte sind labil.

6. Es sind Doppeldunkelräume mit den Ionisierungsstufen 11,5/30,4 und 17,1/30,4 bei H_2 gefunden.

7. Die Potentialgefälle an den Elektroden sind nur abhängig von den Konstanten des Gases. Konstanten des Metalles scheinen keine Rolle zu spielen. Die Wirkung der Metalle oder der infolge von Zerstäubung in Entladungsröhren immer vorhandenen Metalldämpfe scheint lediglich eine katalysatorische zu sein.

Ich möchte diese Mitteilung nicht schließen, ohne voll Dankbarkeit der unermüdlichen Unterstützung Erwähnung zu tun, die mir von seiten des Herrn Prof. Paschen zuteil wurde.

Tübingen, Physikalisches Institut, Februar 1921.

(Eingegangen 2. März 1921.)

Kolorimetrische Untersuchungen. VII.

Von Otto Meißner.

1. Einige Bemerkungen zur Ostwaldschen Theorie.

Herr K. W. F. Kohlrausch greift[1]) die Ostwaldsche Theorie in verschiedenen Punkten an; er hält sie, kurz gesagt, zwar für praktisch ausreichend, aber theoretisch unzulänglich. Auf einige seiner Bemängelungen, die zum Teil offenbar auf Mißverständnissen beruhen, möchte ich hier eingehen.

1. Bestimmung des Schwarz- und Weißgehaltes. Kohlrausch verwirft die Ostwaldsche Filterprüfung — theoretisch; daß sie praktisch genügt, muß er selbst zugeben —,

1) Diese Zeitschr. 21, 473ff., 1920.



weil sie sich nur auf zwei Punkte der Remissionskurve stütze. Nun sind aber die Filter natürlich nicht monochromatisch, sondern lassen für je zwei relativ breite Spektralbezirke das Licht nahezu völlig durch bzw. verschlucken es. (Der ideale Fall, daß sie für ein Farbenhalb absolut durchlässig, für das andre absolut undurchlässig wären, wird freilich nicht annähernd erreicht.) Nur an der Grenze ihres Anwendungsbereiches ist die Bestimmung mit Hilfe der Filter etwas unsicher. Ein passendes Filter vorausgesetzt, ist die Ostwaldsche Methode auch theoretisch einwandfrei, denn — von der hier gar nicht in Frage kommenden absoluten Helligkeit abgesehen — bei Ostwald ist (wie bei Helmholtz) die Farbe durch drei, doch wohl auch nach Kohlrauschs Meinung unabhängige „Koordinaten" bestimmt; demnach kann gar nicht der von Kohlrausch a. a. O., S. 475, Spalte 2 vorausgesetzte Fall eintreten, daß zwei verschieden aussehende Farben gleiche $h_{,,}$ und $h_{,}$ (gleiche w und s) haben.

2. Gesättigte Farben. Mir ist die Ostwaldsche Definition gesättigter Farben durchaus klar: sie remittieren ein Farbenhalb völlig und absorbieren das andere völlig: für jenes sind sie gewissermaßen „weiß", für dieses „schwarz". Daß Rot bis Gelb „Vollfarben" sind, hat Kohlrausch nur bestätigen können; daß dies bezüglich der grünen und blauen Farben im „Farbkörper" — den 1000 Mark, jetzt wohl noch weit mehr, kostenden „Farbenatlas" habe ich mir als Privatmann nicht anschaffen können, kann also über dessen Farben kein Urteil abgeben — nicht der Fall ist, ist auch richtig, aber auch W. Ostwald bekannt, der deshalb[2]) diesen Farben, vorläufig empirisch, einen „natürlichen Schwarzgehalt" zuerkennt, so daß ein blaugrün 71*pa* trotz des 2. Buchstabens *a* seines „Farbzeichens" einen weit größeren Schwarzgehalt hat als das komplementäre Rot 21*pa* derselben Farbtafel. Mit anderen Worten: zwei Komplementärfarben mit gleichen Farbzeichen haben verschiedene Kennzahlen. Für die „kalte" Farbe 71 O.-Sk. ist $pa \leqq 57$ Proz. Schwarzgehalt, für die „warme" 21 nur $\leqq 37$, d. h. die Kennzahlen und Farbzeichen sind etwa[2]):

71*pa* $\sim$ 71, 05, 50; 21*pa* $\sim$ 21, 05, 30.

Vielleicht ist Herrn Kohlrausch dies Buch von Ostwald unzugänglich gewesen; seine bisherigen Bedenken sind jedenfalls unberechtigt; ob es praktisch zweckmäßig und durchführbar ist, daß gleiche Farbzeichen bei den verschiedenen Farben ganz verschiedenen Schwarzgehalten entsprechen, ist eine andere Sache; auch Ostwald selbst scheint es nicht ohne Bedenken getan zu haben. Bei meinen Untersuchungen gebe ich deshalb stets den Weiß- und Schwarzgehalt an, welch letzterer dann eben erfahrungsgemäß bei blau-grün, Nr. 40—90 etwa, nicht unter 50 (Proz.) sinken kann. Eine grüne „Vollfarbe", wenn es solche gäbe, würde sich also mittels der Farbzeichen nicht darstellen lassen, wohl aber mit jeder wünschenswerten Genauigkeit durch die Kennzahlen.

Schließlich spricht im Kapitel 14 des zitierten Werkes Ostwald ausdrücklich von Farben mit gleichen Kennzahlen, die verschiedenartige Emissionskurven haben, bezeichnet sie als „metamer", erklärt sie für tatsächlich vorhanden und behauptet, im Gegensatz zu Kohlrausch, daß sie auch auf das menschliche Auge denselben Eindruck machen. Mit Rücksicht auf die Heringsche Theorie und die Tatsache der Dreidimensionalität des „Farbkörpers" halte ich diese Ansicht für richtig, kann sie aber wegen Mangels der nötigen experimentellen Hilfsmittel nicht verifizieren.

3. Bezogenheit der Farbe. Auch über die „Bezogenheit" der Farbe gibt Ostwald in seinem Buche durchaus klaren Aufschluß (6. Kapitel). Kurz gesagt, wenn auch gewissermaßen negativ: eine Farbe ist (oder heißt) „unbezogen", wenn man nur sie allein im Gesichtsfeld hat: sie erscheint dann gleichartig hell[1]), aber ohne jede Beimischung von „Schwarz". In jedem andern Fall (d. h. praktisch so gut wie immer) heißt die Farbe bezogen und hat einen mehr oder weniger großen Schwarzgehalt. Ich habe selbst einen von Ostwald[2]) angegebenen Versuch mit dem an sich schon etwas „trüben" Gelb des Reichskursbuchumschlages wiederholt und etwas variiert. Allein im Gesichtsfeld, bei dunkler Umrahmung, erschien es stets gelb; bei weißer Umrahmung wurde es, je nach der Beleuchtung des Weiß, bis zu tief olivgrün: eine frappierende Wirkung der „Bezogenheit" der Farbe und des infolgedessen auftretenden Schwarzgehaltes, der übrigens, um Mißverständnissen vorzubeugen, dank der objektiven Art seiner Messung durch Filter in heller wie in dunklerer Umgebung stets derselbe bleibt; weder ist theoretisch eine Änderung desselben bei verschiedener absoluter Helligkeit (und sonst ganz gleichen äußeren Umständen) zu erwarten, noch habe ich bei meinen zahl-

1) Näheres in seiner „Physikalischen Farbenlehre", Leipzig 1919, Verlag Unesma.

2) Vgl. Ostwald, a. a. O., S. 233, 229 und allgemein Kapitel 13.

1) Die „Helligkeit" einer Farbe wird durch die Kennzahlen bekanntlich nicht angegeben; es ist dies auch ganz unnötig.

2) Beiträge zur Farbenlehre. Abh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse **34**, 3, 17, (379), 1917.

reichen Versuchen, die ich zum Teil bei ziemlich schwachem Licht ausführen mußte, etwas davon gemerkt.

2. Prüfung des Farbkörpers.

Mittels sieben bereits in früheren Mitteilungen besprochener Ostwald-Filter habe ich eine Prüfung meines Exemplars des „Farbkörpers" unternommen. Wie zu erwarten, fiel die Farbe sehr zufriedenstellend aus.

Der Anblick einer solchen Tafel, an sich schon ästhetisch reizvoll, durch ein Filter ist überraschend. Zum Verständnis muß wohl aber vorausgeschickt werden, wie eine solche Tafel aussieht. Auf etwas gelblichem Papier (Farbton etwa 3, Reinheit wenige Prozent) ist ein schwarzer Rhombus, in den 64 kleinere Rhomben geklebt sind. An den äußersten Ecken rechts und links sind je zwei Gegenfarben mit den Kennzeichen *pa*, in der Mitte senkrecht von oben nach unten, als Achse des Farbkörpers gedacht, von dem die 12 Tafeln des Werkes „Querschnitte" sind, ist die Grauleiter, oben weiß *aa*, unten schwarz *pp*. Von Weiß bis zur „Vollfarbe" laufen nach beiden Seiten die Buchstaben *a c e g i l n p*, ebenso nach unten von der Vollfarbe zum Schwarz, so daß jedem der Rechtecke zwei Buchstaben, eben die Kennzeichen, zugeordnet sind; ihre Umwertung in Prozente w und s ist in der „Physikalischen Farbenlehre", S. 233 gegeben. Jedem Buchstaben entspricht ein Intervall, z. B. *ca* 63—79 Proz. Weiß und 0—37 Proz. Schwarz. „Kalte" Farben haben bei gleichen Kennzeichen einen um ein Drittel höheren Schwarzgehalt als „warme" (vgl. oben). Parallel den Rhombusseiten verlaufen die „Schwarz"- bzw. „Weißgleichen", parallel zur Achse die „Schattengleichen" ($r + w =$ const., s nach unten wachsend). Dies gilt für die Betrachtung mit bloßem Auge. Bei Vorschaltung eines „passenden" Filters, d. h. eines solchen, das für die eine Farbe als Paß-, für die andre als Sperrfilter fungiert, hat man einen ganz andern Anblick. Hier werden die Schwarz- bzw. Weißgleichen zu Helligkeitsgleichen, und es ist ein interessanter Anblick, zu sehen, wie z. B. beim Blick durch ein blaues Filter das dem bloßen Auge so hell erscheinende Gelb 00*pa* (*bpa*) ebenso schwarz erscheint wie das *pp*, die unterste Stufe der Grauleiter, alle *bpx*, $x = a \ldots p$, erscheinen gleich schwarz, alle *oxa*, $x = a \ldots p$, gleich hell: die Helligkeit nimmt von links oben nach rechts unten in gleichen Intervallen (fürs Auge! nach dem Fechner-Gesetz; die tatsächliche Teilung ist logarithmisch) ab. (Die Buchstaben *b* und *o* an 1. Stelle des Kennzeichens sind den Nummern 00 und 50 äquivalent, $c = 04$, $d = 08$, $e = 13$ usf.). Ganz konstant ist die Helligkeit auf den Parallelen freilich nicht; sie nimmt i. a. vom Weiß *aa* nach unten hin etwas ab, vgl. das Beispiel unten. — Nichtpassende Filter gewähren wesentlich den Eindruck wie die Betrachtung mit bloßem Auge. — Auf die Erscheinungen bei binokularer Betrachtung mit zwei recht verschiedenfarbigen Filtern will ich hier nicht näher eingehen: meine Augen sind zu solchen Versuchen wenig geeignet, da ich etwa 10 Jahre lang fast nur mit dem rechten Auge sah.

Als Beispiel der Prüfung will ich die Ergebnisse bei Tafel I, enthaltend die Gegenfarben 00 (*b*) rechts und 50 (*o*) links, anführen. Statt der „Taschengrauleiter" (*a c e g i l n p r t*) benutzte ich mir von Herrn Geheimrat Ostwald selbst zugesandte Plättchen *A* bis *Z*, deren Weißgehalt auf S. 60 der zitierten Arbeit in den Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. angegeben ist.

Filter 1: (Nahezu) gleich hell sind die von links oben nach rechts unten verlaufenden Parallelen; genauer, wenn $<$ die eben angegebene Richtung bezeichnet:

Parallele	Buchstaben der „großen" Grauleiter	Weißgehalt w in Prozent
aa	$A < B$	100...85
cc	$C < D$	72...61
ee	$G < H$	38...32
gg	$I < K$	27...23
ii	$L < N$	20...14
ll	$O < P$	12...10
nn	$R < S$	7...6
pp	V	4

Filter 2 (und 3): Starke Aufhellung auch bei 50 bis *ig* hin, offenbar weil 50 noch etwas rötlich ist. *bnc* ist deutlich dunkler als seine Nachbarn der *c*-Reiche: *bic* und *bpc*.

Filter 4 (und 4b): Die Helligkeitsgleichen verlaufen von rechts oben nach links unten.

aa	$A < D$	100...61
cc	$E < F$	52...44
ee	$H < I$	32...27
gg	K	23
ii	L	20
ll	M	17
nn	O	12
pp	R	7

Bemerkung. 1. Die „hellklaren" Farben *bxa* erscheinen deutlich grünlich. 2. *nn* und *pp* in Filter 4b einige Prozent dunkler.

Filter 5: Die Dunkelheit nimmt, wie bei Betrachtung mit bloßem Auge nach unten zu, nach links nur wenig. — *bpc* erscheint auffällig hell.

Filter 6: Fast genau dasselbe wie Filter 1.

„Nichtpassende“ Filter sind hiernach 2, 3 und 5.

Ostwald will die 680 Farben des Farbkörpers als „Normen“ ansehen. Mir persönlich scheinen die Unterschiede benachbarter Normalfarben des Farbkörpers dazu etwas zu groß. Gleicher Ansicht war einer meiner Privatschüler (W. Hulverscheidt), der als Sohn eines Aachener Großtuch-Fabrikanten wohl als für die Praxis einigermaßen kompetenter Beurteiler gelten dürfte.

3. Vergleichbarkeit der Farbenprüfungen.

Um die Vergleichbarkeit der Farbenprüfungen nach Ostwalds Methode zu prüfen, habe ich eine Anzahl von Personen aus meinem Bekanntenkreise, sowohl männlichen wie weiblichen Geschlechts, denen dies Gebiet völlig fremd war, Vergleichsmessungen mit den meinigen anstellen lassen. Sie fielen durchweg überraschend günstig aus, sowohl bezüglich des Farbtons wie des Graugehalts. Bei der „kleinen“ Grauleiter stimmten ihre Schätzungen mit meinen ausnahmslos überein, bei der „großen“ *A-B-C*-Leiter traten selten Differenzen um 1 Buchstaben auf. Auch Vergleichungen vorgelegter Farben mit denen des Farbkörpers verliefen befriedigend; die Abweichungen betrugen nur höchstens einen Nachbarrhombus, und zwar meist auf derselben „Schwarzgleichen“. Auch dies ist interessant und bestätigt durchaus Ostwalds Ansicht, daß uns die „dunkelklaren“ (und dazu parallelen) Reihen viel geläufiger sind als die hellklaren. Auch Kohlrauschs Messungen stehen ja mit Ostwalds in gutem Einklang. Größere Differenzen zeigten sich nur bei geringem Schwarzgehalt, was dem eben Gesagten durchaus entspricht.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß Ostwald — mit Recht — das Farbenproblem als ein psychologisches auffaßt. Selbst wenn also Kohlrausch recht hätte, daß Ostwald physikalisch nichts Neues gebracht hätte, so muß jeder unbefangene Beurteiler meines Erachtens zugeben, daß der Hauptwert der Ostwaldschen Farbenlehre auf psychologischem Gebiet liegt, wie es auch den Intentionen des Autors entspricht.

Potsdam, 25. Januar 1921.

(Eingegangen 11. Februar 1921.)

Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome.

Bemerkungen an den Herrn Adolph Smekal.

Von L. Vegard.

In dem Oktober-Heft dieser Zeitschrift hat Herr Adolph Smekal[1]) meine Theorie der Röntgenspektren behandelt.

In seiner recht polemisch angelegten Kritik meiner Röntgenstrahlentheorie hat er mir, um eine Basis für seinen Aufsatz zu schaffen, Ansichten zugeschrieben, welche ich nicht akzeptieren kann. Ich finde es deshalb notwendig, meinen Standpunkt zu gewissen von Herrn Adolph Smekal berührten Fragen festzulegen. Herr Smekal schreibt, als ob ich die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Frequenzen übersehen, oder mich mit dem jetzigen Stand der Theorie begnügt hätte. Dazu muß ich bemerken, daß diese Abweichungen in meinen Tafeln und Figuren ganz deutlich zum Vorschein kommen, und ich habe mehrmals in meinen Arbeiten betont[2]), daß die in den Frequenzformeln eingehenden Energiefunktionen korrigiert werden müssen, und daß deshalb die Theorie nur eine approximative Gültigkeit beanspruchen kann.

Gerade deshalb habe ich auch in der recht genauen zahlenmäßigen Übereinstimmung der Krooschen Formel keinen Grund für die Richtigkeit dieser Formel erblicken können.

Ich habe gezeigt, daß es für eine Linie möglich ist, durch passende Wahl der Elektronenzahl des äußeren Rings (Anfangsring der Rekombination) den Unterschied zwischen theoretischen und beobachteten Werten bis auf ein Minimum herabzusetzen[3]). Da aber die Änderungen der Frequenzen mit der Elektronenzahl im äußeren Ring von derselben Größenordnung wie die möglichen Fehler sind, ist eine in der Weise vorgenommene Bestimmung der Elektronenzahl ganz sinnlos.

Für Substanzen wie Natrium und Magnesium ist ja die Kroosche Annahme von einem zweiten Ring von neun Elektronen zusammen mit einem *K*-Ring von drei Elektronen eine Unmöglichkeit, während mein *L*-System von sieben Elektronen mit den Atomzahlen und dem periodischen Charakter der Elemente gut einpaßt.

Wenn man aber den von mir vorgeschlagenen Weg folgt, bekommt man erst eine wirkliche Theorie der Röntgenspektren, welche uns gestattet das ganze Röntgenstrahlenbereich von Emissions- und Absorptionsspektren unter

1) Adolf Smekal, diese Zeitschr. **21**, 505, 1920.
2) Vgl. L. Vegard, diese Zeitschr. **20**, 102, 1919.
3) Vgl. z. B. Phil. Mag. **37**, 245 u. 274, 1919.



$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k = V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i, q_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{l=k-1} [V(n_l, p_l, q_l)] - V(n_l, p_l - 1, q_l)] + \\ + V(n_k, p_k, q_k - 1) - V(n_k, p_k - 1, q_k), \qquad \text{I.}$$

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_i^k = V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i. q_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{l=k-1} [V(n_l, p_l, q_l) - V(n_l, p_l - 1, q_l)] + \\ - V(\tau, p_k - 1, 1), \qquad \text{II.}$$

$$\frac{\nu_A}{R} = V(n_i, p_i, q_i) - V(n_i, p_i, q_i - 1) + \sum_{l=i+1}^{l=m} [V(n_l, p_l, q_l) - V(n_l, p_l - 1, q_l)]. \qquad \text{III.}$$

einem einheitlichen Gesichtspunkte zu sehen, welcher sich auf bestimmten Vorstellungen über die Atomkonstitution gründet. Die wesentlichsten Züge meiner Theorie sind in den folgenden Gleichungen gegeben. Den beiden ersten Gleichungen entsprechen die Emission durch die Rekombination bzw. von Primär- und Sekundärkreisen, die dritte Gleichung die Absorption. Zu diesen Gleichungen kommt noch die Annahme, daß die Elektronensysteme des normalen Atoms in mehreren Zuständen existieren können.

Im allgemeinen werden für nichtkreisförmige Systeme die V-Funktionen durch mehrere Quantzahlen bestimmt (vgl. diese Zeitschr. **21**, 6, 1920).

Selbst wenn man die simplest mögliche Annahme über die Konstitution der verschiedenen Elektronensysteme macht, indem wir die Elektronen auf Kreisen und „Ellipsensysteme" verschiedener Quantzahlen angeordnet denken, werden die oben stehenden Gleichungen imstande sein die Röntgenspektren mit einer ganz erstaunenden Genauigkeit darzustellen, und ich meine auch jetzt, daß diese Übereinstimmung so weit geht, und sich in typischer Weise über einen so großen Bereich erstreckt, daß es sich ganz sicher durch die spätere Entwicklung zeigen wird, daß meine Theorie der Röntgenspektren in wesentlichen Punkten der Wirklichkeit entspricht. Wie aus meiner Arbeit klar hervorgeht, ist die Theorie aber als eine erste Approximation zu betrachten, und sie muß in irgendeiner Weise vervollständigt und korrigiert werden.

Das Problem, mit dem man hier zu tun hat, habe ich in einer Abhandlung in dieser Zeitschrift erörtert[1]). Man muß durch die Emissions- oder Absorptionsprozesse das A t o m m i t s e i n e n E l e k t r o n e n a l s e t w a s G a n z e s b e t r a c h t e n. Die Emission z. B. entsteht, wenn das Atom durch irgendeinen Rekombinationsprozeß von einem Zustand zu einem anderen übergeht. Die hierdurch im ganzen frei werdende Energie wird nach dem B o h r schen Frequenzgesetz in einem Quantum ausgestrahlt, oder

$$\frac{\nu}{R} = V_T' - V_T.$$

Es handelt sich also darum, die Energiefunktionen V_T' und V_T zu berechnen. Wie ich in meiner obenerwähnten Arbeit betont habe, müßte man bei dieser Berechnung sämtliche Elektronensysteme im Atom berücksichtigen. Es wäre dann zunächst anzunehmen, daß in den meisten Fällen von Emissionsprozessen nur das überspringende Elektron seine Quantzahlen ändert. Die Änderung der anderen Systeme dagegen wäre unter Aufrechterhaltung derjenigen von dem Emissionsprozeß geltenden Quantbedingungen zu berechnen. Wenn man die von mir aufgestellte Hypothese der veränderlichen Quantzahlen den normalen Elektronenzahlen zugrunde legt, ist wegen der dadurch hervorgebrachten Trennung der Systeme zu erwarten, daß nur die Elektronensysteme in dem „Rekombinationsbereich" die größeren Beiträge zu dem ausgestrahlten Energiequantum geben, und d i e a n g e g e b e n e n F o r m e l n b e r ü c k s i c h t i g e n n u r d i e E n e r g i e ä n d e r u n g e n d e s R e k o m b i n a t i o n s b e r e i c h e s. Aber selbst mit dieser Beschränkung ist die Aufgabe sehr schwer. Denn erstens müssen die Elektronensysteme dynamisch festgelegt werden, zweitens muß man die gegenseitigen Einflüsse der einzelnen Systeme genau in Rechnung bringen. Auf Grund der Ring-Vorstellung hat Herr S m e k a l Rechnungen über einige der möglichen gegenseitigen Einflüsse ausgeführt, und es zeigte sich, daß die so hinzukommenden Korrektionen die Unterschiede zwischen beobachteten und berechneten Werten der Frequenzen nicht erklären können. Deshalb wird er meine Theorie der Röntgenspektren verwerfen. Er hat aber nur gezeigt, daß es ihm nicht gelungen ist, die Korrektionen zu berechnen. Die Erklärung der vorhandenen

1) L. V e g a r d, diese Zeitschr. **21**, 6, 1920.

Unterschiede ist also noch eine offene Frage, deren Aufklärung wohl in einer Änderung der dynamischen Spezifikation der Elektronensysteme zu suchen ist.

Für solche möglichen Änderungen der dynamischen Spezifikation der Elektronensysteme sind viele Möglichkeiten denkbar. Erstens ist es möglich, daß das Coulombsche Kraftgesetz für Elektronen und Atomkern nicht genau gültig ist. Zweitens wäre von vielen Gesichtspunkten aus die Annahme eines dreidimensionalen kinematischen Bildes für die Elektronenbahnen eines Systems an sich die natürliche.

Der von Landé gemachte Vorschlag einer räumlichen Anordnung der Elektronen hat aber bis jetzt wenig Erfolg gehabt.

In ihren dynamischen Gebilden ist die Stabilität von dem Vorhandensein einer ganz bestimmten Anzahl von Elektronen im System bedingt, und mit derartigen Gebilden wird man nicht eine Theorie der Rönsgenspektren aufbauen können, ohne daß man unsere jetzigen Vorstellungen über die Entstehung der Emissionslinien und Absorptionskanten fundamental ändert.

Werden wir die Bohrsche Grundvorstellung aufrechterhalten, müssen wir annehmen, daß vor der Emission ein Elektron von einem Elektronensystem weggeworfen werden muß, und die zurückbleibenden Elektronen müssen bei Aufrechterhaltung ihrer Quantbedingungen wieder bei einer recht einfachen räumlichen Umlagerung ein neues Gleichgewichtssystem bilden können. Dieser Bedingung genügen die Landéschen Raumsysteme nicht. Wenn vom Landéschen Gebilde ein Elektron entfernt wird, muß das ganze Gebilde zusammenstürzen. Wenn dagegen die Elektronen sich so bewegen, daß sie in jedem Augenblick auf der Peripherie eines Kreises liegen (Kreise und ebene „Ellipsensysteme"), werden die zurückbleibenden Elektronen bei einer recht einfachen Neuorientierung in eine neue Gleichgewichtslage kommen können[1]).

Es wäre auch denkbar, daß die gegenseitige Koppelung der Elektronen innerhalb jeden Systems sehr gering ist, und daß das Gleichgewicht von ganz bestimmten gegenseitigen geometrischen Lagen der Elektronen unabhängig sei. Die Elektronen innerhalb jeden Systems müßten dann ganz unregelmäßige gequantelte Bahnen beschreiben, und die „Momentaufnahmen" der Elektronen würden sich von Zeit zu Zeit anscheinend ganz regellos verändern.

1) Es darf auch bemerkt werden, daß die Kreissysteme die „Relativitätseffekte" und die dadurch bedingte Form der ($\nu - N$)-Kurve sehr gut wiedergeben, und zwar in dem ganzen Spektralbereich. Die Kreissysteme geben mit anderen Worten angenähert richtige Geschwindigkeiten.

Auch unter Aufrechterhalten der Ringvorstellung lassen sich verschiedene Möglichkeiten denken.

Die Ringe brauchen wie bekannt nicht koplanar zu sein. Die Ebenen der verschiedenen Ringe können bekanntlich gewisse Winkel miteinander bilden. Eine andere Möglichkeit wäre die, daß die Elektronen eines Systems in jedem Augenblick regelmäßig auf der Peripherie eines Kreises verteilt sind, daß aber die Ringsysteme Bewegungen ausführen. Solche Bewegungen habe ich schon in Verbindung mit „Ellipsensystemen" beschrieben. Wir können aber auch annehmen, daß die Kreise- und Ellipsensysteme um Achsen, welche mit der geometrischen Drehungsachse des Gebildes nicht zusammenfallen, Rotationen ausführen. Diese Rotationen wären dann auch quantenhaft zu fixieren. Ein solches Gebilde von Kreissystemen müßte in bezug auf äußere durchschnittliche Wirkungen ähnliche Eigenschaften wie ein System mit „Raumverteilung" besitzen.

Es scheint mir deshalb, daß Herr Smekal in seinem Aufsatz die Beweiskraft der Born-Landéschen Arbeiten sehr überschätzt hat; denn erstens ist die Grundlage, auf welcher die Herren Born und Landé ihre Berechnung der Zusammenhangskräfte der Atome im festen Zustand berechnen, äußerst zweifelhaft. Anderseits hat er nicht die Möglichkeit bewegter Kreissysteme berücksichtigt.

Wie auch die von mir aufgebaute Theorie der Röntgenspektren zu korrigieren ist, ist sie jedoch die beste, welche somit bis jetzt vorliegt, und wenn man ihre Leistungsfähigkeit berücksichtigt, kann man wohl nicht daran zweifeln, daß die Voraussetzungen der Theorie in wesentlichen Punkten der Wirklichkeit entspricht, und daß sie einen Schritt auf dem Weg nach Wahrheit bezeichnen. In dieser Verbindung darf ich erwähnen, daß auch Sommerfeld, Kroo u. a. die Grundideen der Theorie aufgenommen haben.

Ob die Ringvorstellung aufgegeben werden muß oder nicht, ist eine Sache der weiteren Forschungen. Ich habe auch während meiner ganzen Arbeit in diesem Gebiet mit der Möglichkeit gerechnet, daß die Ringvorstellung nicht richtig ist. Deshalb habe ich auch mehrmals absichtlich von Elektronensystemen anstatt von Elektronenringen gesprochen[1]). Die Annahme von koplanaren Kreisen und „Ellipsensystemen" muß zuerst nur ihre Berechtigung darin suchen, daß sie in einfacher Weise die Berechnung von annähernd richtigen Frequenzen gestatten, und daß man die Hauptzüge der Röntgenspektren

1) Siehe z. B. Phil. Mag. **37**, 273 u. 274, 1919 und diese Zeitschr. **21**, 6, 1920.



aus bekannten Vorstellungen über die Atomkonstitution eben zahlenmäßig recht gut herleiten kann. Es wäre aber fern von mir zu behaupten, daß diese Vorstellung von koplanaren Ringsystemen notwendigerweise „der Wirklichkeit entspricht".

Herr Smekal behandelt meine Theorie als ob die Annahme von Kreisbahnen dabei das wesentliche sei. Wäre aber dies der Fall, würde meine Arbeit über die Erklärung der Röntgenspektren gewiß nichts bedeuten, denn die Ringvorstellung teile ich mit den meisten früheren Arbeitern auf dem Gebiet der Atomphysik.

Mit Rücksicht auf die Frage, inwieweit die Wiedervereinigung von Primär- oder Sekundärsystemen stattfindet, darf ich auf meine früheren Überlegungen hinweisen[1]).

Die Smekalschen Korrektionsberechnungen sind für die Erledigung der Frage in keiner Weise maßgebend. Denn seine Berechnungen beruhen auf der Annahme festliegender Ringe, und daß die Sekundärkreise mit den Primärelektronen eine Coulombsche Koppelung besitzen. Wenn man aber mit beweglichen Ringsystemen rechnet, oder wenn man mit einer loseren Koppelung zwischen Sekundär- und Primärelektronen eines Systems rechnet, werden die Smekalschen Korrektionsrechnungen nicht mehr gelten. Die Annahme von Wiedervereinigung von Sekundärbahnen erhält seine Berechtigung aus der Erklärung für die Abweichungen von den Kosselschen Relationen, bis möglicherweise eine bessere und richtigere Erklärung dafür gefunden wird. Die Annahme von sekundären Ausgangsbahnen des rekombinierenden Elektrons ist auch nicht notwendigerweise an die Kreisvorstellungen geknüpft; und die wesentlichen Gründe, welche gegen die Annahme von Wiedervereinigung von Primärkreisen spricht, sind auch von der Kreisvorstellung unabhängig. Damit möchte ich allerdings nicht gesagt haben, daß ein Beweis gegen die Existenz der Rekombination von Primärsystemen geführt ist.

1) Phil. Mag. **37**, 237, 1919.

Christiania, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 23. Februar 1921.)

Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt.

Von Friedrich Kottler.

Neuerdings ist die Raumzeitmessung in rotierenden Bezugssystemen in der allgemeinen Relativitätstheorie häufig Gegenstand der Erörterung gewesen[1]). Dies veranlaßt mich, auf meine Untersuchungen über eine Verallgemeinerung der Lorentztransformation für gewisse (nämlich „gleichförmig") beschleunigte Bewegungen zurückzukommen, die ich schon vor der allgemeinen Relativitätstheorie angestellt habe[2]). Zu der von mir studierten Klasse von Bewegungen gehört insbesondere die gleichförmige Rotation, auf welche ich mich im nachfolgenden beschränke.

1. Es sei im Fixsternraum ein gleichförmig rotierendes Bezugssystem gegeben, dessen eigene Masse vernachlässigt werden könne. Dieses System befindet sich daher nach der allgemeinen Relativitätstheorie (wenn man das Sonnensystem sich wegdenkt und von kosmologischen Hypothesen absieht) in einer Minkowskischen Welt, da sich alle Massen in unendlicher Entfernung von ihm befinden. Die Vernachlässigung der eigenen Masse des Systems ist mit demselben Recht oder Unrecht gestattet, mit welchem die Masse des in ein Schwerefeld eingebrachten Probekörpers vernachlässigt wird.

Es seien $XYZT$ Koordinaten, bezogen auf ein relativ zu den Fixsternen ruhendes System. Nach Voraussetzung ist

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2dT^2$$

die Maßbestimmung der gegebenen Welt. Es handelt sich darum, Koordinaten $x'y'z't'$ zu finden, welche zur Raumzeitmessung im rotierenden System verwendet werden können; insbesondere müssen für jeden mitrotierenden Punkt dieses Systems $x'y'z'$ jeweils feste Werte haben. Die $x'y'z't'$ müssen sich selbstredend als eindeutige Funktionen der $XYZT$ und umgekehrt darstellen. Die allgemeine Relativitätstheorie gibt derzeit keine Regel an die Hand, unter den möglichen $x'y'z't'$-Bestimmungen eine auszuzeichnen. Sie betrachtet alle und auch die $XYZT$ als gleichberechtigt und verlangt nur, daß die zugehörigen Maßbestimmungen ein gleich großes ds^2 ergeben. Da es uns aber offenbar auf die einfachste Bestimmung von $x'y'z't'$ ankommt, müssen wir trachten, eine solche Wahl zu treffen, daß sich insbesondere das ds^2 in den neuen Koordinaten möglichst einfach darstellt.

2. Die naheliegendste Bestimmung einer

1) A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **49**, § 3, 1916 und seither bei vielen Autoren.

2) F. Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt. Wiener Ber. IIa 1912. — Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung. Ann. d. Phys. **44**, 1914. — Vgl. auch: Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Ann. d. Phys. **56**, 1918, VIII.



Raumzeitmessung im rotierenden System scheint nun die zu sein, die Ehrenfest[1]) vor längerer Zeit gewählt hat. Man denke sich im rotierenden System ein Kontinuum von Beobachtern verteilt und jeden mit gewissen Maßstäben und einer gewissen Uhr versehen, die jedoch nur für seine unmittelbare infinitesimale räumliche Umgebung Geltung haben sollen. Diese Maßstäbe und diese Uhr sollen so vorausgesetzt werden, wie sie auf Grund der gewöhnlichen Lorentztransformation ein gleichförmig bewegter Beobachter besitzen würde, der dieselbe Geschwindigkeit nach Richtung und Größe besitzt, wie der betreffende rotierende Beobachter in der gerade betrachteten Lage, und für den betrachteten Zeitmoment T mit diesem koinzidiert; d. h. also, Maßstäbe und Uhr hängen wenigstens im Zustand stationärer, d. h. gleichförmiger Beschleunigung nur von der Geschwindigkeit und nicht auch von der Beschleunigung ab. Wir wollen diese im rotierenden System überall verteilten lokalen Maßstäbe und Uhren die natürlichen lokalen Maßstäbe und Uhren nennen.

Die natürlichen Maßstäbe zeigen vom ruhenden System aus infolgedessen in gewissen Lagen eine von Ort zu Ort wechselnde Lorentzkontraktion, ebenso die natürlichen Uhren eine entsprechende Dilatation. Mittels dieser natürlichen Maßstäbe und Uhren mißt man die lokalen „Eigenlängen" und „Eigenzeiten". (Einstein verwendet das Wort „natürlich" in etwas weiterem Sinn.) Zu gewinnen sind diese Maßstäbe nach der gemachten Voraussetzung wie in einem ruhenden System durch optische Mittel in bekannter Weise: Übertragung einer bestimmten Lichtwellenlänge auf einen Maßstab nach Michelson und Zurückführung der Zeitmessung auf die Lichtgeschwindigkeit etwa durch die Methode des rotierenden Spiegels.

3. Bevor wir auf die Diskussion der Frage eingehen, ob auf Grund der so gewählten Raummessung und Zeitmessung eine einheitliche Raumzeitmessung aufgebaut werden kann, mögen hier zwei historische Bemerkungen Platz finden. Sie betreffen das sogenannte Ehrenfestsche Paradoxon und etwas, was ich das Einsteinsche Paradoxon nennen werde.

Ehrenfest schließt bekanntlich l. c. so: Wie die Maßstäbe, müssen auch die Längen des rotierenden Systems vom ruhenden System aus gesehen je nach Umständen eine Verkürzung erfahren. Vergleicht man daher im ruhenden System die Peripherie eines Kreiszylinders mit seinem Durchmesser im Zustand der Ruhe und dann im Zustand der gleichförmigen Rotation um die Zylinderachse, so findet man das erstemal die Peripherie gleich dem π-fachen des Durchmessers, das zweitemal kleiner als das π-fache. Da dies im ruhenden System ein Widerspruch gegen die Geometrie wäre, muß man mit Planck[1]) annehmen, daß sich der Zylinder deformiert, sobald er in Rotation versetzt wird, derart daß die Elemente eines Durchmessers vor der Rotation nicht mehr die Elemente eines Durchmessers während der Rotation bilden. Dies hat man sich für das folgende Einsteinsche Paradoxon über eine rotierende Kreisscheibe vor Augen zu halten, um nicht in die Versuchung zu geraten, von der ruhenden Kreisscheibe auf die rotierende zu schließen.

Das genannte Einsteinsche Paradoxon[2]) ist nun das folgende: Man denke sich eine ebene Kreisscheibe schon im Zustande der gleichförmigen Rotation. Periphere Längen erscheinen im ruhenden System verkürzt, radiale unverkürzt. Mißt daher der rotierende Beobachter die Peripherie bzw. den Durchmesser der Scheibe, so muß er die Peripherie größer als das π-fache des Durchmessers finden. Das Paradoxon löst sich dadurch, daß die Geometrie des rotierenden Beobachters nicht mehr die euklidische zu sein braucht.

4. Ich werde nun zeigen, daß auf Grund der angegebenen natürlichen Raum- bzw. Zeitmessung eine einheitliche Raumzeitmessung nicht aufgebaut werden kann.

Das erste, was der rotierende Beobachter zu diesem Behuf zu tun hätte, wäre die räumliche Vermessung seines Systems.

Die erste Schwierigkeit hierbei ist die, ob er sich seiner eigenen Maßstäbe bedienen darf. Dazu muß vorausgesetzt werden, daß diese Maßstäbe an einen anderen Ort gebracht, mit den dortigen lokalen Maßstäben übereinstimmen. Das ist keineswegs sicher, da bei diesem Transport die Maßstäbe beschleunigt werden müssen, indem sie z. B. von kleinerer zu größerer Rotationsgeschwindigkeit oder umgekehrt übergehen. Unsere Voraussetzung der Unabhängigkeit der Längen von der stationären Beschleunigung trifft hier nicht zu, da die hier vorzunehmende Beschleunigung eine nicht stationäre ist. Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir vorschreiben, daß sich der Beobachter jeweils der lokalen Maßstäbe zu bedienen hat.

Die zweite Schwierigkeit ist die folgende: Gesetzt, der Beobachter wolle die Entfernung

1) P. Ehrenfest, Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. Diese Zeitschr. 10, 918. 1909.

1) M. Planck, Gleichförmige Rotation und Lorentzkontraktion, diese Zeitschr. 11, 294, 1910.

2) A. Einstein, l. c.

von einem Punkte A nach einem Punkte B vermessen; wie findet er die Richtung AB? Diese Richtung ist mathematisch definiert durch die gerade Linie und diese wieder als kürzeste Verbindungslinie AB. Es ist aber klar, daß auf diese mathematische Definition eine physikalische Messung nicht gegründet werden kann. Man müßte sonst unendlich viele Versuche vornehmen, um herauszubekommen, welches die kürzeste Verbindung ist. Die physikalische Definition der geraden Linie bei allen geodätischen und astronomischen Messungen ist vielmehr die Bahn der Lichtstrahlen. Wendet der rotierende Beobachter diese Definition an, so hat er ersichtlich eine falsche Richtung von A nach B, denn das Licht läuft im rotierenden System krummlinig von A nach B. Es erleidet nämlich auf Grund vielfacher Aberrationen der „Lichtstrahl" AB in B eine Winkeldrehung gegenüber seiner Ausgangsrichtung in A, welche in erster Näherung gleich der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems mal der Lichtzeit für die Strecke AB ist. Ferner ist der Lichtstrahl AB nicht identisch mit dem Lichtstrahl BA. Die Definition der geraden Linie mit Hilfe des Lichts ist also unbrauchbar im rotierenden System.

Praktisch steht freilich die Sache meistens so: Da die gewöhnlichen Winkelgeschwindigkeiten sehr klein sind, kann der Effekt der Lichtkrümmung in erster Näherung vernachlässigt werden. Der rotierende Beobachter erhält so eine erste Näherung der räumlichen Vermessung. Später, mit zunehmender Genauigkeit seiner Messungen, wird er daran Verbesserungen anbringen müssen, sobald er erfahren hat, daß das Licht krummlinig läuft. Auf Grund dieser Verbesserungen wird er wieder die genaue Bahn der Lichtstrahlen zu bestimmen haben usw., d. h. er bekommt, was man in der Mathematik eine Kette sukzessiver Approximationen nennt. Als Endglied dieser Kette steht dann die richtige räumliche Vermessung. Wir können den Beobachter diesen Weg für unsere prinzipielle Betrachtung nicht gehen lassen, erstens, weil er auf unendlich viele Versuche führt, zweitens, weil er bei beliebig großer Winkelgeschwindigkeit nicht zulässig wäre. Es bleibt nichts übrig, als dem Beobachter die Richtung von A nach B künstlich vorzugeben. Das ist aber die erste Durchbrechung des Prinzips der natürlichen Messung. Nur so läßt sich die natürliche Raummessung durchführen.

5. Wir wenden uns nun zur natürlichen Messung der Zeit.

Vergleicht man irgend zwei natürliche lokale Uhren im ruhenden System, so zeigen sie im allgemeinen verschiedene Ganggeschwindigkeit. Die weiter von der Rotationsachse weg befindlichen gehen langsamer als die näheren (Einstein). Man könnte gleichwohl die natürlichen lokalen Uhren zur Zeitmessung verwenden, wenn man sie künstlich auf gleiche Ganggeschwindigkeit einregulieren würde. Das ist die zweite Durchbrechung des Prinzips der natürlichen Messung.

Aber das genügt noch nicht. Man muß sie auch alle einmal synchron stellen können. Und das ist unmöglich, wie man auf folgendem Wege einsieht: Wenn es möglich wäre, so müßten alle Punkte des rotierenden Systems einmal „gleichzeitig" ruhen. Es gibt aber nach Minkowskischen Prinzipien keinerlei Zeitmessung, bei der dies möglich wäre. Der exakte Beweis hierfür folgt in Nr. 7. Angenähert läßt sich diese Unmöglichkeit auch aus Newton-Galileischen Prinzipien begreifen. In der Newton-Galileischen Mechanik besitzen alle Punkte eines beliebig translatorisch bewegten starren Körpers „gleichzeitig" die gleiche Geschwindigkeit, niemals aber alle Punkte eines rotierenden Körpers. Analog ist es in der Minkowskischen Mechanik unmöglich, alle Punkte eines rotierenden Systems „gleichzeitig" auf „Ruhe" zu transformieren.

Daran scheitert mithin die natürliche Zeitmessung im rotierenden System. Es bleibt nichts übrig, als sie ganz aufzugeben und eine künstliche Zeitmessung einzuführen.

6. Damit ist aber auch schon klar, daß eine einheitliche Raumzeitmessung auf Grund der natürlichen Raum- bzw. Zeitmessung unmöglich ist, da die letztere hierbei versagt. Es fragt sich also höchstens noch, ob wir die natürliche Raummessung mit irgendeiner künstlichen Zeitmessung paaren können, um zu einer einheitlichen Raumzeitmessung zu gelangen. Dies ist aber unmöglich, wie man folgendermaßen sieht:

Bei der Raumvermessung im rotierenden System war die Zeit gleichgültig, da es sich um Längen handelte, die im rotierenden System ruhen. Die Messung solcher relativ ruhender Längen von Strecken muß nicht in allen Punkten der Strecke synchron vorgenommen werden. Anders ist es bei der Raumzeitmessung, da es sich hier um raumzeitlich veränderliche Vorgänge handelt. Die zugehörigen räumlichen Längen müssen durchaus synchron genommen werden. Dann können sie aber niemals mit den natürlichen Längen übereinstimmen, denn sonst wäre ja eine Synchronisierung auf Grund der natürlichen Zeitmessung möglich.

Hieraus folgt: Die natürliche Raum- und Zeitmessung ist unverwendbar für eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System.

7. Es sei hier noch gestattet, den mathematischen Grund dieser Unverwendbarbeit anzugeben:

In der Minkowskischen geometrischen Darstellung wird die gleichförmige Rotation repräsentiert durch ein Bündel von Weltlinien, welche koaxiale gemeine Schraubenlinien gleicher Ganghöhe sind (vierte Koordinate imaginär!). Die natürlichen Maßstäbe bzw. Zeiten sind die Längen, genommen in bzw. normal zu dem Raum, welcher in einem bestimmten Weltpunkte normal zur Tangente der durchgehenden Weltlinie gelegt ist. Jedoch ist von diesem Raum bzw. der zu ihm normalen Richtung (Eigenzeitachse) nur ein infinitesimales Stück in Betracht zu ziehen. Für einen benachbarten Weltpunkt tritt ein infinitesimales Stück von einem anderen Raum in Geltung usw. Wenn man nun diese infinitesimalen räumlichen Maßstäbe aneinanderreiht, so bekommt man das, was wir die natürlichen räumlichen Längen genannt haben. Betrachtet man z. B. einen materiellen Punkt A des rotierenden Systems, so entspricht ihm eine Weltlinie A; ebenso den Punkten B bzw. C die Weltlinien B bzw. C. Der natürlich gemessenen Länge AB entspricht dann in der Minkowskischen Darstellung eine ebenso lange gerade Strecke, welche die Weltlinien A und B orthogonal durchsetzt, ebenso der Länge AC eine ebensolche Strecke, welche die Weltlinien A und C orthogonal durchsetzt. Zieht man von A aus zu irgendeiner Zeit alle möglichen Strecken AB, AC..., so erfüllen sie offensichtlich einen „ebenen" Raum, der die Weltlinie A normal schneidet. Aber z. B. die Strecke BC liegt schon im allgemeinen nicht mehr in diesem Raum. Allgemein zu reden, erfüllen die natürlich gemessenen räumlichen Längen keine dreidimensionale räumliche Mannigfaltigkeit, keinen „ebenen" oder „krummen" Raum, wie sie es doch sollten, wenn sie alle „gleichzeitig" wären. Denn eine solche Mannigfaltigkeit müßte überall von den Weltlinien orthogonal durchsetzt werden; es gibt aber keine dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die zu Orthogonaltrajektorien das Bündel koaxialer Schraubenlinien besäßen.

8. Nachdem wir uns überzeugt haben, daß mit Hilfe der natürlichen Maßstäbe und Uhren eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System nicht zu gewinnen ist, müssen wir uns um eine künstliche Gewinnung einer solchen Raumzeitmessung umsehen. Wir werden also irgendwie Maßstäbe und Uhren über das rotierende System verteilen, die nicht mehr mit den natürlichen übereinstimmen müssen. Sie werden also vom ruhenden System aus gesehen nicht mehr die bloße Lorentzkontraktion bzw. Dilatation aufweisen, sondern kürzer oder länger sein als die natürlichen Maßstäbe und Uhren. Aber immer müssen sie so gewählt sein, daß sie zusammen eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System ermöglichen. Das ist nun eine vieldeutige Aufgabe; denn angenommen, man hätte eine solche Raumzeitmessung $x'y'z't'$ angegeben, so kann man durch beliebige Transformationen der $x'y'z'$ offenbar immer eine andere gleichmögliche Raummessung $x''y''z''$ herleiten usw. Wir haben schon vorhin bemerkt, daß wir gegenüber dieser Vieldeutigkeit keine andere Auswahlregel haben als die größtmögliche Einfachheit. Dabei nehmen wir an, daß die unendlich vielen Versuche, auf welche der rotierende Beobachter angewiesen ist, wenn er mit Hilfe der natürlichen Messungen allein vorwärts kommen wollte, ihn mit größter Wahrscheinlichkeit auch auf die von uns als einfachst bezeichnete Maßbestimmung als Endresultat bringen werden. Das einzige, was wir dann mit der Einführung der künstlichen Maßbestimmung erzielen, ist also nach dieser Wahrscheinlichkeitsannahme eine Abkürzung des Verfahrens zu ihrer Gewinnung.

9. Eine solche künstliche Raumzeitmessung liegt nun außerordentlich nahe. Es ist unmöglich, die natürlichen lokalen Uhren synchron zu halten. Dann liegt es nahe, eine Uhr, etwa die Uhr der Station A, auszuzeichnen und ihre Ganggeschwindigkeit den anderen Stationen durch künstliche Mittel aufzuzwingen. Es ist klar, daß hierdurch eine Gleichzeitigkeit im rotierenden System ermöglicht ist. Es liegt nun weiter sehr nahe, zu dieser ausgezeichneten Lokalzeit von A die Lokalmaßstäbe von A hinzuzunehmen, in der Hoffnung, daß sich hierdurch eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System gewinnen lassen wird. Man hat also solche künstliche lokale Uhren bzw. Maßstäbe über das rotierende System zu verteilen, welche der Rotationsgeschwindigkeit von A und nicht der Rotationsgeschwindigkeit der jeweiligen lokalen Station angepaßt sind. (Die praktische Durchführung der Einführung solcher Maßstäbe und Uhren könnte nur mit Hilfe eines ruhenden Beobachters gelingen. Es wird sich aber weiter unten zeigen daß es auf die praktische Verteilung dieser Maßstäbe und Uhren gar nicht ankommt, sondern, daß es sich hierbei um eine der Auffassung des Naturgeschehens zugrundegelegte Ansicht handelt.) Diese Maßstäbe erscheinen z. B. vom ruhenden System aus in ein und derselben Richtung immer gleich lang, wo sie sich auch befinden. Man sieht also sofort, daß die Raummessung im rotierenden System mit ihrer Hilfe eine euklidische wird. Diese genügt daher der Forderung der

größtmöglichen Einfachheit der gesuchten Raumzeitmessung.

Es ist nur noch eine Frage zu erledigen: Bleiben die so in A bestimmten Koordinaten $x'y'z'$ irgendeiner Station B des rotierenden Systems während der Dauer der Rotation wirklich konstant? Die Antwort lautet: Ja. Es ist dies eine ausgezeichnete Eigenschaft der gleichförmigen Rotation, allgemein zu reden, aller „gleichförmigen“ oder stationären Beschleunigungen (und nur solcher Bewegungen, wenn noch eine hier nicht näher zu erörternde Bedingung hinzugefügt wird), wie ich l. c. gezeigt habe.

Freilich wäre noch ein Einwand zu beachten: Wir hatten früher ausdrücklich den Transport der natürlichen Maßstäbe von einem Ort zu einem andern im rotierenden System ausgeschlossen (siehe oben Nr. 4); denn wir wissen nicht, ob ein solcher Maßstab an den andern Ort gebracht, dortselbst die Länge des natürlichen lokalen Maßstabes annehmen wird. Wollen wir das letztere gleichwohl als richtig annehmen, so erhebt sich die Frage, wie dies mit der künstlichen Maßbestimmung zu vereinigen sei, da doch dann der transportierte Maßstab mit dem künstlichen lokalen Maßstab nicht übereinstimmen wird. Es ist auch nicht zu vereinigen! Wir müssen den Transport der Maßstäbe bei unserer Maßbestimmung verbieten. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, daß durch dieses Verbot unser Raumzeitbild eine Einschränkung hinsichtlich der Wirklichkeitstreue erleidet. Dem ist aber nicht so; denn wir vermessen in Wirklichkeit unsern irdischen Raum auf größere Distanzen und schon gar den Sternenraum nicht durch Abtragen von Maßstäben, sondern wir erschließen ihn indirekt auf Grund des visuellen Bildes, indem wir bestimmte Ausbreitungsgesetze des Lichts zugrunde legen. Dabei legen wir selbstredend die lokalen Maßstäbe und Uhren der Station A zugrunde, in der wir uns gerade befinden. Der einzige Unterschied zwischen dieser Methode und der unsrigen für das rotierende System ist nur der, daß wir für das letztere nicht mehr so einfache Ausbreitungsgesetze des Lichts zugrunde legen können wie im ruhenden System innerhalb des Sternenraums. Voraussetzung der Messungen ist aber beidenfalls die Kenntnis dieser Gesetze. Darin, daß wir diese Kenntnis für den rotierenden Beobachter vorwegnehmen müssen, statt sie ihn sich sukzessive erwerben zu lassen, liegt, wie schon hervorgehoben, das einzige „künstliche“ Moment unserer Raumzeitmessung im rotierenden System. Das Verbot des Transports der Maßstäbe ist hingegen, wie man sieht, kein solches Moment[1]).

10. Es handelt sich nun noch um die mathematische Darstellung der gewählten Raumzeitmessung im rotierenden System.

Es ist klar, daß wir zur Bestimmung der $x'y'z'$ einer einzigen gewöhnlichen Lorentztransformation bedürfen, welche der momentanen Rotationsgeschwindigkeit der ausgezeichneten Station A angepaßt ist. Denn wir haben ja schon erwähnt, daß gezeigt werden kann, daß in irgendeiner späteren Lage der Station A sich die nämlichen Werte von $x'y'z'$ für „mitbewegte“ Punkte ergeben. Von dieser Lorentztransformation benötigen wir natürlich nur einen Zeitpunkt. Der Beobachter in A rotiere längs einer Kreislinie (Radius a) in der Ebene $Z=b$ um die Z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Seine Momentangeschwindigkeit hat daher die Größe $a\omega$ und die Richtung der Tangente der Kreisbahn. Es seien $xyzt$ die Koordinaten von A im ruhenden System $XYZT$, also

$$x=a\cos\omega t \qquad y=a\sin\omega t \qquad z=b.$$

Wir fassen eine Lage t ins Auge und nehmen die angekündigte Lorentztransformation in zwei Stufen vor:

Zunächst verschieben und drehen wir das System $XYZT$ so, daß der neue Ursprung in die Lage t von A fällt und die neue X_1-Achse radial, die neue Y_1-Achse tangential weist:

$$\begin{aligned}
X &= x+X_1\cos\omega t - Y_1\sin\omega t = (a+X_1)\cos\omega t - Y_1\sin\omega t\\
Y &= y+X_1\sin\omega t + Y_1\cos\omega t = (a+X_1)\sin\omega t + Y_1\cos\omega t\\
Z &= z+Z_1 = b+Z_1 \qquad (1)\\
T &= t+T_1.
\end{aligned}$$

Hierauf transformieren wir die Geschwindigkeit $a\omega$ (parallel zur Y_1-Achse) auf Ruhe. D. h. wir führen ein System $x'y'z'T'$ ein, derart, daß:

$$\begin{aligned}
X_1 &= x'\\
Y_1 &= \frac{y'+a\omega T'}{\sqrt{1-\frac{a^2\omega^2}{c^2}}}\\
Z_1 &= z' \qquad (2)\\
T_1 &= \frac{T'+\frac{a\omega}{c^2}y'}{\sqrt{1-\frac{a^2\omega^2}{c^2}}}.
\end{aligned}$$

Hierin haben wir, wie angekündigt, den

1) Es ist selbstverständlich, daß die Messung auch durch Gebrauch der jeweiligen lokalen künstlichen Maßstäbe geschehen kann; nur dürfen diese nicht über ihren Geltungsbereich hinaus transportiert werden.

einzigen Zeitpunkt $T = 0$ zu nehmen und das Resultat mit (1) zu vereinigen. Es kommt

$$X = (a + x')\cos\omega t - \frac{y'}{\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}\sin\omega t$$

$$Y = (a + x')\sin\omega t + \frac{y'}{\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}\cos\omega t$$

$$Z = b + z' \qquad (3)$$

$$T = t + \frac{\frac{a\omega}{c^2}y'}{\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}.$$

Hier könnten wir noch t durch die Eigenzeit der Station A:

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}$$

ersetzen, welche sich aber von t nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, weshalb wir das unterlassen.

$x'y'z't$ ist unsere gesuchte Raumzeitmessung für das rotierende System. Dies beweist man nachträglich, indem man zeigt:

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)_{x'y'z'=\text{const}} = -\omega Y \quad \left(\frac{dY}{dT}\right)_{x'y'z'=\text{const}} = \omega X \quad \left(\frac{dZ}{dT}\right)_{x'y'z'=\text{const}} = 0,$$

d. h. der materielle Punkt $x'y'z' = \text{const}$ läuft wirklich auf einer Bahn, die einer gleichförmigen Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Z-Achse entspricht.

Die zu (3) gehörige Maßbestimmung berechnet sich aus

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2dT^2 \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2g_{14}dx'dt + \qquad (4) \\ &\quad + 2g_{24}dy'dt + g_{44}dt^2, \end{aligned}$$

wobei

$$g_{14} = -\frac{\omega y'}{\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}, \quad g_{24} = +\frac{\omega x'}{\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}},$$

$$g_{44} = -c^2 + (a + x')^2\omega^2 + \frac{y'^2\omega^2}{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}.$$

Sie hat, wie vorauszusehen war für $dt = 0$ euklidische Raummessung, ist daher wohl die einfachst mögliche Raumzeitbestimmung im rotierenden System.

Die Transformation (3) nenne ich die verallgemeinerte Lorentztransformation für das gleichförmig rotierende System.

11. Um zum Schlusse von den künstlichen Längen $dx'dy'dz'$ nochmals auf die natürlichen zurückzukommen, beachte man, daß das natürliche Raumelement jeweils orthogonal zu den betreffenden Weltlinien steht. Eine Weltlinie ist gegeben durch $x'y'z' = \text{const}$, mithin variiert längs ihr bloß t. Die zum natürlichen Raumelement gehörigen Zuwächse $dx'dy'dz'dt$ findet man daher aus

$$g_{14}dx' + g_{24}dy' + g_{44}dt = 0.$$

Somit kommt für die Länge $d\sigma$ des natürlichen Elements ausgedrückt in den künstlichen Maßstäben der Station A

$$d\sigma^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - \frac{1}{g_{44}}(g_{14}dx' + g_{24}dy')^2. \quad (5)$$

Wir wollen speziell den Standpunkt von A in der Rotationsachse, etwa $a = b = 0$, wählen. Unsere verallgemeinerte Lorentztransformation (3) wird in diesem Fall

$$\begin{aligned} X &= x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ Y &= x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ Z &= z' \qquad (3\text{a}) \\ T &= t, \end{aligned}$$

d. h. der Beobachter A ruht, bezieht sich aber auf rotierende Achsen (Achsen, die im rotierenden System fest sind).

Der Ausdruck des natürlichen Raumelements in seinen Maßstäben wird dann einfach

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2 - x'^2 + y'^2\omega^2}(-y'dx' + x'dy')^2 \qquad (5\text{a}) \end{aligned}$$

oder bei Einführung von Polarkoordinaten $r'\varphi'$ in der $x'y'$-Ebene

$$d\sigma^2 = dr'^2 + \frac{r'^2}{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}d\varphi'^2 + dz'^2. \qquad (5\text{b})$$

Hieraus bestätigt man das Einsteinsche Paradoxon. Es wird die natürlich gemessene Peripherie des Kreises $r' = \text{const}$, $z' = \text{const}$

$$\frac{2\pi r'}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} > 2\pi r'$$

der natürlich gemessene Durchmesser

$$2r',$$

ihr Verhältnis daher

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} > \pi.$$

Man bemerkt leicht, warum umgekehrt die natürlich gemessenen räumlichen Längen unverwendbar sind für eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System, denn man hat aus (4) und (5)

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{1}{g_{44}}(g_{14}dx' + g_{24}dy' + g_{44}dt)^2.$$

Es gibt aber keine Funktion $\tau\,(XYZT)$, deren Differential dem in der runden Klammer eingeschlossenen linearen Differentialausdruck proportional wäre, so daß

$$g_{14}dx' + g_{24}dy' + g_{44}dt = \lambda\, d\tau$$

wäre. Dies bestätigt man leicht durch Berechnung der Pfaffschen Integrabilitätsbedingung, welche für die in (4) gegebenen Werte der g_{14} $g_{24} g_{44}$ niemals erfüllt ist. Also kann auch $d\sigma^2$ nicht als raumartiger Teil des ds^2 auftreten. Die natürliche Raummessung ist unverwendbar für eine einheitliche Raumzeitmessung im rotierenden System.

12. Hier mag noch eine Bemerkung Platz finden. Man weiß, daß Einstein das zitierte Paradoxon anwendet, um daraus den Schluß zu ziehen, daß im allgemeinen das Schwerefeld die Raummaße beeinflußt, derart, daß die Geometrie nicht mehr euklidisch ist. Denn zufolge seiner Äquivalenzhypothese sind die Vorgänge im rotierenden System äquivalent denen in einem bestimmten Schwerefeld, welches ich ein Schweredrehfeld genannt habe. Der erwähnte Schluß Einsteins ist aber nur richtig, wenn als Geometrie das Resultat der natürlichen Raummessung bezeichnet wird. Für den raumartigen Teil der vierdimensionalen Maßbestimmung ds^2 gilt, wie wir aus (4) sehen, der Schluß Einsteins nicht; das rotierende System kann daher kein Beispiel abgeben für die Beeinflussung des raumartigen Teils des ds^2 durch wirkliche Schwerefelder, wie sie z. B. im Feld des Massenpunkts auftritt (Schwarzschild).

(Eingegangen 24. Februar 1921.)

Ein kurzer Weg zum beschränkten Relativitätsprinzip.

Von Hans Witte.

Von den vier kennzeichnenden Gleichungen der besonderen Relativitätstheorie

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (x - vt)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (x' + vt')$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

sind je zwei durch die beiden anderen bestimmt. Gewöhnlich rechnet man aus den beiden hinführenden Gleichungen ($x' = \ldots$, $t' = \ldots$) die beiden herführenden aus ($x = \ldots$, $t = \ldots$). Man kann aber auch andere Paare bilden. Dann findet sich eine Herleitung der Gleichungsgesamtheit, die dadurch bemerkenswert ist, daß sie von einem Mindestmaß des geschichtlich Gegebenen ausgeht.

Wir versetzen uns in denjenigen Zustand der Wissenschaft zurück, als H. A. Lorentz und Fitzgerald zur Erklärung des Michelsonversuches ihre Zusammendrückungsannahme aufgestellt hatten. Damals kannte man das Relativitätsprinzip der alten Mechanik, vertreten durch die Galilei-Gleichungen:

$$(G_1) \qquad x' = x - vt$$

$$(G_2) \qquad x = x' + vt;$$

sie sagen aus, daß sich das x'-System mit derselben Geschwindigkeit $|v|$ gegen das x-System bewegt, wie x gegen x'. Nach Lorentz und Fitzgerald soll das eine Raummaß (x') im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt sein, also statt (G_1)

$$(L_1) \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (x - vt).$$

Wir machen nun die einzige weitere Voraussetzung, daß auch für diese Lorentzverkürzung der Relativitätsgedanke gelten soll. Das heißt: ebenso wie das x'-Maß zu einer festen Zeit (t) verkürzt ist, soll das x-Maß zu einer festen Zeit (natürlich t') verkürzt sein, also statt (G_2)

$$(L_2) \qquad x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (x' + vt').$$

Dann kommt aus diesen Voraussetzungen von selber

$$x' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - x = -vt$$

$$x \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - x' = +vt',$$

weiter durch jeweiliges Malnehmen mit $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ und Zusammenzählen:

$$-\frac{v^2}{c^2}x = v \cdot \left(-t + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot t'\right)$$



$$-\frac{v^2}{c^2}x' = v\cdot\left(+t' - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot t\right)$$

und schließlich

$$(L_3) \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$(L_4) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right);$$

L_1), (L_2), (L_3), (L_4) die vollständigen Gleichungen der Lorentz-Umformung, aus denen sich alles Übrige ergibt[1]). Einsteins Zeitbegriff und der Grundsatz der gleichbleibenden Lichtgeschwindigkeit erscheinen beide zugleich als Folge aus den angegebenen, geschichtlich naheliegenden Raum-Voraussetzungen.

1) Man kann auch den Betrag der Zusammendrückung statt $1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ willkürlich ansetzen (a) und hernach beweisen, daß dann eine Geschwindigkeit $c = \frac{a\cdot v}{\sqrt{a^2-1}}$ von der bekannten Bedeutung besteht. — Der hier beschriebene „kurze Weg" und andere Eigentümlichkeiten lassen sich sehr schön an dem neuen Relativitäts-Schauwerk der wissenschaftlichen Werkstätte Günther & Tegetmeyer (Braunschweig) verfolgen, über das ich demnächst berichten werde.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), 28. Februar 1921.

(Eingegangen 3. März 1921.)

Einwirkung der Temperatur auf die Gestalt der Oberflächenschichten beim kristallinischen Selen.

Von W. S. Gripenberg.

Bei der Herstellung von Selenplatten durch Kristallisation geschmolzenen Selens zwischen Glasplatten, bei konstanter Temperatur von 190°, fiel es mir auf, daß bei Abkühlung die vorher hochglanzpolierte Selenoberfläche merklich uneben wurde. Sie ist anscheinend körnig geworden, obschon noch gewissermaßen blank.

Zeigten sich vorher zwischen Selen und Glas Newtonsche Interferenzfarben von weithin sichtbarer Größe und niedriger Ordnung, so sind dieselben nunmehr derart zusammengeschrumpft und ihre Anzahl vermehrt, daß Vergrößerung nötig ist, um sie wahrzunehmen.

Die Erscheinung ist vollkommen reproduzierbar, der Versuch kann beliebig oft wiederholt werden. Wird die Glasplatte durch eine Vorrichtung festgehalten, so kehren die gleichen Interferenzfiguren beim Wiedererwärmen zurück.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich die Oberfläche mit zahlreichen Grübchen (0,1—0,001 mm Durchmesser) bedeckt, entsprechend den Kristallindividuen. Die Hauptachsen münden im tiefsten Teil der Gruben aus, woselbst auch strahlige Figuren und auch wirkliche Spalten (3—4) zusammenlaufen. Wahrscheinlich steht die Achse senkrecht zur Glasfläche.

Die Tiefe der Einsenkungen konnte ich nicht ermitteln; doch schien oft eine andere Interferenzfarbe über dem Rand als über der Mitte der Grube zu sein.

Die Ursache zur Entstehung der Grübchen besteht natürlich darin, daß der Wärmeausdehnungskoeffizient in der Richtung der Hauptachse am größten ist.

Die Erscheinung wird am deutlichsten hervortreten, wenn die Kristallisation bei möglichst hoher, konstanter Temperatur vor sich geht.

Hiermit wird nun auch ein neues Licht auf die Vorgänge in den Selenzellen geworfen. Ist nämlich bei einer gewissen Temperatur der Anschluß zwischen Selen und Elektrode ein vollkommener, so wird dies bei den meisten anderen Temperaturen nicht mehr der Fall sein. Die Selenoberfläche ist uneben und brüchig geworden, der Übergangswiderstand ist verändert. Eine weitere Ursache zur bisherigen Unmöglichkeit, mit Selen wirkliche Präzisionsmessungen anzustellen, ist somit aufgefunden worden.

Helsingfors, Februar 1921.

(Eingegangen 3. März 1921.)

Berichtigung.

Leider bin ich gelegentlich von Bemerkungen über „Weiß hoher Ordnung" (diese Zeitschr. **22**, 51, 1921) durch ungenügende Überlegung in einen alten, nachgerade etwas ehrenrührig gewordenen Irrtum verfallen, der besonders seit den Ausführungen Plancks und v. Laues[1]) nicht mehr vorkommen sollte. Ich beeile mich, den mir jetzt unbegreiflichen zweiten Absatz meiner leichtsinnig voreiligen Mitteilung zurückzunehmen.

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **1**, 400, 1905.

Diakonissenhaus Leipzig-Lindenau, 3. März 1921.

Th. Des Coudres.

(Eingegangen 6. März 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik.

Von M. Born.

(Schluß.)

II. Die neue Darstellung.

Der Kernpunkt der Carathéodoryschen Theorie ist die Erkenntnis, daß eine viel allgemeinere Formulierung des Erfahrungsprinzips von der Unmöglichkeit gewisser Prozesse genügt, um mit Hilfe des vorher bewiesenen Satzes über Pfaffsche Differentialausdrücke ohne neue, physikalische Überlegungen in einfachster Weise zum zweiten Hauptsatze zu gelangen.

Gewöhnlich legt man Gewicht darauf, das Erfahrungsprinzip so zu formulieren, daß es möglichst viele Prozesse als unausführbar hinstellt: es soll auf keine Weise möglich sein, ohne „Kompensation" Wärme aus dem kälteren in den wärmeren Körper zu bringen oder Wärme vollständig in Arbeit zu verwandeln.

Tatsächlich reicht aber die Erfahrung, daß es überhaupt gewisse unausführbare Prozesse gibt, zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes vollständig aus. Daher genügt der Hinweis auf so primitive Erfahrungen wie die, daß ein adiabatisch eingeschlossenes System nicht seinen Energieinhalt vollständig in Form von Arbeit verausgaben kann. Das liegt daran, daß ein solches System, wenn man die Form und Lage der Wände am Anfang und Ende des Prozesses identisch wählt, durch den Prozeß heißer, aber niemals kälter werden kann; man kann höchstens durch quasistatische Leitung des Vorgangs erreichen, daß die Temperatur konstant bleibt. Es gibt also adiabatisch unerreichbare Nachbarzustände, und zwar offenbar in beliebiger Nähe des Ausgangszustandes. Es ist aber für die thermodynamischen Folgerungen ganz unwesentlich, welches die nicht erreichbaren Nachbarzustände sind; es kommt nur darauf an, daß es solche gibt. Daher formulieren wir die dem zweiten Hauptsatze zugrunde liegende Erfahrungstatsache so:

Prinzip von Carathéodory: In beliebiger Nähe jedes Zustandes gibt es Nachbarzustände, die durch adiabatische Vorgänge von dem ersten Zustande aus nicht erreichbar sind.

Insbesondere gibt es erst recht Nachbarzustände, die durch quasistatische, adiabatische Vorgänge, also auf Adiabaten, nicht erreichbar sind.

Daraus folgt nun mit Hilfe unserer mathematischen Überlegungen, daß der Pfaffsche Differentialausdruck dQ, das Differential der Wärme, immer einen integrierenden Nenner hat, und daraus ergeben sich dann mit Leichtigkeit die Formeln der Thermodynamik, während die traditionelle Theorie erst hier den großen Apparat ihrer Kreisprozesse in Bewegung setzt.

Für eine einzelne Flüssigkeit, deren Zustand durch zwei Veränderliche, etwa V, ϑ, bestimmt ist, lehrt das Prinzip unmittelbar nichts Neues; denn ein Pfaffscher Ausdruck von 2 Veränderlichen hat immer einen integrierenden Nenner.

Man muß also zu Systemen aus mindestens zwei Körpern im thermischen Gleichgewichte übergehen. Etwas Analoges geschieht auch in der gewöhnlichen Theorie, indem man zwei Maschinen Carnotsche Kreisprozesse zwischen denselben Wärmequellen im umgekehrten Sinne durchlaufen läßt. Aber man braucht diesen Umweg gar nicht; man betrachte einfach zwei in thermischer Berührung befindliche Körper, deren Differential der Wärme durch die Formel (8′) gegeben ist und einen Pfaffschen Ausdruck von 3 Veränderlichen V_1, V_2, ϑ darstellt. Die Vereinigung unseres mathematischen Satzes mit dem Prinzip von Carathéodory gibt dann das Resultat, daß

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = \lambda d\varphi \tag{22}$$

gesetzt werden kann, wo λ und φ gewisse Zustandsfunktionen sind.

Andererseits ist auch

$$dQ_1 = \lambda_1 d\varphi_1, \quad dQ_2 = \lambda_2 d\varphi_2, \tag{23}$$

also

$$\lambda d\varphi = \lambda_1 d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2. \tag{24}$$

Man kann nun statt V_1, V_2 und ϑ auch φ_1, φ_2 und ϑ als unabhängige Veränderliche wählen; dann sind λ und φ als Funktionen von φ_1, φ_2, ϑ anzusehen, und die Formel (24) lehrt ohne weiteres, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0. \tag{25}$$

Wegen der dritten dieser Gleichungen hängt φ nicht von ϑ, nur von φ_1 und φ_2 ab. Folglich sind auch die Quotienten

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

von ϑ unabhängig:



$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\lambda_1}{\lambda}=0,\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\lambda_2}{\lambda}=0,$$

oder

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta}.$$

Nun ist λ_1 eine Zustandsgröße des ersten Körpers, also nur von φ_1 und ϑ abhängig; ebenso ist λ_2 eine Zustandsgröße des zweiten Körpers, also nur von φ_2 und ϑ abhängig. Das erste Gleichheitszeichen kann daher nur gelten, wenn beide Größen nur von ϑ abhängen. Demnach gilt

$$\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\log\lambda}{\partial\vartheta}=g(\vartheta), \quad (26)$$

wo die Funktion $g(\vartheta)$ universell ist; denn sie hat für die beiden beliebigen Körper sowie für das aus ihnen gebildete System denselben Wert. Diese kleine Überlegung führt also mit ganz „normaler" Mathematik zur Existenz einer universellen Temperaturfunktion, aus der sich die übliche Temperaturskala durch eine einfache Normierung des integrierenden Nenners herstellen läßt.

Wir lassen jetzt den Index fort und verstehen unter λ den integrierenden Nenner eines beliebigen Systems; dann folgt

$$\log\lambda=\int g(\vartheta)\,d\vartheta+\log\Phi, \quad (27)$$

wo die Integrationskonstante, $\log\Phi$ bezeichnet, noch von den anderen Zustandsvariabeln des Systems abhängen wird, also bei einer Flüssigkeit von φ. Weiter ergibt sich

$$\lambda=\Phi e^{\int g(\vartheta)\,d\vartheta}. \quad (28)$$

Für jedes thermodynamische System zerfällt also der integrierende Nenner in zwei Faktoren, von denen der eine nur von der Temperatur, der andere nur von den übrigen Zustandsvariablen abhängt. Man führt nun die absolute Temperatur

$$T=C e^{\int g(\vartheta)\,d\vartheta} \quad (29)$$

ein, wo die Konstante C dadurch festgelegt wird, daß man für irgend zwei Fixpunkte den absoluten Temperaturunterschied vorschreibt, etwa gleich 100^0 setzt.

Mit dieser Definition wird das Differential der Wärme

$$dQ=\lambda d\varphi=T\cdot\frac{\Phi}{C}d\varphi. \quad (30)$$

Handelt es sich nun um eine einzelne Flüssigkeit, so kann Φ nur von φ abhängen; daher kann man durch die Formel

$$S=\frac{1}{C}\int\Phi(\varphi)\,d\varphi \quad (31)$$

eine nur von φ abhängige Zustandsgröße definieren, die ebenfalls auf den Adiabaten konstant ist. Man nennt sie die Entropie; sie ist bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Dann erhält man die Formel des zweiten Hauptsatzes:

$$dQ=TdS. \quad (32)$$

d. h. bei dieser Normierung wird die absolute Temperatur integrierender Nenner des Differentials der Wärme.

Dasselbe gilt aber auch für das System der beiden in thermischem Kontakt befindlichen Körper (und allgemein für ein beliebiges System); denn man hat nach (24) und (30):

$$\Phi d\varphi=\Phi_1 d\varphi_1+\Phi_2 d\varphi_2, \quad (33)$$

also

$$\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}=\Phi_1,\ \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2}=\Phi_2.$$

Hier hängt Φ_1 nur von φ_1, Φ_2 nur von φ_2 ab; differenziert man nun die erste Gleichung nach φ_2, die zweite nach φ_1, so kommt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}+\Phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}=0.$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2}+\Phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}=0.$$

Daraus folgt durch Subtraktion, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Phi,\varphi)}{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}=0$$

ist; mithin ist Φ eine Funktion von φ. Man kann daher auch für das System die Entropie durch (31) definieren und hat dann nach (33)

$$dS=dS_1+dS_2=d(S_1+S_2). \quad (34)$$

Bei geeigneter Bestimmung der additiven Konstanten darf man daher

$$S=S_1+S_2 \quad (35)$$

setzen: Die Entropie eines Systems ist die Summe der Entropien der Teile.

Es muß hier angemerkt werden, daß für kompliziertere Systeme, wo die Teile ihre Massen austauschen können, die Additivität der Entropie besonders bewiesen werden muß, was auf ganz analogem Wege immer möglich ist. Überhaupt verfolgen wir die Ausgestaltung des thermodynamischen Formelsystems nicht weiter, da es uns nur auf die Prinzipien ankommt.

§ 7. Irreversible Zustandsänderungen.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Entropie bei beliebigen, nicht quasistatischen Prozessen; und zwar betrachten wir zunächst das von uns bisher behandelte System, das aus

zwei in thermischem Kontakt befindlichen Körpern besteht.

Dieses hängt von 3 Veränderlichen ab, als die wir früher V_1, V_2 und ϑ gewählt haben; wir wollen jetzt statt ϑ die Entropie S als dritte Variable benutzen.

Es seien V^0_1, V^0_2 und S^0 die Werte der Variabeln im Ausgangszustande, V_1, V_2, S die im Endzustande. Wir behaupten, daß bei allen möglichen Prozessen S entweder niemals wachsen oder niemals abnehmen kann. Man kann nämlich den Endzustand in folgenden zwei Schritten erreichen:

1. Man verändert die Volumina quasistatisch adiabatisch von V^0_1, V^0_2 auf V_1, V_2; dabei bleibt die Entropie konstant gleich S^0;
2. man variiert den Zustand bei konstantem Volumen V_1, V_2 durch adiabatische Arbeitsleistung (Rühren, Reiben usw.), bis die Entropie sich von S^0 in S verwandelt hat.

Wäre nun S bei verschiedenen Prozessen teils größer, teils kleiner als S^0, so würde jeder Nachbarzustand V_1, V_2, S des Ausgangszustandes V^0_1, V^0_2, S^0 adiabatisch erreichbar sein; denn die Volumina kann man ja frei verändern. Das widerspricht aber der Erfahrungstatsache, die dem zweiten Hauptsatze zugrunde liegt. Es muß also entweder immer $S \geqq S^0$ oder immer $S \leqq S^0$ sein.

Geht man von einem andern Anfangszustande aus, so sieht man, daß wegen der Stetigkeit die Unmöglichkeit der Zu- oder Abnahme der Entropie immer im selben Sinne liegen muß. Dasselbe gilt aber auch für zwei verschiedene Systeme wegen der Additivitätseigenschaft der Entropie.

Ob die Entropie nur zunehmen oder nur abnehmen kann, hängt noch von der Konstanten C in der Formel (29) bzw. (31) ab. Man wählt diese natürlich so, daß die absolute Temperatur positiv wird. Dann genügt ein einziges Experiment, um das Vorzeichen der Entropieänderung festzulegen; die Erfahrung (etwa an den Gasen, vgl. unten § 8) lehrt, daß die Entropie nie abnimmt.

Hieraus folgt, daß, wenn bei irgendeiner Zustandsänderung der Wert der Entropie nicht konstant geblieben ist, keine adiabatische Zustandsänderung gefunden werden kann, die das System aus dem End- in den Anfangszustand zurückführt. In diesem Sinne gilt der Satz:

Jede Zustandsänderung, bei welcher der Wert der Entropie variiert, ist irreversibel.

Ferner ergibt sich, daß im Gleichgewichte die Entropie ein Maximum hat, und daraus erhält man leicht die übrigen Extremalsätze der Thermodynamik. Wir gehen darauf nicht ein, aber wir müssen einige Worte darüber sagen, unter welchen Voraussetzungen sich der oben gegebene Beweis von den hier betrachteten Systemen, die aus zwei (oder mehreren) in thermischer Berührung befindlichen Körpern bestehen, auf kompliziertere Systeme übertragen läßt. Der Hauptpunkt war offenbar, daß sich die beiden Volumina ganz beliebig variieren lassen und daß außer diesen nur *eine* weitere Variable, die Entropie, vorhanden ist. Das Entsprechende gilt nun ganz allgemein: Nicht nur dieser Schluß, sondern der ganze Aufbau der Thermodynamik hat zur Voraussetzung, daß bei einem Systeme von n unabhängigen Veränderlichen $n-1$ davon den Charakter geometrischer Größen haben, deren Werte man willkürlich verändern kann, während nur eine „thermische" Variable (Temperatur, Entropie) vorhanden ist. Aber diese Einschränkung ist nicht für die *Carathéodorysche* Form der Thermodynamik charakteristisch, sondern gilt ebenso für die traditionelle Theorie. Nur tritt sie dort nicht bei der Ableitung der Hauptsätze so klar zutage wie hier, wohl aber ist bekannt genug, daß man zur tatsächlichen Berechnung der Entropie in einem speziellen Falle imstande sein muß, den Prozeß „reversibel zu leiten"; das heißt aber nichts anderes, als daß man alle Veränderlichen außer einer (der Temperatur) willkürlich verändern kann. Hierzu dienen die Einführung der halbdurchlässigen Wände und ähnliche Kunstgriffe.

§ 8. Beispiele.

Wir haben in durchaus unpädagogischer Weise, aber mit Absicht, den abstrakten Gedankengang nicht durch Beispiele erläutert, vor allem nicht die idealen Gase herangezogen, die in vielen Darstellungen der Thermodynamik eine so dominierende Rolle spielen. Denn es ist gerade unsere Meinung, daß dieses Vorherrschen der idealen Gase ein Nachteil ist, der den Schüler leicht auf den Gedanken bringen kann, daß die ganze Thermodynamik von der Existenz gewisser gasförmiger Substanzen abhängt. Natürlich gibt es Darstellungen, die über diesen Fehler erhaben sind, aber in anderen ist er nicht vermieden; dort erscheint die Gastemperatur $\vartheta = pV$ als Grundlage der absoluten Temperatur, und wenn auch nachträglich gezeigt wird, daß die letztere von der Existenz bestimmter Körper unabhängig ist und aus thermisch-kalorischen Messungen verschiedenster Art bestimmt werden kann, so ist das Verfahren doch logisch unbefriedigend. Denn es ist a priori nicht der leiseste Grund

vorhanden, warum man als empirische Temperatur gerade $\vartheta = pV$, nicht etwa $\vartheta = (pV)^2$ oder irgendeine andere (monotone) Funktion $\vartheta = f(p \cdot V)$ einführt.

Wir wollen hier gerade diesen allgemeinsten Ansatz machen und daraus die absolute Temperatur ableiten. Wir brauchen noch die (kalorimetrische) Bestimmung der Energiefunktion U; dazu dient uns, wie üblich, das (idealisierte) Joule-Thomsonsche Experiment, wonach bei einer adiabatischen Expansion eines Gases ohne Arbeitsleistung (in erster Annäherung) keine Änderung des Produkts pV (oder der Gastemperatur $\vartheta = f(p \cdot V)$) eintritt. Daraus folgt, daß U nur von ϑ abhängt. Wir setzen also

$$pV = F(\vartheta), \quad U = U(\vartheta).$$

Daraus bilden wir die Adiabatengleichung

$$dQ = dU + p\,dV = U'(\vartheta)\,d\vartheta + F(\vartheta)\frac{dV}{V} = 0.$$

Schreibt man

$$dQ = F(\vartheta)\left\{\frac{U'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,d\vartheta + d\log V\right\}$$

und setzt

$$\log \Theta(\vartheta) = \int \frac{U'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,d\vartheta,$$

so wird

$$dQ = F(\vartheta)\,d\log \Theta V = 0.$$

Also kann man

$$\lambda = F(\vartheta), \quad \varphi = \log \Theta V$$

setzen. Aber es gibt nach (13) unendlich viele integrierende Nenner; setzt man z. B.

$$\varphi^* = e^{\varphi} = \Theta V,$$

so wird

$$\lambda^* = \lambda \frac{d\varphi}{d\varphi^*} = F(\vartheta)\,e^{-\varphi} = \frac{F(\vartheta)}{\Theta V}.$$

Es ist gar kein Grund, den integrierenden Nenner $\lambda = F(\vartheta) = pV$ von vornherein auszuzeichnen, wie es gewöhnlich geschieht. Dazu berechtigt vielmehr erst der zweite Hauptsatz. Denn aus der Formel (26), worin φ bei der Differentiation als konstant zu betrachten ist, findet man immer

$$g(\vartheta) = \frac{d \log F(\vartheta)}{d\vartheta}$$

und dann nach (29)

$$T = C\,F(\vartheta) = C\,pV.$$

Damit ist die Übereinstimmung der absoluten Temperatur mit der idealen Gasskala bewiesen. Für die Entropie ergibt sich dann aus der Formel $dQ = T dS$:

$$S = S_0 + \frac{1}{C}\log \Theta V.$$

Das geht in den bekannten Ausdruck über, wenn man

$$U = cT, \quad C = \frac{1}{R}$$

setzt; dann wird

$$\log \Theta = \int \frac{c}{RT}\,dT = \frac{c}{R}\log T,$$

also

$$pV = RT, \quad S = S_0 + c\log T + R\log V.$$

Ein zweites Beispiel zur Bestimmung der absoluten Temperatur ist die schwarze Strahlung. Die empirischen Grundlagen sind:

1. Der Strahlungsdruck p hängt mit der Energiedichte u durch die Formel

$$p = \frac{u}{3}$$

zusammen.

2. Die Energiedichte hängt nur von der Temperatur ab:

$$u = u(\vartheta).$$

Dasselbe gilt also auch von p.

Die Gesamtenergie im Volumen V ist

$$U = 3Vp.$$

Die Pfaffsche Gleichung der Adiabaten lautet

$$dQ = dU + pdV = 4\,pdV + 3\,Vdp = 0$$

und läßt sich schreiben

$$dQ = pV \cdot d\log V^4 p^3 = 0.$$

Daher kann man

$$\lambda = pV, \quad \varphi = \log V^4 p^3$$

setzen. Drückt man λ als Funktion von $p(\vartheta)$ und φ aus, so wird

$$\log \lambda = \frac{1}{4}\log p + \frac{\varphi}{4}.$$

Daher wird nach (26) und (27)

$$g(\vartheta) = \frac{\partial \log p^{1/4}}{\partial \vartheta}, \quad \log \Phi = \frac{\varphi}{4},$$

und nach (29)

$$T = C p^{1/4}.$$

Man benutzt gewöhnlich die Bezeichnung

$$a = \frac{3}{C^4}$$

und erhält dann das Stefan-Boltzmannsche Gesetz

$$u = 3\,p = aT^4.$$

Ferner wird die Entropie nach (23)

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi\,d\varphi = \frac{1}{C}\int e^{\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi = \frac{4}{C}\,e^{\frac{\varphi}{4}}$$

$$= \frac{4}{C}\,V p^{3/4} = \frac{4}{C^4} V T^3$$

$$= \frac{4a}{3} V T^3,$$

wenn die Konstante so bestimmt wird, daß $S=0$ wird für $T=0$. Die Entropiedichte ist also

$$s=\frac{4a}{3}T^3.$$

§ 9. Verallgemeinerungen.

Wir haben bereits mehrmals betont, daß sich die ganze Gedankenkette ohne weiteres auf kompliziertere Systeme übertragen läßt, deren homogene Bestandteile oder Phasen ihre Substanz austauschen können. Nur muß es möglich sein, alle Variable außer einer willkürlich zu ändern; daher müssen an jeder Grenze zwischen zwei Phasen hinreichend viele Bedingungen empirisch gegeben sein, die an die Stelle der einfachen, thermischen Gleichgewichtsbedingung (Zustandsgleichung) treten. Ferner führt man halbdurchlässige Wände ein, durch deren freie Beweglichkeit die nötige Anzahl willkürlich veränderlicher Parameter gewonnen wird.

Da die Sätze über Pfaffsche Gleichungen für beliebig viele Variable ebenso gelten wie für drei, so übertragen sich alle Schlüsse ohne weiteres.

Während so in der allgemeinen Theorie die üblichen Kreisprozesse vorteilhafterweise vermieden werden, ist es für die wirkliche Ausrechnung der thermodynamischen Funktionen häufig sehr bequem, Kreisprozesse zu gebrauchen; insbesondere läßt sich das Nernstsche Theorem am besten in der Weise rechnerisch verwerten, daß man Kreisprozesse benutzt, deren einer Zweig beim absoluten Nullpunkt abläuft.

Größere Schwierigkeiten bietet erst, wie Carathéodory betont, die thermodynamische Begründung der Strahlungstheorie und der Vorgänge in bewegten Körpern, weil dabei der Zustand des Systems sich nicht durch eine endliche Zahl von Parametern beschreiben läßt. Bisher hat man ja auch diese Gebiete immer nur mit den statistischen Methoden der kinetischen Theorie behandelt.

(Eingegangen 25. November 1920.)

BESPRECHUNGEN.

Sven Odén, Die Huminsäuren. Chemische, physikalische und bodenkundliche Forschungen. gr. 8°. 199 S. m. 21 Abbildungen. Dresden u. Leipzig, Th. Steinkopff. 1919. Gebunden M. 13.20.

Der Verfasser, welcher durch seine gründlichen Arbeiten über kolloiden Schwefel und Tonsuspensionen wohl bekannt ist, gibt hier eine Zusammenstellung der wichtigsten Untersuchungen über die Huminsäuren, Bestandteile des Ackerbodens, die wegen ihrer kolloiden Eigenschaften für die Pflanzenernährung indirekt eine wichtige Rolle spielen.

Nach einer historischen Einleitung über die zahlreichen auf diesem Gebiete durchgeführten Untersuchungen bringt er eine Übersicht seiner eigenen Arbeiten, aus denen nur die Teile hervorgehoben sein mögen, welche die Frage nach der chemischen Natur der Humussäure betreffen, da sie einen Gegenstand von allgemeinerem Interesse berührt. Von mehreren Forschern wurde angenommen, daß die Humussäuren als neutrale Körper anzusehen seien, die nur deshalb eine saure Reaktion aufweisen, weil sie den damit in Berührung kommenden Salzen durch Adsorption den basischen Bestandteil entziehen. Derartige Reaktionen, die man nicht auf einfache Salzbildung der betreffenden Substanzen zurückführen kann, sind schon öfter beobachtet worden. So adsorbiert nach van Bemmelen das Mangansuperoxyd aus neutralen Salzlösungen den basischen Bestandteil stärker als den sauren und ähnliches gilt von der mit Säure gewaschenen Kohle. Sven Odén hält es für wahrscheinlicher, daß hier nicht eine Adsorption des basischen Bestandteils, sondern ein Austausch von an den Adsorbentien haftenden Säuren gegen Neutralsalze stattfindet, wodurch die adsorbierten Säuren freigemacht werden. Bezüglich der Humussäure bringt er aber den Beweis, daß diese echte schwer lösliche Säuren sind, die mit Ammoniak und anderen Alkalien unter Bildung leicht löslicher Salze reagieren. Der Äquivalent der Humussäure wird auf verschiedene Weise, z. B. durch potentiometrische Titration bestimmt und ergibt sich annähernd zu 330—345. Die Humate sind nach Sven Odén als Salze einer vierwertigen Säure aufzufassen.

Wie alle Publikationen Sven Odéns zeichnet sich auch diese Monographie durch Gewissenhaftigkeit und Gründlichkeit aus und kann daher den Interessenten bestens empfohlen werden. R. Zsigmondy.

Briefkasten.

„Standpunktslehre", ein Verdeutschungsvorschlag.

Von Hans Witte.

In einem allgemeinverständlichen Aufsatz in der „Woche" habe ich statt Relativitätstheorie Standpunktslehre gesagt. Die Zeitschrift des deutschen Sprachvereins hat diesen Vorschlag aufgegriffen und begrüßt. Nachdem schon Herr v. Laue mit der Verdeutschung des „spezielle" die Patina der Standard-Terminologie korrodiert hat, glaube ich auch diesen Versuch wagen zu dürfen.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), 28. Februar 1921.

(Eingegangen 3. März 1921.)



Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1921.

Bergakademie Clausthal. **Valentiner**: Experimentalphysik; Physikalisches Praktikum. — **Wallot**: Physikalisches Repetitorium. —

Universität Köln. **Rinkel**: Experimentalphysik, Optik und Akustik; Allgemeine Maschinenlehre; Großes physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene und Forschungsarbeiten; Kleines physikalisches Praktikum. —

Universität Königsberg. **Kaufmann**: Seminaristische Übungen; Physik und Technik; Experimentalphysik I; Übungen; Kolloquium. — **Volkmann**: Mathematisch-physikalisches Seminar; Theorie der elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte; Mathematisch-physikalisches Laboratorium. — **Hoffmann**: Physik für Landwirte I; Radioaktivität und Elektronik. — **Kretschmann**: Wärmestrahlung; Röntgenstrahlen und Atomgitter. —

Universität Leipzig. **Wiener**: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, Höhere Physik; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Jaffé, Möbius und Kaempf); Physikalisches Praktikum (mit Jaffé, Möbius und Kaempf); Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres). — **Des Coudres**: Einleitung in die theoretische Physik; Selbständige Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen). — **Wenger**: Einführung in die Thermodynamik mit Anwendungen auf Meteorologie und Geophysik; Übungen in meteorologischen Beobachtungen und im Gebrauch meteorologischer Instrumente; Geophysikalisches Seminar: Fragen des Energiehaushalts der Erde; Arbeiten im Geophysikalischen Institut. — **Scholl**: Experimentalphysik für Zahnärzte. — **Marx**: Grundzüge der Radioaktivität; Radiologisches Praktikum: Messungen an Radium- und Röntgenstrahlen. — **Haas**: Die Einsteinsche Gravitationstheorie; Elektronen, Atome und Molekeln. — **Lilienfeld**: Hochvakuumentladung und Erzeugung von Röntgenstrahlen. — **Jaffé**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung. — **Möbius**: Einführung in das Physikalische Praktikum. — **Kaempf**: Statistische Mechanik. — **Wilke**: Übungen im Maschinenzeichnen. —

Universität Marburg. **Schäfer**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Theoretische Optik; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schulze, Take und Stuchtey), für Mediziner (mit Take); Übungen im Physikalischen Laboratorium für Fortgeschrittene: Leitung wissenschaftlicher Arbeiten (mit Schulze, Take und Stuchtey). — **Schulze**: Mechanik materieller Punkte und starrer Körper; Theoretisch-physikalisches Seminar. — **Feußner**: Geometrische Optik. — **Take**: Physikalische Meßmethoden; Physikalische Technologie II: Elektrotechnik, mit Versuchen. — **Stuchtey**: Über Atommodelle; Übungen in Handfertigkeit, im Experimentieren und im Experimentalvortrag. —

Universität München. **Wien**: Experimentalphysik II: Elektromagnetismus und Optik; Physikalische Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **v. Seeliger**: Theoretische Astronomie. — **Sommerfeld**: Hydrodynamik, Elastizität, Übungen; Magneto- und Elektro-Optik; Seminar. — **Graetz**: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Optik; Physikalisches Praktikum: Übungen in physikalischen Messungen, Übungen in physikalischen Demonstrationen; Einleitung in die theoretische Physik II; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Schmauss**: Grundlagen der Wettervorhersage, mit Übungen an der Wetterkarte; Meteorologische Höhenforschung: Aerologie; Anleitung zu meteorologischen Arbeiten. — **Wagner**: Die neueren Theorien über den Bau der Atome; Physikalisches Praktikum. — **Fajans**: Physikalische Chemie I: Kinetische Theorie der Materie, Chemische Kinetik, heterogene Gleichgewichte; Atombau und Kristallstruktur in ihren Anwendungen auf chemische Probleme; Kolloquium für physikalische und anorganische Chemie. — **Donle**: Doppelbrechung und damit zusammenhängende Erscheinungen. — **Ewald**: Kinetische Gastheorie. — **Herzfeld**: Vektoranalysis; Mathematische Einleitung in die physikalische Chemie. — **Zinner**: Spektralanalyse der Sonne und Sterne. — **Kienle**: Bahnbestimmung der Himmelskörper I: Parabolische Bahnen; Das astronomische Weltbild in Vergangenheit und Gegenwart. —

Technische Hochschule München. **Zenneck**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Elektrooptik; Physikalisches Praktikum; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Fischer**: Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, Elektrooptik; Schwingungs- und Wellenlehre aus dem Gesamtgebiete der Physik; Ausgewählte Kapitel der Thermodynamik; Praktisch-physikalische Übungen; Aufbau und Handhabung von Apparaten; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik. — **Kossel**: Die neueren Anschauungen über den Bau der Atome. — **v. Angerer**: Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen, Kanalstrahlen. — **Knoblauch**: Kinetische Gastheorie; Einführung in die mathematische Behandlung chemischer Fragen; Technisch-physikalisches Praktikum; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten. — **Henoky**: Wärmewirtschaftliche Beurteilung der Gebäude. — **Emden**: Einführung in die Quantentheorie; Kristalloptik. — **Dieckmann**: Drahtlose Telegraphie und Telephonie; Hochfrequenzmeßtechnik II, Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik. — **N. N.**: Praktikum im Mechanisch-technischen Laboratorium. —

Universität Münster i. W. **Schmidt**: Experimentalphysik: Mechanik, Wärme, Akustik; Physikalisches Praktikum für Anfänger, (mit Szivessy) für Fortgeschrittene; Physikalisches Seminar. — **Madelung**: Theoretische Physik vom atomistischen Standpunkte; Höhere Vektoranalysis und ihre Anwendung auf die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie; Neuere Theorien und Erkenntnisse in der Physik. — **Szivessy**: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik; Seminar für theoretische Physik: Übungen zur Elektrodynamik. — **Ley**: Physikalische Chemie I; Über spektroskopische Methoden in der Chemie; Physikalisch-chemisches Praktikum. — **Plassmann**: Über den Mond. —

Universität Prag. **N. N.**: Experimentalphysik II; Physikalisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene. — **Frank**: Einführung in die Relativitätstheorie; Die Differentialgleichungen der Mechanik; Physikalisches Kolloquium (mit Fürth); Besprechung der neueren Literatur; Seminar für theoretische Physik: Gravitationstheorie. — **Fürth**: Elektronentheorie. — **Rothmund**: Physikalische Chemie II; Physikalisch-chemisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Wagner**: Physikalisch-chemische Meßmethoden; Die Phasenregel II (Fortsetzung des gleichnamigen Kollegs vom vorigen Sommersemester). — **Prey**: Theorie der Gezeiten; Übungen im astronomischen Rechnen. — **Spitaler**: Allgemeine Meteorologie II; Meteorologisches Praktikum; Das solare Klima. —

Universität Rostock. **Heydweiller**: Experimentalphysik: Allgemeine Physik, Akustik, Wärme; Physikalische Übungen für Mathematiker, Naturwissenschaftler, Pharmazeuten; Physikalisches Seminar (mit Lenz); Wissenschaftliche Arbeiten. — **Lenz**: Einleitung in die theoretische Physik, mit Übungen; Quantentheorie der Spektren; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Kümmell**: Ausgewählte Kapitel der Elektrochemie und Photochemie; Kleines physikochemisches Praktikum. — **Falckenberg**: Praktikum für angewandte Physik, mit Handfertigkeitspraktikum; Physikalische Übungen für Mediziner. —

Technische Hochschule Stuttgart. **Regener**: Anfangsgründe der Physik; Physik; Sondergebiete der Physik; Physikalisches Praktikum für Anfänger; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: Physikalisches Kolloquium. — **Glocker**: Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik. — **N. N.**: Theoretische Physik. —

Technische Hochschule Wien. **Lecher**: Experimentalphysik I, mit Demonstrationsergänzung; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten. — **Jäger**: Optik; Ausgewählte Kapitel der Elektrotechnik; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener. — **Meyer**: Radioaktivität und Atombau; Radioaktives Praktikum (mit Przibram). — **Ehrenhaft**: Das elektromagnetische Feld; Seminar; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener. — **Haschek**: Die Materie (Fortsetzung). — **Przibram**: Formbildende Kräfte in der anorganischen und organischen Natur. — **Thirring**: Mechanik II; Die Idee der Relativitätstheorie. — **Kohl**: Elemente der Elastizitätstheorie. — **Sirk**: Atommodelle. — **Flamm**: Spezielle und verallgemeinerte Relativitätstheorie (Fortsetzung). — **Kottler**: Neuere Gravitationstheorien (Fortsetzung). — **Lampa**: Das physikalisch-kritische Werk E. Machs. — **Smekal**: Quantentheorie als Ergebnis der statistischen Mechanik; Einführung in die modernen Lehren des Atom-, Molekül- und Kristallbaues; Physikalisches Praktikum. — **Exner**: Meteorologische Optik: Besprechung neuerer Arbeiten aus Meteorologie und Geophysik. — **Schmidt**: Die Bewegungserscheinungen in der Luft- und Wasserhülle der Erde. — **Wagner**: Praktische Messungen mit erdmagnetischen Instrumenten. — **Conrad**: Über verschiedene Methoden der Klimabeschreibung. —

Technische Hochschule Wien. **Mache**: Physik; Ausgewählte Kapitel der Physik; Physikalisches Praktikum. — **Flamm**: Physik; Die Mechanik des Atoms. — **Aigner**: Physik. — **Schmidt**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie; Photographisches Praktikum. —

Universität Zürich. **E. Meyer**: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik; Ausgewählte Kapitel der Physik; Physikalisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten; Physikalisches Kolloquium; Repetitorium der Physik. — **Greinacher**: Radioaktivität, mit Experimenten; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschafter und Mediziner. — **Ratnowsky**: Theorie der Wärme; Thermodynamik mit Übungen; Grundlagen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnis. — **Tank**: Elektronenröhren und ihre Anwendungen. — **Meißner**: Einführung in die Spektroskopie; Übungen im Demonstrieren von Schulexperimenten. — **Epstein**: Theorie der Wärmestrahlung. —

Technische Hochschule Zürich. **Debye**: Physik: Thermodynamik, Optik; Repetitorium; Physikalisches Praktikum für Anfänger; Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik; Physikalisches Kolloquium (mit Meyer, Piccard und Scherrer). — **Barbieri**: Photographie II; Photogrammetrie; Photographisches Praktikum; Mikrophotographie. — **Baur**: Physikalische Chemie I, Repetitorium; Technische Elektrochemie, Repetitorium; Physikalisch-chemisches Praktikum; Elektrochemisches Praktikum; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere. — **Brentano**: Kathoden-, Kanal- und Röntgenstrahlen; Meßkunde, insbesondere elektrische Messungen. — **Dällenbach**: Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Wechselströme. — **Piccard**: Experimentalphysik, Repetitorium. — **Scherrer**: Physik II, Übungen; Ausgewählte Kapitel der Experimentalphysik. —

Tagesereignisse.

Für die **Messung radioaktiver Quellen** ist bisher weder über die Meßmethode noch über die Maßeinheit eine Vereinbarung erzielt worden. Die Folge ist, daß die Wässer in der Praxis nach verschiedenen Methoden gemessen werden, die keine vergleichbaren Werte geben. Um eine Vereinheitlichung herbeizuführen, hat das Sächsische Bergamt, das die behördliche Aufsicht über das sächsische Radiumwesen und insbesondere über die sächsischen Radiumbäder zu führen hat, die in Frage kommenden Radium-Institute, Radiologen und Radiumbäder Deutschlands, Österreichs und der Tzschecho Slowakei zu einer Beratung auf den 27. Mai 1921 nach Freiberg in Sachsen eingeladen. Interessenten, die noch keine Einladung erhalten haben, wollen sich deswegen an das Sächsische Bergamt, Freiberg in Sachsen wenden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. S. Boguslavski zum Professor der theoretischen Physik an der Universität Saratow, der Dozent an der Universität Tomsk W. S. Titow zum Professor der Physik am landwirtschaftlichen Institut Omsk, der Professor der Physik an der Universität Petrograd D. Roshdestwenski zum Direktor des optischen Instituts ebenda, der Professor der Physik an der Universität Nishny-Nowgorod W. Lebediewski zum Direktor des Radiolaboratoriums des Kommissariats für Post und Telegraph ebenda, der a. o. Professor an der Universität Heidelberg Dr. Karl Ramsauer zum ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Danzig, Dr. Agde in Halle zum Dozenten für chemische Technologie am Polytechnikum in Cöthen, der Privatdozent der Physik an der Universität München Dr. Peter Paul Ewald zum a. o. Professor der theoretischen Physik an der Technischen Hochschule Stuttgart, Professor F. G. Hopkins von der Universität Cambridge, England zum ord. Professor der Biochemie ebenda, der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Friedrich Kottler zum charakterisierten a. o. Professor mit einem Lehrauftrag für mathematische Physik, der Privatdozent an der Universität Hamburg Dr. Bernhard Baule zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Graz (an Stelle von Professor Dr. Oskar Peithner Freiherr v. Lichtenfels), der Privatdozent für physiologische Chemie an der Universität Gießen Dr. Georg Haas zum a. o. Professor an derselben Universität, der a. o. Professor für physiologische Chemie an der Universität Marburg Dr. Friedrich Kutscher zum ord. Professor ebenda.

Berufen: Der Dozent der Universität Moskau Professor Dr. W. Arkadiew für den Lehrstuhl der Physik an der technischen Fakultät des volkswirtschaftlichen Instituts in Moskau.

Ehrung: Der Präsident des Röntgenologischen Staatsinstituts, Professor der Physik am Polytechnischen Institut Petrograd A. Joffé wurde zum Wirkl. Mitgliede der russischen Akademie der Wissenschaften ernannt.

Gestorben: Das Wirkl. Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften Professor der Physik an der Universität Petrograd Fürst B. Galizin, der frühere Professor der allgemeinen Chemie an der Technischen Hochschule Wien Hofrat Dr. Alexander Bauer, der Vorstand des chemischen Instituts in London Bertram Blount, der Professor der Physik am Polytechnischen Institut Warschau Viktor Biernacki, das Wirkl. Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften M. Rykatschew, früher Direktor des Physikalischen Zentralobservatoriums Petrograd.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1921. 22. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 12 am 24. Mai 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Aus der Ionenlehre der Gase.

Einige Demonstrationsversuche.

II. Mitteilung[1]).

Von H. Greinacher.

§ 1. Townsends Kurve der Stoßionisierung.

Die Stromspannungscharakteristik eines ionisierten Gases besteht im allgemeinen aus zwei wohlgetrennten Teilen. Einem ersten, der bis zur „Sättigungsstromstärke“ anwächst und einem zweiten, der bei hohen Feldern ein rasches Wiederansteigen des Stromes infolge der eintretenden Stoßionisierung zeigt. Will man diesen zweiten Teil, die Townsendsche Kurve, demonstrieren, so wählt man etwa eine lichtelektrische Zelle mit verdünntem Gas, da hier die Erscheinung bei viel kleineren Spannungen als bei Atmosphärendruck zu erhalten ist. Wie im folgenden gezeigt werden soll, läßt sich die Townsendsche Kurve aber auch in freier Atmosphäre ohne allzu hohe Spannungen unter übersichtlichen Bedingungen aufnehmen.

Eine frisch geschmirgelte *Zn*-Platte (10 cm Durchmesser) wird durch eine *Hg*-Quarzlampe aus kleinem Abstand (25 cm) bestrahlt. Vor die Zinkplatte wird eine Nähnadel unter einem Winkel von 45^0 befestigt, so daß die Spitze der Mitte der Scheibe in $1^1/_2$ bis 2 cm Entfernung gegenübersteht. Die etwa an Siegellack befestigte Nadel ist mit einer Gleichstromquelle von 0—3000 Volt verbunden. Besonders bequem ist ein an die Lichtleitung ansteckbarer Gleichrichter, wie früher beschrieben[2]). Die Spannung wird mit einem Braunschen Elektrometer gemessen. Die *Zn*-Scheibe ist über ein Drehspulgalvanometer (Empfindlichkeit $3 \cdot 10^{-10}$ Amp/mm) mit der Erde verbunden. Wird an die Nadel positive Spannung angelegt, so wandern die aus der *Zn*-Platte austretenden Elektronen (nachdem sie sich mit den Gasmolekülen zu negativen Ionen verbunden haben) an diese. Bei dieser Anordnung wird man

1. infolge der großen Platte einen intensiven Sättigungsstrom und

2. infolge des großen Feldes an der Spitze schon bei relativ kleinen Spannungen Stoßionisierung bekommen.

Damit man nur die Stoßionisierung durch die lichtelektrischen Ionen erhält, darf die Spannung nicht bis zur selbständigen Spitzenentladung gesteigert werden, d. h. bei Abdecken des Lichts muß der Galvanometerausschlag stets auf Null zurückgehen. Mit dem Einsetzen des Spitzenstroms wächst zwar der Ausschlag weiter, allein die Differenz mit und ohne Belichtung nimmt nicht mehr weiter zu.

Die beiden Kurven der Fig. 1 geben etwa ein Bild der Verhältnisse[1]). Man erkennt zunächst ein Anwachsen des Stromes bis zu einem Sättigungsstadium, wobei die Größe dieses Sättigungsstroms von der vorangegangenen Behandlung der *Zn*-Oberfläche abhängt. Sodann beginnt der Strom (bei zirka 2000 Volt) erst langsam, dann immer rascher zu wachsen (Townsendsche Kurve), bis in der Gegend von 3000 Volt dann die selbständige Entladung einsetzt (siehe die beiden letzten Punkte der Kurve II). Die Kurven sind mit steigenden Spannungen auf-

1) Fortsetzung der früheren Mitteilung. Diese Zeitschr. **19**, 188, 1918.

2) Diese Zeitschr. **17**, 343, 1916. Bulletin des Schweiz. Elektrot. Vereins **11**, 59, 1920.

1) Ein Teil der in §§ 1—4 mitgeteilten Messungen ist mir in dankenswerter Weise von Teilnehmern am radiologischen Praktikum ausgeführt worden.



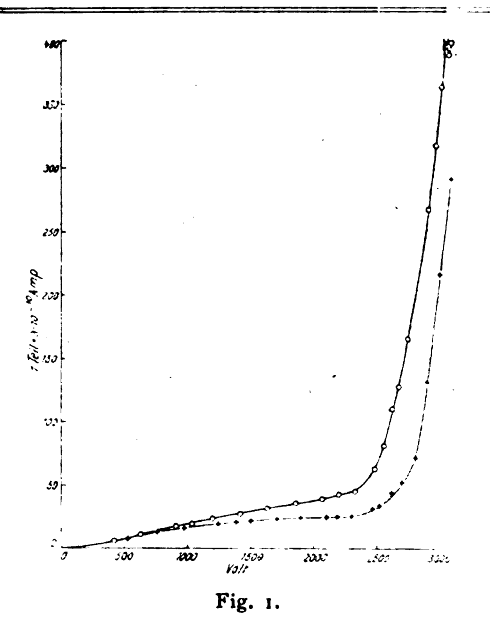


Fig. 1.

genommen. In Wirklichkeit würden sie, wenn keine Ermüdung des *Zn* vorhanden wäre, noch etwas steiler verlaufen. Es empfiehlt sich zur Vermeidung eines großen Ermüdungseffektes, die Versuchsreihe in kurzer Zeit durchzuführen.

Ein Versuch, bei dem an die Spitze negative Spannung angelegt wurde, zeigte, daß sowohl vor als nach Einsetzen der Spitzenentladung kein Lichteffekt vorhanden war.

Daß der Photoeffekt die primären Ionen liefert, ließ sich gut zeigen, indem man an die *Zn*-Scheibe eine Pappscheibe oder ein *Cu*-blech (mit alter Oberfläche) hängte, so daß das *Zn* durch anderes unwirksames Material verdeckt war. Man erhielt bei

2700 Volt mit *Zn* durch Belichtung 130 mm
„ Pappe „ „ 2 „
„ *Cu* „ „ 2 „
wieder „ *Zn* „ „ 120 „.

Mit der angegebenen Anordnung ließ sich noch folgendes beobachten. Man erhielt bei Anlegen von + 3100 Volt, wobei hier ohne Belichtung kein merklicher Ausschlag erfolgte

	(mit Belichtung)
Zn (nicht ganz frisch)	180 mm
Zigarettenrauch zwischen den Elektroden	80 „
Rauch weggeblasen	135 „
wieder mit Rauch	75 „
Nach einiger Zeit	100 „
Beim Anhauchen (feuchte Luft) Vergrößerung auf	130 „
Zn (frisch geschmirgelt) . . .	325 „
Schwacher Leuchtgasstrom an der Spitze	425 „
Luft	235 „
Leuchtgas	365 „ .

§ 2. Minimumpotential der Spitzenentladung.

Zur Demonstration wurden zwei gleiche Nähnadeln verwendet, wovon die eine nicht weiter bearbeitet, die andere auf dem Ölstein noch etwas spitzer geschliffen war. Um abwechselnd die eine und andere Spitze verwenden zu können, waren die beiden Nadeln diametral an einem als Drehachse dienenden Metallstift so befestigt und justiert, daß die Spitzen gleich weit von der Achse abstanden (etwa 3 cm). Der Metallstift konnte in ein unten geschlossenes Glasröhrchen gesteckt werden, das als Führung und isolierende Hülse diente und an einem Stativ befestigt war. Einige Windungen blanken Drahtes um den aus dem Glasröhrchen herausragenden Teil des Metallstiftes bildeten die Stromzuleitung. Eine Messingplatte von 37 mm Durchmesser wurde als zweite Elektrode verwendet und die eine Spitze der Plattenmitte gegenübergestellt. Durch Drehen des Stiftes um 180° konnten die Spitzen bei gleichbleibendem Plattenabstand ausgewechselt werden. An die Platte wurde die variable Gleichspannung des Gleichrichters angelegt, während die Spitze über das Galvanometer (Empf. $3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) mit Erde verbunden war. An einem mit der Platte verbundenen Braunschen Elektrometer konnten nun die Spannungen abgelesen werden, bei denen der Galvanometerausschlag merklich einsetzte. Die Resultate für die beiden Spitzen (*A* nicht behandelt, *B* geschärft, Plattenabstand: 1 cm), waren folgende:

Volt an *A*	Ausschlag mm	Volt an *B*	Ausschlag mm
+ 3700	1	+ 2300	0
+ 3800	64	**+ 2700**	15
— 3000	2	+ 2800	43
— 3300	4	— 1500	0
— 3400	11	— 1700	2
— 3500	22	**— 1800**	22

Die fettgedruckten Werte bezeichnen die Spannungen, bei denen die Ausschläge rasch zu wachsen beginnen. In Wirklichkeit sind die Werte für das Minimumpotential etwas kleiner und sind exakt nur mit noch empfindlicherem Galvanometer oder noch besser durch Extrapolation aus der Stromspannungskurve zu bestimmen. Die Demonstration zeigt aber deutlich den Unterschied zwischen positivem und negativem Minimumpotential und dessen Abhängigkeit von der Schärfe der Spitze. Kleinere Werte erhält man bei kleinerem Elektrodenabstand.

Die Abhängigkeit vom Gas wurde in folgender Weise gezeigt. Unter die Spitze (*B*) wurde

in 3 cm Entfernung die Mündung eines Glasrohrs gebracht. Unter langsamem Ausströmenlassen von Leuchtgas wurde nun das Potential soweit gesteigert, als es ohne Eintreten eines Galvanometerausschlages möglich war. Dieses betrug bei positiver Spitze + 3200 Volt, bei negativer Spitze — 2300 Volt. Wurde das Leuchtgas abgestellt, so stellte sich nach sehr kurzer Zeit ein beträchtlicher Ausschlag ein (zirka 60 mm, bzw. 130—140 mm), der sofort wieder verschwand, wenn das Leuchtgas austrat. Das Minimumpotential liegt also in letzterem Fall höher.

Entsprechend dem Unterschied zwischen dem M.P. für + und — Spitze, muß bei Anlegen einer Wechselspannung ein Gleichrichtereffekt auftreten. So erhielt man mit Spitze *A* bei einem Abstand von $^1/_2$ cm, wenn 2500 Volt Wechselstrom angelegt wurden, über 200 mm und bei 2700 Volt über 300 mm Ausschlag. Hierbei floß die Gleichstromkomponente, wie zu erwarten, von der Platte zur Spitze.

§ 3. Ionen im Spitzenstrom.

Der Spitzenstrom wird, wenn man von der nächsten Umgebung der Spitze absieht, von Ionen eines Vorzeichens getragen. Die Ladung dieser Ionen läßt sich in folgender Weise zeigen. Man wählt etwa die bereits beschriebene Anordnung und bläst die Ionen mittelst eines ausgezogenen Glasrohrs (Weite der Mündung zirka 3 mm) aus ihrer Bahn heraus in einen hohlzylinderförmigen oder konisch geformten Kollektor *C* hinein (Fig. 2). Letzterer kann in einfachster Weise aus einem entsprechend ge-

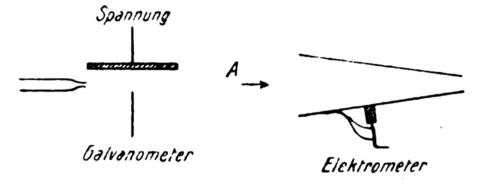


Fig. 2.

rollten Stück Papier bestehen (z. B. Länge 20 cm, Durchmesser 8 bzw. 1 bis 2 cm). An diesem ist ein Korkstückchen angekittet, um den Kollektor mittels eines hineingesteckten Drahtes auf das Braunsche Elektrometer aufsetzen zu können. Ein Papierstreifchen, das einerseits am Papierkonus, andererseits am Metalldraht angeklebt ist, bewerkstelligt den elektrischen Kontakt zwischen Papier und Elektrometer. Vergleichende Versuche mit Metallkonus und Metallzuleitung, die die gleichen Resultate gaben, erwiesen die Brauchbarkeit dieser einfachen Anordnung.

Blies man mittels eines Tretblasebalges einen kräftigen Luftstrom zwischen Spitze und Platte (etwa in der Mitte) hindurch in den Kollektor hinein, so begann das Elektrometer sich aufzuladen. Die Größe der Endaufladung variierte im einzelnen je nach der Zentrierung und Stärke des Luftstromes. Indessen war es ein Leichtes, enorme Aufladepotentiale von mehr als 1000 Volt zu erhalten. Es wurden beispielsweise folgende Werte gemessen:

Abstand Spitze—Platte 1 cm	Volt	Strom Spitze—Platte mm Ausschlag	Auflade-potential Volt
	+ 4400	180	+ 2200
	+ 4500	210	+ 1200
	— 3300	220	— 3500
	— 3400	250	— 2000

Auf dem Kollektor hatte sich also eine gewaltige Ionenladung abgesetzt. Der Endzustand wird dann erreicht, wenn der Luftstrom die Ionen nicht mehr gegen das verzögernde Feld, das sich am Kollektor ausbildet, antreiben kann. Über die Größenordnung der Luftstromgeschwindigkeit, um z. B. 3000 Volt Aufladung zu erhalten, gibt folgende einfache Überschlagsrechnung Aufschluß. Nimmt man vereinfachenderweise an, das Feld zwischen Kollektor und Spitze sei räumlich konstant, so ist beim Endzustand die durch den Luftstrom bewirkte Ionengeschwindigkeit $v = u\left(\frac{V}{a}\right)$, wo u die Ionenbeweglichkeit ist. Setzt man für diese etwa 1,3, so kommt für unseren Fall $v = 1{,}3\,\frac{3000}{10} = 400$ cm/sec. Da der Luftstrom eine etwas größere Geschwindigkeit als die von ihm mitgerissenen Ionen hat, so muß er also eine Geschwindigkeit von über 4 m/sec haben. Nach der gemachten Überlegung ist es günstig, den Abstand Kollektor—Spitze möglichst groß zu machen. Indessen sind der Vergrößerung durch die Abnahme der Luftstromgeschwindigkeit mit der Entfernung Grenzen gesetzt. Im übrigen müßte das Aufladepotential dasselbe sein, wenn das Elektrometer noch mit einer (gut isolierenden) Leidener Flasche verbunden würde. Nur würde es nicht nach Bruchteilen einer Minute wie oben, sondern erst nach längerer Zeit erreicht.

Es ist nur ein kleiner Bruchteil des Spitzenstroms, der zur Seite geblasen wird. Denn am Galvanometer beobachtet man während des Blasens keine Stromabnahme. Im Gegenteil ist dann der Spitzenstrom, vielleicht infolge der Saugwirkung des Luftstroms an der Spitze (Luftverdünnung oder Entfernung des dort chemisch veränderten Gases?) merklich größer

Es ist für den Versuch wesentlich, daß man die Spannung an die Platte anlegt, während die Spitze mit Erde verbunden ist. Das Aufladepotential ist dann von entgegengesetztem Vorzeichen wie das der angelegten Spannung. Es ist also ausgeschlossen, daß etwa einfach ein Potentialausgleich zwischen Platte und Kollektor durch Ionenwanderung stattgefunden habe. Das bemerkenswerte Resultat, daß man z. B. bei Anlegung hoher positiver Spannung an die Platte eine hohe negative Aufladung am Elekrometer bekommt, läßt sich in überzeugender Weise so demonstrieren. Man bringt (etwa an einem isolierenden Griff befestigt) ein radioaktives Präparat zwischen Platte und Kollektor (bei A Fig. 2). Der Elektrometerausschlag geht allmählich auf Null zurück und fängt dann aber wieder zu wachsen an, bis sein Potential sich mit dem der Platte praktisch ausgeglichen hat.

Es ist klar, daß unsere obige Überlegung über die Größe des nötigen Luftstroms noch zu einem höheren Resultat führen muß. Denn die Ionen kommen nicht wie oben angenommen aus Stellen mit dem Potential Null, sondern müssen von solchen mit positiven Potentialwerten (Platte) zu negativen (Kollektor) und umgekehrt transportiert werden.

§ 4. Aufladung durch Thermionen.

Mit Thermionen lassen sich in ähnlicher Weise wie mit Spitzenstromionen bedeutende Aufladepotentiale erzielen. Die Resultate erscheinen hier vielleicht noch bemerkenswerter, als die Ionen nicht wie beim Spitzenstrom aus hohen Feldern stammen, wo die Aufladepotentiale von der Größenordnung der Elektrodenspannungen sind.

Die hohen Temperaturen lassen sich bequem durch den elektrischen Lichtbogen erzeugen. Zwei gewöhnliche Bogenkohlen seien vertikal angebracht. Die untere sei mit dem Gehäuse eines Braunschen Elektrometers und der Erde verbunden. Der Bogen werde mit 150—200 Volt Gleichstrom gespeist. Nachdem die Kohlen etwa 2 cm auseinandergezogen sind und sich genügend erhitzt haben, bläst man in horizontaler Richtung einen Luftstrom zwischen den Kohlen hindurch. Der Bogen löscht sofort, und jetzt werden die von den glühenden Kohlenenden abgegebenen Ionen mitgerissen und können wiederum im Hohlkonus, der auf dem Braunschen Elektrometer steckt, aufgefangen werden. Die Abstände können im übrigen ähnlich gewählt werden wie bei dem früheren Versuch mit Spitzenstrom. Um den Versuch sauber auszuführen, wird man während des Ausblasens des Lichtbogens ein Kartonblatt vor den Kollektor halten und dann wegnehmen. Man wird so die Lichtbogenionen fernhalten.

Da man hier Thermionen beiderlei Vorzeichens in wechselndem Verhältnis je nach der Temperatur der Kohlenenden hat, so kann das Aufladepotential, je nach den Versuchsbedingungen, positiv oder negativ und verschieden hoch ausfallen. Es ist, um übersichtliche Verhältnisse zu haben, zweckmäßig, relativ großen Kohlenabstand zu nehmen und den Luftstrom möglichst nur an der einen Kohle vorbeizuführen. Denn selbst bei gleicher Temperatur der oberen und unteren Elektrode wird das Vorzeichen der emittierten Ionen je nach dem Vorzeichen des an den Kohlen anliegenden Batteriepoles verschieden sein. So wurden z. B. für den Fall, daß die obere Kohle C_1 mit der Batteriespannung verbunden war und der Luftstrom an dieser vorbeigeblasen wurde, folgende Werte gefunden. War C_1 auf — 150 Volt, so stieg das Aufladepotential erst auf — 900 Volt, um dann während des Erkaltens der Kohle auf 300—500 Volt abzunehmen. Ein zweites Mal wurde maximal — 1000 Volt und eine Endaufladung von — 450 Volt gefunden. Wurde der Luftstrom im geeigneten Moment vom Kollektor abgeschnitten, so blieb das Elektrometer auf dem Höchstausschlag stehen (bei einem Versuch — 900 Volt). Bei einem weiteren Versuch wurde die Spannung an C_1 sofort nach Auslöschen des Lichtbogens kommutiert. Das Aufladepotential stieg jetzt auf + 700 Volt, welchen Wert es auch bei fortgesetztem Blasen beibehielt! Hieraus geht hervor, daß das Vorzeichen der Aufladung nicht davon abhängt, welches Vorzeichen die Kohle während des Lichtbogens hat. Jedoch wird das Vorzeichen der abgegebenen Thermionen vornehmlich die gleiche Polarität wie die der erhitzten Kohlen haben. Immerhin ist bei negativem C_1 zu erkennen, daß erst vorwiegend Elektronen abgegeben werden, daß aber mit der Abkühlung der Kohle schließlich durch positive Ionen die Aufladung des Elektrometers teilweise wieder neutralisiert wird. Verbindet man beide Kohlen nach Auslöschen des Bogens mit Erde, so bleiben die Ionen an den Kohlen sitzen und werden vom Luftstrom nur in geringerem Maße erfaßt. Die Aufladung ist dementsprechend klein.

Die Versuche zeigen, daß der Luftstrom eine gewisse Arbeit durch Ionentransport leistet. Natürlich kann dies nur auf Kosten der Bremsung des Luftstroms durch die mitgeführten Ionen der Fall sein, ein Effekt, der sich indessen wegen seiner Kleinheit dem experimentellen Nachweis entziehen wird. Will man umgekehrt die ponderomotorische Wirkung wandernder

Ionen nachweisen, so wird man etwa eine der in der ersten Veröffentlichung (l. c.) oder neuerdings von V. F. Hess[1]) angegebenen Versuchsanordnungen benützen.

§ 5. Lichtelektrische Ionen.

Es liegt nahe, die beschriebene Versuchsanordnung auch für lichtelektrische Ionen anzuwenden. Man stellt einer *Zn*-Scheibe (10 cm Durchmesser) in $1^1/_2$—2 cm Abstand ein ebenso großes Drahtnetz gegenüber und bestrahlt durch dieses Drahtnetz mit einer Quarz-*Hg*-Lampe aus zirka 20 cm Abstand. Zwischen *Zn* und Drahtnetz erzeugt man durch Anlegen von 100 Volt Spannungsdifferenz einen lichtelektrischen Strom. Die Spannung wird in einfachster Weise dadurch gewonnen, daß man gleichzeitig die zur Speisung der Quarzlampe verwendete Stromquelle verwendet. Die *Zn*-Platte ist mit dem negativen Pol und (womöglich) gleichzeitig mit Erde, das Drahtnetz mit dem positiven Pol, und zwar zum Schutz gegen Kurzschluß über eine Glühlampe verbunden. Nun kann man die Ionen wiederum seitlich herausblasen und im Kollektorkonus auffangen. Man verwendet hierzu das gleiche Glasröhrchen wie oben, dessen Mündung 1—2 cm in den Elektrodenzwischenraum hineinrage und ungefähr auf die Mitte des Zwischenraums gerichtet sei. Da die Aufladung infolge des relativ kleinen Photostromes nur allmählich erfolgt, kann man mit Vorteil das Blaseröhrchen statt mit einem Blasebalg mit Kohlensäure aus einer Bombe betreiben. Man erhält dann einen sehr regelmäßigen Anstieg des Aufladepotentials wie etwa Kurve Fig. 3 illustrieren möge. Wie hieraus zu ersehen, erzielt man leicht Aufladungen von

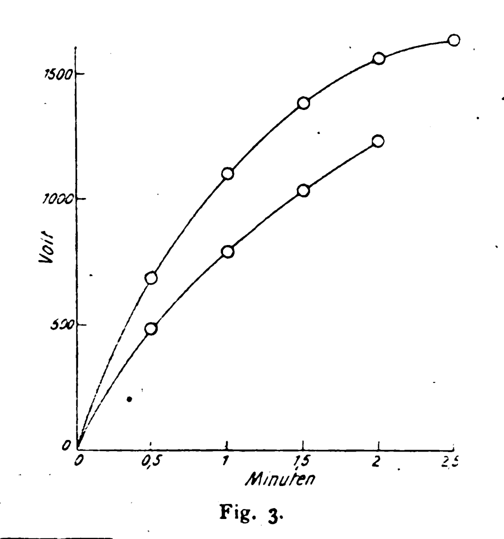


Fig. 3.

1) V. F. Hess, diese Zeitschr. **21**, 510, 1920.

weit über — 1000 Volt, wobei die Ionen wiederum wie oben, aus einem Raum mit positivem Potential stammen. Kontrollversuche zeigen, daß man ohne Belichtung nichts bekommt. Auch bleibt der Effekt aus, wenn kein Feld oder ein entgegengesetztes zwischen *Zn* und Drahtnetz vorhanden ist. Der Versuch bildet in gewisser Hinsicht die Fortführung eines früher beschriebenen (l. c.); dessen Priorität, wie mir nachträglich bekannt wurde[1]), und wie ich hiermit gern hervorhebe, Hallwachs gebührt[2]).

Mit der neuen Anordnung gelingt es, die dort erreichten Aufladepotentiale (zirka 100 Volt) noch um mehr als das 10-fache zu übertreffen[3]). Immerhin wird man stets gern auch den ursprünglichen, durch besondere Einfachheit ausgezeichneten Versuch zur Demonstration heranziehen.

§ 6. Metallionen in Flammengasen.

Verdampft man Salze der Alkalien und Erdalkalien in der Bunsenflamme, so wird deren Leitfähigkeit in bekannter Weise erhöht. Das Vorhandensein der durch Dissoziation gebildeten Metallionen läßt sich unter geeigneten Bedingungen etwa an der Ablenkung des leuchtenden Metalldampfs im elektrischen Felde zeigen. Überzeugender scheint mir der Nachweis zu sein, daß man die Ionen aus der Flamme herausziehen und durch Abscheidung auf einer Elektrode sichtbar machen kann. da Andrade[4]) beschreibt gelegentlich seiner Versuche über die Natur und Beweglichkeit der Flammenionen eine ähnliche Anordnung. In besonders einfacher Weise läßt sich der Metallionentransport auf folgende Weise zeigen. Man bringt eine Bunsenflamme zwischen zwei vertikale *Pt*-Drahtelektroden. Die dünnen Drähtchen, die beispielsweise 0,15 mm Durchmesser und $2^1/_2$ cm Länge haben sollen, befinden sich je 1 cm vom Flammensaum entfernt. Die eine Elektrode sei mit einer Spannungsquelle von 2500 oder mehr Volt, zweckmäßig mit dem mehrfach erwähnten Gleichrichter verbunden, die andere führe zur Erde, wobei man etwa zur Kontrolle des Stroms ein Galvanometer ($3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) einschalte. Letzteres ist indessen nicht unerläßlich. Zur Vermeidung von Zweigströmen sei der Brenner

1) Hallwachs, diese Zeitschr. **21**, 102, 1920.
2) Hallwachs, Wied. Ann. **40**, 343, 1890.
3) Läßt man den Luftstrom nicht in einen Hohlkollektor, sondern gegen eine Kollektorplatte blasen, so erhält man auch hier nur Aufladepotentiale von der Größenordnung 100 Volt. Zur Not kann man als Auffänger ein Drahtnetz verwenden. Hier wurden immerhin einige hundert Volt beobachtet.
4) C. da Andrade, Phil. Mag. (6) **23**, 865, 1912, § 7—8.

auf eine isolierende Unterlage (Paraffin) gestellt.

Man glüht nun die beiden Drähte zunächst im Bunsenbrenner aus. Hierauf stellt man diesen zwischen die Drähte und färbt die Flamme durch eine *Na*-Salzperle kräftig gelb, während man zugleich für eine halbe Minute die Spannung anlegt. Nach Abschalten derselben und Entfernen der Salzperle glüht man nun sukzessive die beiden *Pt*-Elektroden wieder aus. An der Kathode wird die Flamme sich für kurze Zeit lebhaft gelb färben, während auch an der Anode Gelbfärbung, wenn auch in viel schwächerem Grade, auftritt (Verdunkeln!). Bringt man die *Na*-Perle in die Flamme, ohne Spannung anzulegen, so beobachtet man keine Abscheidung an den Elektroden. Der Versuch kann mühelos beliebig oft wiederholt werden. Er zeigt, daß der Hauptsache nach positive Metallionen, aber infolge der Umladungserscheinungen in der Flamme auch eine gewisse Menge negativer Ionen vorhanden sind.

Macht man das Experiment, indem man zwar die Spannung einschaltet, aber keine *Na*-Salzperle einführt, so erhält man meist ebenfalls schwache Gelbfärbung beim Ausglühen, wohl infolge des fast stets vorhandenen *Na*-Gehaltes der Bunsenflamme (Staub).

Im übrigen ließ sich beobachten, daß mit der Stromdauer und der Spannung (bis 6000 Volt) der Effekt stärker wird (Faradaysche Gesetze?).

Analog wie *Na*-Salz verhielten sich *Sr*, *Li* und *Ba*. *Sr* und *Li* sind besonders demonstrativ. Auch hier leuchtet die Kathode stark, die Anode merklich[1]). Mit *Ba* wurde nur an der Kathode eine schwache grüne Färbung erzielt. Der mit dem Massentransport verbundene Ladungstransport war jeweilen durch die Vergrößerung des Galvanometerausschlags beim Einbringen der Salzperle zu konstatieren.

Die Veränderung, die an den *Pt*-Elektroden durch Ionenwanderung eintritt, läßt sich auch durch das Auftreten einer Polarisation nachweisen. Statt des Ausglühens nach dem Stromdurchgang taucht man die Drähte in einen Becher Wasser. Es waren Polarisationsausschläge von der Größenordnung von 100 mm zu beobachten, die indessen rasch zurückgingen. Inwiefern für das Auftreten einer Polarisation etwa auch andere Ionen (*H*?) in Betracht kommen, muß hier dahingestellt bleiben.

Es liegt nahe, die Methode etwa auch zur Feststellung von Ionen anderer Elemente zu versuchen. Aussicht hierzu kann sich allerdings nur in denjenigen Fällen bieten, wo bei Verdampfen der Substanz zugleich eine Leitfähigkeitserhöhung eintritt. Ich habe einen solchen Versuch mit Joddampf gemacht. Dies speziell darum, weil man, wie ich seinerzeit schon mitgeteilt habe[1]), hier eine ähnliche Leitfähigkeitserhöhung wie mit Alkalisalzen erhält. Das Resultat war indes ein negatives. Zugleich zeigte sich aber, daß für den Fall, wo die *Pt*-Elektroden außerhalb der Flamme waren, auch kein Leitfähigkeitseffekt auftrat, während dieser andererseits bei *Na*-Dampf vorhanden war.

1) Bisher (da Andrade, l. c.) ist es nur gelungen, das Vorhandensein negativer *Na*-Metallionen nachzuweisen.

1) Archives des sciences phys. et nat. (5) **2**, 256, 1920.

(Eingegangen 10. März 1921.)

Aus der Ionenlehre der Gase.

Einige Demonstrationsversuche.

III. Mitteilung.

Von H. Greinacher.

Wechselstromversuche.

§ 7. Gleichrichtung im Kohlelichtbogen.

Wie früher beschrieben (l. c.), läßt sich durch Einbringen von Alkalimetalldampf in eine Bunsenflamme eine Wechselstromgleichrichtung erzielen. Ein ähnlicher Effekt läßt sich am Kohlelichtbogen demonstrieren. Zwei gewöhnliche Bogenkohlen stehen sich horizontal gegenüber. Man brennt den Lichtbogen mit Wechselstrom von 105, besser 210 Volt und 50 Perioden. Ein in den Stromkreis eingeschaltetes Drehspulampèremeter gibt bei ruhigem Brand keinen Ausschlag. Nun berührt man das eine Kohleende nahe dem Lichtbogen mit einem Glasstab (Kapillarröhre oder dergl.), bis Schmelzen und lebhafte *Na*-Dampfentwicklung eintritt. Sofort stellt sich eine Gleichstromkomponente von 1 und mehr Ampère ein. Diese verschwindet beim Entfernen des Glasstabs rasch wieder und tritt prompt in der entgegengesetzten Richtung auf, wenn man das andere Kohleende mit Dampf umgibt. Der Gleichstrom fließt dabei stets von der dampfumspülten Elektrode zur reinen Kohle. Der Sinn ist also gerade umgekehrt wie bei dem Flammenexperiment. Dies erklärt sich ungezwungen dadurch, daß in der Flamme das Kathodengefälle, im Kohlelichtbogen aber das Anodengefälle das größere ist. Da

das Anodengefälle im Lichtbogen nun durch den Metalldampf herabgesetzt wird, so ist der Gleichstromwiderstand des Bogens geringer, wenn der Dampf sich an der Anode befindet.

§ 8. Umkehrbare Ventilröhre.

Wird die Ausbildung des Glimmlichtes in einer Geißlerschen Röhre an der einen Elektrode etwa durch die Nähe der Gefäßwand beeinträchtigt, so tritt in bekannter Weise Ventilwirkung auf. Daß immer die frei ins Entladungsgefäß hineinragende Elektrode Kathode, die in einem engen Ansatz befindliche Anode wird, läßt sich vorteilhaft etwa an einer umkehrbaren Ventilröhre zeigen (Fig. 1). Zwei

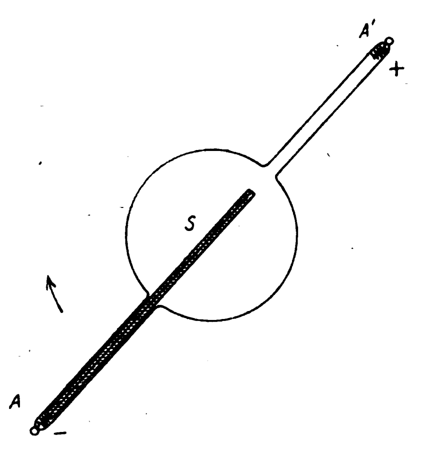


Fig. 1.

gleiche kurze Drahtspiralen (*Al*) *AA'* seien in zwei Glasröhren (1 cm Weite) als Elektroden eingeschmolzen. Eine lange Metallelektrode *S* (25 cm) mache mit *A* Kontakt und rage mit dem freien Ende in die Glaskugel (14 cm Durchmesser) hinein. In dieser Lage funktioniert *A'* als Anode und *A*, das nun in die Kugel hineinragt, an dem also das Glimmlicht sich ungehindert ausbreiten kann, wird Kathode. Dreht man die Röhre im Sinne des Pfeils um etwa 90°, so fällt *S* herunter und macht mit *A'* Kontakt. *A'* wird dann zur Kathode. Schaltet man etwa eine solche Röhre mit einer „Trichterröhre" bzw. Holtzschen Ventilröhre[1]) hintereinander und legt Wechselstrom an, so leuchtet bald der eine, bald der andere Arm der Trichterröhre, je nach der Lage der Ventilröhre. Damit die Elektrode *S* leicht sei, kann man sie etwa aus einem langen *Al*-Streifen (0,1 mm dick), den man zur Versteifung einmal der Länge nach bis zu einem Winkel von 60° falzt, herstellen. Das Vakuum wählt man so, daß das Glimmlicht um *S* nicht ganz bis zur Glaskugel reicht. Die Firma Gundelach stellt die Röhre nach meinen Angaben so her, daß eine kleine Kugel im Innern der Hohlkathode die Kontaktauswechslung besorgt. Es genügt dann ein Kippen der Ventilröhre um wenige Grade. Einer solchen Röhre (in Fig. 2 ist die Neigung übertrieben dargestellt) sieht man äußerlich von ihrer Umschaltbarkeit nichts an. Die Strom-

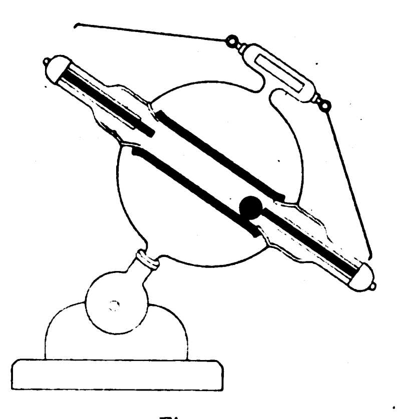


Fig. 2.

richtung erkennt man jedoch daran, daß der Strom immer von der höher gelegenen Elektrode zur tiefergelegenen fließt.

Es sei bei dieser Gelegenheit noch auf eine Gleichrichtung hingewiesen, die man auch bei vollständiger Symmetrie der Strombahn in bezug auf beide Elektroden erhalten kann. Hierzu ist nötig, daß 1. die Wechselspannung in den beiden Halbwellen verschiedenen Verlauf habe (das Spannungsintegral über eine Periode sei indes Null!) und daß 2. die Strombahn dem Ohmschen Gesetz nicht gehorche. Dies ist die Ursache dafür, daß eine symmetrisch gebaute Entladungsröhre mit Induktorstrom unipolare Entladung zeigt. Dabei ist der bei der selbständigen Entladung immer vorhandene Umstand, daß diese unterhalb einer gewissen Minimalspannung überhaupt nicht eintritt, nicht nötig. Auch das bei allen Spannungen stromführende Selen zeigt, wie ich seinerzeit nachgewiesen habe[1]), den auf der Ungültigkeit des Ohmschen Gesetzes beruhenden „anomalen" Gleichrichtereffekt. Derselbe Effekt wäre auch bei unselbständigen Entladungen zu erwarten, die durch das Auftreten von Sättigungsstromkurven gekennzeichnet sind. Diesbezügliche Versuche

1) W. Holtz, Wied. Ann. 10, 336, 1880. Siehe auch J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen 1905, S. 357 oder Katalog von Gundelach (Gehlberg).

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 283, 1916.



haben indessen kein sicheres Resultat gezeigt. Wie mir scheint, wird hier die Deutung der Versuche durch die Frage kompliziert, inwieweit man die mit Gleichstrom aufgenommene Charakteristik als für den raschen Spannungsverlauf der Wechselfelder gültig ansehen darf.

§ 9. Flammengleichrichter.

Bringt man in eine Bunsenflamme zwei Elektroden und läßt die eine von Alkalimetalldampf bestreichen, so hat man nach früherem (§ 7 und l. c.) einen Flammengleichrichter. Seinerzeit war der Versuch nur mit Niederfrequenz (50 Perioden) ausgeführt worden. Hier sollen die Resultate für hohe Frequenz angegeben werden. Der Hochfrequenzwechselstrom wurde in der für die Erzeugung der sog. elektrodenlosen Ringentladung üblichen Weise erzeugt (Fig. 3). Die Drahtenden (E) waren mit

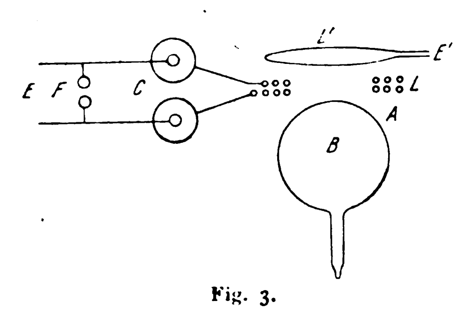


Fig. 3.

einem Induktorium von 40 cm Schlagweite, das primär mit Wechselstrom von 50 Perioden gespeist wurde, verbunden. Die Funkenstrecke F bestand aus Messingkugeln und war zur Erzeugung eines regelmäßigen Funkenstroms kräftig angeblasen (Wasserstrahlgebläse). C waren zwei größere Leidener Flaschen von je 0,0022 Mikrofarad[1]). Die Selbstinduktion L bestand aus 6 Windungen, die in zwei Ebenen zu je 3 Windungen spiralig gewickelt waren (siehe Bemerkungen in § 10). Der äußere Durchmesser des Drahtes (gut isoliertes Cu-Kabel) betrug 1 cm. Der Ring selbst hatte innen 8 cm, außen 14 cm Durchmesser und eine Dicke von 2 cm. Direkt über L befanden sich eine oder zwei davon isolierte Windungen L', deren Enden E' nun über einen Flammengleichrichter und ein Galvanometer (Empfindlichkeit $3 \cdot 10^{-9}$ Amp/mm) verbunden waren.

Die mittlere effektive Spannung an E' wurde mittels eines Elektrometers zu zirka 30 Volt bei einer, zu zirka 70 Volt bei zwei Windungen gemessen. Die maximale Spannung war indessen, wie ein mit E' verbundenes Funkenmikrometer zeigte (Schlagweite zirka 1 mm) weit größer.

Der Flammengleichrichter bestand (wie früher) aus 2 über Fe-Drähte geschobenen massiven Messinghülsen, die horizontal und parallel zueinander zirka 2 cm über der Brennermündung angeordnet waren. Sie tauchten nur mit den Enden in die Flamme, wodurch eine zu starke Erwärmung vermieden wurde. Andererseits ist es günstig, die Flammentemperatur durch starke Luftzufuhr hoch zu wählen. Ferner wurde beobachtet, daß die Wirkung gesteigert wird, wenn der Alkalimetalldampf bis nahe an die zweite Elektrode heranreicht.

Erzeugte man nun Schwingungen in L, so zeigte zunächst das Galvanometer keinen nennenswerten Ausschlag. Führte man jedoch eine Salzperle mit Na, Sr oder K (hier genügte auch eine Zigarette) ein, so trat ein Ausschlag in dem früher (l. c.) angegebenen Sinne ein. Sr gab wenig mehr wie Na, besonders viel K; bei einer Windung 10—15 cm, bei zwei Windungen über 60 cm[1]). Brachte man an L etwa von unten her einen Glasballon, der elektrodenlose Ringentladung (in der Höhe von A) zeigte, heran, so ging der Galvanometerausschlag zurück, anzeigend, daß L Energie entzogen wurde[2]).

Vergleichende Versuche mit Wechselstrom von 50 Perioden zeigten, daß der Grad der Gleichrichtung bei Hochfrequenz von derselben Größenordnung ist. Immerhin ist zu beachten, daß es sich um gedämpfte Schwingungen handelt, die mit der Frequenz des Erregerfunkens (F) angeregt werden. Es muß daher die Frage, ob nur die einzelnen Wellenzüge als ganzes, die abwechselnd in der einen und der anderen Richtung angeregt werden, oder ob die einzelnen Wellen gleichgerichtet werden, noch dahingestellt bleiben. Hier dürften noch weitere Versuche über die Trägheitslosigkeit des Gleichrichters für hohe Frequenzen angezeigt sein.

Die Funkenfrequenz läßt sich im rotierenden Spiegel schätzen. Alle $^1/_{100}$ Sekunden (Wechselzahl des verwendeten Wechselstroms) war eine Aufeinanderfolge von 3—4 Funken zu beobachten, der bis zur nächsten Funkenfolge eine Pause folgte (siehe etwa Fig. 381 in Zenneck l. c.

1) Es ist angezeigt (vgl. Zenneck, l. c. S. 455), das Induktorium mit den inneren Belegungen der Leidener Flaschen zu verbinden.

1) Die Alkalizufuhr zur Flamme läßt sich leicht gleichmäßig machen, wenn man eine wässerige Lösung (z. B. KCl) in unmittelbarer Nähe des Flammensaums zerstäubt. Dies kann dadurch geschehen, daß man die Lösung mittels zweier nebeneinander eingeführter Pt-Drähte (4 Volt) elektrolysiert.

2) Es möge hier erwähnt sein, daß Versuche, elektrodenlose Ringentladung bzw. ringförmig verlaufende Ströme in einem Ringbrenner direkt nachzuweisen, nicht zum Ziele führten.

S. 426). Die Schwingungsfrequenz wurde bestimmt mit einem Resonanzkreis aus einer einlagigen Spule von der Länge 18,5 cm und dem mittleren Durchmesser von 2 cm, deren Selbstinduktion zu $2,2 \cdot 10^{-5}$ Henry berechnet wurde[1]) und einem Drehkondensator, zu dem eine Pintschsche Glimmlichtlampe als Indikator parallel geschaltet war. Die Resonanz ließ sich an der maximalen Ausdehnung des Glimmlichts sehr scharf erkennen. Die Frequenz ergab sich hieraus zu $1,84 \cdot 10^6$. Die Schwingungen sind infolge des Energieverbrauchs im Funken F stark gedämpft. Betrachtete man einen durch die Pintschlampe beleuchteten Spalt im rotierenden Spiegel, so erhielt man Spaltbilder in der Anordnung und Zahl der Erregerfunken. Bei der ringförmigen Entladung (Ballon B Fig. 3) beobachtete man dasselbe. Hier muß die Dämpfung infolge des großen Energieverbrauchs im Ringstrom noch wesentlich größer sein.

§ 10. Elektrodenlose Ringentladung.

Die Ursache des elektrodenlosen Ringstroms wird allgemein in dem elektrodynamischen Wechselfeld der Induktionsspule gesehen. Der elektrodenlose Ringstrom bildet sozusagen die einwindige Sekundärspule eines Teslatransformers. Daß sich die Erscheinung gerade an der Peripherie des Glasgefäßes ausbildet, erklärt sich einfach dadurch, daß dort eine maximale e.m.K. wirksam ist. Es wächst zwar der Umfang, auf den sich die induzierte e.m.K. verteilt, aber die vom Entladungsring eingeschlossene Kraftlinienzahl nimmt mit der Kreisfläche, also quadratisch, zu[2]). Immerhin hat Hartmann[3]) überzeugend gezeigt, daß auch das elektrostatische Wechselfeld der Induktionsspule eine ionisierende Wirkung ausübt. Zwischen den einzelnen Windungen, insbesondere zwischen Anfang und Ende, befinden sich beträchtliche Wechselspannungen, auf deren Wirkung der von Wachsmut u. Winawer[4]) beschriebene Leitfähigkeitseffekt im Druckbereich von 1—2 mm Hg zurückzuführen ist. Gewöhnlich begegnet man dem störenden Einfluß des statischen Wechselfeldes dadurch, daß man die Wicklung spiralig in einer (äquatorialen) Ebene vornimmt[5]). Analog sind auch bei vorliegenden Versuchen die Windungen L spiralig jedoch in zwei Ebenen angeordnet.

Daß aber auch bei der elektrodenlosen Ringentladung selbst das Wechselfeld immer noch eine Rolle spielt, zeigen folgende Versuche. Es wurde der Ballon B (10 cm Durchmesser) der Selbstinduktion L soweit genähert, daß gerade Ringentladung einsetzte. Brachte man nun die Hand in den Zwischenraum bei A hinein, ohne indessen B oder L zu berühren, so erlosch der Ring. Steckte man ein zylindrisches Entladungsgefäß ($4^1/_2$ cm Durchmesser) in L hinein, so genügte das Überschieben eines Metallzylinders, um die Ringentladung auszulöschen. Der Metallzylinder war übrigens der Länge nach geschlitzt, so daß sich keine induzierten Ringströme darin ausbilden konnten. Der Einfluß bestand also nicht in einer magnetischen Schirmwirkung, sondern darin, daß der Metallzylinder als induzierte Kapazität wirkte, wodurch eine elektrostatische Schirmwirkung gegenüber dem Entladungsgefäß eintrat. Der Metallzylinder brauchte nicht mit Erde verbunden zu sein, sondern konnte mit derselben Wirkung auf einem Stück Paraffin isoliert eingeschoben werden.

Diese Erscheinungen verschwanden, als man den Induktionsring L mit Stanniolband umwickelte. Nur an einer schmalen Stelle wurde der Ring von der Stanniolumhüllung frei gelassen. Da somit keine geschlossenen Ringströme im Stanniolring auftreten konnten, so war die elektrodynamische Wirkung der Spule nicht beeinträchtigt. Wohl aber wurde durch die im Stanniol induzierten Ladungsströme das elektrostatische Wechselfeld praktisch abgeschirmt.

Die Ringentladung setzte jetzt erst bei stärkerer Erregung wie früher ein. Die kleine Röhre ($4^1/_2$ cm Durchmesser) war auch bei stärkstem Strom überhaupt nicht mehr zu betreiben, die zweite (10 cm Durchmesser) leuchtete bei stärkster Erregung (rötliches Licht, H-linien) stark und nur die größte (hier ließ sich in einfachster Weise eine Demonstrations-Oxydkathodenröhre von zirka 12 cm verwenden) leuchtete schon mit schwächerem Strom (weißliches Licht, grüne Hg-Linie) stark hervortretend.

Hieraus dürfte die begünstigende Wirkung des elektrostatischen Wechselfeldes auf die elektrodenlose Ringentladung deutlich hervorgehen. Es empfiehlt sich daher zur Erzeugung möglichst reiner elektrodynamischer Verhältnisse die Induktionswindungen in der angegebenen Art metallisch zu umgeben.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, März 1921.

(Eingegangen 10. März 1921.)

1) Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik. 12. Aufl. S. 552.
2) Vgl. Zenneck, l. c. S. 481.
3) A. Hartmann, Dissertation Basel 1918. Bulletin des Schweiz. Elektrotechn. Vereins **10**, 52, 1919.
4) R. Wachsmut u. B. Winawer. Ann. d. Phys. **42**, 585, 1913.
5) Bergen Davis, Phys. Rev. **20**, 129, 1905.



Das Tropf-Emanoskop. Eine Anordnung zur schnellen Bestimmung des Emanationsgehaltes radioaktiver Wässer.

(Aus dem Radium-Institut der Bergakademie Freiberg i. S.)

Von P. Ludewig.

Zur Bestimmung des Emanationsgehaltes radioaktiver Wässer gibt es eine Anzahl einfacher Meßanordnungen (Fontaktoskop, Fontaktometer, Emanometer usw.), die unter geeigneten Bedingungen genaue Werte des Emanationsgehaltes zu bestimmen gestatten. Bei diesen Apparaten ist es zweckmäßig, eine bestimmte Emanationsmenge und damit eine bestimmte Wassermenge zur Messung zu bringen, da dann die größte Meßgenauigkeit erreicht wird. Bei einer Fontaktoskop- oder Fontaktometermessung ist es z. B. nötig, die Menge des Wassers so zu bemessen, daß etwa 20 M.E. direkt in die Kanne hineinkommen; bei einem Emanometer wird man diese Menge, um gute Genauigkeit zu erhalten, etwas größer wählen.

Hat man ein Wasser zu messen, dessen Emanationsgehalt nicht bekannt ist, so wird es leicht vorkommen, daß man entweder eine zu große Emanationsmenge in den Ionisationsraum bringt, daß infolgedessen der Abfall am Voltmeter zu schnell erfolgt und der Raum unnötig verseucht wird, oder daß man bei sehr schwachen Wässern die Wassermenge zu gering wählt und damit einen zu langsamen Abfall des Elektrometers erhält.

Dieser Unsicherheit wäre abgeholfen, wenn man eine Methode zur Verfügung hätte, mit der es möglich wäre, schnell den ungefähren Gehalt des Wassers vorher zu bestimmen; dann kann man für die Hauptmessung günstige Versuchsbedingungen wählen. Im folgenden soll eine Anordnung beschrieben werden, die nicht nur den genannten Zweck erfüllt, sondern auch nach einmaliger Eichung unabhängig von den anderen Apparaten eine Bestimmung des Emanationsgehaltes von Wässern mit einer Genauigkeit von 5 bis 10 Proz. sehr schnell auszuführen gestattet. Sie ist im besonderen als Hilfsapparat für künstliche radioaktive Quellen von Wert.

Die Anordnung besteht (siehe Fig. 1) aus einem Ionisationsgefäß, dessen Höhe 375 mm beträgt und dessen Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge von 100 mm ist. Auf das Ionisationsgefäß wird oben das Elektrometer, in unserem Fall ein Wulfsches Zweifaden-Elektrometer aufgesetzt, dessen Fadensystem mit einem Zerstreuungsstab von 6 mm Durchmesser und 34 cm Länge verbunden ist. In jeder Seitenwand des Ionisationsgefäßes ist oben ein Schlauchansatz angebracht, der zu einer Düse D (Fig. 2) führt. Jede der Wandungen ist innen mit einem Rinnensystem nach Fig. 2 versehen. Das

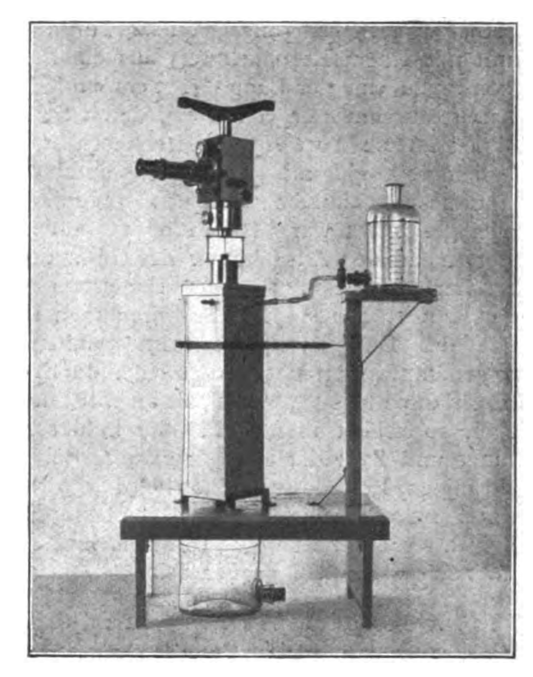


Fig. 1.

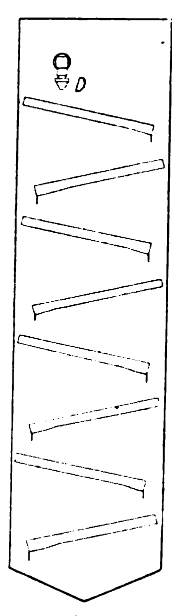


Fig. 2.

aus der Düse D ausfließende Wasser tropft in die oberste Rinne, läuft in ihr hinab, tropft in die nächste Rinne usw. und fließt unten durch eine Öffnung im Ionisationsgefäß in ein Sammel-

gefäß ab. Um ein gleichbleibendes Tropfen zu gewährleisten, sind an den Enden der Rinnen kurze dünne Kupferdrähtchen angelötet, an denen das Wasser heruntertropfen muß. Das zu untersuchende Wasser wird vor dem Versuch bis zur Marke 10 in die Flasche eingefüllt. Es passiert einen Hahn und läuft von dort durch die Düsen in die Rinnen. Es können die Rinnen einer Wand, oder mehrerer Wände zu gleicher Zeit in Tätigkeit treten. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das Heruntertropfen an zwei Seitenwänden. Zwischen dem Hahn und den Düsen ist dazu eine Verzweigung des Glasrohres eingefügt.

Bei dem Heruntertropfen in den Rinnen gibt das Wasser einen Teil seiner Emanation an den Ionisationsraum ab. Der Apparat kann nur dann brauchbare Werte geben, wenn bei Zimmertemperatur und einer bestimmten Aktivität des Wassers prozentual immer der gleiche Teil der Emanation herausgetropft wird. Um dies zu prüfen, wurden einige Versuche gemacht, bei denen der Emanationsgehalt des Wassers pro Liter vor und nach dem Heruntertropfen mit einem Fontaktoskop gemessen wurde. Die Tabelle I enthält das Ergebnis. Der Prozentgehalt der Emanation, die herausgetropft wird, ist demnach bei Zimmertemperatur hinreichend konstant.

Tabelle I.

Mache-Einheiten im Liter		Differenz	
vorher	nachher	M.-E.	in Proz.
514	231	283	55,0
457	195	262	57,2
410	178	232	56,5

Es wurde zunächst der Normalverlust des neuen Apparates bestimmt, und zwar, wenn der Zerstreuungsstab positiv und wenn er negativ aufgeladen war. Das Wulfsche Elektrometer wurde dabei bis über den Teilstrich 80 (einseitig abgelesen) aufgeladen, im Augenblick des Durchgangs des linken Fadens durch 80 der Hahn aufgedreht und die Stoppuhr in Gang gesetzt. Es wurde dann bestimmt, über wieviel Teilstriche der linke Faden in zwei Minuten wanderte.

Die Tabelle II enthält eine größere Anzahl von Messungen an verschiedenen Tagen. An jedem der Tage wurde auch eine Messung mit aktivem Wasser (bis zu 1000 M.E. im Liter) gemacht, so daß sich aus der Tabelle zugleich ergibt, wie schnell die radioaktive Verseuchung des Apparates wieder verschwindet. Die Zahlen zeigen, daß das hinreichend schnell geschieht.

Tabelle II.

Normalverlust mit laufendem Wasser.

negativ aufgeladen		positiv aufgeladen	
Datum	Skalenteile in 2 Min.	Datum	Skalenteile in 2 Min.
24. 1.	4,2	22. 12.	8,8
26. 1.	4,5	23. 12.	9,0
27. 1.	4,1	24. 12.	9,5
28. 1.	4,2	27. 12.	8,5
29. 1.	4,5	28. 12.	8,5
30. 1.	3,9	29. 12.	5,0
31. 1.	2,3	30. 12.	8,0
1. 2.	3,5	31. 12.	8,2
2. 2.	2,7	1. 1.	9,2
3. 2.	3,9	2. 1.	9,2
4. 2.	3,3	3. 1.	5,5
5. 2.	3,0	4. 1.	9,8
7. 2.	2,5	5. 1.	14,0
8. 2.	3,6	6. 1.	8,2
		8. 1.	10,5
		9. 1.	7,8

Normalverlust ohne Wasserablauf.

Datum	Skalenteile in 2 Min.
31. 12.	2 4
8. 1.	2,1
11. 1.	2,6

Ein Vergleich der Werte für positive und negative Aufladung zeigt, daß die Werte bei positiver Aufladung wesentlich größer sind, als bei negativer Aufladung. Ferner schwanken die Werte bei positiver Aufladung mehr, als die Werte bei negativer Aufladung.

Diese Erscheinung rührt von der Wasserfallelektrizität her. Durch das Zertropfen des Wassers entsteht eine Ionisierung der Luft im Gefäß. Diese Ionisation[1]) rührt daher, daß an fallenden Wassertropfen eine bestimmte Elektrizitätsteilung einsetzt. Der Tropfen erhält positive Ladung, die Lufthülle um den Tropfen negative Ladung. Zerplatzt der Tropfen beim Aufprallen, so bleibt die positive Ladung im Wasser, die negative Ladung verursacht die Ionisation der Luft. Kleine Verunreinigungen des Wassers können den Effekt bedeutend erhöhen.

Wenn nur negative Ladung in die Luft geht, so wird ein positiv geladenes Elektrometer schnell entladen werden, ein negativ geladenes Elektrometer dagegen nicht. Dieser Unterschied kommt in den Zahlen der Tabelle II zum Ausdruck.

1) Siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung von A. Becker, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 9, 52, 1912.

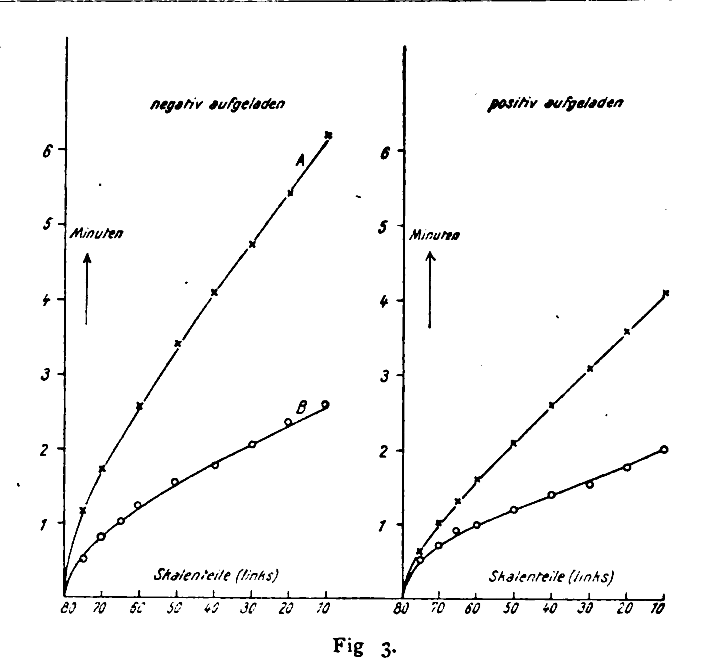


Fig. 3.

Bei den Versuchen, die in der Tabelle II enthalten sind, wurde gewöhnliches Leitungswasser verwendet. Macht man eine Bestimmung des Normalverlustes, ohne daß Wasser in den Rinnen herunterläuft, so erhält man Zahlen (siehe den unteren Teil der Tabelle II), die fast genau so klein sind, wie die Zahlen bei negativer Aufladung des Zerstreuungsstiftes und Wasserablauf.

Daß bei positiver Aufladung die Art des benutzten Wassers, wie erwähnt, von großem Einfluß sein kann, zeigt Tabelle III.

Tabelle III.
Einfluß der Ladung und der Polarität auf den Normalverlust.

11. 1. 21	Leitungswasser	+	10,8 Sk.T.
	" "	—	3,1 "
12. 1. 21	Destilliertes Wasser	+	55,2 "
	" "	—	3,2 "

Bei Benutzung von Leitungswasser ergaben sich bei positiver Aufladung 10,8 Skalenteile Abfall in zwei Minuten, bei negativer Aufladung 3,1 Skalenteile. Diese Zahlen bieten gegenüber der Tabelle II nichts Neues. Bei einem anderen Versuch wurde ein Wasser benutzt, das als „destilliertes Wasser" bezogen worden war. Bei positiver Aufladung ergab sich ein Normalverlust von 55,2(!) Skalenteilen und bei negativer Aufladung ein Normalverlust von 3,2 Skalenteilen. Dieses destillierte Wasser hatte demnach kleine Beimengungen, die den Wasserfalleffekt bedeutend erhöhten. Aus diesen Zahlen geht hervor, daß einwandfreie Messungen mit dem Tropf-Emanoskop nur dann möglich sind, wenn der Zerstreuungsstab negativ aufgeladen ist.

Um ein geeignetes Meßverfahren auszuwählen, wurde zunächst die Bewegung des Elektrometerfadens in Abhängigkeit von der Zeit beim Heruntertropfen von Wasser verschiedenen Emanationsgehaltes untersucht. Vor der Messung wurde das Elektrometer so eingestellt, daß die beiden Fäden vor der Aufladung rechts und links gleichen Abstand (5 Skalenteile) vom Nullpunkt hatten. Das Elektrometer wurde sodann soweit aufgeladen, daß die Fäden etwas über den äußersten Teilstrichen von je 80 Skalenteilen standen. Beobachtet wurde in allen Fällen nur die Bewegung des linken Fadens. In dem Augenblick, wo dieser durch den Teilstrich 80 hindurchging, wurde der Hahn aufgedreht und dann wurden die Zeiten des Durchgangs des Fadens durch die Hauptskalenteile an einer Stoppuhr abgelesen, die zugleich mit dem Aufdrehen des Hahnes in Gang gesetzt worden war.

Für Wasser verschiedener Aktivität wurden bei negativer Aufladung die Kurven *A* und *B* der Fig. 3 erhalten. Alle anderen Kurven haben den gleichen Charakter. Anfänglich ist die Bewegung des Fadens sehr langsam; erst wenn eine bestimmte Menge von Emanation herausgetropft ist, wird die Bewegung schneller und die Kurve verläuft dann geradlinig weiter. Der erste Teil dieser Kurven ist natürlich für die Messungen unbrauchbar.

Die Meßweise wurde so festgelegt, daß erstens das Elektrometer bis über den Teilstrich

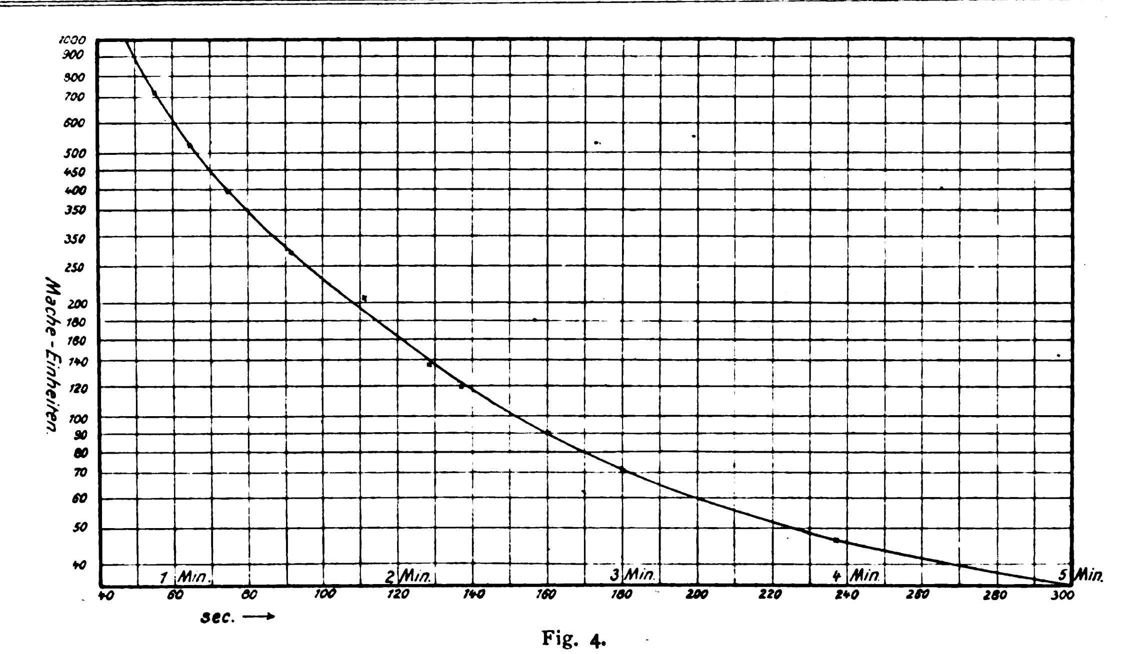


Fig. 4.

80 hinaus negativ aufgeladen wurde, zweitens im Augenblick des Durchgangs des Fadens durch 80 der Hahn aufgedreht wurde, drittens beim Durchgang des Fadens durch 65 die Stoppuhr in Gang gesetzt wurde, viertens beim Durchgang des Fadens durch 30 die Stoppuhr gestoppt wurde. Die so abgestoppte Zeit zwischen den Teilstrichen 65 und 30 gibt ein Maß für die Stärke der Aktivität der Quelle.

Der Apparat muß mit einer der bekannten Meßanordnungen geeicht werden. Die Eichung geschah mit einem Fontaktoskop, und zwar wurde darauf geachtet, daß die im Fontaktoskop zur Messung benutzte aktive Wassermenge eine möglichst genaue Messung gewährleistete. Die so erhaltenen Eichwerte sind in Tabelle IV und in das Kurvenbild Fig. 4 eingetragen.

Die Ordinate dieses Kurvenbildes ist logarithmisch geteilt. Die Eichkurve zeigt, daß der

Tabelle IV.

Eichtabelle des Tropf-Emanoskops.

Mache-Einheiten im Liter	Zeit (65 bis 30 Sk.T.
708	54,8 sec
528	63,8 „
390	74,0 „
272	91,5 „
205	111,0 „
135	128,0 „
120	137,0 „
90	160,0 „
72	178,0 „
46,6	237,0 „

Apparat bei Benutzung von zwei Düsen und dementsprechend der Rinnenfolgen zweier Seitenwände Messungen von Wässern auszuführen

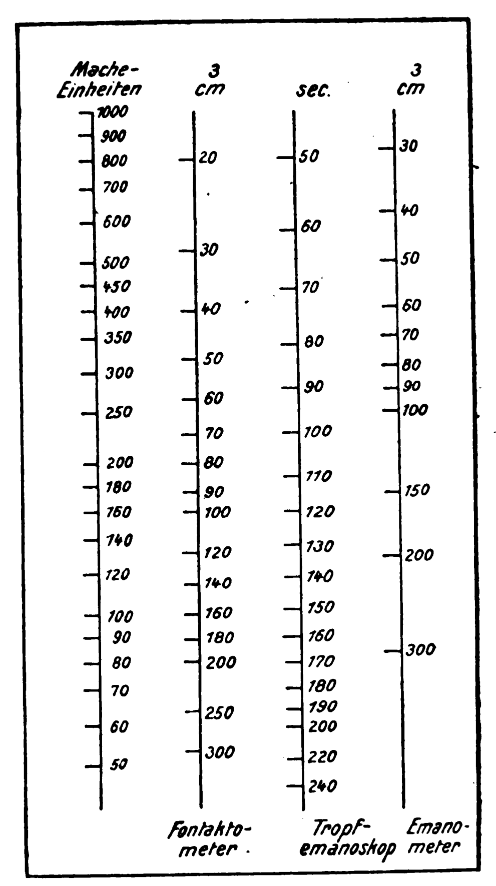


Fig. 5.

gestattet, die zwischen 40 und 1000 Mache-Einheiten im Liter enthalten.

In der Parallelkoordinatendarstellung nach Fig. 5 sind die Werte, die am Tropf-Emanoskop gewonnen wurden, mit der Anzahl von Kubikzentimetern in Beziehung gesetzt, die man zweckmäßig bei einer Messung mit dem Fontaktometer oder Emanometer zur Messung bringt. Hat z. B. die Messung am Tropf-Emanoskop 60 Sekunden gedauert, so wird man von dem gleichen Wasser in einer Fontaktometerkanne etwa 28 ccm zur Messung bringen und bei einer Emanometermessung etwa 40 ccm.

Es ist möglich den Meßbereich des Instrumentes in einfacher Weise zu ändern. Will man stärkere Wässer messen, so wird man statt der Rinnensysteme zweier Seitenwände nur eine Seitenwand in Tätigkeit treten lassen. Will man schwache Wässer messen, so kann man die Rinnen aller vier Seitenwände zu gleicher Zeit wirksam machen. Man erhält so drei Eichkurven, die einen großen Meßbereich überdecken.

Zusammenfassung.

Es wird eine Anordnung beschrieben, mit der es möglich ist, den Emanationsgehalt radioaktiver Wässer in wenigen Minuten mit einer Genauigkeit von 5—10 Proz. zu messen. Das zu untersuchende Wasser fließt aus einer Flasche in ein Rinnensystem, in dem es beim Heruntertropfen einen Teil seiner Emanation abgibt. Die Schnelligkeit der Entladung eines negativ aufgeladenen Elektrometers, das mit einem im Tropfraum hängenden Zerstreuungsstab verbunden ist, und das schon während des Heruntertropfens in Tätigkeit tritt, ist ein Maß für den Emanationsgehalt des Wassers. Es können mit dem ausgeführten Apparat Wässer direkt gemessen werden von einem Gehalt von 40 bis 1000 Mache-Einheiten im Liter. Der Meßbereich kann leicht vergrößert oder verkleinert werden.

(Eingegangen 14. März 1921.)

Molekularkräfte und ihre elektrische Deutung.

Von P. Debye.

1. Vor etwa einem Jahre[1]) konnte ich zeigen, daß zwischen den Molekülen aller Substanzen eine gegenseitige Anziehung vorhanden sein muß als Folge der Polarisation, welche das eine Molekül im elektrischen Felde des andern erfährt. Während die „Polarisierbarkeit" eines Moleküls als experimentell bekannt angesehen werden kann, sobald der Brechungsexponent (und eventuell die Dispersion) gemessen ist, muß die Felderzeugung zurückgeführt werden auf die (mittlere) Anordnung der Ladungen im Molekül.

Je nachdem der Schwerpunkt der aufbauenden positiven Ladungen mit dem Schwerpunkt der negativen zusammenfällt oder nicht, leitet sich das Feld in größerem Abstand ab aus einem dem Molekül zugeordneten Dipolmoment oder aus drei einen Quadrupol bestimmende elektrischen Hauptträgheitsmomenten. (Im ersten Falle ist das Molekül in elektrischer Hinsicht durch einen Pfeil, im zweiten durch eine Fläche zweiten Grades geometrisch charakterisiert.) Die hierauf fußende Unterscheidung der Molekülarten in zwei großen Hauptgruppen, von denen die der ersten Art angehörigen im allgemeinen wesentlich stärkere elektrische Felder in ihrer Umgebung zu erzeugen vermögen, als solche, welche der zweiten Gruppe angehören, scheint mir den ausgesprochen vorhandenen Unterschieden im Verhalten der Körper sehr gut zu entsprechen (Assoziation, dissoziierende Kraft für Elektrolyte, dielektrisches Verhalten[1]), anomale Dispersion für lange Wellen usw.[2]) Während nun die Unterscheidung der beiden Hautgruppen und die quantitative Bestimmung der Dipolmomente unter anderem mit Hilfe von Messungen über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante verhältnismäßig leicht möglich ist, im selben Sinne, wie die entsprechenden magnetischen Momente auf Grund des Curie-Langevinschen Gesetzes abgeleitet werden, bietet der Nachweis und die absolute Bestimmung der elektrischen Trägheitsmomente größere Schwierigkeiten.

Während nämlich ein Dipolmolekül von einem homogenen elektrischen Felde ein Drehmoment erfährt, ist ein Quadrupolmolekül unter diesen Umständen im indifferenten Gleichgewicht. Letzteres kann demnach die gewöhnlich mit Hilfe von homogenen Feldern ausgeführten elektrischen Messungen nicht beeinflussen. Es dürfte aber doch von Interesse sein, auch Quadrupolmomente rein elektrisch nachzuweisen. Das scheint mir nun in folgender Weise möglich.

2. Das indifferente Gleichgewicht eines Quadrupolmoleküls ist nicht mehr vorhanden, sobald das elektrische Feld nicht mehr homogen ist. In einem inhomogenen Felde müssen demnach Quadrupolmoleküle eine ähnliche Einstellungstendenz bekommen, wie Dipolmoleküle in einem homogenen Felde. Es liegt nahe, eine im inhomo-

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Iona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

2) P. Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 777, 1913; J. Timmers, Diss. Utrecht 1914.



genen Felde erzwungene, im übrigen von der Wärmebewegung stark gestörte Ordnung optisch nachzuweisen, und zwar wird sich dieselbe darin zeigen müssen, daß die Substanz doppelbrechend wird. Nun ist aber schon im homogenen Felde auch bei Quadrupolmolekülen eine Doppelbrechung vorhanden, das ist die gewöhnlich als Kerr-Effekt bezeichnete Erscheinung. Nach der offenbar das Wesentliche treffenden Theorie von Langevin[1]) beruht dieser Effekt darauf, daß die Moleküle in verschiedenen Richtungen verschieden stark polarisierbar sind und infolgedessen, ähnlich wie ein Kristall, eine Einstellungstendenz auch im homogenen Felde besitzen.. Um die Störung des vermuteten neuen Effektes durch den Kerr-Effekt zu vermeiden, muß man deshalb beobachten an einer Stelle des Feldes, wo die Feldstärke selber Null, dafür aber die räumliche Änderungsgeschwindigkeit derselben möglichst groß ist. In der nebenstehenden Fig. 1

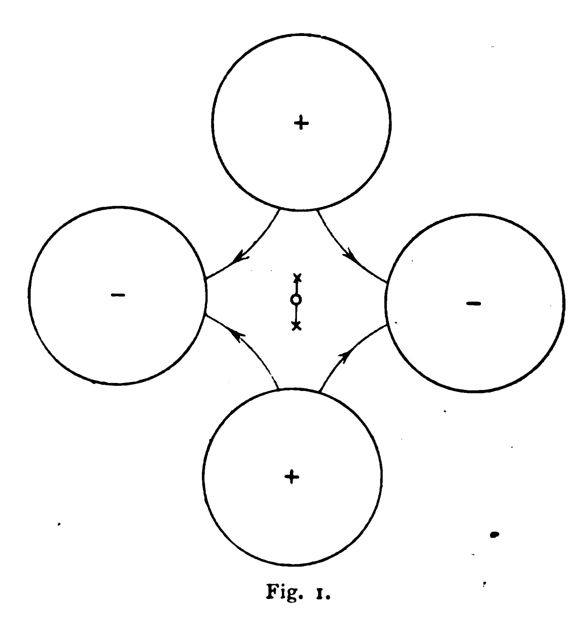


Fig. 1.

ist eine Anordnung skizziert, in derem Mittelpunkt diese Forderungen erfüllt sind; zugleich ist angegeben, wie ein einfaches Quadrupolmolekül, bestehend aus zwei durch Kreuze gekennzeichneten Negativen und einer durch einen Kreis angedeuteten positiven Ladung sich einzustellen bestrebt ist. Eine genauere Rechnung zeigt mir, daß der Effekt wohl noch praktisch beobachtbar sein dürfte; über eingehendere Versuche in dieser Richtung werde ich aber erst in einiger Zeit berichten können.

3. Jede Erscheinung indessen, welche ursächlich auf das im Innern des Körpers vorhandene, von den Molekülen oder Atomen erzeugte elektrische Feld zurückgeführt werden kann, liefert prinzipiell eine Methode. Die oben zitierte Arbeit baut eine solche auf Werte für die van der Waalsschen Attraktionskräfte, wie sie aus Beobachtungen über die Zustandsgleichung gefolgert werden können.

Aus genau umschriebenen Prämissen für die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte eine allgemeingültige Zustandgsgleichung abzuleiten, ist indessen bekanntlich eine äußerst schwierige und bis jetzt ungelöste Aufgabe. Man muß sich mit Näherungen begnügen, wie etwa die van der Waalssche Gleichung eine ist. Ich hatte damals schon Gelegenheit, auf diesen Punkt hinzuweisen und dementsprechend hervorzuheben, daß die aus der van der Waalsschen Attraktionskonstante a berechneten Werte des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ nur die Größenordnung treffen können. Demgegenüber schien es mir dort weiterhin angezeigt, auf ein von Kamerlingh-Onnes begründetes und von Keesom in mehreren Arbeiten entwickeltes Verfahren hinzuweisen, die Zustandsgleichung in Form einer systematisch geordneten Reihenentwicklung zu erhalten. Schreibt man die Zustandsgleichung in der Form:

$$p\mathfrak{v} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{v}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{v}^2} + \ldots, \qquad (1)$$

so handelt es sich darum, die „Virialkoeffizienten“: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ als Temperaturfunktionen (gewöhnlich in Form von Reihen nach absteigenden Potenzen von T) zu berechnen. In dieser Form geschrieben würde die van der Waalssche Gleichung:

$$\left(p + \frac{a}{\mathfrak{v}^2}\right)(\mathfrak{v} - b) = RT \qquad (2)$$

für die Virialkoeffizienten liefern:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= RT, \\ \mathfrak{B} &= RT\left(b - \frac{a}{RT}\right), \\ \mathfrak{C} &= RTb^2. \\ &\text{— — — — — —} \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Keesom hat nun in jener Reihe von Arbeiten, auf welche oben Bezug genommen wurde, die Berechnung des zweiten Virialkoeffizienten $\mathfrak{B}$ streng durchgeführt, unter der Annahme, daß die Moleküle entweder einen starren elektrischen Dipol, oder starr elektrische Quadrupole tragen und sich überdies bezüglich ihrer Abstoßung wie harte Kugeln verhalten. Er kommt so auf Reihenentwicklungen von der Form:

$$\mathfrak{B} = RT\left(c_0 + \frac{c_2}{T^2} + \frac{c_3}{T^3} + \ldots\right).$$

In einer sehr dankenswerten Zusammenfassung hat er die Einzelresultate seiner Rech-

1) P. Langevin, Le Radium 7, 233 u. 249, 1910.

nungen neulich zusammengestellt[1]). Charakteristisch für diese Entwicklungen ist die Tatsache, daß das Reihenglied mit der ersten Potenz $1/T$ durchweg fehlt. Das ist eine Folge der bei Keesom vorausgesetzten Starrheit der elektrischen Anordnung ins Molekül und würde im Gegensatz zu der van der Waalsschen Gleichung und der daraus folgenden Form für $\mathfrak{B}$ [vgl. (2')] bedeuten, daß in der Grenze für hohe Temperaturen die gegenseitige Anziehung der Moleküle verschwindet. Wie ich in der oben zitierten Arbeit zu zeigen versuchte, ist eine universelle bei allen Temperaturen vorhandene Anziehung nur dann verständlich, wenn man im Sinne der optischen Erfahrung die Starrheit der Anordnung aufgibt und auf die „Polarisierbarkeit" der Moleküle achtet.

Keesom erkennt in der zitierten Arbeit diesen Standpunkt als berechtigt an und versucht nun daraufhin im Sinne meiner Anregung die Reihenentwicklung für $\mathfrak{B}$ durch Berücksichtigung der „Polarisationskräfte" zu verbessern. Tatsächlich tritt nunmehr das Glied mit der ersten Potenz von $1/T$ hinzu, und zwar wie es, die Richtigkeit der Rechnung vorausgesetzt, sein muß mit genau demjenigen Koeffizienten, wie er aus dem von mir angegebenen Wert von a in Zusammenhang mit (2') folgt.

Durch Vergleich dieser verbesserten Entwicklung mit den erfahrungsmäßigen Werten für Wasserstoff kommt Keesom nun aber zum Schluß, daß im vorliegenden Temperaturgebiet der Einfluß der Polarisationskräfte zwar vorhanden ist, aber praktisch neben den früher von ihm schon in Rechnung gezogenen, bei hohen Temperaturen verschwindenden Kräften nicht stark ins Gewicht fällt. Dem entspricht es, daß er für das mittlere elektrische Trägheitsmoment andere und zwar kleinere Werte als ich sie angab für besser hält (z. B. für O_2 der Wert $3{,}55 \cdot 10^{-26}$ an Stelle von $11{,}2 \cdot 10^{-26}$). Wenn ich nun auch, wie schon hervorgehoben, meine Zahlen ebensowenig als genau richtig ansehen kann, wie die van der Waalssche Gleichung selbst, so sehe ich mich doch gezwungen, auch die neuen Keesomschen Zahlen anzuzweifeln und zwar sie wenigstens für O_2 und N_2 als zu niedrig gegriffen anzusehen. Die ganze Meinungsverschiedenheit zwischen Keesom und mir bezieht sich demnach für die vom ersteren zum Vergleich herangezogenen Gase lediglich auf die Zahlenangaben, in prinzipieller Hinsicht teilen wir denselben Standpunkt. Für einatomige Gase verliert die Orientierungstheorie überhaupt ihre Bedeutung (vgl. S. 305 unter **5.**)

1) W. H. Keesom, diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.

4. Der Grund, warum ich höhere Werte des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ für wahrscheinlicher halte ist der folgende. Vom rein experimentellen Gesichtspunkte aus, nur für die Hauptzüge geleitet durch theoretische Anhaltspunkte, hat Kamerlingh-Onnes eine mittlere empirische reduzierte Zustandsgleichung aufgestellt unter Zugrundelegung von Beobachtungsresultaten für Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Äthyläther und Isopentan. Dieselbe ist praktisch der van der Waalsschen Gleichung weit überlegen, er schreibt diese Zustandsgleichung für die reduzierten Größen p/p_k, $\mathfrak{v}/\mathfrak{v}_k$, T/T_k in der (1) entsprechenden Form:

$$\frac{p}{p_k}\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_k} = A + \frac{B}{\mathfrak{v}/\mathfrak{v}_k} + \frac{\Gamma}{(\mathfrak{v}/\mathfrak{v}_k)^2} + \cdots \qquad (3)$$

Die „reduzierten Virialkoeffizienten" selbst werden wieder dargestellt in der Form:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\frac{T}{T_k}, \\ B &= K^2\frac{T}{T_k}\left\{\beta_0 + \beta_1\frac{T_k}{T} + \beta_2\left(\frac{T_k}{T}\right)^2 + \cdots\right\}, \\ \Gamma &= K^3\frac{T}{T_k}\left\{\gamma_0 + \gamma_1\frac{T_k}{T} + \gamma_2\left(\frac{T_k}{T}\right)^2 + \cdots\right\}, \\ &- - - - - - - - - - - - \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

mit

$$K = \frac{RT_k}{p_k\mathfrak{v}_k}, \qquad (3'')$$

während die Entwicklungskoeffizienten $\beta_0, \beta_1 \ldots$; $\gamma_0, \gamma_1 \ldots$, nunmehr reine Zahlen sind. Von diesen werden $5 \times 5 = 25$ Stück aus dem Beobachtungsmaterial ausgerechnet und z. B. angegeben in dem Artikel H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom (Enz. d. mathemat. Wiss. **5**, 10, 730). Uns interessieren hier nur β_0 und β_1, für welche Kamerlingh-Onnes die Werte findet:

$$\beta_0 = 0{,}117796, \quad \beta_1 = -0{,}228038. \qquad (4)$$

Auch die spezielle van der Waalssche Gleichung kann natürlich auf die obige reduzierte Form gebracht werden. Bezeichnet man die so erhältlichen Virialkoeffizienten mit A_w, $B_w, \ldots$ so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} A_w &= K\frac{T}{T_k}, \\ B_w &= K^2\frac{T}{T_k}\left[\frac{p_k}{RT_k}b - \frac{p_k}{R^2T_k^2}a\frac{T_k}{T}\right] = \\ &= K^2\frac{T}{T_k}\left[\frac{1}{8} - \frac{27}{64}\frac{T_k}{T}\right], \\ \Gamma_w &= K^3\frac{T}{T_k}\left(\frac{p_k}{RT_k}\right)^2 b^2 = K^3\frac{T}{T_k}\frac{1}{64}. \\ &- - - - - - - - - - - - \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Es ist im Zusammenhange mit den Überlegungen über die Polarisationskräfte von be-

sonderem Interesse, daß die mittlere empirische reduzierte Zustandsgleichung im zweiten Virialkoeffizienten B ein Glied mit der ersten Potenz von $1/T$ und dem negativen Zeichen (β_1 negativ!) enthält. Damit ist wohl streng empirisch die Existenz der Polarisationskräfte nachgewiesen.

Ein Vergleich von (5) mit (3') und (4) zeigt unmittelbar, daß die mittlere reduzierte Zustandsgleichung etwas andere Werte für b und a verlangt, als die van der Waalssche, und zwar bekommt man den neuen Wert von b, indem man den van der Waalsschen mit:

$$8\beta_0 = 8 \cdot 0{,}117796 = 0{,}942$$

und den neuen Wert von a, indem man den van der Waalsschen mit:

$$-\frac{64}{27}\beta_1 = \frac{64}{27}\,0{,}228038 = 0{,}540$$

multipliziert.

Nun wurde früher das mittlere elektrische Trägheitsmoment berechnet nach der Formel ((21), l. c. S. 182):

$$\tau^2 = \frac{10}{9}\frac{1}{NP_0}\,a d^5,$$

welche jetzt noch ebenso Gültigkeit hat. Legt man nicht mehr wie früher die van der Waalssche, sondern die praktisch ausgezeichnete mittlere reduzierte Zustandsgleichung zugrunde, so bedeutet dies (da der Moleküldurchmesser d tatsächlich aus b berechnet wurde), daß die neuen Werte von τ aus den früher angegebenen hervorgehen durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$0{,}540^{1/2}\,0{,}942^{5/6} = 0{,}699.$$

Die Anpassung der Theorie an die empirische Gleichung von Kamerlingh-Onnes bedingt also eine Verkleinerung des elektrischen Trägheitsmomentes um 30 Proz. Die folgende Tabelle enthält für die drei Gase (H_2, O_2, N_2) die Werte von τ in der zweiten Spalte auf Grund der van der Waalsschen Konstanten, in der dritten nach Keesom und in der vierten auf Grund der auf Polarisation zurückzuführenden Anziehungskonstante der empirischen reduzierten Zustandsgleichung.

Werte von $\tau \cdot 10^{26}$.

H_2	3,20	2,03	2,14
O_2	11,2	3,55	7,84
N_2	13,3	3,86	9,30

Nur für den von Keesom besonders eingehend untersuchten Wasserstoff ist mit dem von ihm angegebenen Wert eine genügende Übereinstimmung vorhanden, die elektrischen Trägheitsmomente von O_2 und N_2 finden wir erheblich größer.

Zusammenfassend liefert die Verknüpfung meiner Theorie mit der empirischen reduzierten Zustandsgleichung zur Berechnung des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ die einfache Beziehung:

$$\tau^2 = 0{,}00209\,\frac{RT_k}{NP_0}\left(\frac{RT_k}{p_k}\right)^{8/3}. \tag{6}$$

($R = 8{,}31 \cdot 10^7$ = Gaskonstante, $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ = = Loschmidtsche Zahl, Γ_k = kritische Temperatur, p_k = kritischen Druck, P_0 = Molekularrefraktion). Die Zahlen der letzten Spalte obenstehender Tabelle können auch als berechnet mittels dieser Beziehung angesehen werden.

5. Es kann schließlich verwunderlich erscheinen, daß ich geneigt bin, dem durch (6) ausgedrückten Zusammenhang mit der empirischen reduzierten Zustandsgleichung den Vorzug zu geben. Dazu führt mich nicht nur die Einfachheit jener Beziehung, sondern vor allem Bedenken gegen die genaue Gültigkeit der Keesomschen Reihenentwicklung, welche nicht einmal ihre Vervollständigung durch die Polarisationskräfte beseitigen könnte. Drei Hauptpunkte sind es, auf welche ich aufmerksam machen möchte.

1. Nur für größere Abstände ist es möglich, das elektrische Feld eines Moleküls im Mittel auf einen Quadrupol zurückzuführen. Für Abstände, welche nicht mehr groß sind gegenüber den Entfernungen der Einzelladungen im Molekül voneinander (und bis auf solche Entfernungen findet bei jedem Zusammenstoß Annäherung statt), ist es streng genommen unumgänglich, auch auf die höheren Glieder der Potentialentwicklung zu achten.

2. Die Keesomsche Reihenentwicklung wird erhalten unter Anwendung der Prinzipien der statistischen Mechanik. Sie enthält also z. B. implizite die Behauptung, daß die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) von Wasserstoff bei allen Temperaturen den Wert $\frac{5}{2}R$ hat. Dagegen zeigen bekanntlich die Euckenschen Messungen[1]), daß wenig unter 0° C schon die Quantenabweichungen von diesem Äquipartitionsgesetz sich bemerkbar machen. Noch prägnanter tritt dieser Umstand in Erscheinung bei den einatomigen Gasen. Dort ist (wie die Quantentheorie lehrt, infolge des kleinen Trägheitsmomentes) überhaupt keine mit der Temperatur veränderliche Rotationsenergie vorhanden. Dementsprechend verliert die Keesomsche Reihenentwicklung ganz ihre Bedeutung und die einzigen Kräfte, welche die auch hier ausgesprochen vorhandene Molekularattraktion erklären können, sind die Polarisationskräfte.

3. Die von Keesom berechnete Reihenentwicklung behandelt die Moleküle in bezug

1) A. Eucken, Berl. Ber. 141, 1912.

auf die Abstoßung als harte Kugeln. Es ist durchaus unwahrscheinlich, daß dieser Ansatz der Wirklichkeit entspricht. Gewiß ist nichts dagegen einzuwenden, diesen Ansatz zu benutzen, wenn es sich um eine erste Näherung handelt. Wenn aber die Genauigkeit so weit getrieben wird, daß wie es Keesom tut, in der Entwicklung noch das 14. Glied beibehalten wird, so ist meines Erachtens keine Gewähr mehr vorhanden für die Zuverlässigkeit eines so schematisierenden Ansatzes.

Überlegt man die Bedeutung dieser drei Bemerkungen mit Rücksicht auf ihre theoretische Verwertung, so sieht man sofort, daß die Bemerkung 3 am wesentlichsten ist. Es ist doch klar, daß die Kritik, welche in den ersten beiden enthalten ist, durch einige Arbeit gegenstandslos gemacht werden kann. Weder der genaueren Beschreibung des um ein Molekül vorhandenen elektrischen Feldes, noch der Übergang von der klassischen Statistik zur Quantentheorie bietet heutzutage prinzipielle Schwierigkeiten. Sofern man also zugibt, daß die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen rein elektrischen Ursprunges sind (und ich sehe keinen Grund mehr, daran zu zweifeln), wird man in der nächsten Zukunft die notwendige Vervollständigung der Theorie erwarten können. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse mit bezug auf die dritte Bemerkung. Offenbar handelt es sich hier um die Frage, ob es möglich ist, auch die abstoßenden Kräfte zwischen den Molekülen zu verstehen, und zwar als Folgeerscheinung des angenommenen elektrischen Aufbaus. Diese Frage scheint mir von prinzipieller Bedeutung, um so mehr, als sie nicht nur im Gebiete der Zustandsgleichung, sondern auch bei den festen Körpern eine wesentliche Rolle spielt. So wird z. B. die Unstabilität der Atomanordnung in den schönen Untersuchungen von Born über die Kräfte im Kristallgefüge nicht mehr bestehen, sobald es gelingt, die theoretische Notwendigkeit abstoßender Kräfte von besonderer in der statistischen Potentialtheorie nicht vorhergesehener Art darzutun. Zum Schluß möchte ich zeigen, wie dieses geschehen kann, ohne aber an dieser Stelle die Rechnungen weiter zu führen, als es für das Verständnis der wesentlichen Punkte notwendig ist.

6. Alle Erfahrungen deuten darauf hin, daß zwischen Molekülen eine universelle Abstoßung besteht. Aber ein Molekül ist immerhin ein kompliziertes Gebilde; auf der Suche nach einer Erklärung für die universelle Abstoßung ist also die erste zu beantwortende Frage die, ob dieser komplizierte Aufbau aus vielen Ladungen beim Zustandekommen jener Kraft eine prinzipielle Rolle spielt. Nun haben aber die früheren Versuche von Lenard[1]) über den Durchgang von Kathodenstrahlen durch Materie und die neueren Versuche von J. Franck[2]) und seinen Mitarbeitern unbedingt gezeigt, daß auch eine Einzelladung, ein Elektron, von einem Molekül im allgemeinen in genügender Nähe abgestoßen wird. Bekanntlich konnten sogar die Bewegungen langsamer Elektronen in Helium gedeutet werden unter der Annahme, daß die Heliumatome sich beim Zusammenstoß mit einem Elektron verhalten wie harte Kugeln. Wir werden dementsprechend unsere Frage vereinfachen können und nach einer abstoßenden Kraft zwischen einem freien Elektron und einem Molekül zu suchen haben.

Betrachten wir nun ein Molekül als ein aus Ladungen zusammengebautes, im ganzen aber ungeladenes Gebilde, so scheint die experimentell geforderte Abstoßung zu fehlen. Legt man nämlich um ein solches Gebilde eine Kugel, etwa vom Radius r und bestimmt das Oberflächenintegral des Potentials $\int \varphi d\sigma$ auf dieser Kugel, so findet man leicht den Wert:

$$\int \varphi d\sigma = 4\pi r \sum e,$$

wobei $\sum e$ die Gesamtsumme aller umschlossenen Ladungen bedeutet. Ist also das Molekül im ganzen ungeladen, so ist das Oberflächenintegral Null. Neben Stellen, in denen das Potential negativ ist, wo demnach Arbeit zu leisten ist, um ein (negatives) Elektron hinzubringen, gibt es immer auch Bereiche, wo das Potential positiv ist. Wird das Elektron hierhin gebracht, so gewinnt man Arbeit, so daß ein Molekül oder Atom, sofern diese Überlegungen reichen, sich ganz anders zu verhalten hätte, als durch das Experiment nahegelegt wird.

Nun ist zugegeben, daß man bei allen bisherigen Überlegungen auskommen konnte, mit der obigen Annahme: das Molekül bestehe aus einer Ansammlung von ruhenden Ladungen. In Wirklichkeit sind aber die Ladungen in Bewegung und erzeugen um das Molekül ein nach Richtung und Größe wechselndes Feld. Die Annahme eines Systems ruhender Ladungen läuft darauf hinaus, daß mit Rücksicht auf die große Geschwindigkeit, mit der das Feld wechselt, mit dem zeitlichen Mittelwert der Feldstärken gerechnet wird. Es entsteht somit die Frage, ob nicht infolge dieser zeitlichen Veränderlichkeit trotz der kurzen Zeitdauer einer Periode doch Zusatzkräfte auftreten, welche für die beobachtete Abstoßung verantwortlich sind. Von diesem Standpunkt aus ist es nun zunächst von

1) Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg, 1918.

2) J. Franck und G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 409 und 430, 1916; **20**, 132, 1919 (Zusammenfassende Bearbeitung).

Interesse, die momentanen Werte der Feldstärke in der Umgebung eines Moleküls mit ihren zeitlichen Mittelwerten zu vergleichen. Dabei zeigt sich dann sofort, daß jene Momentanwerte im allgemeinen wesentlich größer sind als die Mittelwerte.

Sei z. B. in Fig. 2 ein Wasserstoffatom angedeutet, bei dem ein Elektron von der Ladung

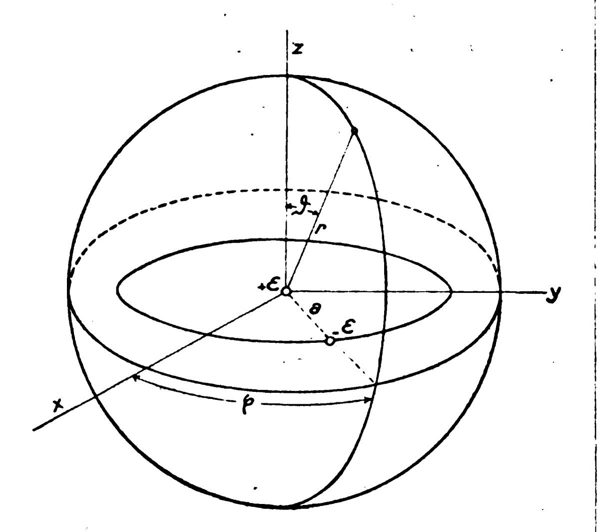


Fig. 2.

$-\varepsilon$ sich auf einen Kreis mit dem Radius a und der Winkelgeschwindigkeit ω um einen Kern von der Ladung $+\varepsilon$ in der ersten Quantenbahn bewegt und sei weiter um den Kern als Mittelpunkt eine Kugel vom Radius r gelegt, auf welcher die Lage eines Aufpunktes durch die Winkel ϑ und φ gegeben wird. In erster Näherung verhält sich dann ein solches Atom wie ein wechselnder Dipol und erzeugt ein Feld aus dem Potential:

$$\Phi_1 = -\frac{\varepsilon a}{r^2} \sin\vartheta \cos(\varphi - \omega t)$$

ableitbar. Erst in zweiter Näherung kommt ein Potential, das zum Teil zeitlich konstant ist. Dieser Teil hat den Wert:

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon a^2}{r^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin^2\vartheta\right)$$

und entspricht dem Felde des von einem gleichmäßig mit negativer Elektrizität belegten Ringe umgebenen Kernes.

Aus Φ_1 berechnet sich ein mittleres Quadrat der Feldstärke $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$ zu:

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{\varepsilon^2}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^6\left(\frac{3}{2}\sin^2\vartheta + 1\right),$$

aus Φ_2 entsprechend:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \frac{\varepsilon^2}{a^4}\left(\frac{a}{r}\right)^8 \frac{9}{4}\left(1 - 2\sin^2\vartheta + \frac{5}{4}\sin^4\vartheta\right).$$

In einem Abstand $r = 10a = 5{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt sich hieraus für den Maximalwert von $\sqrt{\overline{\mathfrak{E}_1^2}}$ der Betrag $8{,}0 \cdot 10^6$ Volt/cm und für den Maximalwert von $\sqrt{\overline{\mathfrak{E}_2^2}}$ der Betrag $7{,}6 \cdot 10^5$ Volt/cm. Die Amplitude der Feldstärkeschwankungen ist in diesem Beispiele also etwa 10 mal so groß wie der zeitliche Mittelwert, im übrigen sind die außerordentlich großen Absolutwerte von Interesse. Nachdem somit festgestellt ist, daß der zeitlich veränderliche Teil der Feldstärke überwiegt und sogar um so mehr, je größer der Abstand vom Molekül ist. Fragen wir jetzt nach der mittleren Kraft, welche ein freies Elektron in einem zeitlich (und räumlich) veränderlichen Felde erfährt.

Die Zerlegung des Feldes in einen zeitlich konstanten und einen zeitlich variablen Teil sei so vorgenommen, daß der Mittelwert der zu letzterem gehörigen Feldstärke $\mathfrak{E}$ verschwindet. In diesem variablen Feld wird dann ein Elektron von der Masse μ und der Ladung $-\varepsilon$, Verschiebungen σ ausführen, welche durch die Gleichung:

$$\mu \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\varepsilon\mathfrak{E} \qquad (7)$$

bestimmt werden. So lange σ als genügend klein angesehen werden kann, ergibt sich die auf das Elektron wirkende momentane Kraft $\mathfrak{K}$, indem das Feld in der Umgebung der Ruhestelle nach Taylor entwickelt wird. So erhält man[1]):

$$\mathfrak{K} = -\varepsilon\mathfrak{E} - \varepsilon(\sigma\nabla)\mathfrak{E}.$$

Es ist aber allgemein für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}].$$

Setzt man jetzt $\mathfrak{A} = \sigma$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, und bedenkt einerseits, daß $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$ ist, so daß nach (7) auch $\mathrm{rot}\,\sigma = 0$, so wird:

$$\nabla(\sigma\mathfrak{E}) = (\sigma\nabla)\mathfrak{E} + (\mathfrak{E}\nabla)\sigma.$$

Bildet man nun zeitliche Mittelwerte, so ist wegen (7):

$$\overline{(\sigma\nabla)\mathfrak{E}} = -\frac{\mu}{\varepsilon}\overline{(\sigma\nabla)\frac{d^2\sigma}{dt^2}} = -\frac{\mu}{\varepsilon}\overline{\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}\nabla\right)\sigma} = \overline{(\mathfrak{E}\nabla)\sigma},$$

so daß schließlich:

$$\overline{(\sigma\nabla)\mathfrak{E}} = \tfrac{1}{2}\nabla\,\overline{(\sigma\mathfrak{E})}.$$

Für den zeitlichen Mittelwert der auf das Elektron wirkenden Kraft folgt nunmehr, da $\overline{\mathfrak{E}} = 0$:

1) ∇ ist der bekannte symbolische Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

$$\overline{\mathfrak{K}} = -\nabla \frac{\varepsilon}{2} (\overline{\sigma \mathfrak{E}}) \cdot \tag{8}$$

Die mittlere Kraft folgt also als Grad. eines Potentials, d. h. das Elektron verhält sich so, als ob ihm in bezug auf das felderzeugende Molekül eine potentielle Energie U vom Betrage:

$$U = \frac{\varepsilon}{2} (\overline{\sigma \mathfrak{E}}) \tag{9}$$

innewohnt. Diese potentielle Energie hat indessen eine einfache Bedeutung. Multipliziert man nämlich beide Seiten der Bewegungsgleichung skalar mit σ und bildet dann den zeitlichen Mittelwert (durch Integration nach t und Division mit dem Zeitintervall Θ), so kommt nach partieller Integration:

$$\varepsilon (\overline{\sigma \mathfrak{E}}) = -\mu \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta dt \left(\sigma \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \right) =$$

$$= -\mu \frac{1}{\Theta} \left[\left(\sigma \frac{d\sigma}{dt} \right) \right]_0^\Theta + \mu \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta \left(\frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\sigma}{dt} \right) dt.$$

Da aber das erste Glied bei genügend langer Zeit Θ verschwindet, heißt dieses:

$$\varepsilon (\overline{\sigma \mathfrak{E}}) = 2 \overline{T},$$

wenn mit $\overline{T}$ die mittlere kinetische Energie des Elektrons bezeichnet wird. So entsteht schließlich der Satz:

Das pulsierende Elektron verhält sich so, als ob es in bezug auf das Molekül eine potentielle Energie besitzt gleich der kinetischen Energie seiner Schwankungen:

$$U = \overline{T}. \tag{9'}$$

Da letztere Energie notwendig positiv ist, so ist auch die scheinbar potentielle Energie positiv und da das Wechselfeld um so stärker wird, je näher man an das Molekül herankommt, so ist das nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß zwischen einem Elektron und einem Molekül eine universelle Abstoßung besteht, welche um so größer wird, je näher Elektron und Molekül aneinander rücken[1]).

7. Es kommt mir an dieser Stelle nur darauf an, die Bedeutung dieser abstoßenden Kraft prinzipiell hervorzuheben. Deshalb möge es genügen, etwa für den Fall des Wasserstoffatoms noch kurz darauf hinzuweisen, daß die Größenordnung jener Kraft genügt, um eine Erklärung für die gaskinetisch beobachteten Moleküldurchmesser zu liefern. Läßt man etwa das Elektron sich dem H-Atom in Richtung der Z-Achse (vgl. Fig. 2) nähern, so berechnet man leicht für die durch das Wechselfeld hervorgerufene mittlere kinetische Energie der Schwankungen den Wert:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^6,$$

wenn r der Abstand Elektron—Kern bedeutet. Das Elektron besitzt also infolge seiner Schwankungen in bezug auf das Atom eine positive potentielle Energie vom Betrage:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^6 \cdot \tag{10}$$

Andererseits wird es vom Kern statisch stärker angezogen, als vom weiter entfernten rotierenden Elektron und diesen Kräften entspricht in erster Näherung eine negative potentielle Energie U' vom Betrage:

$$U' = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^3. \tag{10'}$$

Würde es gestattet sein, mit diesen Energiebeträgen auch noch für kleine Abstände zu rechnen, so würde:

$$U + U' = 0$$

werden für $r = a = 0{,}50 \cdot 10^{-8}$ cm, und dieser Wert würde den „Halbmesser" des H-Atoms darstellen, da die kinetische Energie der Wärmebewegung verschwindend klein ist gegenüber der Energie ε^2/a.

Offenbar wird es vom Bau des Moleküls abhängen, ob in jeder Annäherungsvorrichtung die positive über die negative potentielle Energie überwiegt oder ob es Annäherungsrichtungen gibt, in denen die negative potentielle Energie dauernd die Überhand hat. Je nachdem wird man experimentell sprechen von Atomen (Molekülen) ohne Elektronenaffinität, welche sich beim Stoß ähnlich wie harte Kugeln verhalten; oder man wird dem Atom (Molekül) eine Elektronenaffinität zuschreiben, welche um so größer ist, je größer der (räumliche) Winkelbereich, in dem die negative potentielle Energie überwiegt. Schließlich sei nur angedeutet, daß sich die Überlegungen auch auf die Kräfte zwischen ganzen Atomen und Molekülen übertragen lassen, womit zugleich die Möglichkeit entsteht, die Potentialkräfte im Bornschen Gitter durch die hier hervorgehobenen zu vervollständigen und damit auf dem angedeuteten dynamischen Weg zu verstehen, wie der Kristallbau mit rein elektrischen Kräften trotzdem stabil sein kann.

Zürich, 28. März 1921.

(Eingegangen 28. März 1921.)

1) Eine anschauliche Deutung für die abstoßenden Kräfte ergibt z. B. die Betrachtung des folgenden einfachen Spezialfalles. Ein Zentrum erzeugt in seiner Umgebung ein radial gerichtetes, zeitlich periodisches Feld. In diesem Felde wird ein Elektron radiale Schwingungen ausführen derart, daß es (nach dem Grundgesetz der Mechanik) von seiner Mittellage aus gesehen dem Kraftzentrum genähert ist, während der zeitlichen Periode der abstoßenden Kräfte und vom Kraftzentrum weiter entfernt ist, während der Anziehungsperiode. Nimmt nun die Amplitude des Wechselfeldes zu mit abnehmendem Abstande vom Zentrum, so überwiegt also im Mittel der Zeit die Abstoßung mit Rücksicht auf jene räumliche Variabilität.

Über den Einfluß von Sonne und Mond auf das Zentrifugalfeld der Erde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von A. Kopff.

Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist das aus der klassischen Mechanik bekannte Zentrifugalfeld der Erde durch die Gesamtheit der angenähert gleichförmig verteilten Materie des Weltalls hervorgerufen[1]), also, wie wir annehmen müssen, durch die Gesamtheit aller Sterne (Nebelmassen, Sternsysteme). Einzelne Massen in der Nähe der Erde, vor allem Sonne und Mond, bedingen Zusatzglieder. Diese sind zeitlich veränderlich, aber, wie sich zeigen wird, so klein, daß sie gegenwärtig nicht nachgewiesen werden können.

Zur Herleitung dieser Zusatzglieder bedienen wir uns der ursprünglichen Einsteinschen Gravitationsgleichungen („erster Art"). In einem ruhenden Koordinatensystem setzen wir die durch eine Masse M in der Entfernung a vom Aufpunkt P (x_1, x_2, x_3) erzeugten Gravitationspotentiale in der von A. Einstein gegebenen Form[2]) an und erhalten, wenn die Zeitvariable reell gewählt wird, hierfür:

$$\begin{vmatrix} -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Die auf das mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um die x_3-Achse rotierende, gestrichene Koordinatensystem sich beziehenden Gravitationspotentiale lauten, wenn wir uns auf die erste Näherung der Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie beschränken:

$$\left.\begin{aligned} g_{14}' &= +x_2'\omega'\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\right), \\ g_{24}' &= -x_1'\omega'\left(1+\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\right), \\ g_{44}' &= +1-(x_1'^2+x_2'^2)\,\omega'^2-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}- \\ &\quad -(x_1'^2+x_2'^2)\,\omega'^2\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei hier in hinreichender Näherung[3]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} = \frac{1}{R}\Big\{1+\frac{1}{R}\Big(x_1'\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 + \\ + x_2'\sin\vartheta_0\sin\varphi_0 + x_3'\cos\vartheta_0\Big)\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

gesetzt werden kann. R, ϑ_0 (Poldistanz) und φ_0 sind die Polarkoordinaten der Masse M im gestrichenen System. Die übrigen g_{ik}' kommen nicht in Frage.

Wir beschränken jetzt unsere Betrachtung auf die Zentrifugalkräfte, also auf g_{44}', allein. Das Glied $[+1-(x_1'^2+x_2'^2)\,\omega'^2]$ führt auf die gewöhnlichen Zentrifugalkräfte[1]); $-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}$ auf die durch die Masse M verursachte Newtonsche Gravitationsbeschleunigung. Die durch die Masse M bedingten Zusatzglieder der Zentrifugalkraft sind durch das letzte Glied von g_{44}' hervorgerufen. Man erhält für die drei Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\,\omega'^2 x_1' + \\ &\quad + \frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\,\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, \\ \frac{\partial^2 x_2'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{a}\,\omega'^2 x_2' + \\ &\quad + \frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\,\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\sin\vartheta_0\sin\varphi_0, \\ \frac{\partial^2 x_3'}{\partial t^2} &= +\frac{\varkappa}{8\pi}\frac{M}{R^2}\,\omega'^2(x_1'^2+x_2'^2)\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Am größten sind jeweils die ersten Glieder der beiden ersten Beschleunigungskomponenten. Befinden wir uns im Äquator, und legen wir die x_1'-Achse in den Radiusvektor nach dem Beobachtungsort, so erhalten wir also für die Schwerebeschleunigung genähert das Zusatzglied:

$$\Delta g = -\frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2} = -\frac{2k}{c^2}\frac{M}{a}\,\omega'^2 x_1', \quad (5)$$

wobei k die Newtonsche Gravitationskonstante bedeutet. Für die Sonne ergibt sich bei einem

1) Vgl. A. Kopff, Bemerkung zur Rotationsbewegung im Gravitationsfeld der Sterne. II. Diese Zeitschr. **22**, 179, 1921.

2) Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berl. Sitzungsber. 1916, S. 692.

3) Vgl. H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Diese Zeitschr. **19**, 33, 1918

1) A. Kopff, a. a. O., Gleichung (3).

mittleren Wert von *a* $\Delta g = -7 \cdot 10^{-9}$ cm/sec², für den Mond $\Delta g = -1 \cdot 10^{-7}$ cm/sec². Diese Beträge befinden sich weit unter der durch Pendelbeobachtungen erreichbaren Genauigkeit. Die übrigen Glieder sind noch erheblich kleiner; vor allem ist die zeitliche Änderung ganz unbedeutend. Auch die räumlichen Differentialquotienten von Δg liegen weit unterhalb der Grenze der mit der Drehwage meßbaren Größen.

Heidelberg-Königstuhl, März 1921.

(Eingegangen 10. März 1921.)

Bemerkung zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. II.

Von K. Wessely.

Dauer einer Bewegung.

Ist die Ortszeit längs der ξ-Achse bestimmt durch eine Beziehung:

$$\tau = \lambda (t + \mu \xi), \qquad \text{(I)}$$

so kann als Dauer einer Bewegung die Differenz der Ortszeiten am Beginn und Ende der Bewegung bezeichnet werden. Unter einer in Ortszeit gemessenen Geschwindigkeit ist dann

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi}{\lambda (dt + \mu d\xi)}$$

zu verstehen, woraus folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\lambda \frac{d\xi}{d\tau}}{1 - \lambda \mu \frac{d\xi}{d\tau}}. \qquad (1)$$

Bewegt sich die ξ-Achse längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = v$ und sollen für eine beliebige Geschwindigkeit V längs der x-Achse die relativen Geschwindigkeiteu $V - v$ und $-(V + v)$ numerisch gleiche Werte für $\frac{d\xi}{d\tau}$ ergeben, so folgt, — wie früher —[1])

$$\mu = -\frac{v}{V^2 - v^2};$$

$\frac{d\xi}{d\tau}$ wird dann gleich $\pm \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{V^2 - v^2}{V}$; oder wenn $\lambda = \frac{\sqrt{V^2 - v^2}}{V}$ gewählt wird:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \pm \lambda \cdot V.$$

Wird die Beziehung: $\xi = x - vt$ ersetzt durch

$$\xi' = \frac{1}{\lambda} \xi = \frac{1}{\lambda} (x - vt), \qquad \text{(II)}$$

so folgt:

$$\frac{d\xi'}{d\tau} = \pm V \text{ oder } \xi' = \pm V \cdot \tau.$$

Die beiden Substitutionen I und II nebst $y = \eta$, $z = \zeta$ werden daher die Gleichung einer mit konstanter Geschwindigkeit sich ausbreitenden Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2$$

in

$$\xi^3 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \cdot \tau^2$$

überführen, wo der Kürze halber wieder ξ statt ξ' geschrieben ist. Einem bestimmten Wert von t, dem für $y = 0$, $z = 0$ zwei numerisch gleiche Werte von x zugehören, sind aber zwei numerisch verschiedene Werte von ξ und daher auch von τ zugeordnet. Die geometrische Bedeutung der beiden Gleichungen an sich ist daher unbestimmt und verschieden je nach der Phasenverschiebung, welche für die Definition der Ortszeit in Betracht kommt. Konzentrische Kugelflächen werden durch die Gleichungen nur dann dargestellt, wenn diese Phasendifferenz gleich Null ist.

Bildet man aus (1) die Summe $v + \frac{d\xi}{dt}$, so ergibt sich unmittelbar (gleichgültig wie groß λ oder die Drehgeschwindigkeit der τ-Uhren ist), das Einsteinsche Additionstheorem:

$$v + \frac{d\xi}{dt} = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V}},$$

wenn unter w die mit $\frac{\lambda \cdot V^2}{V^2 - v^2}$ multiplizierte Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{d\tau}$ verstanden wird.

Für $v = V$ wird $v + \frac{d\xi}{dt} = V$ oder: es gibt keine „Über-Lichtgeschwindigkeit". Es gibt aber auch keine „Über-Schallgeschwindigkeit"; denn die Gleichungen müssen auch für $V = 333^m$ gelten. Werden die Geschwindigkeiten v und V gleich groß angenommen, so werden die Voraussetzungen der Rechnung inhaltslos; μ wird unendlich, der Ausdruck für $\frac{d\xi}{dt}$ wird Null und daher $v + \frac{d\xi}{dt}$ gleich V, ohne daß der Wert von V selbst einer Beschränkung unterliegen würde.

Für $V = \infty$ wird μ gleich Null, die Ortszeit geht über in die gemeinsame Zeit und die Gleichzeitigkeit im gewöhnlichen Sinne, die durch den steten Parallelismus der Uhrzeiger definiert

---

1) Diese Zeitschr. **21**, 549, 1920.

wäre, wird ein spezieller Fall der Gleichzeitigkeit im Einsteinschen Sinne.

Die Bewegung eines starren Körpers und das Dopplersche Prinzip.

Bei Einführung der Ortszeit durch eine Substitution $\tau = t + \beta x$ werden einem bestimmten Wert von t für verschiedene Punkte x verschiedene Werte von τ zugeordnet und umgekehrt.

Zwei Punkten x_1, x_2, die sich mit konstanter Geschwindigkeit α in einem konstanten Abstand R, gemäß:

$$x_1 = \alpha t$$
$$x_2 = \alpha t + R$$

bewegen, werden daher durch einen bestimmten Wert von τ zwei Punkte zugeordnet:

$$x_1' = \alpha(\tau - \beta x_1'),$$
$$x_2' = \alpha(\tau - \beta x_2') + R,$$

deren Abstand gleich ist:

$$x_2' - x_1' = \frac{R}{1 + \alpha\beta}.$$

Ebenso ändert sich auch die Maßzahl für die Dauer der Bewegung, da:

$$\tau = t + \beta x = (1 + \alpha\beta) \cdot t.$$

Diese Änderungen in der Maßzahl der Zeitdauer und in der Länge des bewegten Körpers beim Übergang von „gemeinsamer" Zeit zu Ortszeit, sind identisch mit der scheinbaren Änderung von Frequenz und Wellenlänge einer fortschreitenden Welle, wie sie das Dopplersche Prinzip fordert; denn der gleichförmigen Drehung eines Punktes im Kreise (einer Uhr) entspricht als Projektion eine harmonische Bewegung; und einer Reihe von Uhren, deren Zeiger um einen ihrem Abstande proportionalen Betrag βx verstellt sind, entspricht als Projektion der Uhrzeigerstellungen eine mit Phasenverschiebung schwingende Punktreihe, oder eine mit der Geschwindigkeit $\gamma = -\frac{1}{\beta}$ fortschreitende Welle. Führt man in den Faktor $1 + \alpha\beta$ diese Geschwindigkeit ein, so folgt: $1 + \alpha\beta = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$; d. h. die Zeitablesung an der mit der Geschwindigkeit γ fortschreitenden Welle ist für den mit der Geschwindigkeit α fortschreitenden Beobachter das $\frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$ fache der „t"-Zeit, wie es dem Dopplerschen Prinzip entspricht.

Ist die Ortszeit längs der bewegten ξ-Achse speziell durch die Gleichung (I) gegeben, oder mittels (II) als Funktion von x dargestellt durch

$$\tau = \lambda(t + \mu\xi) = \frac{1}{\lambda}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

so folgt, daß zwei Punkten x_1, x_2, die sich in dem starren Abstande R längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit V bewegen, nach Einführung der Ortszeit zwei Punkte x_1', x_2' zugeordnet sind, deren Abstand gleich ist:

$$\frac{R}{1 + \alpha\beta} = \frac{R}{1 - V \cdot \frac{v}{V^2}} = \frac{R \cdot V}{V - v}.$$

In derselben Weise wird einem durch Gleichung (II) mit $\lambda \cdot \xi$ bezeichneten konstanten Abstand $x - vt$ beim Übergang zur Ortszeit, ein Abstand:

$$\frac{\lambda\xi}{1 + \alpha\beta} = \frac{\lambda\xi \cdot V^2}{V^2 - v^2} = \frac{\xi}{\lambda}$$

zugeordnet, so daß einer auf der ξ-Achse ruhenden Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

ein längs der x-Achse fortschreitendes Ellipsoid mit den Halbachsen

$$\lambda R,\ R,\ R$$

entspricht.

Werden in die Gleichung einer mit der Geschwindigkeit V längs der x-Achse fortschreitenden Kugel

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

die beiden Substitutionen (I) und (II) eingeführt, so muß hiernach die Gleichung übergehen in die eines Ellipsoids mit den Halbachsen

$$\frac{V}{V - v} \cdot \lambda \cdot R,\ R,\ R.$$

Bedeutet

$$\sigma = M \sin 2n\pi\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

eine periodische „Verschiebung", so ist die in einer ebenen Welle von der Länge R und dem Querschnitt q enthaltene lebendige Kraft:

$$L = \int_0^R \frac{1}{2} q \cdot \varrho \cdot dx \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{q\varrho}{2} 4\pi^2 n^2 M^2 \cdot \frac{R}{2}$$

dem Quadrat der Frequenz und der ersten Potenz der Wellenlänge proportional. Da sich bei der Transformation die Frequenz verkehrt proportional zur Wellenlänge ändert, so folgt:

$$L' = L \cdot \frac{V \cdot \lambda}{V - v} \cdot \left(\frac{V - v}{V \cdot \lambda}\right)^2 = \sqrt{\frac{V - v}{V + v}},$$

und da bei ebenen fortschreitenden Wellen die potentielle Energie immer gleich der kinetischen ist, so folgt auch unmittelbar für den totalen Energieinhalt der beiden einander zugeordneten Wellen:

$$E' = E \cdot \sqrt{\frac{V - v}{V + v}}.$$

Diese von Einstein aus den Maxwell-

schen Gleichungen abgeleitete Beziehung ist eine mathematische Konsequenz des angewendeten Maßsystems, das dem Dopplerschen Prinzip angepaßt ist, und gilt für jeden Wert von V.

Ob das Dopplersche Prinzip in der üblichen Form: $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{V - v}{V}$ oder in der Einsteinschen Form: $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{V - v}{V \cdot \lambda}$ geschrieben wird, ist dem Inhalte nach gleich; denn die zweite Schreibweise bezieht sich auf die Messung mit einer Uhr, die „in Wirklichkeit" λ mal so schnell geht als die im ersten Fall vorausgesetzte.

Grundsätzlich verschieden von diesen Rechnungsweisen ist die Bestimmung der Abhängigkeit einer Masse von ihrer Geschwindigkeit.

Für die mit konstanter Geschwindigkeit v bewegte ξ-Achse ist nach (II)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2x}{dt^2}$$

und

$$d\tau = \lambda dt,$$

daher:

$$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{m}{\lambda^3}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Bildet man hieraus die „im ruhenden System gemessene" lebendige Kraft:

$$\int_0^v \frac{m}{\lambda^3} v\,dv = mV^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} - 1\right],$$

so liegt der Rechnung die Annahme zugrunde, daß eine mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegte — daher bezüglich der ξ-Achse ruhende — Masse m durch eine Kraft X nach dem Gesetze $m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = X$ beschleunigt wird, wobei ξ und τ mit x und t durch die Gleichungen (I) und (II) zusammenhängen. Das ist eine physikalische Hypothese, die durch die Erfahrung zu überprüfen ist, und die, wenn sie für beliebige Geschwindigkeiten v gilt, natürlich nicht auch für beliebige Werte von V gelten kann.

Wien, 16. März 1921.

(Eingegangen 21. März 1921.)

Ein einfaches Ausgleichungsverfahren für parabolische Funktionen zweiten und dritten Grades.

Von H. Schwerdt.

Während die Ausgleichung linearer Funktionen stets mit hinreichender Genauigkeit auf graphischem Wege vorgenommen werden kann, liegt bei parabolischen Funktionen schon zweiten und erst recht dritten Grades häufig das Bedürfnis nach einer numerischen Ausgleichung vor. Das graphische Verfahren gestattet bei Funktionen zweiten Grades im allgemeinen dann eine bequeme Anwendung, wenn die Funktion nur zwei wesentliche Konstanten enthält oder wenn ein Beobachtungswertepaar möglichst genau festliegt, etwa der 0-Punkt. Bei Funktionen dritten Grades müssen entsprechend zwei Daten festliegen, etwa ein Beobachtungspunkt und die zugehörige Kurventangente oder dergleichen. Es lassen sich dann die in einer früheren Arbeit besprochenen Methoden der geometrischen Abbildung (Anamorphose) anwenden[1]).

Ist die Anzahl der wesentlichen Konstanten aber größer als zwei, so läßt sich dieses Verfahren nicht mehr leicht anwenden. Man hat deshalb bei Funktionen mit mehr als zwei wesentlichen Parametern häufig auf die Ausgleichung nach der kleinsten Quadratsumme verzichtet und hat die Funktionen den empirischen Wertereihen nach anderen Gesichtspunkten angeglichen[2]).

Führt man die numerische Ausgleichung der Funktion 3. Grades allgemein durch, so ist diese Arbeit mit einem erheblichen Aufwand an Hilfsrechnungen verknüpft. Die folgende Arbeit zeigt, daß durch besondere Wahl des Bezugssystemes und durch geeignete Summenbildungen die Ausgleichung nach der kleinsten Quadratsumme ohne rechnerische Schwierigkeiten ausführbar ist. Es ist möglich, in den Funktionen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \tag{1}$$

und

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \tag{2}$$

mit Hilfe einer im folgenden hergeleiteten und wiedergegebenen Zahlentafel die gesuchten Koeffizienten α bis δ der Beobachtungsreihe

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ \ldots\ldots\ x_n, y_n \tag{3}$$

in wenigen Rechenschritten anzugleichen, so daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Bei vielen Beobachtungsreihen ist es möglich, die Auswahl der Beobachtungen äquidistant in x vorzunehmen. Unter der Annahme, daß die Auswahl in dieser Weise getroffen wird, werde das konstante Intervall der x mit i bezeichnet:

1) Stanton, Transact. Inst. Naval. Archit. 1912; Gümbel, Jahresber. d. Schiffsbautechn. Ges. **14**, 491, 1913; Schwerdt, diese Zeitschr. **18**, 45—53, 1917; **20**, 362—368, 1919.

2) Pirani, Zeitschr. f. Vermessungswesen **46**, 137 bis 146, 1917; Tobin, Phil. Mag. (6) **40**, 513—515, 1920; Heidke, Meteorolog. Zeitschr. **37**, 36—37, 1920; Schwerdt, Zeitschr. f. Vermessungswesen **49**, 593—634, 1920.

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = \\ = x_n - x_{n-1} = i. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Das Koordinatenkreuz xy kann nun jedesmal derart gelegt werden, daß die y-Achse durch den Schwerpunkt der Beobachtungspunkte geht, d. h. man legt die y-Achse so, daß die x-Werte zu beiden Seiten gleich verteilt sind. Es entspricht bei der oben getroffenen Auswahl der Beobachtungen jedem x ein gleich großer negativer Wert. Aus Gründen der Symmetrie gelten dann für die folgenden Summen die Identitäten:

$$\sum x \equiv 0; \; \sum x^3 \equiv 0; \; \sum x^5 \equiv 0; \text{ usw.} \quad (5)$$

Es soll die Ausgleichung zuerst für die Funktion dritten Grades durchgeführt werden.

In bezug auf das Koordinatensystem xy laute die Gleichung (2), die die Wertepaare (3) ausgleicht:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3. \quad (6)$$

Bildet man

$$v_n = y_n - (a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3),$$

so ergibt sich das Minimum von $\sum v^2$ unter Berücksichtigung der Identitäten (5) aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sum v^2}{\partial a_0} &= n \cdot a_0 - \sum y + a_2 \sum x^2 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sum v^2}{\partial a_1} &= a_1 \cdot \sum x^2 - \sum xy + a_3 \sum x^4 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sum v^2}{\partial a_2} &= a_2 \cdot \sum x^4 - \sum x^2 y + a_0 \sum x_2 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \sum v^2}{\partial a_3} &= a_1 \sum x^4 - \sum x^3 y + a_3 \sum x^6 = 0. \end{aligned}\right| \quad (7)$$

Wenn man die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} S_0 = \frac{\sum y}{n};\; S_1 = \frac{\sum xy}{n};\; S_2 = \frac{\sum x^2 y}{n};\; S_3 = \\ = \frac{\sum x^3 y}{n} \end{aligned}\right| \quad (8)$$

in (7) einsetzt, so sind $a_0 \ldots\ldots a_3$ die Lösungen der beiden Gleichungssysteme:

$$\left|\begin{aligned} S_0 &= a_0 + a_2 \cdot \frac{\sum x^2}{n} \\ S_2 &= a_0 \frac{\sum x^2}{n} + a_2 \cdot \frac{\sum x^4}{n} \end{aligned}\right|, \quad (9a)$$

$$\left|\begin{aligned} S_1 &= a_1 \cdot \frac{\sum x^2}{n} + a_3 \cdot \frac{\sum x^4}{n} \\ S_3 &= a_1 \cdot \frac{\sum x^4}{n} + a_3 \cdot \frac{\sum x^6}{n} \end{aligned}\right|. \quad (9b)$$

Hieraus lassen sich die gesuchten Koeffizienten sofort finden.

Ein besonderer Rechenvorteil bietet sich nun dadurch dar, daß die Summen

$$\frac{\sum x^2}{n}, \; \frac{\sum x^4}{n} \text{ und } \frac{\sum x^6}{n}$$

nicht in jedem Falle einzeln berechnet zu werden brauchen, sondern sich einfach aus dem konstanten Intervall i (4) und der Anzahl der Beobachtungen finden lassen[1]). Auf diese Weise wird man zu Faktoren geführt, die allgemein für jede Ausgleichung Geltung behalten.

Aus der äquidistanten Wahl der x-Werte folgt nämlich:

$$x_1 = x_1,$$
$$x_2 = x_1 + i,$$
$$x_n = x_1 + (n-1)\,i, \quad 0 = \sum x = n x_1 + i \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{i}{2}(-n+1), \\ x_2 &= \frac{i}{2}(-n+3), \\ x_3 &= \frac{i}{2}(-n+5), \\ &- - - - - - - - - - \\ x_n &= \frac{i}{2}[-n+(2n-1)]. \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Aus der binomischen Entwicklung folgen dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\quad \sum x^2 &= \frac{i^2}{4}(n^3 - 2n \cdot s_1 + s_2), \\ \text{b)}\quad \sum x^4 &= \frac{i^4}{16}(n^5 - 4n^3 \cdot s_1 + 6n^2 s_2 - \\ &\quad - 4n s_3 + s_4), \\ \text{c)}\quad \sum x^6 &= \frac{i^6}{64}(n^7 - 6n^5 s_1 + 15n^4 s_2 - \\ &\quad - 20n^3 s_3 + 15n^2 s_4 - 6n s_5 + s_6), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wenn zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1), \\ s_2 &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2, \\ &- - - - - - - - - - - - - \\ &- - - - - - - - - - - - - \\ s_6 &= 1^6 + 3^6 + 5^6 + \ldots + (2n-1)^6 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

eingeführt werden.

Diese Summen, die in Beziehung zur Bernoullischen Funktion stehen, lassen sich in geschlossener Form darstellen[2]):

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= n^2, \\ s_2 &= \frac{1}{3} \cdot n \cdot (4n^2 - 1), \\ s_3 &= n^2 \cdot (2n^2 - 1), \\ s_4 &= \frac{n}{15}(4n^2 - 1)(12n^2 - 7), \\ s_5 &= \frac{n^2}{3}(16n^4 - 20n^2 + 7), \\ s_6 &= \frac{n}{21}(4n^2 - 1)(48n^4 - 72n^2 + 31). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

1) Roeser, Scientific Pap. Bur. Stand. Washington 1920, S. 363—375.

2) Vgl. hierzu z. B. Auerbach und Rothe, Taschen-

Die praktische Ausrechnung dieser und höherer Reihen geschieht am besten auf folgendem Wege. Bezeichnet s_λ die Summe der λten Potenzen der ungeraden Zahlen bis $(2n-1)$, $S_\lambda(2n)$ die Summe der λten Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis $2n$, so gilt

$$s_\lambda = S_\lambda(2n) - 2\cdot S_\lambda(n).$$

Die Funktion $S_\lambda(n)$ wird entweder mit einer von Euler angegebenen Rekursionsformel[1]), oder nach einem Jacobischen Verfahren[2]) berechnet. Man setzt

$$n\cdot(n+1) = z,$$

dann ergibt sich

$$S_3 n = \frac{1}{4} z^2,\quad S_5 n = \frac{1}{6} z^2\left(z - \frac{1}{2}\right),\ \text{usw.}$$

Setzt man die Werte (13) in (11) ein, so folgt nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sum x^2}{n} &= \frac{i^2}{12}(n^2-1) = i^2\cdot u,\\
\frac{\sum x^4}{n} &= \frac{i^4}{240}(n^2-1)(3n^2-7) = i^4\cdot v,\\
\frac{\sum x^6}{n} &= \frac{i^6}{1344}\cdot(n^2-1)(3n^4-18n^2+\\
&\quad +31) = i^6\cdot w.
\end{aligned}\right\}\quad (14)$$

Hierin sind die Zahlenwerte u, v und w lediglich von der Anzahl n der Beobachtungen abhängig, sie sind für die gebräuchlichen Werte von n ein für allemal berechnet worden.

Unter Einführung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&C_{00} = \frac{v}{v-u^2};\quad C_{02} = C_{20} = -\frac{u}{v-u^2};\\
&\qquad C_{22} = \frac{1}{v-u^2};\\
&C_{11} = \frac{w}{uw-v^2};\quad C_{13} = C_{31} = -\frac{v}{uw-v^2};\\
&\qquad C_{33} = \frac{u}{uw-v^2}
\end{aligned}\right\}\quad (15)$$

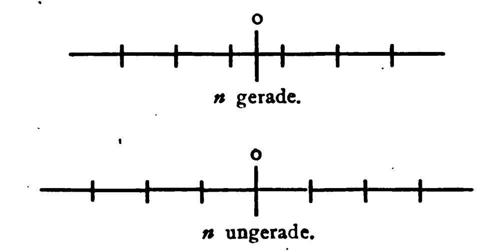
ergibt sich dann aus dem System (9) die gesuchte Lösung:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= S_0\cdot C_{00} + \frac{S_2}{i^2}\cdot C_{02};\\
a_1 &= \frac{S_1}{i_2}\cdot C_{11} + \frac{S_3}{i^4}\cdot C_{13};\\
a_2 &= \frac{S_0}{i^2}\cdot C_{20} + \frac{S_2}{i^4}\cdot C_{22};\\
a_3 &= \frac{S_1}{i^4}\cdot C_{31} + \frac{S_3}{i^6}\cdot C_{33}.
\end{aligned}\right\}\quad (16)$$

Die Indizes der konstanten Faktoren C lassen sofort den Koeffizienten a erkennen und die zugehörige Summe S. Der erste Index bezieht sich nämlich auf den Koeffizienten a, der zweite Index auf die Summe S, zu der der betreffende Faktor tritt. Die Summe der Indizes gibt schließlich die Potenz von i an, die in dem einzelnen Gliede im Nenner berücksichtigt werden muß.

Zusammenfassung.

Die Ausgleichung geht nun im einzelnen Falle derart vor sich, daß man die y-Achse durch den Schwerpunkt der Beobachtungswerte legt. Der Konstanz von i wegen ergibt sich dabei stets ein einfaches Bild:



Darauf bildet man die Summen (8) und entnimmt der folgenden Tabelle die Faktoren C. Die Gleichungen (16) liefern die gesuchten Koeffizienten a_0 bis a_3. Die Summenbildung (8) wird durch den Umstand der Symmetrie der x-Werte noch erheblich erleichtert, indem man nämlich das erste und letzte, zweite und vorletzte Wertepaar usw. zusammenfaßt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -x_n,\\
x_2 &= -x_{n-1},\\
&- - - -.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von S_1 bzw. S_3 multipliziert man die erste bzw. dritte Potenz des numerisch gleichen x-Wertes mit der Differenz, bei der Berechnung von S_2 den Wert x^2 mit der Summe der beiden symmetrisch gelegenen Ordinaten. Dadurch wird die Anzahl der notwendigen Multiplikationen stets auf die Hälfte vermindert.

Bei der Ableitung und Aufstellung der Formeln ist darauf Rücksicht genommen worden, daß es sich bei der Ausgleichung um eine Kurvenschar handeln kann, d. h. daß mehrere (x, y)-Reihen vorliegen können. Wenn dies aber nicht der Fall ist, also nur die Ausgleichung einer Wertereihe vorliegt, so kann man natürlich das Koordinatensystem so wählen, daß auch $\sum y = 0$ wird, d. h. daß der 0-Punkt in den Schwerpunkt der Beobachtungspunkte fällt. Dadurch ergeben sich für a_0 und a_2 in (16) einfachere Ausdrücke.

buch, 3. Jahrg., S. 94, 96, 64, 1913. Dort sind die Formeln s_1 bis s_3 angegeben.

1) Hagen, Synopsis I, 84—90.

2) Jacobi, Crelle 12, 271, 1834.

Anzahl d. Beobachtung. n	C_{00}	$-C_{02} = -C_{20}$	C_{22}	C_{11}	$-C_{13} = -C_{31}$	C_{33}
5	2,4286	0,71429	0,35714	4,5139	1,18056	0,347222
6	3672	46875	16071	2,6216	0,46759	092593
7	3333	33333	083333	1,8380	22685	32407
8	3125	25000	047619	3428	12458	13468
9	2987	19481	029221	0324	0,074495	0,0063131
10	2890	15625	018939	0,81605	47429	32375
11	2822	12821	012821	66417	31695	17806
12	2768	10714	0,0089912	55174	22015	10360
13	2727	090909	64935	46600	15783	0,00063131
14	2695	078125	48077	39904	11618	39993
15	2670	067873	36361	34569	0,0087460	26186
16	2649	059524	28011	30206	67124	17641
17	2632	052632	21930	26693	52388	12211
18	2618	046875	17415	23736	42355	0,000085999
19	2605	042017	14006	21248	33299	61893
20	2595	037879	11392	19178	27097	45427
21	2586	034325	0,00093613	17322	22180	33709
22	2578	031250	77640	15757	18370	25426
23	2571	028571	64935	14399	15349	19439
24	2566	026224	54728	13205	12920	15015
25	2560	024155	46451	12156	10956	11730
26	2556	022321	39683	11228	0,00093518	0,0000092546
27	2552	020690	33907	10402	80312	73681
28	2548	019231	29472	0,096651	69361	59156
29	2545	017921	25602	090037	60216	47866
30	2542	016741	22346	084082	52531	39013
31	2539	015674	19592	078700	46036	32014

Handelt es sich um die Ausgleichung der Funktion (1), so gilt dem System (7) entsprechend:

$$\frac{\sum y}{n} = a_0 \qquad + a_2 \frac{\sum x^2}{n},$$

$$\frac{\sum xy}{n} = a_1 \frac{\sum x^2}{n},$$

$$\frac{\sum x^2 y}{n} = a_0 \frac{\sum x^2}{n} + a_2 \frac{\sum x^4}{n}.$$

Hieraus folgt, daß sich die Werte a_0 und a_2 in gleicher Weise aus (16) ergeben, während sich aus (11) für a_1 der Wert ergibt:

$$a_1 = \frac{S_1}{i^2} \cdot \frac{1}{u} \text{ 1)}. \qquad (17)$$

1) Roeser gibt in der zitierten Arbeit eine Ausgleichung der Parabel (1) unter der Voraussetzung $S_0 = 0$. Er gibt die Tabelle für u und C_{02} und setzt $a_2 = -\frac{a_0}{i^2 u}$.

(Eingegangen 21. Februar 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Untersuchungen über Aufbau und Zusammenschluß der Maßsysteme.[1])

Von W. Porstmann.

In der Entwicklung der Maße der Physik, Chemie, Technik und Wirtschaft können wir in den letzten Jahrzehnten deutlich eine bestimmte Strömung erkennen. Man versucht allenthalben die Maße verschiedener Maßgebiete einander anzupassen, über- oder unterzuordnen. Beispielsweise wurden die elek-

1) Stark gekürzte Wiedergabe des ersten Teiles einer gleichnamigen Dissertation. Die Arbeit ist als selbständige Schrift geheftet zu beziehen durch die Geschäftsstelle des Normenausschusses der deutschen Industrie, Berlin NW 7, Sommerstr. 4a. Preis 4,75 M. zuzüglich Porto und Packung. Format der vorliegenden Zeitschrift. 37 Seiten.

Inhalt:

trischen Maßeinheiten genauest mit den Maßen der Mechanik in Zusammenhang gebracht. Dieser Vorgang ist noch bei weitem nicht zu Ende. So ist die Ausarbeitung der entsprechenden Beziehungen etwa zwischen der Lichtmessung und den Maßen der Mechanik heute noch nicht gelungen. Andrerseits sind die Maße der Elektrizität, der Mechanik und des Magnetismus bereits zu einem größeren, in sich harmonisch geordneten Maßgebiet verarbeitet, das die Handhabung der Beziehungen zwischen diesen Wissenschaftszweigen wesentlich erleichtert. Bevor an die Vereinigung derartig grundverschiedener Maßgebiete unter einheitliche Gesichtspunkte herangegangen werden konnte, hatten sich in jedem der Gebiete selbständige, unabhängige Maße und Maßsysteme entwickelt. Die Prinzipien der gegenwärtigen Lichtmessung stellen noch ein derartiges abgesondertes Gebiet dar. Ein älteres, einfacheres Beispiel für solchen „Zusammenschluß der Maßsysteme" ist das metrische Maß- und Gewichtssystem. Es vereinigt die Messung der Länge, der Fläche, des Raumes und des Gewichts. Vor dieser Vereinigung stand allenthalben die Gewichtsmessung ähnlich isoliert da gegenüber der Dimensionsmessung wie heute noch die Lichtmessung. Es bedarf keiner Worte weiter, um die Zusammenfassung wesensverschiedener Maßgebiete mit Hilfe der ihnen gemeinsamen Grundlagen und natürlichen Beziehungen als einen neuzeitlichen Zug in der Entwicklung der Maßlehre erkennen zu lassen.

Ehe aber die Systeme wesensverschiedener Maßgebiete untereinander zusammengeschlossen werden können, müssen sie schon eine ziemliche Ausbildung in ihrer Isoliertheit erfahren haben, die, wenigstens bei den allgemeinen Maßen, schon in frühesten Kulturzeiten der Völker einsetzt. Schon in den ersten Kulturanfängen bilden die Völker aller Art Verfahren zur Längen- und Raummessung aus, ebenso zur Bewältigung von Gewichts- und Wertverschiedenheiten. Die Entwicklung der einzelnen Verfahren zeigt nun trotz örtlicher und zeitlicher Abgeschlossenheit und trotz der stofflichen Verschiedenheit der Maßgebiete ganz bestimmte einheitliche Umstände, die geradezu zu einer abstrakten Entwicklungsgeschichte verarbeitet werden können. Die einzelnen Stufen dieser Entwicklung sollen hier kurz hervorgehoben werden, da sich aus ihrem Studium leicht die neuen Grundgesetze der Maßlehre ergeben, die den Kern vorliegender Abhandlung ausmachen.

Die Vorstufe aller Messung ist die Schätzung. Ohne besondere Meßmittel beurteilt hier der Mensch die Verschiedenheiten irgendwelcher Dinge. Zu messende Längen schätzt er nach dem Augenmaß; Räume schätzt er mit dem Gesicht, wie auch teilweise mit dem mechanischen Sinn für das Gewicht, indem er das Verhältnis zwischen Raum und Gewicht benützt. Gewichte schätzt er mit seinem Kraftsinn durch Abwägen in der Hand, andrerseits auch durch Beziehung auf den Raumgehalt. Die Methode der Schätzung ist urwüchsig, sie wiederholt sich in allen niedrigen Kulturstufen: bei niedrig stehenden Völkern, bei Kindern und auch in unentwickelten Meßgebieten. Beispielsweise sind wir heute in der Messung des Wertes noch nicht über diese Stufe hinaus und haben auch schlechte Aussicht, in absehbarer Zeit die Wertmessung auf höhere Stufen zu bringen, da die einzelnen die Messung beeinflussenden Umstände viel zu zahlreich sind und außerdem außerordentlich von Fall zu Fall, von Zeit zu Zeit wechseln.

Die Ungenauigkeit der Schätzung fällt sehr bald störend auf. Der nächste Schritt in der Ausbildung der Messung ist die Benutzung von Vergleichsnormen. In der Längenmessung stehen von Natur aus zahlreiche Längentypen zur Verfügung. Zunächst die Ausmaße des menschlichen Körpers: Zoll (Daumen), Fuß, Spanne, Schritt, Elle, Klafter usw. liefern die ersten Längennormen. Häufig sind dann auch Samenkörner, wie Gerstenkorn, Mohnsamen, Dattelkern, als Maß benutzt worden. Für die Flächenmessung ist die Handfläche, für die Raummessung eine „Handvoll" eine derartige der organischen Welt entlehnte Norm. Beim Gewicht griff man wohl zuerst zu Normen aus dem anorganischen Bereich, zu Steinen. Infolge der großen Veränderlichkeit der organischen Normen ging man später ganz allgemein zu anorganischen Normen über. Solange sich aber eine Messung nur als ein Einzelakt auffassen ließ, dessen Grundlagen von Fall zu Fall wechselten und neu gewählt wurden, genügten die organischen Normen, da ihre örtliche und zeitliche Wandelbarkeit in keiner Weise störte. Die beiden Parteien, die bei einer Messung ihre gegenseitigen Wirkungsbereiche abgrenzten, einigten sich anfänglich jedesmal auf die zu benutzende Vergleichsnorm. Nach der Messung hatte die Norm ihren Zweck erfüllt und war erledigt. Bei einer neuen Messung vertrug man sich wiederum auf eine neue anzuwendende Norm. In dieser Phase ist also eine Messung ein örtlich und zeitlich eng begrenzter Vorgang, bei dem daher organische Vertragsnormen völlig genügen.

Beim Fortschritt in der Kultur ist mit dem stärker werdenden Verkehr und der Gruppierung von Einzelwesen zu größeren Menschengruppen mit gleichen Bedürfnissen auch eine

Vermehrung der notwendigen Messungen verbunden. Dabei tritt die Umständlichkeit der einzelnen Messungen immer auffallender in den Vordergrund, und als nächster Schritt in der Ausbildung der Messung zeigt sich die Erweiterung des Geltungsbereiches einer Norm über den Einzelvorgang hinaus in örtlicher und zeitlicher Hinsicht. Die Händler benutzen eine einmal gewählte Norm nicht bloß einmal, sondern immer wieder. Zu Feldmessungen wird allgemein der Fuß angewandt innerhalb der betreffenden Gruppe, in einer anderen etwa der Schritt. Die Norm gilt jetzt für mehrere Messungen, die sich an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten abspielen. Die ganze Messung wird dadurch erheblich vereinfacht, denn es fällt der jedesmalige Vertrag auf die zu wählende Norm weg. Mit dieser Erweiterung des Geltungsbereiches einer Norm sind wir heute keineswegs am Ende. Erst wenn die gesamte Kulturwelt einheitliche Normen anwendet, ist dies der Fall.

Die organischen Normen konnten sich jetzt nicht mehr halten, es kam ihre Veränderlichkeit zur Geltung. Die Genauigkeit der Messungen wurde größer. Die Definition z. B. eines Hohlmaßes „Handvoll" ist ungenügend, da die Hände recht verschieden groß sein können. Es entwickelt sich aus diesem Tatbestand allgemein die Forderung, daß eine Norm genauer bestimmt und ausgeführt sein muß, als man messen kann. Nationale Normen treten nun auf, die durch objektive Festlegung und Bereitstellung von Maßstäben gestützt sind. Die alten Namen werden meist beibehalten, die aus der organischen Stufe stammen. Zoll, Elle, Rute, Klafter usw. werden innerhalb ihres Geltungsbereiches bestimmt realisierte Längenmaße. Allerdings wechseln diese Festsetzungen von Land zu Land, denn die örtliche Erweiterung eines Normbereiches stößt auf die benachbarten, gleichberechtigten Normenbereiche. Es bedarf einer neuen Einigung auf eine einzige Norm, wenn auch diese Zersplitterung ausgeschaltet werden soll. Objektivste Bestimmung der Norm ist hierzu nötig. Heute werden die Pariser Urnormen als objektivste Maße vertreten und auszubreiten gesucht: Urmeter und Urkilogramm.

Eine weitere Quelle zu Zersplitterungen der Messung ist der Umstand, daß man nicht mit einem einzigen Maße für alle Berufe auskommt. Zu Land- und Wegemessungen braucht man ein größeres Maß, der Handwerker braucht ein kleineres, der Feinmechaniker und die Goldindustrie noch kleinere. Die verschiedenen Berufe benützten und entwickelten daher zunächst ihre eigenen Maße ohne Rücksicht darauf, ob sie mit den Maßen anderer Berufe in einfachem Zusammenhang standen und in welchem. Innerhalb der Berufe breiten sich eigenartige Maße aus. Obgleich sich die Berufsmaße anfangs ganz selbständig entwickeln, ist es nicht ausgeschlossen, daß sie allmählich weit über nationale Grenzen hinausgreifen. Die flämische Elle war ein weit verbreitetes Handelsmaß. Die Seemeile ist heute ein internationales Seemannsmaß. Das Karat ist internationales Gewichtsmaß der Goldindustrie geworden. Derartige Berufsmaße sitzen trotz ihrer unbequemen Beziehungen zu anderen allgemeineren Maßen hartnäckig fest. Daß Berufsmaße sich sogar bis zu alleiniger internationaler Geltung hindurcharbeiten können, sehen wir an unserer gegenwärtigen Zeit- und Winkelmessung, die von den alten Astronomen stammen, heute aber unser gesamtes Leben beherrschen.

Im Entstehen und in der Anwendung waren die einzelnen Normen bisher voneinander getrennt. Mit der Verfeinerung der Meßkunst und dem Bedürfnis nach größerer Genauigkeit der Messung wurde es immer schwieriger, die Maße zu objektivieren. Es mußte immer mehr Arbeit auf die Bereitstellung brauchbarer Maßstäbe verwendet werden, die der Messung der Nation oder auch der Berufsmessung zugrunde lagen. Für jedes einzelne Maß, sei es nun Gewicht, Länge, Fläche, Raum usw., wäre die Aufbewahrung einer Urnorm nötig. Und wenn wir die großen Schwierigkeiten bedenken, die wir heute noch mit der Bereithaltung unserer primären und sekundären Urmeter und Urkilogramme haben, so sehen wir leicht ein, daß dieser Umstand hinreichend Anlaß bot, nach einer Erleichterung Ausschau zu halten. Diese fand sich durch den für die weitere Entwicklung äußerst wertvollen Gedanken, die Beziehungen der verschiedenen isolierten Maße desselben Gebiets, z. B. der Gewichtsmaße, genau festzulegen, so daß sich mit Hilfe dieser Verhältnisse sämtliche Maße desselben Gebiets auf eine einzige Urnorm beziehen ließen, alle Längenmaße z. B. auf ein einziges. Andrerseits führte auch die Praxis zu diesem Wege, denn die einzelnen Berufsmaße eines Landes griffen immer mehr über ihren Bereich hinaus, so daß eine genaue Feststellung der Verhältnisse, etwa der Maße der Handwerker und der Feldmesser, immer notwendiger wurde. Wir stehen hier am Anfang der Systembildung. Es werden die einzelnen isolierten gleichartigen Maße zu einem Maßsystem vereinigt. So bilden sämtliche in einem Lande angewandten isolierten Gewichtsmaße zusammen ein Gewichtssystem einfachster Art. Dieser Zusammenschluß gleichartiger

Maße ist die nächste Stufe der Maßentwicklung. Zunächst leitet sie sich ungeordnet ein, bis sich bald auch hier ganz bestimmte Ordnungsgrundsätze einstellen. Am Ende dieser Phase hat sich dann die Spaltung in „Urnorm" und „System der abgeleiteten Maße" gänzlich vollzogen. Jedes Maßgebiet besitzt mindestens eine Urnorm, auf deren Konstanthaltung und Bereitstellung nun größte Sorgfalt zu verwenden ist, während alle übrigen gleichartigen Normen lediglich durch ihre genaue Größenbeziehung zur Urnorm, also durch Zahlen bestimmt sind, je nach der Entwicklung der Systematik allerdings in mehr oder weniger einwandfreier Weise. Urmeter und metrisches Längenmaßsystem, Urkilogramm und metrisches Gewichtssystem sind Beispiele für diese durchgreifende Trennung von Urnorm und System. Die Systematik steht hier schon auf einer ziemlich hohen Stufe, die bisher wohl als ideal betrachtet wurde. Im weiteren Verlaufe wird aber gezeigt werden, wie auch die metrische Systematik noch entwicklungsfähig ist. Weniger entwickelte Beispiele für die Systembildung liegen in der Winkelmessung vor mit dem Vollwinkel als Urnorm, Graden, Minuten und Sekunden als abgeleitete Normen, und in der Zeitmessung mit dem Tag als eine Urnorm, Stunden, Minuten und Sekunden als abgeleitete Normen.

Auch die Systembildung zeigt Entwicklungsstufen. Die nächstliegende haben wir vor uns, wenn die isolierten Maße eines Maßbereiches, so wie sie eben in einer Volksgruppe vorhanden sind, zu einer Gesamtheit vereinigt werden. Bei der anfänglichen Ungenauigkeit der Messung läßt sich auf dieser Stufe fast immer erreichen, daß die Zahlenverhältnisse dieser Normen untereinander durchgängig ganze Zahlen sind; indes werden auch Brüche nicht immer vermieden, sie verschwinden erst in der weiteren Entwicklung. In dem Bestreben, ganze Zahlen für die Verhältnisse innerhalb eines Maßsystems zu bekommen, haben wir das erste Leitgesetz für die bewußte Systembildung gefunden.

Der nächste Fortschritt äußert sich in der Wahl eines *einzigen* Zahlenverhältnisses zwischen mehreren, wenn möglich sogar zwischen allen Maßen der einzelnen Meßgebiete. China besitzt offiziell ein reines dezimales Längenmaß- und Gewichtssystem. Das auf dem Pariser Fuß aufgebaute Fuß—Zoll—Linie—Punkt-System, das in der Wissenschaft lange Zeit benutzt wurde, ist ein reines Zwölfersystem. Daneben bestand aber in fast allen den Fuß benutzenden Ländern auch noch die Unterteilung des Fußes mit Hilfe der Zehn. Alle Willkür in der Systembildung wird immer mehr eingeengt, sie beschränkt sich letzten Endes auf eine einzige Wahl für ein jedes System, nämlich auf das in ihm herrschende einzige Zahlenverhältnis.

Die Systembildung besteht zunächst darin, daß von einer Hauptnorm größere und kleinere Maße abgeleitet werden. Auf diese Weise können auch ganz neue Normen gewonnen werden, ohne daß sie auf ältere isolierte Maße zurückgehen. Die Zahlen Zwölf, Zehn, hie und da auch noch die Acht, bildeten die hauptsächlich benutzten Verhältnisse. Vor allem bei der Vervielfältigung der Hauptnorm zu größeren Maßen bestand größte Willkür. Alle kleineren Zahlen sind irgendwo einmal als Verhältnis zwischen zwei Maßen benutzt worden. Jede Längenmaßtabelle zeigt, daß alle Zahlen bis zur Siebzehn *gegenwärtig* noch benutzt werden. Persien: 1 Ser von Täbris = 17 Girre. Die Freiheit, die der Menschheit für die Auswahl des zahlenmäßigen Zusammenhangs mehrerer Maße zur Verfügung stand, ist also auch hinlänglich benutzt worden. Diese Freiheit ist mit anderen Worten eine Zersplitterungsstelle für die Entwicklung der Maßsytematik geworden. Von Natur aus besteht keinerlei Hinweis oder Anhalt für die Wahl eines bestimmten Zahlenverhältnisses zur systematischen Ableitung der einzelnen Maße von der Hauptnorm. Daher ist überall auch aus nebensächlichen Gründen ein willkürliches gewählt worden. Zufällige örtliche und zeitliche Verhältnisse werden meist den Ausschlag gegeben haben. Eine Kulturtat, deren Wert heute kaum von der Fachwelt recht eingeschätzt wird, ist es nun gewesen, als man die fortschrittliche Forderung aufstellte, daß nur ein einziges Zahlenverhältnis innerhalb eines Meßbereiches herrschen soll. Alle verschiedenen Maße sollen gleichvielmal kleiner sein als das nächstgrößere. Es bleibt dabei immer noch dieses eine Zahlenverhältnis beliebig wählbar. Durch diesen neuen Satz wird eine große Zersplitterung geordnet.

Für jedes Maßgebiet könnte man nun zunächst eine eigene Zahl wählen. Man könnte die Längenmaße etwa auf Zehn, die Zeitmessung etwa auf Acht, die Gewichte auf Zwölf usw. aufbauen. Offenbar aber ist dies eine neue Zersplitterung, deren Nachteile sich bald bemerkbar machen würden. Es sind demgemäß nun die verschiedenen Systeme, wie vorher die einzelnen Maße desselben Systems, unter einheitliche Grundsätze zu ordnen. Auch diese Ausgestaltung einer umfassenden Systematik geht schrittweise vor sich. Wir kennen heute Teillösungen der Aufgabe, wie das metrische Maß- und Gewichtssystem,

die Münzabkommen, das absolute Maßsystem der Physik, Chemie und Technik, das metrische Formatsystem u. a. Es fehlt aber bisher noch die klare Ausarbeitung der Grundlagen für die systematische Weiterentwicklung. Die einzelnen Normierungen werden von einem einheitlichen Band umfaßt, es ist dies die Beherrschungsart der Mengen schlechthin. Wir können die Entwicklung spezieller Normierungen nicht eher weiter verfolgen, als bis wir uns über den Aufbau unseres Zahlengebäudes gründlich Rechenschaft abgelegt haben.

Mengenmessung

Wie beherrschen wir die Mengen ganz allgemein, nicht bestimmte Mengen von Längen oder Gewichten, sondern eben schlechthin die Mengen von irgendwelchen Dingen, beziehungslose Mengen? Man ist von vornherein der Ansicht, daß die Art und Weise, wie wir diese beherrschen, ohne weiteres auch auf die Beherrschung besonderer Mengen übertragen wird, denn diese sind ja eben die wirklichen Beispiele von Mengen, welche zu beherrschen sind. Wenn uns diese Ansicht auch selbstverständlich erscheint, so werden wir sie doch wesentlich ändern müssen. Aus der Vergleichung von Mengen haben sich bekanntlich die Zahlen und weiterhin die Zahlensysteme entwickelt. Die gegenwärtige Zählmethode ist das Ergebnis jahrtausendelanger fortwährender Entwicklung, die von schlichten Anfängen an bis zu einem einwandfreien Gebäude vor sich gegangen ist. In unserem Zählsystem liegt ein weitgehend internationales Gebilde vor, das Anrecht auf allgemeine Annahme seiner günstigsten Brauchbarkeit wegen hat. In dieser Beziehung steht es vorbildlich anderen ebenfalls internationalen Normierungen, z. B. der Zeitmessung gegenüber, die trotz größter Umständlichkeit sich doch durchgängige weltumfassende Geltung zu verschaffen gewußt haben. In der Mengennormierung werden wir daher ein vollendetes Beispiel für Normierungen kennen lernen, dessen genaueres Studium uns erst vielerlei Einzelheiten im Bau der besonderen Normensysteme verständlich machen wird, so daß wir darauf weiter bauend dann zu einem übersichtlichen allgemeinen Normierungsplan kommen.

Für die kleinen Mengen bilden sich Gesamtbegriffe. Das Bild von drei Stück hat sich selbständig dem Gedächtnis eingeprägt, geradeso wie das Bild des Baumes. Ebenso der Anzahlsbegriff der Vier. Wie groß die Anzahl ist, die noch als eine selbständige Vorstellung erfaßt werden kann, dürfte sehr verschieden sein. Mancher Schäfer weiß, wieviel er Schafe hat, ohne jedoch einen Zahlbegriff im üblichen Sinne dafür zu haben. Seine Beherrschung der Menge fußt auf wesentlich anderen Gesichtspunkten als die unsere. Der Schäfer läßt seine Herde an sich vorbeiziehen, und aus dem verarbeiteten Eindruck weiß er, ob es alle sind, und sogar welches fehlt. Ein allgemeines Mittel gibt es, gewisse größere Mengen mit einem Blick zu überschauen und anschaulich zu erkennen, ob die Menge vollständig ist, nämlich besondere Anordnung dieser Menge. Sind z. B. 36 Stück in ein Quadrat geordnet, so erkennt man auf den ersten Blick, wenn ein Stück weggenommen oder hinzugelegt wurde, ohne daß eine Abzählung nötig ist. Derartige Verfahren der Mengenbeherrschung sind aber an bestimmte Umstände gebunden und können nicht auf die allgemeinen Mengen übertragen werden. Es sind dies den Berufsmaßen und Berufsverfahren vergleichbare individuelle Beherrschungsarten. Vor allem wird ihrer Anwendung letzten Endes durch das Größerwerden der zu beherrschenden Menge ein Ziel gesetzt. Dieses Verfahren der Zählung ist nicht unabhängig genug von der Größe der zu messenden Menge.

Den kleinen, von allen Menschen leicht lernbaren anschaulichen Gesamtzahlbegriffen sind im Alltagsleben sehr bald Worte zugeordnet worden, selbständige Worte, die den selbständigen voneinander verschiedenen Begriffen entsprechen. Wenn wir zählen: eins, zwei, drei .... neun, zehn, elf, zwölf bewegen wir uns selbst noch, wenigstens bei den ersten Zahlen, in dieser Art des Zählens. Allerdings haben wir hier schon eine ganz bestimmte Reihenfolge benutzt, in die wir die verschieden großen Mengen übersichtlich ordnen, ein Mittel, das ganz vergleichbar ist der Anordnung einer gewissen Menge etwa in ein Quadrat. Wir haben hier schon einen nächsten Schritt getan und mehrere Zahlbegriffe zu einer Gesamtheit vereinigt, die eben die verschiedenen Mengen umfaßt. Es handelt sich für uns darum, in diesen Wust verschieden großer Mengen Ordnung hineinzubringen. Es ist ein großer Schritt vorwärts, sobald man lernt, diese vielerlei Größen dadurch zu ordnen, daß man ihr gegenseitiges Unterscheidungsmerkmal, eben ihre Größe, als Ordnungsmittel benützt. Man ordnet sie der Größe nach und findet die natürliche Zahlenreihe. Jede um Eins größere Menge erhält einen neuen Namen und ein neues Kennzeichen, die beide für immer dem durch sie dargestellten Zahlbegriff zugeordnet bleiben. Nur ist hier wieder derselbe Umstand ein unüberwindliches Hindernis wie oben, nämlich daß die

wachsende Anzahl der neuen individuellen Begriffe bald zu einer Verwirrung führt und Unübersichtlichkeit bedingt. Eine derartige Reihe beherrscht man nur wenig weit und kann sie nur in ihren Anfängen richtig anwenden. Die Aufstellung einer Ordnung hat also auf den ersten Blick keinen allzu großen Fortschritt in der Beherrschung der Mengen gebracht, abgesehen davon, daß die Reihe vollzählig gemacht wurde, indem man zwischen Zahlbildern, die sich um mehr als eine Einheit unterschieden, die fehlenden einschob. Die jenseits der Grenze der beherrschbaren Mengen liegenden Anzahlen fallen jederzeit unter den Sammelbegriff „ungeheuer groß".

(Fortsetzung folgt.)

Bemerkung zum Aufsatz des Herrn W. Kramer: „Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie"[1].

Von der Inspektion für Waffen und Gerät in Berlin (Dr. H. Kochan).

Verfasser zeigt, daß man zur photogrammetrischen Bestimmung der Meßverhältnisse eines Gegenstandes mit nur einem Photogramm auskommt, sobald dieses ein Spiegelbild des zu messenden Gegenstandes mit enthält. Er bemerkt dazu, daß dieser Fall bisher nicht betrachtet worden zu sein scheint; diese Annahme ist irrig.

Das Problem wird bereits in dem „Internationalen Archiv für Photogrammetrie" Band III, Heft 2 vom Juni 1912 und Heft 4 vom April 1913 von Dolezal ausführlich behandelt. Dolezal macht in seinen Aufsätzen auch ausführliche Literaturangaben. Danach hat Pulfrich schon 1905 in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde", XXV. Jahrg., Heft 4 vom April 1905 einen Aufsatz: „Über die stereoskopische Betrachtung eines Gegenstandes und seines Spiegelbildes" veröffentlicht. Hierher gehört auch ein Fall, den Dolezal 1902 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 111, 56, 1902 beschreibt. Der Aufsatz ist betitelt: „Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkt bei Verwendung der Reflexe". Verfasser zeigt darin, daß man die Reflexbilder von Wolken, welche sich mit den Originalen auf einer Platte befinden, zu Wolkenhöhenmessungen benutzen kann.

1) Diese Zeitschr. **22**, 24, 1921.

(Eingegangen 19. April 1921.)

Berichtigung.

In der Mitteilung über gleitende Reibung von S. Fuchs (Nr. 6 dieses Jahrgangs) soll auf S. 175 die Formel (6) lauten:

$$\text{statt } (\lambda_1 + \lambda_2) F U,$$
$$\text{richtig } \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F U.$$

Tagesereignisse.

Deutscher Physiker-Tag in Jena.

Einladung.

In der Woche vom 19.—24. September findet in Jena, an Stelle der in diesem Jahre ausfallenden Naturforscherversammlung, eine gemeinsame Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik statt. Anmeldungen zu Vorträgen bitten wir möglichst vor dem 1. Juli an den Vorsitzenden des Ortsausschusses Professor M. Wien, Physikalisches Institut, Jena, Am Landgrafen 10, mit dem Vermerk: Deutscher Physiker-Tag (D. Ph. T.) zu richten.

Gleichzeitig wird die Deutsche Mathematikervereinigung und die Fachgemeinschaft Deutscher Hochschullehrer der Physik in Jena tagen, unmittelbar vorher die Bunsengesellschaft und die Helmholtzgesellschaft.

Das Programm und sonstige Angaben über die Tagung werden im Juli bekannt gegeben.

Der Vorstand der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Der Vorstand der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik.

Der Jenaer Ortsausschuß.

Das Rektorat der Technischen Hochschule in Wien schickt uns zur Veröffentlichung folgende „Notbitte": Die ungeheure Bücherteuerung in Österreich macht es besonders der Bibliothek der Technischen Hochschule in Wien unmöglich, von den Neuerscheinungen auf technischem, mathematischem, natur- und kunsthistorischem Gebiete auch nur die allerwichtigsten Werke anzukaufen. Es ergeht daher an alle auf diesen Gebieten schriftstellerisch Tätigen die herzliche Bitte, dieser für den wirtschaftlichen und kulturellen Aufbau Österreichs so wichtigen Bibliothek je ein Stück ihrer neuen Werke geschenkweise oder doch zu wesentlich geminderten Preisen zu überlassen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Ludwig Schiller für Physik, an der Bergakademie Clausthal Dr. N. Halbertsma für Lichttechnik.

Ernannt: Der Observator an der Sternwarte Babelsberg Professor Dr. Paul Guthnick zum Direktor derselben, A. G. Lobley zum Dozent für Elektrochemie an der Universität Manchester.

Verliehen: Dem Privat- und Honorardozenten für höhere Mathematik und Geometrie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Erwin Kruppa der Titel a. o. Professor.

Vom Lehramt zurück: Der Professor der Chemie am Armstrong College Newcastle Philips Bedson, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Gießen Dr. Hans Freiherr v. Liebig.

Gestorben: Der Assistent für Chemie an der Universität Cambridge Dr. Richard Henry Vernon, der Direktor des Smith-Observatoriums in Geneva bei New York Professor William Robert Brooks, der emeritierte Professor für technische Chemie am Royal Glasgow Technical College Edmund James Mills, der Professor der Chemie an der Rangoon Universität (Indien) Albert Ernest Bellars.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11. | 1. Juni 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 13 am 10. Juni 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes.

Von C. Wieselsberger.

1. Während man mit Hilfe der Theorie der reibungslosen Flüssigkeit besonders in den letzten Jahren zu sehr bemerkenswerten Ergebnissen gelangte, ist dies für die Erfolge derjenigen Theorie, welcher eine mit innerer Reibung behaftete Flüssigkeit zugrunde liegt, in viel geringerem Maße der Fall. Die Flüssigkeiten, mit denen man es in der Wirklichkeit zu tun hat, haben nun aber stets eine gewisse innere Reibung und diese ist gerade die Ursache für das Auftreten eines Widerstandes, den ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper erfährt. Die Wirkung der Reibung kann zwar in solchen Fällen, in denen der Widerstand durch geeignete Formgebung des Körpers auf ein äußerst geringes Maß vermindert ist, sehr stark in den Hintergrund treten, so daß die wirkliche Strömung weitgehend mit der auf Grund der Theorie der reibungslosen Flüssigkeit berechneten übereinstimmt[1]). Bei Körperformen indessen, die einen großen Widerstand verursachen, trifft dies nicht mehr zu, denn hier spielt die Flüssigkeitsreibung eine ausschlaggebende Rolle. Alle bisherigen Versuche zur quantitativen Bestimmung des Widerstandes auf Grund der Theorie der reibenden Flüssigkeiten hatten, von einigen Spezialfällen abgesehen, nur geringen Erfolg. Aus diesem Grunde muß stets, wenn eine genauere Ermittlung des Widerstandes erforderlich ist, der Versuch dazu herangezogen werden. Im folgenden sollen einige Versuchsergebnisse über den Widerstand von Zylindern die senkrecht zu ihrer Achse von einem Luftstrome getroffen werden, mitgeteilt werden. Es soll dabei gezeigt werden, daß der Widerstand in viel komplizierterer Weise von der Geschwindigkeit, von der absoluten Körpergröße und von der Zähigkeit des Mediums abhängig ist, als man bisher angenommen hat.

1) Vgl. G. Fuhrmann, Theorie und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Dissert. Göttingen, 1911, ferner Jahrb. d. Motorluftschiffstudiengesellschaft 1911/12.

2. Den Widerstand W, den ein Körper bei der Bewegung durch ein Medium von der Dichte ρ erfährt, pflegt man in der Form anzusetzen:

$$W = c F \frac{\rho v^2}{2}.$$

Hierbei bedeutet v die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper durch die Flüssigkeit bewegt, und F in der Regel die Projektionsfläche des Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung (Hauptspant). An Stelle dieser Fläche kann man auch irgendeine andere charakteristische Fläche des Körpers auswählen, bei Tragflügeln z. B. die größte Projektionsfläche. Die dimensionslose Zahl c bezeichnet man als Widerstandszahl. Lange Zeit hindurch war man, hauptsächlich auf Grund der Newtonschen Auffassung über den Luftwiderstand, der Meinung, daß für ein gegebenes Medium diese Widerstandszahl von der Geschwindigkeit und von der absoluten Größe des Körpers unabhängig sei, also als eine Konstante angesehen werden kann, deren Wert nur von der geometrischen Form des Körpers abhängt. Man glaubte aus der Kenntnis der Widerstandszahl, die für einen gegebenen Körper bei einer einzigen Geschwin-

digkeit ermittelt wurde, durch Anwendung der obigen Widerstandsformel auch den Widerstand für jede andere Geschwindigkeit und jede andere Größe des Körpers angeben zu können, geometrische Ähnlichkeit der Körperformen vorausgesetzt. In Wirklichkeit liegen aber die Verhältnisse, wie wir sehen werden, viel weniger einfach.

Die genaueren Untersuchungen über das Zusammenwirken der den Widerstand erzeugenden Kräfte haben gezeigt, daß die Widerstandszahl nur bei geometrisch ähnlichen Strömungen eine Konstante ist; geometrische Ähnlichkeit der Versuchskörper schließt aber noch keineswegs geometrisch ähnliche Strömungsform in sich. Die Bedingungen, die für das Zustandekommen von geometrisch ähnlichen Strömungen maßgebend sind, wurden von O. Reynolds zuerst aufgestellt. Bezeichnet man mit d eine in den zu vergleichenden Fällen festgehaltene, sonst aber beliebige Längenabmessung des Körpers und mit

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$$

(μ = Zähigkeitsmaß) die kinematische Zähigkeit, so sind zwei Strömungen nur dann geometrisch ähnlich, wenn der Quotient

$$\frac{vd}{\nu} = R$$

in beiden Fällen der gleiche ist. Die Zahl R ist dimensionslos und wird nach ihrem Entdecker als Reynoldssche Zahl bezeichnet.

Dem Vorstehenden gemäß kann demnach nicht erwartet werden, daß die den Widerstand eines Körpers charakterisierende Widerstandszahl c beim Übergang zu einer anderen Reynoldsschen Zahl (beispielsweise durch Änderung der Geschwindigkeit oder der Körperabmessung) ungeändert bleibt. In der Tat beobachtet man bei den meisten Körpern eine Abhängigkeit der Widerstandszahl von dem Reynoldsschen Parameter $\frac{vd}{\nu}$. Für die Art der Änderung ist die geometrische Form des Körpers maßgebend. Den obigen Ansatz für den Widerstand pflegt man in der Regel auch in denjenigen Fällen formal beizubehalten, in denen c keine Konstante ist. Die geringsten Änderungen der Widerstandszahl zeigen sich bei Körpern mit scharfen Kanten, wenn letztere senkrecht zur Strömungsrichtung stehen. So ist beispielsweise nach den bisherigen Versuchen für kreisförmige Scheiben mit scharfen Rändern, deren Ebene senkrecht vom Winde getroffen wird, innerhalb eines großen Bereiches Reynoldsscher Zahlen die Widerstandszahl konstant und hat einen Betrag von etwa $c = 1{,}1$. Dagegen können Körper mit konvexer abgerundeter Oberfläche sehr bedeutende Änderungen aufweisen. Bei Reynoldsschen Zahlen, die klein sind gegen die Einheit, wächst der Widerstand, wie Stokes zuerst für den Fall der Kugel gezeigt hat, linear mit der Geschwindigkeit. Diese Strömung ist dadurch gekennzeichnet, daß hier die Trägheitskräfte vollständig zurücktreten und die Bewegung allein durch die Zähigkeitskräfte beeinflußt wird.

3. Um wenigstens in einem Falle den Verlauf der Widerstandszahl von den kleinsten bis zu den größten Reynoldsschen Zahlen kennen zu lernen, haben wir vor kurzem Versuche mit Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt ausgeführt. Die Zylinder wurden senkrecht zu ihrer Achse von einem Luftstrome getroffen. Sämtliche Messungen wurden in der „ebenen Strömung" ausgeführt, d. i. eine Strömung, bei welcher die Geschwindigkeitsrichtungen parallel zu einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene gerichtet sind und wobei ferner in allen Querschnitten, die der genannten Ebene parallel sind, das gleiche Stromlinienbild besteht. Die gefundenen Widerstandszahlen gelten daher für „unendlich lange" Zylinder. Da für die Änderung der Geschwindigkeit nur ein mäßiger Bereich zur Verfügung steht — sie variierte im vorliegenden Falle zwischen 1,2 und 36 m/sec — und andererseits der Wert der kinematischen Zähigkeit, so lange die Versuche in gleichem Medium ausgeführt werden, praktisch konstant ist, so kommt hier für starke Änderung der Reynoldsschen Zahl die Anwendung von verschiedenen Zylinderdurchmessern in Betracht. Dadurch kann die Reynoldssche Zahl in sehr weiten Grenzen verändert werden. Es wurden 9 Zylinder von 0,05 bis 300 mm Durchmesser untersucht. Die Versuche umfassen daher einen Bereich Reynoldsscher Zahlen von 4,2 bis 800000[1]) wenn man als charakteristische Länge den Zylinderdurchmesser d einführt. Die Widerstandsbestimmung der dünnen Zylinder (bis 8 mm Durchmesser) wurde in der Weise ausgeführt, daß diese an einem langen Draht, der an der Decke des Versuchsraumes befestigt war, in dem parallelen Luftstrahl der Anstalt lotrecht aufgehängt und unten, außerhalb des Luftstrahles, mit einem Gewicht belastet wurden. Aus dem Ausschlag des auf diese Weise gebildeten Pen-

1) Der Wert der kinematischen Zähigkeit für Luft von 760 mm Druck und 15° Temperatur beträgt $\nu = 0{,}145$ cm²/sec.



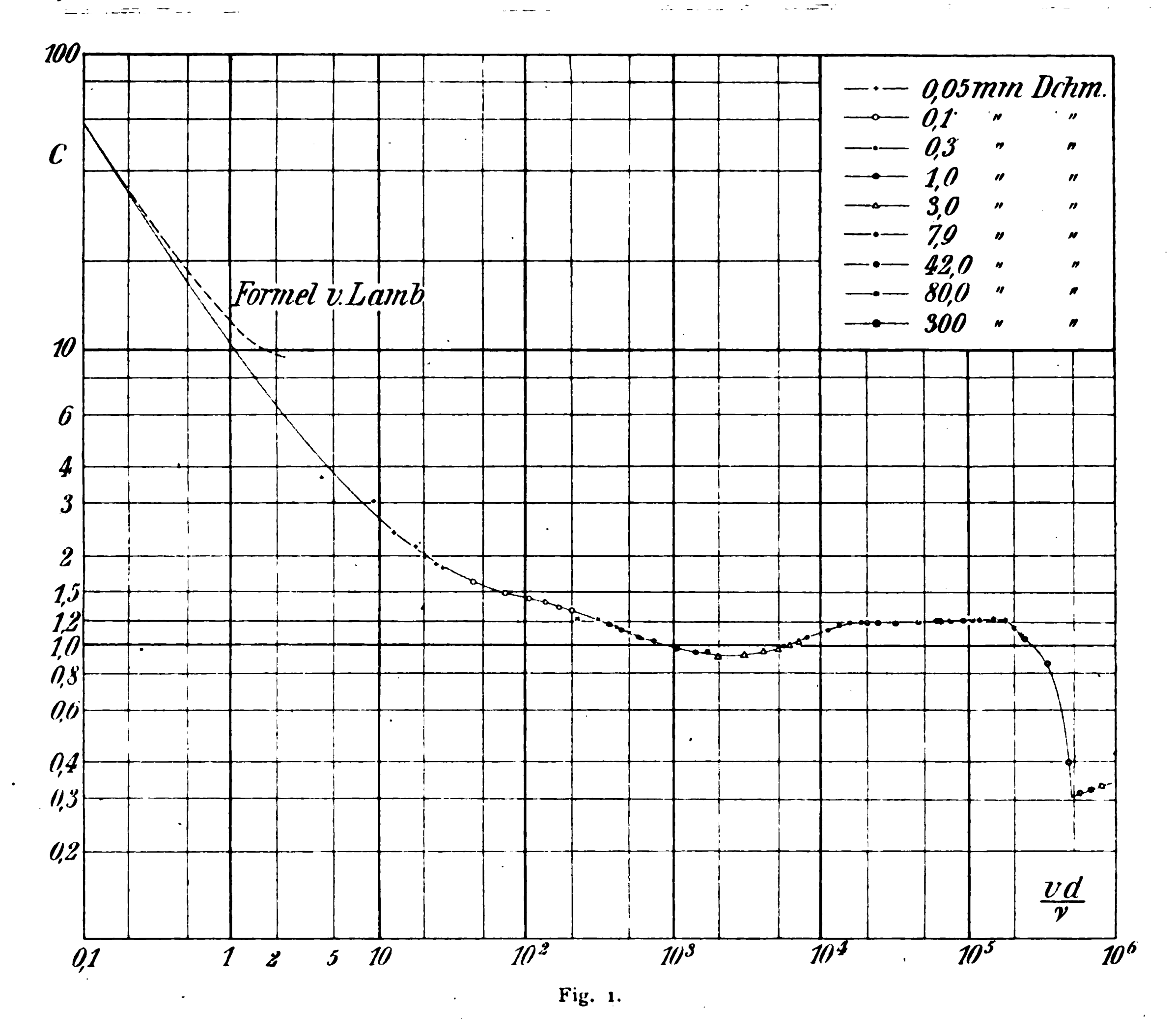


Fig. 1.

dels unter der Einwirkung des Luftstromes läßt sich der Widerstand in einfacher Weise ermitteln. Bei diesen Messungen durchdrang also der zu untersuchende Zylinder den Luftstrahl. Obwohl nun an den Strahlgrenzen sicherlich Abweichungen von der ebenen Strömung auftreten, so werden diese die Hauptströmung nicht wesentlich beeinflussen können, da in allen Fällen die Länge des Zylinders sehr viel größer war als der Durchmesser — im ungünstigsten Falle war die Zylinderlänge gleich dem 280fachen Durchmessser — und die erwähnten Störungen am Rande des Strahles sich nur auf Längen von einigen Durchmessern erstrecken. Bei Zylindern von größerem Durchmesser ist dagegen diese Randstörung nicht mehr zu vernachlässigen. Für diese Versuchskörper mußte die Untersuchungsmethode geändert werden. Dieses geschah in der Weise, daß die dickeren Zylinder zwischen zwei festen ebenen und zur Windrichtung parallelen Wänden, die sich innerhalb des Luftstromes befanden, angeordnet waren. Zwischen den Zylinderstirnflächen und den beiden ebenen Wänden wurde eine Dichtung besonderer Art (Labyrinthdichtung) eingebaut, so daß ein Umströmen der Stirnflächen verhindert und so eine ebene Strömung hergestellt wurde[1]). Von dem Zylinder aus führte ein Drahtsystem zu einer Wage, vermittels welcher der Widerstand gemessen werden konnte.

Die Ergebnisse der gesamten Versuche sind in dem Kurvenblatt Fig. 1 dargestellt. Es ist hierbei die Widerstandszahl c abhängig von der Reynoldsschen Zahl $R = \frac{vd}{\nu}$ auf logarithmisch geteilten Koordinatenachsen aufgetragen. Die logarithmische Darstellung wurde

1) Eine eingehende Beschreibung dieser Versuchsanordnung, mit welcher bisher hauptsächlich Tragflügel in zweidimensionaler Strömung untersucht wurden, findet sich in der Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1919, S. 95, ferner in den „Ergebnissen der aerodynamischen Versuchsanstalt", I. Lieferung, Verlag R. Oldenbourg, 1921, S. 54—56.

gewählt, um alle Gebiete gleichmäßig nebeneinander darstellen zu können. Man sieht zunächst, daß mit abnehmender Reynoldsscher Zahl die Widerstandszahl wächst. Die Versuchswerte gehen bis auf eine Reynoldssche Zahl von rd. 4,2 herab. Nun ist von Lamb[1]) für die Bewegung bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen („schleichende Bewegung") unter Zugrundelegung der Theorie der reibenden Flüssigkeit eine Formel für die Widerstandszahl angegeben worden in ähnlicher Weise, wie dies von Stokes für die Kugel geschehen ist. Die Formel von Lamb für die Widerstandszahl des Zylinders lautet, in unsere Bezeichnung umgeschrieben:

$$c = \frac{8\pi}{R(2{,}002 - \ln R)},$$

unter R die auf den Zylinderdurchmesser bezogene Reynoldssche Zahl verstanden. Diese Formel entstammt einer Näherungstheorie und ist nur gültig für Werte von R, die klein gegen 1 sind. Die dieser Formel entsprechenden Werte sind in Fig. 1 gestrichelt eingezeichnet. Man sieht, daß die Verlängerung der durch die Versuchspunkte gehenden Kurve sich gut dem Verlauf der berechneten Kurve anschließt, so daß dadurch das Gebiet, in dem die Versuche nicht mehr ausgeführt werden konnten, überbrückt wird. Bei $R \sim 2000$ ist eine sehr auffallende, aber durch Versuche von anderer Seite[2]) bestätigte Einsenkung vorhanden. Von $R = 15\,000$ bis $R = 180\,000$ ist das quadratische Widerstandsgesetz annähernd erfüllt mit einem Wert von $c = 1{,}2$.

Bei $R \sim 200\,000$ setzt ein sehr steiler Abfall der Widerstandszahl ein; diese fällt hier von rd. 1,2 auf 0,3, also auf den vierten Teil ab. Ein ganz ähnliches Verhalten hat man schon früher bei der Untersuchung des Widerstandes von Kugeln gefunden[3]), nachher auch bei vielen anderen Körpern mit konvexer Oberfläche. Die diesem Übergangsgebiete entsprechende Reynoldssche Zahl pflegt man als „kritische Reynoldssche Zahl" zu bezeichnen. Die Abnahme der Widerstandszahl ist in diesem Gebiete so stark, daß sogar der absolute Wert des Widerstandes für einen Zylinder von bestimmtem Durchmesser entgegen aller bisherigen Erfahrung mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Die quantitativen Verhältnisse sind aus Fig. 2 ersichtlich, wo der Widerstand in kg pro m Länge eines

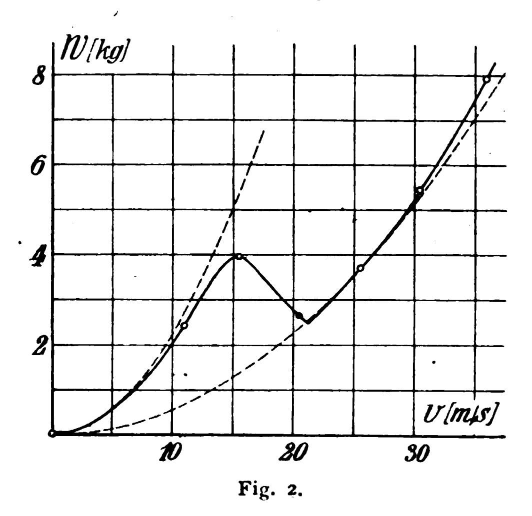


Fig. 2.

Zylinders von 30 cm Durchmesser abhängig von der Windgeschwindigkeit dargestellt ist. Man sieht, daß bei Steigerung der Geschwindigkeit von 15 auf 20 m/sec der Absolutwert des Widerstandes von 4 auf rd. 2,5 kg sinkt. Das rein quadratische Widerstandsgesetz, das in der vorliegenden Darstellung durch die beiden gestrichelten Parabeln gekennzeichnet ist, wird weder vor noch hinter dieser kritischen Stelle innerhalb eines größeren Bereiches befolgt. Zu Fig. 1 ist noch zu bemerken, daß das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz, wonach sich bei gleicher Reynoldsscher Zahl gleiche Widerstandszahlen ergeben müßten, sehr gut erfüllt wird, indem die den verschiedenen Zylinderdurchmessern entsprechenden Abschnitte der Kurve gut aneinander anschließen bzw. sich überdecken.

4. Neben der Größe der Widerstandszahl sind auch die den verschiedenen Reynoldsschen Zahlen entsprechenden Strömungsformen von Interesse und können wichtige Aufschlüsse über die Strömungsvorgänge liefern. Es wurde bereits erwähnt, daß bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen die Bewegung im wesentlichen unter der Wirkung von Zähigkeitskräften vor sich geht. Wir haben auf Grund der angegebenen Arbeit von H. Lamb das Stromlinienbild der ebenen Zylinderströmung für die Reynoldssche Zahl $R = 1$,

1) H. Lamb, On the uniforme motion of a sphere through a viscous fluid. Phil. Mag. 21, 120 1911.

2) Vgl. E. F Relf, Discussion of the results of measurements of the resistance of wires, with some additional tests on the resistance of wires of small diameter. Technical report of the advisory comittee for aeronautics 1913/14, S. 47.

3) Vgl. G. Eiffel, Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. Compt. rend. 155, 1597, 1912; ferner Cap. G. Constanzi, Alcune esperienze di idrodinamica; Rendiconti delle esperienze e degli studi nello stab. di esp. e constr. aeron. del genio. II. Jahrg., Nr. 4, Rom 1912; L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln, Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1914; desgl. C. Wieselsberger, Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1914, S. 140.

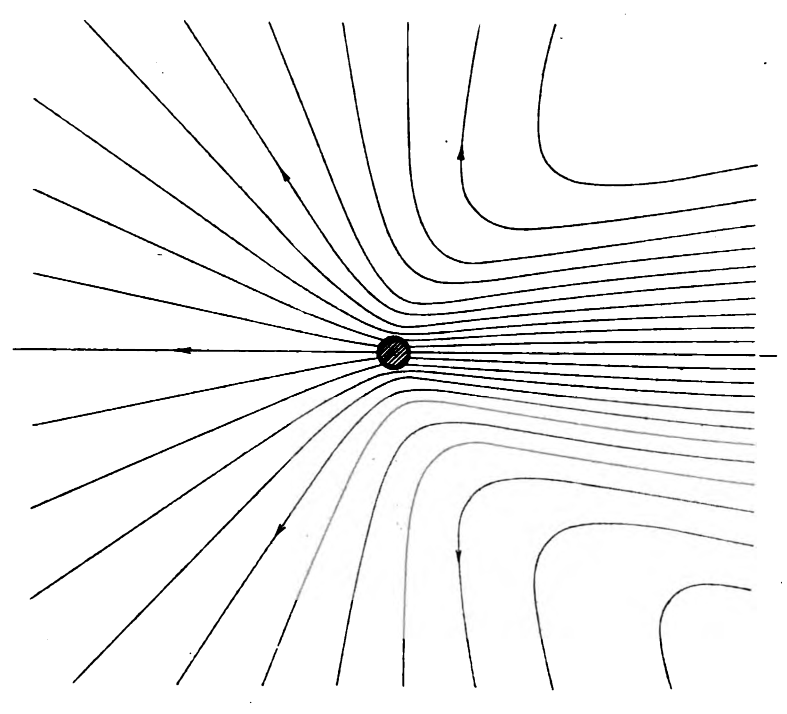


Fig. 3.

bei welcher die Widerstandszahl nach der Lambschen Formel noch annähernd richtig angegeben wird, berechnet. In Fig. 3 sind die absoluten Stromlinien dieser Strömung, in Fig. 4 die relativen Stromlinien derselben dargestellt. Die absoluten Stromlinien geben, wie hier daran erinnert werden mag, die Geschwindigkeitsrichtungen der Flüssigkeitsteilchen für einen relativ zur Flüssigkeit ruhenden Beobachter an, die relativen Stromlinien hingegen

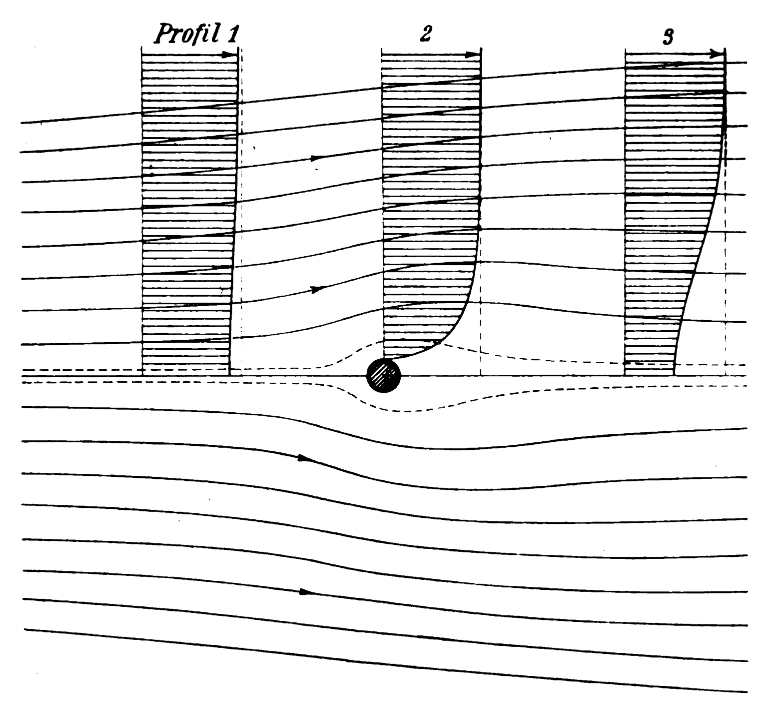


Fig. 4.

die Richtungen für einen relativ zum Körper ruhenden Beobachter. Diese beiden Bilder zeigen, daß die Strömung in bezug auf eine durch die Zylinderachse hindurchgehende und auf der Richtung der ungestörten Strömung senkrecht stehenden Ebene nicht symmetrisch ist. Die relativen Stromlinien schließen sich hinter dem Körper weniger dicht aneinander wie vor dem Körper, d. h. die Strömung hinter dem Zylinder ist gegenüber der ungestörten Strömung erheblich verlangsamt. Dies geht besonders auch aus den in Fig. 4 eingezeichneten Geschwindigkeitsprofilen hervor. Aus dem Geschwindigkeitsprofil 3 ersieht man, daß hinten die Geschwindigkeit in einem Abstande von 7½ Zylinderdurchmessern auf weniger als die Hälfte des Wertes der ungestörten Geschwindigkeit abgenommen hat, während die Verzögerung in dem gleichen Abstande vor dem Körper (Profil 1) nur gering ist. An der Oberfläche des Zylinders selbst ist die Strömungsgeschwindigkeit gleich null (Profil 2). Der hinter dem Zylinder sich bildende „Nachlauf" ist dadurch bedingt, daß der Lambsche Ansatz für die Zylinderströmung die Beschleunigungsglieder der Differentialgleichung der Bewegung nicht vollständig vernachlässigt, wie dies bei der Stokesschen Bewegung um die Kugel der Fall ist, sondern nach dem Muster von Oseenschen Rechnungen für die Kugel bis zu einem gewissen Grade berücksichtigt werden. Würde man beim Zylinder nur den Einfluß von Zähigkeitskräften berücksichtigen, wie dies bei der Stokesschen Rechnung für die Kugel erfolgt, so würde sich eine Srömung ergeben, die symmetrisch zu einer durch die Zylinderachse hindurchgehenden und auf der Geschwindigkeitsrichtung senkrecht stehenden Ebene ist (wobei allerdings in diesem Falle die Geschwindigkeit im Unendlichen keinen endlichen Wert hätte). Mit abnehmender Reynoldsscher Zahl wird daher auch die Zylinderströmung sich mehr und mehr der symmetrischen Form nähern. Bei wachsender Reynoldsscher Zahl behält die Strömung bis etwa $R = 80$ den Charakter der Fig. 3 u. 4. Eine photographische Aufnahme des Strömungsbildes bei $R = 3{,}5$, also schon wesentlich außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Lambschen Formel, die in Fig. 5 wiedergegeben ist, bestätigt dieses. Dieses Bild wurde in der Weise gewonnen, daß ein Zylinder von 12,8 mm Durchmesser durch eine Siruplösung bewegt wurde und die Bewegung der auf die Oberfläche der Flüssigkeit aufgestreuten Lykopodiumteilchen photographiert wurde. Die photographische Kamera wurde dabei mit dem Zylinder mitbewegt. Die quantitativen Verhältnisse in größerer Entfernung vom Zylinder können

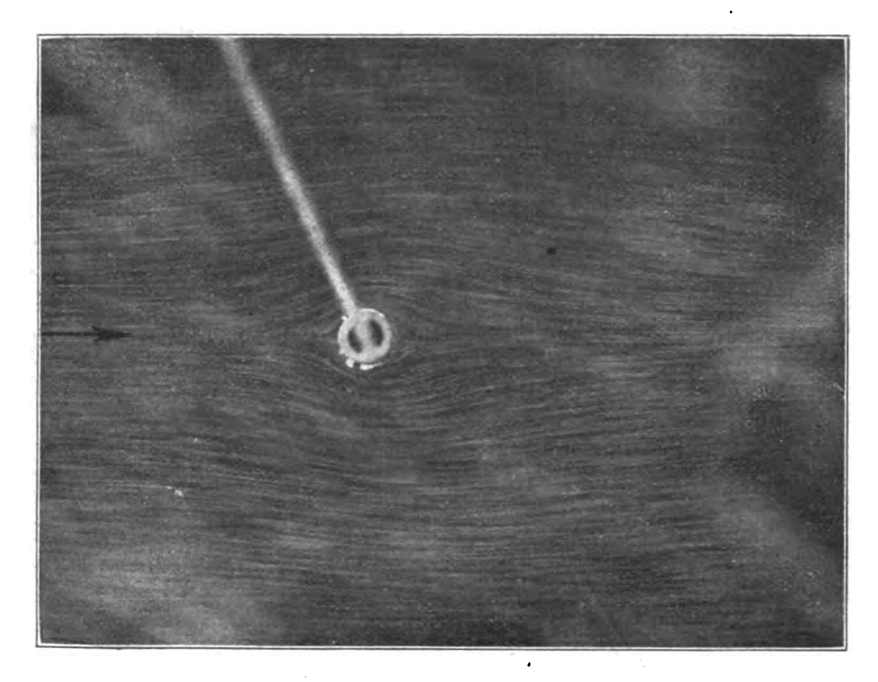
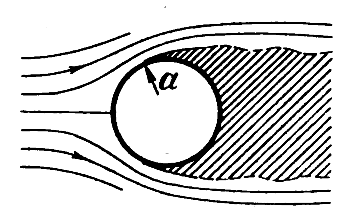


Fig. 5.

hierbei wegen der verhältnismäßig geringen räumlichen Ausdehnung der Flüssigkeit (die Abmessungen des Flüssigkeitsvolumens waren:



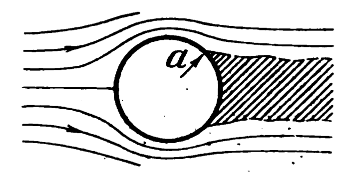


Fig. 6.

Länge = 34 cm, Breite = 24 cm, Tiefe = 8 cm) nicht Anspruch auf völlige Übereinstimmung mit der Bewegung einer unbegrenzten Flüssigkeit machen. Der Charakter der Lambschen Strömung, insbesondere die Abwesenheit von Wirbeln hinter dem Körper, ist indessen hier noch deutlich zu erkennen. Ein Übergangszustand zur Bewegung mit vollständig ausgebildeten Wirbeln hinter dem Körper ist dadurch gekennzeichnet, daß der Nachlauf hinter dem Körper anfängt eine hin- und herschlängelnde Bewegung zu machen (ungefähr bei $R = 100$). Bei weiterem Anwachsen der Reynoldsschen Zahl bilden sich nun Wirbel von sehr regelmäßiger Anordnung, die von v. Kármán eingehend und erfolgreich untersucht worden sind[1]). Die Existenz dieser Wirbel ist auf akustischem Wege gut nachweisbar, da sie wegen ihrer regelmäßigen Folge die Luft in Schwingungen versetzen, welche gut hörbare Töne erzeugen. Wir haben auf diese Weise das Vorhandensein von Kármán-Wirbeln bis zu Reynoldsschen Zahlen von rd. 100000 festgestellt. Mit Überschreitung der kritischen Reynoldsschen Zahl tritt eine neue wesentliche Änderung der Strömungsform ein, indem diejenige Stelle auf der Oberfläche, von welcher aus die Wirbelbildung einsetzt, die sogenannte „Ablösungsstelle", mehr nach der Rückseite des Zylinders hin wandert. Diese beiden Strömungsformen sind in Fig. 6 schematisch dargestellt, wobei das Wirbelgebiet in beiden Fällen durch Schraffur angedeutet ist. Man sieht, daß nach Überschreitung der kritischen Zahl die Breite des Wirbelgebietes, die annähernd ein Maß für die Größe des Widerstandes darstellt, erheblich kleiner ist. Die Ablösungsstelle, an der die glatte Strömung die Oberfläche verläßt, ist mit *a* bezeichnet. Die Druckverteilung für den Zylinder in der ebenen Strömung für den unter- und überkritischen Zustand ist in Fig. 7

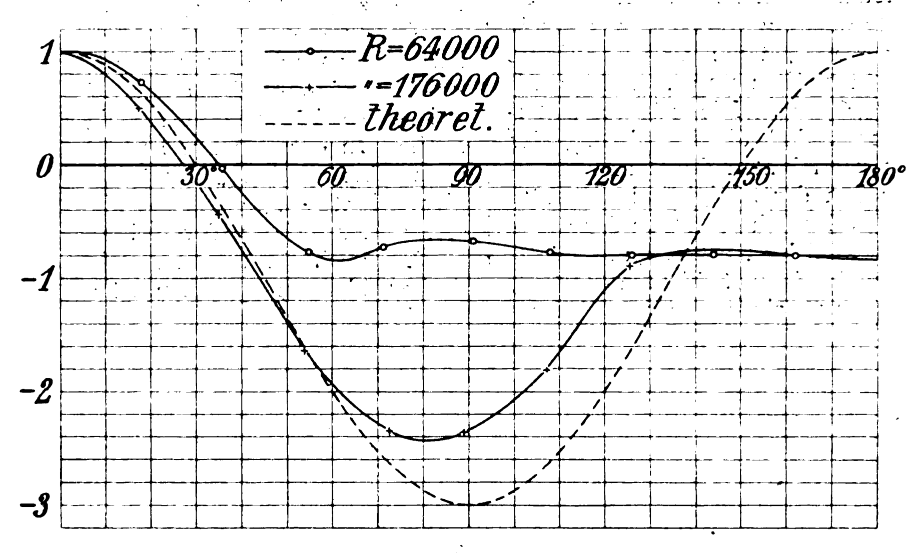


Fig. 7.

1) T. v. Kármán u. H. Rubach, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Diese Zeitschr. 13, 49, 1912.



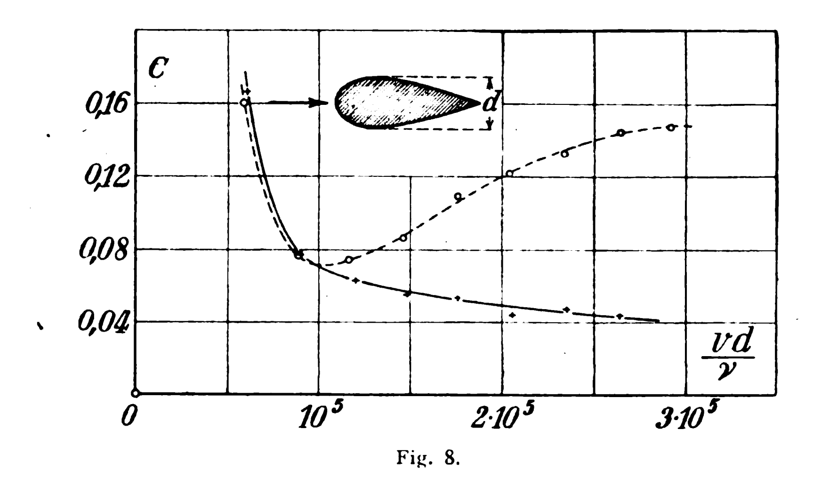


Fig. 8.

nach englischen Versuchen dargestellt[1]). Die auf der Abszissenachse aufgetragenen Winkel sind von dem vordersten Punkt (Staupunkt) des Zylinders aus gerechnet. Die Ordinaten bedeuten hierbei das Verhältnis des an irgendeiner Stelle gemessenen Druckes zu dem Drucke am Staupunkte. Die gestrichelte Linie ist die aus der Theorie der reibungslosen Flüssigkeit sich ergebende Druckverteilung, die den Widerstand Null liefert. Dieser Verteilung kommt die bei der Reynoldsschen Zahl $R = 176\,000$ erhaltene Druckverteilung erheblich näher als die unterkritische Verteilung bei $R = 64\,000$. Die nähere Untersuchung zeigt nun, daß die Wanderung der Ablösungsstelle nach hinten damit zusammenhängt, daß die von der Zähigkeit beeinflußte Strömung in der allernächsten Nähe der Oberfläche, die ursprünglich in einem glatten Entlanggleiten der flüssigen Schichten besteht, bei Überschreitung einer gewissen Reynoldsschen Zahl plötzlich stark mit kleinen Wirbeln durchsetzt wird. Man sagt, die Grenzschicht wird „turbulent". Erzeugt man diese Turbulenz, die bei einer bestimmten Reynoldsschen Zahl von selbst sich einstellt, durch besondere Vorrichtungen, z. B. indem man vor den Versuchskörper ein grobes Sieb von passender Maschenweite aufstellt oder durch wirbelerzeugende Hindernisse auf der Vorderfläche des Körpers (z. B. Rauhigkeiten), so kann die Verlagerung der Ablösungsstelle nach rückwärts auch schon bei kleineren Reynoldsschen Zahlen erreicht werden.

Auch nach Überschreitung der kritischen Zahl zeigen sich mitunter sehr eigenartige Erscheinungen, die sich in einer starken Veränderlichkeit der Widerstandszahl äußern. Insbesondere scheint hier die Rauhigkeit der Oberfläche eine wesentliche Rolle zu spielen. Ein Beispiel für einen solchen Fall ist in Fig. 8 wiedergegeben. Dargestellt ist wieder die Widerstandszahl abhängig von der Reynoldsschen Zahl $\frac{vd}{\nu}$, wobei d die Dicke senkrecht zur Strömungsrichtung ist, für einen hinten zugespitzten Zylinder, dessen Querschnitt aus der gleichen Abbildung zu ersehen ist. Die ausgezogene Kurve wurde bei vollkommen glatter Oberfläche erhalten, die gestrichelte bei schwacher Rauhigkeit der Oberfläche. In letzerem Falle tritt, wie man sieht, nach Überschreitung der kritischen Zahl, die hier bei etwa $R = 70\,000$ liegt, wieder ein starkes Anwachsen der Widerstandszahl ein, so daß auch für diesen Bereich das quadratische Widerstandsgesetz mit konstanter Widerstandszahl keineswegs befolgt wird. Eine wesentliche Aufgabe der experimentellen Aerodynamik wird sein, zu versuchen, diese eigenartigen Vorgänge zu klären.

Der Verfasser möchte zum Schlusse nicht versäumen, Herrn Prof. Prandtl für die wirksame Unterstützung, die er dieser Arbeit zuteil werden ließ, seinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Göttingen, Aerodynamische Versuchsanstalt, April 1921.

(Eingegangen 25. April 1921.)

1) G. J. Taylor, Pressure distribution round a cylinder. Techn. report of the advisory committee for aeronautics, 1915/16, S. 30.

Verfahren zur Kompensation der elastischen Nachwirkung.

Von K. Bennewitz.

Meßinstrumente mit federnden Teilen irgendwelcher Form, wie insbesondere Anaeroidbarometer, Manometer, Federwagen usw. leiden an dem Übelstand, daß sie eine elastische Nachwirkung besitzen, die bei genaueren Messungen von Belang werden kann. Die Versuche, durch Formgebung der betreffenden Teile diesen Fehler herunterzudrücken, haben zwar gewisse Erfolge gezeitigt; eine vollständige Beseitigung ist auf diesem Wege jedoch nicht möglich, da die elastische Nachwirkung eine nicht zu umgehende Materialeigenschaft ist. In einzelnen Fällen lassen sich die dadurch bedingten Fehler nachträglich korrigieren; aber abgesehen von der damit verbundenen Mühe gibt es Fälle, in denen dies Verfahren nicht zum Ziele führt, nämlich überall da, wo es sich um Erreichung oder Innehaltung bestimmter vorgeschriebener Werte handelt, wie z. B. bei sprungweiser Eichung einer Skala oder bei Regulierung auf Konstanz. Endlich ist aber auch eine nachträgliche Korrektion häufig gar nicht möglich, da zur Berechnung die ganze Vorgeschichte des elastischen Systems oder, im Sinne der Maxwellschen Auffassung, nicht nur die augenblickliche Deformation, sondern auch ihre sämtlichen Abgeleiteten nach der Zeit bekannt sein müssen, was kaum jemals der Fall sein wird.

Hier kann nun ein im folgenden zu beschreibendes Verfahren angewendet werden, das den erwähnten Fehler selbständig eliminiert. Es wurde zuerst bei Anaeroidbarometern zum Zwecke der Höhenmessung im Flugzeuge, wo schnelle Druckänderungen auftreten, erprobt, kann aber auch in sinngemäßer Weise auf andere Apparate übertragen werden und dürfte namentlich für Laboratoriumsmessungen wertvoll sein. Es besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit der bei Pendeln zur Kompensation der thermischen Ausdehnung verwendeten Methode.

Prinzip der Anordnung.

Zum leichteren Verständnis wollen wir zuerst eine bestimmte Anordnung betrachten. Man pflegt sich die elastische Deformation als aus zwei Teilen bestehend vorzustellen, nämlich der zeitlosen elastischen Verschiebung und der zeitlichen elastischen Nachwirkung. Gesetzt, man verfüge über zwei elastische Systeme, etwa zwei Anaeroiddosen, deren elastische Nachwirkungen genau gleich sind, deren Hubwege bei gleichen Beanspruchungen sich jedoch unterscheiden. Setzt man die beiden nun so zusammen, daß sie sich in ihrer Wirkung subtrahieren, so fällt der zeitliche Teil vollkommen heraus, trotzdem entspricht einer endlichen Druckbelastung eine endliche Verschiebung.

Beispielsweise seien in Fig. 1 A und B die beiden Dosen; die Unterseite von A ist auf dem Boden befestigt, die Oberseite trägt eine starre Brücke C, an der die Oberseite der

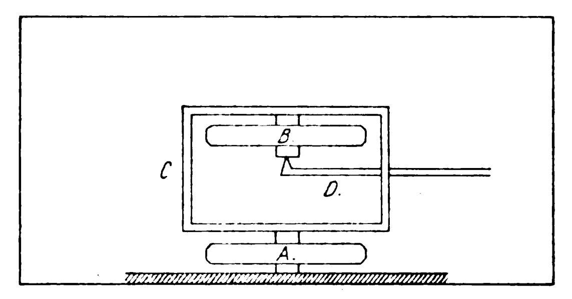


Fig. 1.

Dose B hängt. Die Unterseite von B ergibt alsdann die Differenz der Bewegungen beider Dosen; sie kann durch ein Hebelwerk D zu Meßzwecken nach außen übertragen werden.

Damit wäre die Aufgabe grundsätzlich gelöst. Es erheben sich jedoch zwei Fragen: einmal, kann man Systeme von gleicher elastischer Nachwirkung technisch herstellen? Wenn aber nicht, wie läßt sich diese Forderung umgehen? Zweitens aber: ist es überhaupt möglich, zwei elastische Systeme so zu gestalten, daß ihre zeitlosen und zeitlichen Verschiebungen nicht im gleichen Verhältnis zueinander stehen; oder anders ausgedrückt: bedingen sich nicht etwa Verschiebung und Nachwirkung gegenseitig? Wäre dies der Fall, so wäre die in Fig. 1 beschriebene Anordnung undurchführbar.

Diese beiden Fragen sollen nun im folgenden gemeinsam beantwortet werden. Es wird dabei auf eine frühere Arbeit des Verfassers[1]) über die elastische Nachwirkung Bezug genommen, in der der Standpunkt vertreten wird, daß eine Zerlegung in einen zeitlichen und einen zeitlosen Teil nicht zweckdienlich ist. Die obigen Ausführungen, die dem zu widersprechen scheinen, wurden nur der Anschaulichkeit halber gegeben und finden in folgendem eine exaktere Fassung.

Theorie.

In der oben erwähnten Arbeit ist für die gesamte Deformation y eines elastischen Systems, die durch eine mit der Zeit veränderliche Kraft $G = f(t)$ zur Zeit t_a hervorgerufen wird, die Gleichung abgeleitet worden:

1) K. Bennewitz, diese Zeitschr. **21**, 703, 1920.

$$y = \beta \int_{t_0}^{t_a} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau}. \qquad (1)$$

Hierin bedeutet t_0 den Zeitpunkt, an dem die Kraft auf den völlig ausgeruhten Körper zu wirken beginnt; β und τ sind Konstanten, die von Material und Form abhängen. Bezüglich der Eigenschaften dieser Gleichung muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

Wir wollen sie nun auf eine bestimmte Anordnung anwenden. Es seien (Fig. 2) A und B die Ruhestellungen zweier elastischer Systeme, etwa der Teller zweier Anaeroiddosen, die den gleichen zeitlichen Druckschwankungen unterworfen sind.

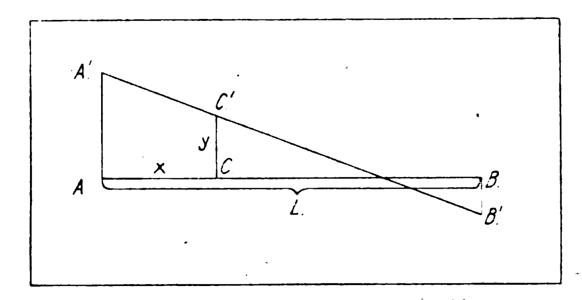


Fig. 2.

Die Stellung dieser Dosen sei derart, daß etwa einer äußeren Druckverminderung eine Verschiebung von A nach A' und von B nach B' entspricht. A und B sind durch einen starren Stab L verbunden, der sich bei der gedachten Verschiebung in die Lage $A'B'$ begibt. Die geringe Längenänderung, die L hierbei erleiden müßte, ist belanglos. Nennen wir die Deformationen, die A und B zu einem bestimmten Zeitpunkt erlitten haben, y_1 und y_2, so hat sich ein beliebiger Punkt C im Abstande x von A um die Strecke y verschoben. Aus der Figur ergibt sich:

$$y = \left(1 - \frac{x}{L}\right) y_1 - \frac{x}{L} y_2. \qquad (2)$$

Die beiden Systeme A und B sind durch die Konstanten $\beta_1 \tau_1$ bzw. $\beta_2 \tau_2$ charakterisiert. Unter Benutzung von Gleichung (1) ergibt sich dann:

$$y = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \beta_1 \int_{t_0}^{t_a} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau_1} - \frac{x}{L} \beta_2 \int_{t_0}^{t_a} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau_2}. \qquad (3)$$

Wir verwandeln die Integrale, indem wir

$$t' = t_a - t + \tau, \qquad (4)$$

also

$$t = t_a - t' + \tau$$

und

$$dt = -dt'$$

einführen und in eine Taylorsche Reihe entwickeln.

$$\int_{t_0}^{t_a} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau} = \int_{t_a}^{t_0} \frac{f(t_a + \tau - t')}{t'}\,dt' =$$

$$= \int_{t_a}^{t_0} dt' \left[\frac{f(t_a + \tau)}{t'} + \sum_1^\infty \frac{t'^{\,\nu-1}}{\nu!} (-1)^\nu f^{(\nu)}(t_a + \tau)\right] \qquad (5)$$

$$= \left[f(t_a + \tau) \ln t' + \sum_1^\infty \frac{t'^{\,\nu}}{\nu!\,\nu} (-1)^\nu f^{(\nu)}(t_a + \tau)\right]_{t_a}^{t_0}.$$

In dieser Gleichung können wir τ als sehr klein gegen t_a unterdrücken, was jedoch in Gleichung (4) nicht gestattet ist, da $t_a - t = 0$ werden kann. Indem wir Gleichung (4) und die Grenzen einsetzen, erhalten wir:

$$\int_{t_0}^{t_a} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau} = f(t_a) \ln \frac{t_a - t_0}{\tau} + \\ + \sum_1^\infty f^{(\nu)}(t_a)\, \varphi_\nu(t_a, t_0), \qquad (6)$$

wobei

$$\varphi_\nu(t_a, t_0) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\nu} \left[(t_a - t_0 + \tau)^\nu - \tau^\nu\right]. \qquad (7)$$

Auch in Gleichung (7) dürfen wir τ unterdrücken, so daß φ_ν tatsächlich nur Funktion von t_a und t_0 ist, nicht aber mehr von τ. Wir führen nun Gleichung (6) mit den entsprechenden Indizes in Gleichung (3) ein und erhalten:

$$y = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \beta_1 f(t_a) \ln \frac{t_a - t_0}{\tau_1} + \\ + \left(1 - \frac{x}{L}\right) \beta_1 \sum_1^\infty f^{(\nu)}(t_a)\, \varphi_\nu(t_a, t_0) - \\ - \frac{x}{L} \beta_2 f(t_a) \ln \frac{t_a - t_0}{\tau_2} - \frac{x}{L} \beta_2 \sum_1^\infty f^{(\nu)}(t_a)\, \varphi_\nu(t_a, t_0).$$

oder anders geschrieben:

$$y = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)\beta_1 - \frac{x}{L}\beta_2\right]\left[f(t_a) \ln (t_a - t_0) + \\ + \sum_1^\infty f^{(\nu)}(t_a)\, \varphi_\nu(t_a, t_0)\right] - f(t_a)\left(1 - \frac{x}{L}\right)\beta_1 \ln \tau_1 + \\ + f(t_a) \frac{x}{L} \beta_2 \ln \tau_2. \qquad (8)$$

Über x können wir noch frei verfügen; wählen wir es so, daß

$$\left(1-\frac{x}{L}\right)\beta_1=\frac{x}{L}\beta_2, \qquad (9)$$

so wird:

$$y=f(t_a)\left[\frac{x}{L}\beta_2\ln\tau_2-\left(1-\frac{x}{L}\right)\beta_1\ln\tau_1\right]\cdot \qquad (10)$$

In der Klammer kommen jetzt nur noch konstante Größen vor; y ist also proportional der augenblicklich wirkenden Kraft $f(t_a)$, d. h. nachwirkungsfrei. Hierzu ist noch nötig, daß die Klammer nicht verschwindet. Die dazu notwendige und hinreichende Bedingung lautet mit Rücksicht auf Gleichung (9): $\tau_1 \lesseqgtr \tau_2$, was erfahrungsgemäß immer erfüllbar ist.

Da nämlich τ im wesentlichen eine Materialkonstante ist, so können wir durch Benutzung zweier Systeme verschiedenen Materials dieser Bedingung genügen. Damit ist denn auch die Frage nach der Realisierbarkeit der Systeme erledigt.

Die andere Frage bezüglich der Verwendung einer geeigneten Anordnung wird durch Gleichung (9) beantwortet. Diese besagt, daß man bei Verbindung zweier beliebiger Systeme nach dem Schema der Fig. 2 durch Wahl des Punktes C immer Nachwirkungsfreiheit erzielen kann, ohne etwa bei der Auswahl der Systeme gebunden zu sein.

Auf eine mögliche Temperaturempfindlichkeit der Anordnung wollen wir hier nicht eingehen, da noch zu wenig Erfahrung darüber vorliegt.

Praktische Anwendungsformen.

Die sich aus dem Schema der Fig. 2 ergebende Form für ein kompensiertes Barometer ist in Fig. 3 dargestellt. Zwei versetzt angeordnete Dosensysteme mit ungleichartigen elastischen Eigenschaften wirken auf einen gemeinsamen Hebel C, auf dem ein Läufer D verschiebbar ist; dieser überträgt die Bewegung weiter auf ein Hebelwerk.

Versuche mit derartigen Instrumenten gaben

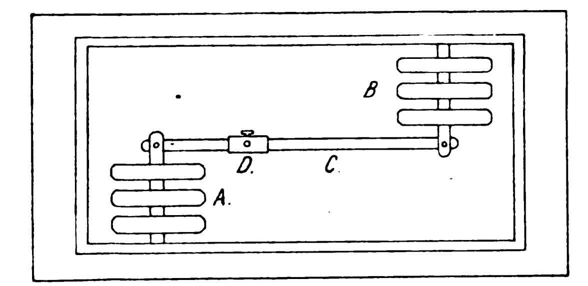


Fig. 3.

ausgezeichnete Resultate; es gelingt leicht, den absoluten Wert der Nachwirkung auf wenige Prozent des Wertes zu bringen, den das einzelne nicht kompensierte System besitzt. Man wird natürlich gealterte Dosen verwenden, weil andernfalls häufig nachjustiert werden muß. Durch Alterung allein dürfte man schwerlich derart günstige Ergebnisse erhalten. — Auch Manometer lassen sich nach Fig. 3 ausführen.

Das Verfahren läßt sich nun nicht nur auf Dosen anwenden, sondern auch auf beliebige Federn; in dieser Form kann es bei Federwagen oder zu anderen Kräftemessungen dienen.

Immer kommt es darauf an, die zu messende Kraft in zwei einander proportionale Teile zu zerlegen, die auf die beiden Federsysteme gesondert wirken. Man könnte etwa daran denken, die Kraft mittelst zweier getrennter Schnurläufe mit Rollenführung auf die beiden durch einen Stab verbundenen Systeme A und B zu übertragen (Fig. 4). Eine derartige Vorrichtung würde

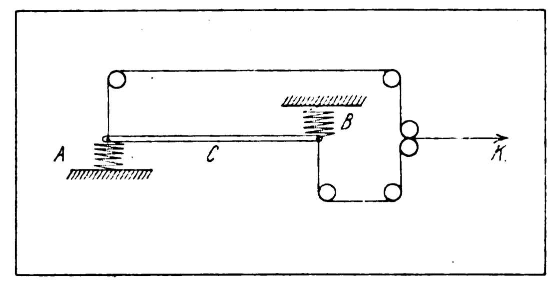


Fig. 4.

aber infolge Reibung und toten Ganges nicht sehr sicher arbeiten.

Viel zuverlässiger ist die in Fig. 5 gegebene

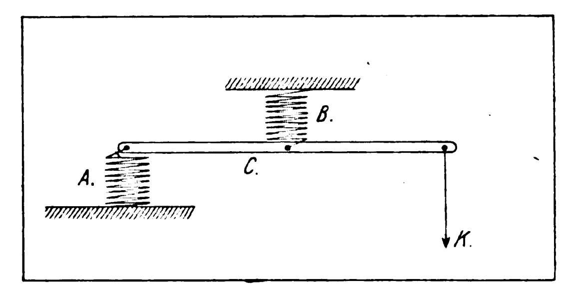


Fig. 5.

Anordnung. Hier wirkt die Kraft K auf das Ende des Hebels C, der durch die beiden Federn A und B getragen wird. Nun sind zwar die auf A und B wirkenden Teilkräfte nicht mehr gleich wegen der verschiedenen Hebelmomente, wohl aber immer einander proportional. Die Theorie erfährt dadurch keine wesentliche Abänderung; lediglich die Größen β

ändern ihren Wert. Jedenfalls muß sich auf dem Hebel C immer ein Punkt befinden, der nachwirkungsfrei arbeitet. Diese Anordnung dürfte sich für Federwagen und ähnliche Instrumente besonders bewähren.

Charlottenburg, 6. April 1921.

(Eingegangen 11. April 1921.)

Theoretisches über neuere Beobachtungen zur Relativitätstheorie. (Nachtrag.)

Von M. v. Laue.

Auf der Naturforscherversammlung in Nauheim[1]) konnte der Verfasser für die Theorie der Rotverschiebung der Spektrallinien den Nachweis erbringen, daß sich in einem Koordinatensystem mit der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = V^2 dx^{4^2} - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad (8)$$

sofern in ihr die Koeffizienten V und γ_{ik} von $t = \frac{x^4}{c}$ unabhängig sind, die Lichtwellen im leeren Raum ohne Änderung ihrer Fortpflanzung. Doch knüpfte der Gedankengang an die Näherungsgleichung (6) an, so daß man schließlich hätte fragen können, ob denn der Beweis in Anbetracht der Kleinheit dieses Effekts auch genau genug wäre. Obwohl dies wohl der Fall ist, wollen wir ihn hier doch durch einen anderen ersetzen, welcher unmittelbar von der streng gültigen Wellengleichung (4) ausgeht.

Wir machen in ihr den Ansatz

$$\Phi_i = B_i e^{\sqrt{-1}\nu t}.$$

Die Frequenz ν und der Vektor B sollen als Funktion von x^1, x^2, x^3 angenommen werden. Aus ihm folgt:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\nu t}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_l} + \sqrt{-1}\, B_i \frac{\partial(\nu t)}{\partial x^l}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^k \partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\nu t}\left[\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^l} + \right.$$

$$+ \sqrt{-1}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x^k}\frac{\partial(\nu t)}{\partial x^l} + \frac{\partial B_i}{\partial x^l}\frac{\partial(\nu t)}{\partial x^k}\right) +$$

$$\left. + B_i \frac{\partial^2(\nu t)}{\partial x^k \partial x^l}\right) - B_i \frac{\partial(\nu t)}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial(\nu t)}{\partial x^l}\right].$$

Ist weder k noch l gleich 4, so hat der letzte Summand $\left(B_i \frac{\partial(\nu t)}{\partial x^k}\frac{\partial(\nu t)}{\partial x^l}\right)$ den Faktor t^2. Sonst treten in beiden Klammern nur Glieder auf, welche in t von der ersten oder nullten Ordnung sind.

Nun enthält aber die Wellengleichung (4), die für den ladungsfreien Raum ($P = 0$)

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{kl=1}^{4} g^{kl}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^k \partial x^l} + F_i = 0$$

lautet; zufolge der Maßbestimmung (8) außer den Φ_i und ihren Ableitungen nur von t unabhängige Ausdrücke. Sie ist außerdem in den Φ_i und ihren Ableitungen linear. Also erhalten wir in ihr nur ein Glied mit t^2, und dies lautet nach Abspaltung des überall auftretenden Faktors $e^{\sqrt{-1}\nu t}$

$$t^2 \cdot \frac{B_i}{\sqrt{-g}}\sum_{kl=1}^{3} g^{kl}\frac{\partial \nu}{\partial x^k}\frac{\partial \nu}{\partial x^l} =$$

$$= -t^2 \frac{B_i}{\sqrt{-g}}\sum_{kl=1}^{3}\gamma^{kl}\frac{\partial \nu}{\partial x^k}\frac{\partial \nu}{\partial x^l}.$$

Denn es ist für $g^{kl} = -\gamma^{kl}$ $k, l = 1, 2, 3$. Soll die genannte Gleichung identisch in t erfüllt sein, so muß danach die definierte quadratische Form, welche als Faktor von t^2 auftritt, verschwinden, somit muß ν konstant sein.

Berlin, April 1921.

(Eingegangen 26. April 1921.)

1) M. v. Laue, diese Zeitschr. 21, 659, 1920. Die dortige Numerierung der Gleichungen wird hier benutzt und fortgesetzt.

Über die Eigenschaften des Begriffes „Gesamtphysik"[1]).

Von Hugo Dingler.

Zu den im Jahrg. 1920, S. 487 dieser Zeitschrift von mir unter dem Titel „Der starre Körper" gegebenen Ausführungen möchte ich als Weiterbildung der dort gegebenen Gedankengänge Folgendes in Kürze hinzufügen.

Die Diskussionen, welche meine Mitteilung (und sonstige Publikationen) im Gefolge hatten, haben mir gezeigt, daß immer noch die Möglichkeit, daß die Art „der Geometrie unseres Raumes" nicht aus der Realität entnommen werden könne, sondern durch uns als Vorschrift der Realität auferlegt werde (trotzdem sich die Unmöglichkeit des ersteren und das tatsächliche Bestehen des letzteren, wie ich in jener Note zeigte, direkt aufweisen läßt), oft von vornherein als derart ausgeschlossen betrachtet wird[2]), daß

1) Das Nachstehende ist auch eine ganz kurze vorläufige Mitteilung über in meinem bei Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Berlin und Leipzig, erscheinenden Buche „Physik und Hypothese" erhaltene Resultate.

2) Manche meinen alte Aprioristik Hegelscher Observanz vor sich zu haben. Glücklicherweise zeigt sich dem tiefer Blickenden, daß dem nicht so ist.

der Leser gar nicht wagt, die Argumente dafür ruhig auf sich wirken zu lassen. Dies beruht auf der sozusagen instinktiven, jedoch gänzlich unbewiesenen Meinung, daß die Geometrie in jeder Hinsicht genau dasselbe sei, wie irgendein anderes physikalisches Gebiet, und daher genau ebenso behandelt und betrachtet werden müsse. Gerade dies ist aber nicht der Fall. Und dafür möchte ich heute eine Vorstellungsweise als Beweis mitteilen, welche nicht nur dies ohne weiteres zeigt, sondern auch die Eigenschaft hat, die eben noch als völlig unfaßbar erscheinende Möglichkeit eines „Vorschreibens der Geometrie durch uns selbst" sofort unmittelbar ersichtlich zu machen.

Um irgendeine gestaltliche Veränderung feststellen und sogar messen zu können, muß zunächst feststehen, welche Charakteristiken dafür bestehen, daß ein Körper keine gestaltliche Veränderung erleidet. Nur relativ zu dem Zustande der gestaltlichen Unverändertheit hat die Messung einer solchen Veränderung überhaupt einen Sinn. Diese Charakteristiken sind dann also die des starren Körpers und damit die der „Geometrie unseres Raumes". Wir sehen, vor irgendeiner sinnvollen Messung einer Gestaltveränderung muß die Geometrie unseres Raumes stets mit mindestens der gleichen Genauigkeit, als mit der diese Messung gemacht werden soll, schon festliegen. Sie muß also mit jeder beliebigen Genauigkeit überhaupt festliegen.

Die Geometrie ist also der „Nullpunkt"[1]) sozusagen, von dem aus erst jede Gestaltveränderung gemessen werden kann. Da aber jede physikalische Messung auf die Messung von Gestaltsveränderungen schließlich hinausläuft, so hat jede physikalische Messung erst Sinn, wenn dieser Nullpunkt festgelegt ist.

Diese Festlegung kann aber nicht aus der Wirklichkeit, dem Experiment entnommen werden, denn es gibt unterhalb der groben Wahrnehmungsgenauigkeit kein Mittel (und auch über dieser nur scheinbar), den veränderten vom unveränderten Körper zu unterscheiden, welches nicht schon implizit eine logische Definition des starren Körpers enthielte.

Nun ist klar, daß jedes Meßinstrument auf seiner Skala einen Nullpunkt aufweisen muß. Dieser Nullpunkt untersteht völlig unserer Wahl. Aus dem Gesagten leuchtet ein, daß für den obigen „Nullpunkt" jeder physikalischen Messung überhaupt genau das Analoge gilt. Also unterliegt auch die Art unserer Geometrie unserer Wahl, und es ist selbstverständlich, daß diese auf praktischste Weise vorgenommen werden muß. Die einfachste Geometrie ist die euklidische[1]) und diese ist daher zu wählen.

Es zeigt sich, daß unsere ganze Physik (die „Gesamtphysik") nichts anderes ist von einem sehr weiten Standpunkt aus, als die Hineintragung eines grandiosen Beschreibungssystems, Messungsskala, in die Natur[2]). Damit ist aber klar, daß dieses, wie jedes andere Maßsystem, einen Nullpunkt, eine Messungsbasis haben muß. Diese ist die Geometrie[3]). An einer Messungsskala ist aber außer dem Nullpunkt noch etwas unserer Wahl unterworfen: es ist die Maßeinheit, die Größe des „Grades". Alles, was vom Nullpunkt abweicht, wird durch diese Gradeinheit „gemessen".

Nun sind in der Physik (Gesamtphysik) alles, was vom Nullpunkt, der reinen Geometrie, dem starren Körper, abweicht, Vorgänge, und mit ihnen erst beginnt eigentlich die Physik. Diese Vorgänge sollen erklärt werden. Solche Erklärung geschieht durch andere Vorgänge, sie liefern die „kausale" Erklärung des zusammengesetzteren Vorganges. Das Ideal ist, alle physikalischen Vorgänge durch die gleichen „Fundamentalvorgänge" zu erklären. Am liebsten durch einen einzigen. (Siehe das derzeitige teilweise Bestreben, alle Erscheinungen auf elektrische zurückzuführen.)

Dieser gemeinsame Fundamentalvorgang, der allen übrigen zugrunde liegt, wäre die „Elementarkausalität", oder „Elementar-Kausalverknüpfung" und könnte niemals selbst wieder durch andere Vorgänge erklärt werden, da er selbst ja allen übrigen zugrunde liegen soll. Er ist also sozusagen die „Maßeinheit", der Grad, durch den alle Erscheinungen nun vom Nullpunkte aus gemessen, aufgebaut werden sollen. Die Auffassung der Gesamtphysik als eines „Ausmessens" (Ausschöpfens) der Wirklichkeit von dem Nullpunkt der Geometrie aus mittels dieses Elementarvorganges als Gradeinheit zeigt sofort (man kann es auch direkt beweisen), daß die Wahl dieser Gradeinheit ebenfalls völlig uns überlassen ist. Die Wahl wird wiederum auf die einfachste solche Elementarkausalität fallen, und diese ist, wie ich gezeigt habe (Zeitschr. f. Phys. l. c.), der Vorgang des Newtonschen Gesetzes. Damit aber ergeben sich bemerkenswerte Konsequenzen für die Erkenntnis der Natur dieses Gesetzes.

1) Diese Vorstellungsweise wurde zuerst von mir in dem oben genannten Aufsatz angedeutet.

1) Siehe meinen Aufsatz: „Über den Begriff der Einfachstheit in der Methodik der Physik usw." Zeitschr. f. Phys. 1920, S. 425—436.

2) Ebenso, wie z. B. die Thermometerskala ein Beschreibungssystem zur Darstellung der Bewegungen der *Hg*-Säule bildet.

3) Denn sie ist, wie gezeigt, die Basis, von der aus erst irgendeine Messung vorgenommen werden kann.



Das Gesetz selbst ist in seiner Eigenschaft als freizuwählendes erstes Erklärungsprinzip der kausalen Naturvorgänge selbst nicht mehr weiter aus anderen Vorgängen erklärbar und erklärungsbedürftig, und ebenso natürlich die in ihm vorkommende Fernwirkung[1]).

Weiterhin aber sagt uns diese Auffassung der Gesamtphysik, daß nunmehr, nachdem Nullpunkt und Gradeinheit festgelegt wurden, wie bei jeder Messungsskala, alle weitere Messung eindeutig bestimmt ist, und nichts mehr sonst unserer Wahl unterliegt[2]). Haben wir also die genannten beiden Wahlen getroffen, dann erst befinden wir uns auf dem Boden jener Physik, wie man sie sich bisher immer vorgestellt hat, wo nichts mehr der Wahl untersteht und alles Weitere eindeutig und absolut dem Experiment entnommen werden muß, bzw. seiner Entscheidung untersteht, jetzt aber erst steht man in dieser Hinsicht auf einem absolut sicheren Boden, der keinerlei unerwartete Überraschungen in Hinsicht von vollkommenen Umwälzungen usw. mehr befürchten läßt.

Wegen näherer Begründung und Ausführung muß ich auf mein eingangs genanntes Buch verweisen[3]).

1) Es soll damit nicht gesagt sein, daß nun sofort alle Vorgänge durch das Newtonsche Gesetz erklärbar sein müßten. Das widerspräche dem Sinne des Ganzen. Von vornherein läßt es sich natürlich nie sagen, wann es gelingen wird, ein bestimmtes Gebiet in dieser Weise aufzufassen. Bevor dies eintritt, werden seine Erscheinungen durch andere Vorgänge erklärt werden, die dann selbst wieder weiterer Erklärung bedürfen. Auch die elektrischen Erscheinungen bedürfen noch solcher. So mögen die Vorgänge im Atom durchaus zu Recht vorerst auf elektrische zurückgeführt werden, immerhin könnte es sein, daß wir einer weiteren Erklärung schon näher sind, als es den Anschein hat. Nur das zeigen die oben skizzierten Überlegungen, daß, wenn einmal eine Zurückführung auf das Newtonsche Gesetz gelungen ist, eine weitere Reduktion zwecklos und unmöglich bleibt.

2) Natürlich muß man in der experimentellen Forschung und deren vorläufiger Erklärung (Hypothesenbildung) immer wieder zu gewissen Wahlen greifen, aber diese sind eben vorläufig, bis die Reduktion auf das Newtonsche Gesetz einmal gelungen sein wird. Erst diese ist endgültig und dann tritt das Gesagte in Kraft.

3) Die oben skizzierten Ausführungen dürften auch den Weg wirklich zu Ende gehen, den Henri Poincaré in „Wissenschaft und Hypothese" zuerst eingeschlagen hat, an dessen Ausbau ich selbst seit Jahren arbeite, und dem sich A. Einstein in seinem neuesten Akademievortrag „Geometrie und Erfahrung" nunmehr (Januar, erschienen Mai 1921) anschließt, und geben diesem Wege erst seine völlige Rechtfertigung.

München (Universität).

(Eingegangen 16. April 1921.)

Werte der erdmagnetischen Elemente an deutschen Hochschulorten für den Zeitpunkt 1921.5.

Mitgeteilt namens des Magnetischen Observatoriums Potsdam des Preuß. Meteorologischen Instituts.

Von Adolf Schmidt.

Gelegentliche Anfragen Physikalischer Institute haben Anlaß zu einer Zusammenstellung gegeben, deren Mitteilung an diesem Orte vielleicht nicht unwillkommen ist. Sie enthält die für das Jahr 1921, genauer für seine Mitte geltenden Werte der erdmagnetischen Elemente an allen Orten des derzeitigen Deutschen Reichs, Deutsch-Österreichs und des Freistaates Danzig, an denen sich Hochschulen (Universitäten, Technische und Landwirtschaftliche Hochschulen, Bergakademien, Forstakademien) befinden.

Zur Umrechnung auf andere Zeitpunkte genügt es, überall eine der Zeit proportionale Änderung anzunehmen, die bis auf weiteres bei der westlichen Deklination zu $-10'$, bei der Inklination zu $+2'$ und bei der Horizontalintensität zu $-0{,}0002\,\Gamma\,(g^{1/2}\,cm^{-1/2}\,sec^{-1})$ im Jahre anzusetzen ist.

Die Angaben für Graz, Innsbruck, Wien beruhen auf den für 1890.0 gültigen Werten, die Liznar bei seiner magnetischen Aufnahme von Österreich (1889—1895) gefunden hat, alle übrigen auf den von K. Haußmann in Petermanns Mitteilungen (1913) veröffentlichten Karten (1 : 1500000), in denen er die Ergebnisse der magnetischen Vermessungen von Norddeutschland (außer Sachsen) durch Eschenhagen und Edler (1898—1903), Württemberg durch Haußmann (1900), Bayern durch Messerschmitt (1903—1906), Baden, Hessen und Elsaß-Lothringen durch Nippoldt (1906) und Sachsen durch Göllnitz (1907 und 1910) unter Reduktion auf die gemeinsame Epoche 1912.0 zusammengearbeitet hat.

Liznars Werte habe ich zunächst auf 1912.0 umgerechnet und so in das System der übrigen Zahlen eingefügt. Diese Reduktion, die nur auf die Beobachtungen der Observatorien Potsdam und Pola gestützt werden konnte, ist etwas unsicher, was natürlich auch die Schlußwerte beeinflußt.

Zur Umrechnung auf 1921.5 wurden dann den für 1912.0 geltenden Werten der drei Elemente die folgenden Beträge hinzugefügt:

bei der westl. Dekl. $-1^0\,28' - 0',4\,(\varphi - 50) - 0',4\,(\lambda - 10)$,

bei der Inklination $+9' + 1',3\,(\varphi - 50) + 0',7\,(\lambda - 10)$,

bei der Hor.-Int. $[-17 - 4{,}2\,(\varphi - 50) - 0.5\,(\lambda - 10)] \cdot 10^{-4}\,\Gamma$.

Hierin bedeuten φ und λ die in Graden ausgedrückte geographische Breite und Länge. Die Koeffizienten von $(\varphi - 50)$ und $(\lambda - 10)$ beruhen auf einer Ausgleichung der Säkularvariationen an den west- und mitteleuropäischen Magnetwarten, allerdings nach den Beobachtungen während der Zeit von 1908 bis 1916, da neuere Werte bei den meisten noch nicht vorliegen. Die Übertragung auf die Zeit von 1912 bis 1921 ist bei den zwei letzten Elementen, die erst kürzlich durch ein von Osten nach Westen fortschreitendes Extrem (Minimum bei I, Maximum bei H) hindurchgegangen sind, nicht ganz zutreffend; der Fehler geht indessen nicht über die hier zu ziehenden Grenzen hinaus. Die vom Orte unabhängigen Hauptglieder der Formeln sind so angesetzt worden, daß unter Berücksichtigung der zuverlässigen Extrapolation von 1920 auf 1921 die in Potsdam beobachteten Jahresmittel für 1920.5: Dekl. $7^0\,29',2$, Inkl. $66^0\,33',7$, Hor.-Int. $0{,}18606\,\Gamma$ genau dargestellt werden.

1921.5	Westl. Dekl.	Nördl. Inkl.	Hor.-Int.
Aachen	10° 54′	66° 3′	0,1886 Γ
Berlin	7 7	66 39	1854
Bonn	10 23	65 51	1901
Braunschweig	8 37	66 40	1852
Breslau	5 13	65 24	1930
Charlottenburg	7 10	66 40	1853
Danzig	4 17	67 59	1781
Darmstadt	9 29	65 8	1952
Dresden	7 6	65 38	1910
Eberswalde	6 54	66 52	1844
Eisenach	8 38	65 50	1904
Erlangen	8 14	64 29	1971
Frankfurt a. M.	9 28	65 14	1932
Freiberg i. S.	7 1	65 30	1923
Freiburg i. Br.	9 44	63 30	2022
Gießen	9 28	65 35	1913
Göttingen	8 51	66 14	1881
Graz	6 5	61 59	2119
Greifswald	7 3	67 51	1790
Halle a. S.	7 50	66 5	1889
Hamburg	8 51	67 38	1802
Hannover	9 4	66 48	1845
Heidelberg	9 19	64 45	1967
Hohenheim	9 9	64 0	2004
Innsbruck	7 0	62 38	2079
Jena	8 5	65 36	1917
Karlsruhe	9 32	64 17	1987
Kiel	9 2	68 9	1770
Klausthal	8 30	66 23	1869
Köln	10 26	66 0	1893
Königsberg i. Pr.	2 51	67 53	1783
Leipzig	7 38	65 50	1903
Marburg	9 31	65 44	1906
München	7 52	63 18	2045
Münden a. W.	9 4	66 9	1885
Münster	10 6	66 40	1854
Rostock	7 53	67 55	1787
Stuttgart	9 9	64 4	2000
Tharandt	7 1	65 31	1920
Tübingen	9 11	63 53	2009
Wien	5 36	62 58	2073
Würzburg	8 53	64 49	1958

Soweit nicht etwa an einem Orte stärkere örtliche Störungen vorhanden sind, was natürlich nur durch Messungen an Ort und Stelle entschieden werden kann, wird man im allgemeinen annehmen dürfen, daß die Ungenauigkeit der angegebenen Werte bei der Deklination und Inklination nicht über rund 10′, bei der Horizontalintensität nicht über 2 bis 3 Einheiten ($10^{-4}\,\Gamma$) hinausgeht, also nicht wesentlich größer ist, als die ohnehin durch die übliche Nichtberücksichtigung der täglichen Schwankung entstehenden Fehler.

Um die magnetischen Elemente für irgendeinen andern Ort in Deutschland zu finden, verfährt man am besten so, daß man den erwähnten Karten von Haußmann die Unterschiede der für diesen und für einen nahegelegenen, in der Tabelle stehenden Punkt entnimmt und sie den betreffenden Tabellenwerten hinzufügt; denn diese Unterschiede dürfen als nahezu unveränderlich angesehen werden.

(Eingegangen 16. April 1921.)

Die Genauigkeit der Zustandsbeobachtungen und die Berechnung der Umkehrpunkte der Drosselerscheinung.

Von K. Schreber.

Es war ein großer Fortschritt in der Darstellung der Zustandsbeobachtungen, als Amagat $pv = f(p)$ aufzeichnete. Bei einem einfachen Gas müßte $f(p)$ eine gerade Linie parallel der p-Achse sein, und die Abweichungen von ihr sind leicht zu erkennen. Für verschiedene Temperaturen liegen aber diese geraden Linien in sehr weit voneinander getrennten Teilen des Blattes, so daß man sie schwer miteinander vergleichen kann. Teilt man pv durch die Temperatur, bildet also $pv/T = P$, so ist für einfache Gase P unabhängig von der Temperatur gleich R. Zeichnet man $P = f(p)$ auf, so erhält man die Linien unveränderter Temperatur unmittelbar nebeneinander und man kann den Einfluß der Temperatur auf die Abweichungen von den einfachen Gasen leicht überblicken. $P - R$ würde diese Abweichung rechnerisch sein. Teilt man diesen Unterschied noch durch p, bildet also $(P - R)/p = y$, so hat man eine Größe, welche die Abweichungen der wirklichen Gase von den einfachen bequem zur Darstellung bringt und sich zeichnerisch leichter behandeln läßt als P, weil sie einen bequemeren Maßstab gestattet.

Ich habe diese Größe für die Beobachtungen Amagats an Luft nach seinem zweiten Ver-

fahren ausgerechnet und die für die vorliegende Frage wichtigen Werte hier aufgeschrieben:

$y \cdot 10^6$.

p	0°	16°	100°	200°
300	1,190	1,345	1,741	1,779
350	1,611	1,658	1,876	1,854
400	1,963	1,956	2,004	1,912
450	2,250	2,220	2,146	1,967

Zeichnet man $y = f(p)$ auf (Fig. 1), so erhält man glatt verlaufende Linienzüge, welche

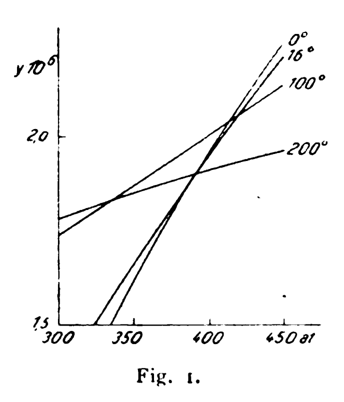


Fig. 1.

keine Möglichkeit bieten, ein Urteil über die Genauigkeit der Beobachtungen zu gewinnen: Amagat hat seine unmittelbaren Beobachtungen nach seinem oben besprochenen Verfahren aufgezeichnet, dann durch sie nach seinem Gefühl eine sich den Beobachtungen nach seiner Meinung am besten anschmiegende glatt verlaufende Linie gelegt und aus dieser die veröffentlichten Zahlen abgelesen. Daß diese und alle aus ihr abgeleiteten wie y in Abhängigkeit von p auf einem glatt verlaufenden Linienzug liegen, ist also durch ihre Herkunft bedingt.

Zeichnet man dagegen $y = f(t)$ auf (Fig. 2), so kann man sich leicht ein Urteil über die Genauigkeit bilden. Man erkennt ohne weiteres, daß die Beobachtungsfehler so groß sind, daß man aus dem Schnitt der 0°- und der 16°-Linie in Fig. 1 keinen Umkehrpunkt ausrechnen darf. Würde man die 0°- und 16°-Punkte in Fig. 2 so verschieben, daß man hier eine gesetzmäßige Änderung der Drucklinien von Druck zu Druck erhielte, so würde sich der Schnittpunkt der 0°- und 16°-Linie in Fig. 1 ganz bedeutend verschieben: man würde vielleicht für 8° einen Umkehrpunkt von 425 Atm. erhalten statt der von Jakob errechneten 391 Atm. Dagegen hilft auch das von Herrn Jakob durch Vereinigung von Rechnung und Zeichnung ausgebildete Verfahren nichts[1]). Man kann durch keinerlei Rechnung oder Zeichnung die Genauigkeit von

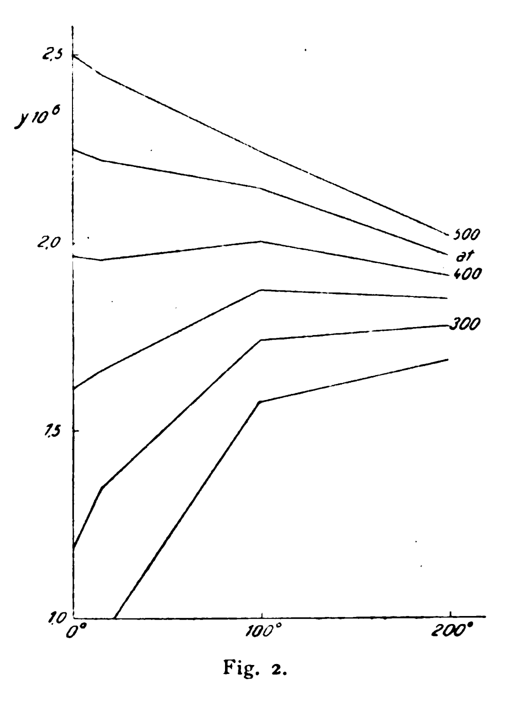


Fig. 2.

Beobachtungen größer machen als sie ist. Die Beobachtungen Amagats sind eben nicht genau genug, um mit ihrer Hilfe die Umkehrpunkte der Drosselwirkung auswerten zu können. Deshalb habe ich in meiner Arbeit auch auf die aus ihnen folgenden Halbachsen der Umkehrpunktsellipse wenig Wert gelegt.

Ich habe mir nicht die Mühe gemacht, die übrigen Beobachtungen, welche Jakob verwertet hat, in ähnlicher Weise auf ihre Genauigkeit nachzuprüfen. Es besteht keine Wahrscheinlichkeit, daß die Beobachtungen Amagats an anderen Stoffen genauer sind als die an Luft. Damit fallen die meisten Punkte Jakobs als unsicher fort und seine Arbeit bringt also durchaus nicht die Entscheidung über die Gestalt der Umkehrpunktslinie, welche er zu erbringen gehofft hatte.

Die von Jakob in meiner kurzen Mitteilung in dieser Zeitschrift vermißte Angabe der Lage der Kleinstwerte von P findet sich im letzten Teil meiner ausführlichen Veröffentlichungen in der Zeitschr. f. kompr. u. flüssige Gase[2]). Ich bemerke hier kurz, daß innerhalb eines gewissen Druckbereiches auf jeder Linie unveränderten Druckes 2 Kleinstwerte von P vorhanden sind.

1) Jakob, diese Zeitschr. **22**, 65, 1921.
2) Zeitschr. f. kompr. u. flüssige Gase, 1920, Heft 6.

(Eingegangen 19. April 1921.)



Das Glockenmirakel von Wehlen.

Von J. Biehle, Berlin-Bautzen.

Als mit brutaler Hand die Enteignung auch in unser hochentwickeltes, in jahrhundertlanger sorgsamer Pflege aufgebautes Glockenwesen eingriff und dabei nur Werte des Alters und der äußeren Gestaltung als Befreiungsgrund, aber keine Rücksichten auf das eigentliche Wesen der Glocke kennen wollte, gelang es noch in letzter Stunde meinen dringlichen Vorstellungen bei den maßgebenden Behörden, der Glocke als musikalischem Instrumente zu ihrem Recht zu verhelfen und auch die Anerkennung des Klangwertes zu erreichen. So konnten da, wo fachmännische Organe vorhanden waren, viele hundert Glocken auf Grund eines günstigen Befundes ihres klanglichen Zustandes oder ihrer Beziehungen zum Geläute gerettet werden.

Eine der vielen Untersuchungsreisen führte mich auch in das freundliche Dörfchen der Sächsischen Schweiz Wehlen, wo ich auf den paradoxen Fall stieß, daß eine akustisch und musikalisch fehlerhafte Glocke aus wissenschaftlichen Gründen zu erhalten sei. Um darüber berichten zu können, muß ich eine kurze Einführung in das Wesen der Glocke als ein akustisches Problem vorausschicken.

Bekanntlich setzt sich der Glockenklang aus einer theoretisch unbegrenzten Anzahl von Eigentönen in vorwiegend unharmonischem Aufbau zusammen. Nur im Bereich der unteren zwei Oktaven kann der Glocke eine solche Gestalt gegeben werden, daß harmonische Schwingungsverhältnisse, wie 1 : 2 : 4, entstehen. Es bauen sich dann zwei mathematisch reine Oktavenintervalle auf, von denen das zweite von zwei weiteren Teiltönen ausgefüllt wird, die sehr gut der Terz und der Quinte eines Moll-Akkordes entsprechen. Auch diesen Intervallen gleichzeitig mit den beiden Oktaven vollkommene Reinheit zu geben, ist ungemein schwierig, aber durchführbar. Dagegen ist die Beeinflussung der Lage der Eigentöne in den oberen Oktaven, gesondert von den unteren, unmöglich, aber auch nicht dringlich, weil die letzteren bei reinen Verhältnissen stark dominieren. — Alle diese Töne der Glocke lassen sich auf dem Wege der Resonanz mit Hilfe der Stimmpfeife, der Stimmgabel oder einer anderen Schallquelle erregen, isoliert von den übrigen darstellen und nach der Schwingungszahl bestimmen.

Innerhalb dieses Klanggebildes tritt aber noch ein Ton auf, der nicht durch Resonanz, sondern lediglich durch Anschlagen zum Erklingen gebracht werden kann. Schon dadurch befindet er sich in einem unüberbrückbaren Gegensatze zu den Tönen der ersteren Art. Aber sein eigenartiges Verhalten geht so weit, daß er mit anderen Schallquellen keine Kombinationstöne und keine Schwebungen bildet. Dieser Schlagton ist sozusagen physikalisch nicht faßbar und somit in der Tonhöhe nicht exakt bestimmbar. Wegen dieser akustisch unerklärlichen Eigenart habe ich ihn in meiner Terminologie des Glockenklanges (siehe Biehle, „Die Analyse des Glockenklanges" im Archiv für Musikwissenschaft, Bückeburg 1918, II) in Kennzeichnung seines Wesens und im Gegensatz zu den „reellen Tönen" der Obertonreihe, die ich auch die „akustischen Konstanten" nenne, als den „imaginären Ton" der Glocke bezeichnet. Er liegt in der Regel der zweiten Konstante am nächsten und kann selbstverständlich mit dieser auch im Einklang stehen. Dann haben wir einen vollkommen reinen „Hauptton". In der ganzen Eigenart dieses Systemes von Tönen liegt es auch begründet, daß als der „Grundton" des Klanggebildes der zweite Teilton anzusprechen und somit der erste als der „Unterton" zu orientieren ist.

Die große Glocke auf dem Turme in Wehlen hat nun unter Reduktion des Grundtones auf 100 Schwingungen folgendes Klangbild:

Unterton	61,6	
Grundton	100,0	
Schlagton	113,3	
1. Oberton	134,0	= Charakteristik[1])
2. „	175,2	
3. „	226,4	
4. „	294,2	
5. „	339,7	

Der Aufbau ist also durchaus unharmonisch und die Glocke vom Standpunkte des Fachmannes sehr fehlerhaft. Ganz besonders störend innerhalb des Klangbildes liegt der Schlagton. Beim Läuten kämpfen beide, Schlagton und Grundton, gegeneinander mit dem Eindrucke, als ob zwei Glocken im Abstande eines Ganztones zusammenklängen. (Übrigens waren die beiden enteigneten Glocken von derselben Verfassung, so daß tatsächlich der Dreiklang des Geläutes doppelt, d. h. einen Ganzton tiefer transponiert nochmals zu hören war.) Im übrigen verhielt sich die Glocke zunächst normal: Die akustischen Konstanten ließen sich deutlich und genau bestimmbar vernehmen; besonders kräftig erklangen die beiden unteren Teiltöne. Der Schlagton konnte naturgemäß nur durch Anklopfen, nicht durch Resonanz hörbar gemacht werden.

Das Phänomen, um das es sich jetzt handelt,

1) Siehe „Analyse des Glockenklanges".



trat erst hervor, wenn zunächst der Unterton erregt wurde. Solange dieser kräftig fortklang, versagte die Ansprache des Grundtones und an dessen Stelle erklang unverkennbar der Schlagton. Erst wenn die Kraft des Untertones nachließ, vermochte sich der Grundton bei erneuter Erregung durchzusetzen. So konnte man, während der Unterton fortklang, den Ganztonschritt — zuerst 113 dann 100 — melodisch hervorrufen und somit jeden Zweifel über eine richtige Beobachtung oder Täuschung beheben.

Der Vorgang wird gewiß allgemein den Physiker nachdenklich machen, aber in seiner Bedeutung nur von der Fachwelt voll ermessen werden, die im jahrhundertlangen Bemühen dieses Mysterium des Schlagtones zu enthüllen suchte. Ich habe wohl unter den von mir nach gleicher Methode untersuchten Glocken, die jetzt in das Tausend gehen, solche in ähnlicher akustischer Verfassung des Klangbildes, aber niemals mit dieser Erscheinung angetroffen, die zu erklären vorläufig aussichtslos erscheint. Es liegt gewiß am nächsten, an die Theorie der Kombinationstöne zu denken. Aber der Schlagton kann hier weder als Differenz- noch als Summationston erster oder höherer Ordnung erklärt werden, dessen Primärtöne die unteren beiden Konstanten der Glocke wären. Allerdings läßt sich die Beziehung konstruieren, den Schlagton als die Duodezime des ersten Differenztones anzusehen (die kleine rechnerische Ungenauigkeit wäre belanglos, da ja der Schlagton nicht exakt in der Schwingungszahl bestimmbar ist und auch 115,2 zählen könnte.) Aber befriedigend ist diese Erklärung nicht. Dagegen kann das akustische Wunder dieser Glocke von Wehlen zugunsten der in meinen Schriften aufgestellten Theorie des Glockenklanges gedeutet werden, daß der Schlagton als eine Resultante anzusehen sei, dessen Komponenten die Gesamtheit der reellen Töne sind.

An der Hand dieses gewiß sehr eigenartigen Beispieles schien es mir ganz geeignet, dem physikalischen Leserkreise einmal das Problem, das uns die Glocke von jeher als ein Rätsel erscheinen ließ und dessen Verfolgung Mitarbeit verlangt, nahe zu führen.

(Eingegangen 25. März 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Untersuchungen über Aufbau und Zusammenschluß der Maßsysteme.

Von W. Porstmann.

(Fortsetzung.)

Das angeführte Verfahren der Ordnung der Mengen in eine eindimensionale Reihe kommt erst dann zur durchschlagenden Wirksamkeit, wenn wir nicht mehr für jede Menge einen einzelnen, anschaulichen Begriff mit selbständigem Wort benötigen, sondern wenn wir gelernt haben, mit Hilfe weniger anschaulicher Hauptzahlen die Gesamtheit aller Mengen systematisch aufzubauen, dem Begriffe, dem Worte und auch dem Zeichen nach. Wenn auch die Wurzeln der Zahlenreihe bis in die Bildung anschaulicher Zahlen zurückreichen, so finden sie dort doch nur recht kümmerliche Nahrung. Erst wenn die Bildung von Zahlsystemen beginnt, können sie sich entwickeln und treffliche Früchte treiben.

Die Fünf ist ein am menschlichen Körper nicht weniger als viermal in gleicher Weise auftretendes Zahlbild. Mit Hilfe dieser vier Fünfergruppen lassen sich sehr leicht alle Mengen von Eins bis Zwanzig beherrschen, auch ohne daß man für alle zwanzig selbständig Begriff und Wort hat. Man bildet innerhalb der größeren Menge kleinere, gleich große Gruppen und zählt diese Gruppen. Somit liegt von Natur aus auch schon die Wurzel zu einer vollständig neuen ursprünglichen Art in der Bewältigung der Mengen nahe. Indem man mit Hilfe der ersten, anschaulichen Zahlen derartige Gruppen bildet, etwa lauter Gruppen von fünf Dingen, kann man durch Feststellung der Anzahl solcher Gruppen (ebenfalls durch diese wenigen selbständigen Zahlen) die Grenze der beherrschbaren Mengen hinausschieben. Wir haben im Laufe der Jahrtausende gelernt, die Grenze immer weiter mit Hilfe dieses Leitgedankens auszudehnen, so daß wir heute mit Mengen sicher umgehen können, die den alten Kulturen vollständig unvorstellbar waren.

Die Gruppenbildung ist ein Urbestandteil unserer Zahlengebäude. Die anschaulichen Zahlen, die Zahlenreihe und die Gruppen sind die eigentlichen Grundlagen zur Schöpfung von Zahlensystemen. Bei der Bildung einer Gruppe werden mehrere Dinge zusammengefaßt und als Einheit behandelt. Die Gruppe ist der Norm vergleichbar, mit



der man eine Menge mißt. Die nächstliegende Norm ist natürlich die Einheit. Mit ihr allein läßt sich aber nur der Bereich der anschaulichen Zahlen bilden. Erst wenn man größere Mengen, oben die Fünf, als solche Normen behandelt, kann man den beherrschbaren Mengenbereich mehr oder weniger ausdehnen, je nach der geschickten Benutzung dieser Normen (Gruppen). Derartige Mengennormen können zunächst beliebig aus den anschaulichen Zahlbegriffen ausgewählt werden. Für verschiedene Zwecke wird von Natur aus auch eine andere Norm nahe liegen. Und tatsächlich sind auch die verschiedensten individuellen Mengennormen benutzt worden. Die vorliegenden Mengen mißt man damit, indem man immer die Norm von Eins bis zu ihrem Ende abzählt und — falls dies nötig ist — die abgezählten Häufchen oder Gruppen wiederum mit dieser oder auch mit einer andern Norm zählt. Ein Beispiel, das in unserem Haushalt eine wichtige Rolle seit alters her spielt, ist das Abzählen der Wochentage. Hier ist die Sieben als Norm gewählt. Man zählt die Tage fortgesetzt von 1 bis 7, ohne jemals größere Gruppen aus diesen Siebenern zu bilden. Alle andern Zeiteinheiten, wie Monat, Jahr, stehen, ganz entsprechend den individuellen Maßen, in keiner Beziehung zu der Woche. Indem man nun die Wochen zählt, kann man mit wenigen Zahlen einen weit größeren Zeitraum überblicken, als ohne diese Gruppierung zu je Sieben.

Daß so gut wie alle kleineren Zahlen irgendwo zu derartigen Mengennormen benutzt worden sind, ist schon erwähnt; aber auch größere Mengen lernte man allmählich ähnlich verwenden. Diese Mengennormen sind ganz und gar willkürlich zerstreut und individuell benutzt worden. Haben wir schon innerhalb eines einzigen Maßgebietes (Längenmaße) so gut wie alle kleineren Zahlen als Normen kennen gelernt, so wird die Zersplitterung unvergleichlich größer, wenn wir a l l e vorhandenen Normierungen, denen die Zahl zugrunde liegt, in den Bereich unserer Betrachtungen einbeziehen. Wir stehen hier vor der Notwendigkeit, eine weit größere und primitivere Zersplitterung zu normieren, denn die Zersplitterungen der einzelnen Maßsysteme sind ja nur winzige Teile von der der Mengennormen. Können wir uns bei der Normierung der Maße, wenn es sich um die Wahl einer Zahl als Norm handelt, immer auf die allgemeine Mengennormierung berufen, so sehen wir uns bei der Mengennormierung selbst vor einem grundlegenden Falle, von dem aus wir uns nicht mehr auf einen andern berufen können, denn die Normierung der Menge ist der Grundstein für alle anderen Maß-Normierungen.

Durchgängig sind diese Mengennormen, ganz entsprechend den individuellen Maßen, nur auf ganz bestimmte Maßgebiete beschränkt, die Sieben auf die Zählung der Tage, das Paar spielt im Kleiderhandel eine Rolle, Zehner, Dutzend, Mandel sind bekannte allgemeine Stückmaße. — Die Gruppenbildung geht immer weiter. Man gruppiert nun auch die einzelnen Gruppen wieder und schafft größere zusammengesetzte Mengennormen. Und auch hier ist zunächst die Anzahl der zusammengefaßten Gruppen ganz beliebig, sie ist meist kleiner als die der Untergruppe. 5 Dutzend sind 1 Schock. Hier sind 12 und 5 zur Gruppenbildung benutzt.

Der nächste Schritt in dieser beginnenden Systembildung ist erst eine Errungenschaft der neueren Kulturen, wenigstens der Hauptsache nach. Man sucht die Willkür in der Auswahl der Mengennormen einzuschränken. So vereinigt man 12 Zwölfer oder Dutzend zu einem Gros. Es wird hier nur eine einzige Zahl zur Systembildung benutzt. Der Gedanke ist im Pariser Punkt—Linie—Zoll—Fuß-System ideal verwirklicht. Wir sagen heute, es werden die Potenzen der mehr oder weniger beliebig gewählten Mengennorm 12 als größere oder abgeleitete Gruppen oder Mengennormen eingeführt. Diese Potenzsysteme enthalten eine Mindestzahl von Willküren. Sie sind ein Sonderfall der ursprünglicheren Methode, bei der jede neue Gruppenbildung durch eine neue Hauptzahl vorgenommen ist wie bei dem Gruppengefüge: Einer, Mandel, Schock. Die Potenzsysteme haben sich bis auf den heutigen Tag bewährt, nur hat die grundlegende Hauptnorm eine Wandlung auf die Zehn erfahren.

An Stelle der individuellen Mengensysteme, die auf den verschiedensten Zahlen beruhten (7, 10, 12, 15, 24, 60, 360 sind einige häufiger vorkommende Mengennormen), benutzen wir ein einheitliches auf Zehn aufgebautes Potenzsystem, das nun als die Normierung der Mengenbeherrschung im allgemeinsten Sinne anzusehen ist. Wir bilden Gruppen von 10, 100, 1000 ... Einheiten und zählen die in einer Menge enthaltenen derartigen Gruppen mit den Hauptzahlen von 1 bis 10. Die Bildung der dezimalen Potenzgruppen geschieht ebenfalls nur mit Hilfe der zehn Hauptzahlen. Damit ist eine begriffliche Beherrschung der Mengen erzielt. Zwei wesentliche Umstände sind aber erst noch zu erledigen, bevor eine praktisch brauchbare Mengenmessung auf dieser Grundlage zustande kommt: die Zuordnung von Worten und Zeichen zu den zu zählenden Mengen.

Diese Zuordnung kann so beschaffen sein, daß ein schwerfälliges, nur beschränkt brauchbares System entsteht trotz der idealen begrifflichen Grundlage, oder auch so, daß ein klar durchsichtiges einfaches Gefüge erhalten wird.

Das lateinische Zeichensystem. Die lateinischen Zeichen für die Zahlen sind große Buchstaben. I, X, C, M sind die Zeichen für 1, 10, 100, 1000. Es liegt demnach ein dem dekadischen Begriffssystem angepaßtes Zeichensystem vor. Zwei und drei Einer, Zehner oder Hunderter usw. bezeichnet man durch zwei- oder dreimaliges Nebeneinandersetzen des entsprechenden Zeichens: III = drei, CC = zwei Hunderter. Dieses Verfahren ist ein Überrest aus der anfänglichen Darstellung von anschaulich erfaßten Mengen durch die Mengen selbst. Man macht sovielemal dasselbe Zeichen, als wirklich Einheiten vorhanden sind. Bezeichnenderweise hat man aber bei drei aufgehört. Dies hat zweierlei Grund: einmal wird das Verfahren zur Bezeichnung größerer Mengen immer umständlicher und schwerfälliger, 7 würde dargestellt werden müssen durch IIIIIII; dann aber ist es nicht möglich, diese Menge, ohne die Zeichen der Reihe nach abzuzählen, auf einen Blick sicher zu erkennen. Schon bei IIII sieht man durchgängig zweimal hin, während XXX auf den ersten Blick zu erfassen ist. Wir können IIII wohl ohne weiteres als größer als III erkennen, aber nicht als kleiner als IIIII. Bei uns genügt schon zur Erfassung der Menge Vier nicht mehr recht die anschauliche Gesamtauffassung, sondern wir müssen die zählende Zerlegung zur sicheren Erfassung herzuholen. Ein selbständigeres Zeichen für IIII und IIIII ist dagegen ohne weiteres anschaulich, ohne jede Auflösung aufzunehmen. Der Lateiner ordnet anschaulichen Zahlbegriffen nicht auch anschauliche Zahlzeichen zu. In dem arabischen Zeichensystem ist dagegen für jede Hauptzahl auch ein selbständiges Zeichen gewählt; die der lateinischen Bezeichnung eigentümliche Additionsmethode hat sich nicht erhalten können. Die lateinische Neun wird durch eine analoge Subtraktion dargestellt, allerdings nicht so ausnahmslos wie Zwei und Drei durch Addition. Bei größeren Zahlen findet man durchgängig das Additionsverfahren auch für den Neuner benutzt, und zwar mit Hilfe der Fünferzwischenzeichen und vier andern Einheiten LXXXX = XC. In der Benutzung des Stellenwertes vor und hinter einem anderen Zahlzeichen haben wir den Vorläufer unserer systematischeren Benutzung des Stellenwertes zur Bezeichnung der dezimalen Mengeneinheiten zu erblicken. Nur verstand man damals noch kein übersichtliches, einfachstes Verfahren aus dem Gedanken abzuleiten, der sich erst im arabischen System zu einem wichtigen Ordnungsmittel ausbildete.

Das Additions- und Subtraktionsverfahren gestattet aber immer noch nicht die Darstellung aller Zahlen zwischen 1 und 10. Der Lateiner schiebt nun über das reine dezimale Zeichensystem noch ein Fünfersystem mit ganz anderen Eigenschaften. V, L und D sind die Zeichen für 5, 50 und 500. Diese Zwischenzeichen werden aber immer nur vereinzelt benutzt. Das Additions- und Subtraktionsverfahren gilt für sie nicht etwa in gleicher Weise wie für die dezimalen Zeichen. VVV wäre gleich 15, VC gleich 95 (dagegen gibt es CV, gleich 105). Da sich diese Zahlen auch anders darstellen lassen, verzichtet der Lateiner auf diese Möglichkeit, wodurch gleichzeitig gewisse Doppelsinnigkeiten ausgeschaltet werden. Durch Addition und Subtraktion der dezimalen Zeichen zu den Fünferzeichen gewinnt der Lateiner nun auch zusammengesetzte Zeichen für die noch fehlenden Zeichen: IV, LX... Durch Nacheinandersetzen (Addition) dieser Zeichengruppen von links nach rechts kann man ferner jede beliebige Zahl zwischen 1 und 2000 ausdrücken, wobei allerdings noch einige Regeln von untergeordneterer Bedeutung zu beachten sind. Das lateinische Zeichensystem beruht demgemäß im wesentlichen auf folgenden Elementen: dezimale Gruppenbezeichnung; übergelagerte Fünferbezeichnung; unmittelbare Mengenbezeichnung bis zu drei Dezimalern (XXX), wovon die Fünferzeichen ausgeschlossen sind; Benutzung des Stellenwertes zur Andeutung von Addition und Subtraktion von Dezimalern zu Fünfern und Dezimalern; eindimensionale Schreibung dieser Zeichen von links nach rechts zur Bezeichnung größerer Zahlen; für die Bezeichnung der Tausender kommt ein neuer Umstand hinzu: $\overline{\mathrm{II}}$, $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{C}}$ sind 2000, 10 000 und 100 000, $|\overline{\mathrm{X}}| = 1\,000\,000$.

Wir stehen hier mitten in der Entwicklung einer Mengenbeherrschung dem Zeichen nach, die schon erheblich weit gediehen ist und einen großen Aufwand von Scharfsinn erkennen läßt. Wir stehen aber auch mitten drin in einem System, das zu verwickelt ist, trotz des hineingesteckten Geistes, um noch weiter entwickelt werden zu können, ohne daß die Grundlagen vollständig umgeändert werden. Es ist ein in sich geschlossener Bau, der aber größeren Ansprüchen nur dadurch genügend gemacht wird, daß er vollständig niedergerissen und mit vertieftem Grunde nach neuer Art gebaut wird.

Die Wortzuordnung zu den Mengenbegriffen ist durchaus unabhängig von der Zeichenzuordnung. Sie befolgt ihre eigenen Wege, und es tritt erst in weit späteren Entwicklungsstufen die neue, wichtige Forderung auf, die Worte ähnlich systematisch aufzubauen und zu entwickeln wie die Zeichen. Diese Entwicklung ist aber selbst bei unserem heutigen Dezimalsystem noch nicht in wünschenswerter Weise abgeschlossen. Die neusprachlichen Wortsysteme sind noch sehr willkürlich. Das deutsche und englische weist auf ein Zwölfersystem zurück, das französische auf ein Sechzigersystem, bei dem es keine Worte für Siebzig, Achtzig, Neunzig gab. Bemerkenswert ist die verschiedene Stellung von Zehner und Einer in den verschiedenen Wortsystemen. Während das arabische Zeichensystem gemäß dem Stellenwert immer den größeren Dezimaler zuerst angibt und die folgenden der Reihe nach, sind in den nichtinternationalen Wortsystemen die verschiedensten Launen und Zersplitterungen enthalten, die indes an dieser Stelle nicht weiter erörtert werden sollen.

Während unser gegenwärtiges arabisches Zeichensystem vollständig international verständlich und gebräuchlich ist, sind die Wortsysteme national verschieden und weichen auch im Aufbau weitest voneinander ab. Es sind dies Entwicklungserscheinungen. Zunächst entsteht ein Begriffssystem, die Zeichenzuordnung hinkt schon hintennach und kann die verschiedensten Ausdrucksmittel benützen, die mehr oder weniger gut brauchbar sind. Noch weiter hintennach hinkt die Wortzuordnung in der systematisch besten Ausgestaltung. Beim Wortsystem für die Zahlen stehen wir gegenwärtig noch mitten in der Arbeit, während Begriff und Zeichen schon längere Zeit fast vollkommen entwickelt sind. Im folgenden werden wir noch öfter Gelegenheit haben, auf die verschiedenen Entwicklungsstufen von Begriff, Zeichen und Wort hinzuweisen. Aus unseren Betrachtungen folgern wir zunächst, daß die weitgehende Entwicklung eines Begriffssystems durchaus nicht auch die entsprechende Entwicklung eines zugeordneten Zeichen- und Wortsystems zur Folge haben muß. Andrerseits besteht aber innerhalb der drei Systemgebiete Begriff, Zeichen und Wort naturgemäß innigste Beziehung. Erst muß der Begriff da sein, bevor Zeichen und Wort zu dem Begriff passend geschaffen werden. Die Entwicklung von Zeichen und Wort und entsprechenden Systemen wirkt gegenseitig befruchtend, fördernd, aber auch hemmend. Und ein zweckmäßiges Wort- und Zeichensystem kann und muß die Begriffe schärfen. Die einzelnen Teile eines Begriffssystems und ihre gegenseitige Stellung geben Anlaß, auch im Zeichen und Wort die Teile und ihre Beziehungen auszudrücken. Notwendig müssen Zeichen und Worte für Begriffssysteme auch irgendwelche Systematik aufweisen; wenden wir für alle drei Gebiete ein anderes System an, so befinden wir uns in einer Zersplitterung, die wir eben dadurch vermeiden, daß wir allen drei Gebieten die der äußeren Erfahrung entsprechenden Beziehungen des Begriffssystems unterschieben. Unterschiede müssen sich allerdings in allen drei Systembereichen bemerkbar machen, denn Sprache und Schrift gehören völlig verschiedenen Sinnesgebieten an. Die Eindimensionalität unseres Denkens, Sprechens und Schreibens ist aber das hauptsächlichste vermittelnde Glied.

Aus der Gesamtheit der germanischen und romanischen Sprachen kann man sich ein hinreichendes Bild machen von der Reichhaltigkeit der Mengennormensysteme unserer neukulturlichen Vorfahren. Wie uns die Wortreste noch heute erkennen lassen, waren vor der Einführung des dezimalen Gedankens in den jungen europäischen Kulturen die verschiedensten Mengenmessungen üblich. Auf jeden Fall aber waren sie entsprechend der niedrigen Kultur auch nur wenig entwickelt und dem älteren lateinischen Begriffs-, Zeichen- und Wortsystem in keiner Weise vergleichbar. Die noch jetzt bestehende Zersplitterung der besonderen Normensysteme ist größtenteils auf die seinerzeitige Zersplitterung der Mengenmessung zurückzuführen, indem besondere Mengen auch mit besonderen Verfahren gemessen wurden. Das Dezimalsystem ist erst später aufgenommen. Es hat heute wohl in begrifflicher Hinsicht die Mengenmessung und gewisse besonders wichtige Normierungen (Münzen) vollständig bis zum Ideal durchdrungen; die meisten übrigen Normierungen fußen aber mit ihren Wurzeln noch in Eigenheiten der jungen Kulturen selbst, sie hinken im Anschluß an das Dezimalsystem ebenso hintennach wie das Wortsystem dem Zeichensystem in der dezimalen Mengenmessung.

Der Italiener Fibonacci hatte im Anfang des 13. Jahrhunderts aus dem arabischen Orient die indisch-arabische Methode zur Beherrschung der Zahlzeichen mitgebracht und in Italien eingebürgert. Adam Ries vermittelte die neue Kunst später nach Deutschland. Das neue System ist wie das lateinische dezimal. Beide unterscheiden sich aber in einigen Punkten wesentlich voneinander. Vorbereitet waren die jungen europäischen Kulturen für das neue System durch die allgemeine Ver-

breitung des römischen Systems, das den Rechnungen aller Art zugrunde lag. Also schon das lateinische System hatte den wesentlichen Kampf mit uralten, eingesessenen Sondermengenmessungen aufgenommen. Das indisch-arabische System unterscheidet sich vom lateinischen weniger als dieses von den älteren individuellen Mengenmessungen. Der begriffliche Hintergrund ist bei beiden derselbe. Ihr Unterschied besteht einzig in dem zugeordneten Zeichensystem. Im Vergleich beider Zeichensysteme können wir die Wirkung unsrer Forderung verfolgen, daß begriffliche Zusammenhänge auch im Zeichensystem bestehen sollen. Lediglich die Anwendung eines neuen Zeichensystems bedingt die riesengroße Überlegenheit der arabischen Zahlen über die lateinischen. Die zugeordneten Wortsysteme haben durch die Zeichenumwälzung so gut wie keine tiefer gehende Änderung erfahren, hier steht die Organisation noch aus.

Das arabische Zeichensystem benützt wie das lateinische Wortsystem für jede Hauptzahl ein selbständiges Zeichen. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind die Zeichen für die Hauptmengen der Reihe nach. Die Mengennorm ist der Zehner. Die Potenzen von Zehn sind die abgeleiteten Mengennormen. Im Gegensatz zum lateinischen Zeichensystem erhalten diese Potenzen und auch die Hauptnorm keine selbständigen Zeichen. Sie werden ganz entsprechend dem Begriffssystem von 1 bis 9 gezählt. Jeder Hauptzahl ist immer eine Benennung beizufügen, ob Einer, Zehner, Hunderter usw. Wir benützen einmal die Anfangsbuchstaben zur Benennung dieser Einheiten. XXX ergibt dann 3 Z, IX = 9 E.

$$\mathrm{CCCC} = 4\,\mathrm{H}$$
$$\mathrm{XXX} = 3\,\mathrm{Z}$$
$$\mathrm{IX} = 9\,\mathrm{E}$$
$$\mathrm{CCCCXXXIX} = 4\,\mathrm{H} + 3\,\mathrm{Z} + 9\,\mathrm{E}.$$

Diese beiden Schreibweisen derselben Menge enthalten so ziemlich alle Unterschiede zwischen dem römischen und dem arabischen System.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

C. Dorno, Himmelshelligkeit, Himmelspolarisation und Sonnenintensität in Davos 1911 bis 1918. Veröffentlichung des Preußischen Meteorologischen Instituts, herausgegeben von G. Hellmann. Nr. 303. Abhandlungen, Band VI. 8⁰. 290 S. m. 26 Tafeln und 68 Tabellen. Berlin, Behrend & Co. 1919. M. 54.—.

Die drei Grundprobleme der atmosphärischen Optik: Die spektrale Extinktion und Absorption des direkten Sonnenlichtes, Farbe und Intensitätsverteilung des diffusen Himmelslichtes sowie die Polarisationserscheinungen sind seit etwa 100 Jahren ein vielbearbeites Feld der Physiker und Meteorologen. Während die Kenntnis der Extinktionsverhältnisse des direkten Sonnenlichtes durch Messungen an klimatisch bevorzugten Orten dadurch ganz besonders gefördert worden ist, daß astronomische und physikalische Theorien bei den Untersuchungen brauchbare Führer gebildet haben, ist unser Wissen von der Lichtverteilung und der Polarisation mehr in die Breite als in die Tiefe ausgebaut worden. Die Gründe dafür sind nicht schwer zu erkennen: Den Physikern, welche sich diesen Aufgaben widmeten, lag es meist an der Lösung von speziellen Problemen der Optik, besonders der Optik trüber Medien, an der Durchbildung ihrer oft mit höchstem Scharfsinn ausgedachten Instrumente, aber nur in wenigen Fällen haben sie Beobachtungsreihen von solcher Dauer angestellt, daß die unvermeidlichen meteorologischen Einflüsse zu erkennen sind und sich eine Theorie als Leitfaden bilden ließ. Dazu kommt, daß die Erscheinungen der Extinktion, Himmelshelligkeit und Polarisation derartig miteinander gekoppelt sind, daß für die Meteorologie brauchbare Resultate nur dann zu erhoffen sind, wenn alle drei Elemente gleichzeitig beobachtet und gemessen werden. Auch die so sehr notwendigen experimentellen Grundlagen für eine strenge und physikalisch umfassende Theorie von der Optik der Atmosphäre kann nur durch solche gleichzeitigen Messungen geschaffen werden. Das haben schon die Herren Busch und Jensen in ihrem bekannten Werk über die atmosphärische Polarisation deutlich erkannt und klar ausgesprochen; sie haben auch der Erforschung der Polarisation wieder neues Leben gegeben, viele wichtige Zusammenhänge aufgedeckt und aus der sehr großen Zahl von zerstreuten Arbeiten auf diesem Gebiet die besten neu dargestellt. Einen großen Teil der rein mathematischen Schwierigkeiten hat Chr. Wiener aus dem Weg geräumt.

Zu weiterer Forschung mußten sich aber eine recht große Anzahl günstiger äußerer und innerer Umstände zusammenfinden und sich zusammenhalten lassen, damit die Beobachtungen wirklich fruchtbringend sein konnten.

Es ist das große Verdienst Dornos in den Jahren 1911—1918 im klimatisch offenbar besonders geeigneten Davoser Tal solche Messungen unternommen und mit bewundernswerter Energie und Ausdauer durchgeführt zu haben.

Das vorliegende Werk zerfällt in zwei Teile: 1. Himmelshelligkeit und Polarisation und 2. Sonnen-

intensität. Über den zweiten Teil ist in dieser Zeitschrift schon berichtet worden[1]).

Zur Messung der Flächenhelligkeit des Himmels diente das L. Webersche Milchglasphotometer, zur Bestimmung der Polarisationsgröße ein Webersches Polarisationsphotometer und das noch selten verwandte Cornusche Polarimeter. Die Messungen werden stets untereinander verknüpft und auf den Zenit bezogen, dessen Helligkeit durch Vergleich mit einem, mittels Hefnerkerze geeichten Benzinlämpchen absolut festgelegt wird. Die kurze und klare Angabe der für diese Instrumente notwendigen Wege zur Bestimmung der Apparatekonstanten wird für alle diejenigen sehr nutzbringend sein, die sich der Weberschen Photometer bedienen wollen.

Für die Kennzeichnung der Polarisationsgröße bedient sich der Verf. des Nicholsschen Maßes. Es wird hierbei die Polarisationsgröße des anvisierten Punktes durch das Verhältnis i_1/i der beiden senkrecht zueinander stehenden Komponenten der Lichtintensität ausgedrückt. Das Nicholssche Maß empfiehlt sich für photometrische Messungen der Polarisationsgröße besonders dann, wenn wie bei Dorno die einzelnen Komponenten ihrem Absolutwerte nach bekannt sind und die Bedeutung der einzelnen Komponenten in den theoretischen Betrachtungen hervortritt.

Die Messung der Strahlungsintensität des Himmels im Blauviolett und Ultraviolett geschah auf lichtelektrischem Wege bis $\lambda > 366\,\mu\mu$ mit Elster-Geitelschen Alkalizellen, im Ultraviolett mit einer Cadmiumzelle. Der vom Licht ausgelöste Strom wurde galvanometrisch beobachtet.

Beobachtungen der Wärmestrahlung der Atmosphäre führte der Verf. während mehrerer Monate mit Hilfe von K. Ångströms „Tulipan" aus. Er gibt die Grenzen der Anwendbarkeit dieses neuerdings viel gebrauchten Instrumentes an.

Zur Messung des (Erd-)Bodenreflexes, des Vorder- und Unterlichtes dient das leicht transportable Webersche Relativphotometer, ebenso wie zur Beobachtung der Albedo des „Luftplanktons". Mit diesem Ausdruck hat L. Weber alle an den optischen Erscheinungen der Atmosphäre beteiligten Medien bezeichnet, welche die Extinktion, Absorption und verschiedenartige Emission bedingen, wie: Gasmoleküle, Molionen, Wasserteilchen in allen Phasen, Staub und kleinste Lebewesen. Die Beobachtungen des Luftplanktons interessieren besonders aus dem Grunde, weil die Größe desselben die Sichtweite bedingt und das Plankton wohl auch bei luftelektrischen Messungen mitberücksichtigt werden muß.

Das für einen Beobachter fast übergroße Arbeitsprogramm, von dem oben nur die wichtigsten Teile hervorgehoben sind, hat Dorno mit geringer Assistentenhilfe durchgeführt und rechnerisch die Resultate so verarbeitet, daß die engen Zusammenhänge deutlich erkennbar werden.

Zur Darstellung der Helligkeitsverteilung am blauen Himmel wählt Dorno die für diesen Zweck recht übersichtliche stereographische Projektion mit der Sonne als Pol. Besondere Aufmerksamkeit wird dem „Dunkelzentrum", dem absolut dunkelsten Punkte am Himmel, gewidmet. Nach der ursprünglichen Rayleighschen Theorie soll der dunkelste Punkt im Sonnenvertikal und 90° von der Sonne liegen. Dorno findet, daß sich das Dunkelzentrum mit aufsteigender Sonne langsamer dem Horizont nähert als die Sonne an den Zenit heranrückt, und zwar gilt das nicht nur für die Gesamthelligkeit des dunkelsten Punktes, sondern auch für die beiden (polarisierten) Komponenten i_1 und i, von denen i_1 hauptsächlich von der primären Rayleighschen Diffusion und i von sekundären Einflüssen bedingt ist.

Die Zerlegung der Gesamthelligkeit i_g eines anvisierten Punktes in i_1 und i, wodurch jede Helligkeitsmessung auch die Polarisationsgröße sofort erkennen läßt, zeigt sich ungemein fruchtbar und künftigen Messungen als Vorbild.

Für das Wandern des Dunkelzentrums ergibt sich das interessante Resultat, daß es mit i_1 gemessen, sich bis zu einer Sonnenhöhe von 56° der Sonne um 20°, also auf 70°, nähert, während das i-Dunkelzentrum zwischen 0—55° Sonnenhöhe einen Abstand von 90° von der Sonne wahrt. Das Helligkeitsminimum von i_1 liegt der Sonne in allen Jahreszeiten und bei allen Sonnenhöhen im Grün der Sonne näher als im Rot: Tatsachen, die Dorno auch aus der Rayleighschen Theorie folgert. Auf die weiteren vielfachen und oft mühevollen Vergleiche mit der Rayleighschen Theorie kann hier nur hingewiesen werden, sie geben wichtige Fingerzeige, wie die Theorie selbst auszubauen ist. Dorno benutzt bei diesen Vergleichen mit Vorteil die oft übersehene Tatsache der spektralen Extinktion der diffusen Strahlung; für die Rayleighsche Komponente i_1 gibt er eine angenäherte Berechnung. Für die zweite Komponente wird eine Berechnung deswegen erschwert, weil hierbei der Himmel in Sonnennähe und die leuchtenden Schichten des Horizonts als den Dimensionen nach rechnerisch schwer faßbare Lichtquellen in Betracht kommen.

Wertvolle Resultate werden aus den fast zehnjährigen Beobachtungen der Beleuchtungsstärken S und d einer Horizontalfläche erhalten, einmal bei Beleuchtung durch die Sonne, das andre Mal durch den blauen Himmel. Bei einer Sonnenhöhe von 30° ist $S/d = 5{,}17$; bei 40° wird der Wert 6,22 erhalten.

Bei 60° Sonnenhöhe erleidet die direkte Sonnenstrahlung einen Verlust von 18,8 Proz.; der Wiedergewinn durch die Strahlung der Atmosphäre beträgt 12,8 Proz., so daß ein Verlust von nur 6 Proz. entsteht, der für die senkrechte Inzidenz der Sonnenstrahlen auf wenige Prozente zu schätzen ist. Bei 20° ist der Verlust der direkten Strahlung 40,6 Proz., der Gewinn durch die Himmelsstrahlung 14,3 Proz., der wahre Verlust 26,2 Proz. Mit Ausnahme der größten Einfallswinkel liefert die Himmelsstrahlung etwa 12 Proz. der exterrestrischen Sonnenstrahlung auf die Horizontalfläche. Die Albedo der wolkenlosen Atmosphäre beträgt nach Dorno 4 Proz., in Übereinstimmung mit einem von Abbot angegebenen Werte.

Steht die Sonne im Horizont, so sind die Isophoten fast konzentrische Kreise um das Dunkelzentrum herum; steigt die Sonne, so nehmen sie ellipsenähnliche Gestalt an, die von der Sonne her etwas eingedrückt ist. Bei hohem Stand tritt die Sonne in diese Ellipsen ein. Dorno unterscheidet drei Kurvensysteme: Eins um das Dunkelzentrum, das zweite um die Sonne und das dritte um den Südfuß des Sonnenvertikals (Gegensonne). Dazu kommt noch ein viertes System ungeschlossener Kurven, das am Horizont verläuft.

Die „Dunkellinie" verbindet die Helligkeitsminima. Diese werden erreicht, wenn man die dunkelsten Punkte der größten Kreise aufsucht, die durch die Sonne gehen. Dorno unterscheidet „Sonnenregion" und „Gegenregion", welche durch die Dunkellinie voneinander geschieden sind. Davon zu unterscheiden ist die, geometrisch durch den Ost-West-Vertikal getrennte, „Sonnenseite" und „Gegenseite". Je höher die Sonne steigt um so weiter trennt sich die Dunkellinie vom Äquator und von der Maximalisopolaren; die Flächenausdehnung der Sonnenregion nimmt dabei ab. Bei klarster, durchlässigster Luft ist die Sonnenregion

1) Vgl. diese Zeitschr. **21**, 556, 1920.

kleiner als die Gegenregion. Es gibt so die Lage der Dunkellinie einen Anhalt für die Durchlässigkeit der Atmosphäre.

In optisch ungestörten Perioden ist das Helligkeitsverhältnis Sonne : benachbarter Himmel leidlich konstant, z. B. ist die Flächenhelle der Sonne

bei 10⁰ Sonnenhöhe	1,39	$\times 10^6$ mal größer als die des dunkelsten Punktes am Himmel.
„ 20⁰ „	1,25	
„ 40⁰ „	1,16	
„ 60⁰ „	0,94	

Die ursprüngliche Rayleighsche Theorie vom Blau des Himmels vernachlässigt den Teil des Einflusses auf Helligkeit, Farbe und Polarisation des Himmels, der durch Beugung an gröberen Teilchen, gewöhnliche Reflexion und Brechung ausgeübt wird. Ein Einfluß, dem andrerseits in der Wienerschen Theorie das ausschlaggebende Gewicht beigelegt wird. Dorno schließt aus seinen Beobachtungen, daß dieser, der einfachen Diffusionstheorie fremde Einfluß auf die Sonnenseite und auf relativ kleine Sonnenabstände beschränkt ist und daß er mit sinkender Sonne sein Wirkungsgebiet erweitert.

Die stereographische Projektion läßt besonders die folgenden beiden Resultate der Polarisationsmessungen deutlich hervortreten: 1. Die Isopolaren folgen im allgemeinen den Parallelkreisen um die Sonne, und zwar sowohl am Sonnenhimmel als auch am Gegenhimmel, wo sie sich der Gegensonne als Mittelpunkt zuwenden; 2. die Werte der Polarisationsgröße nehmen auf allen Hauptkreisen, wie im Sonnenvertikal, bis etwa 90⁰ Sonnenabstand zu, um dann wieder zu fallen. Auf den Parallelkreisen bleiben sie annähernd unverändert.

In auffällig starkem Maße ändert sich die Polarisationsgröße mit der Jahreszeit. Im Sommer und im Herbst überwiegt die Polarisation der Gegenregion, im Frühjahr und Winter dagegen die der Sonnenregion. Dorno findet das Maximum der Polarisation des Sonnenvertikals nicht in 90⁰ Abstand von der Sonne, sondern in einem Punkte im NO-(bzw. NW-)Quadranten, ein wenig näher als 90⁰ von der Sonne.

Beobachtungen über die spektrale Polarisationsgröße liegen bisher nur sehr vereinzelt und mit widersprechenden Ergebnissen vor, deshalb bieten Dornos Messungen im Rot und Grün eine willkommene Bereicherung. Er findet: daß bis etwa 30—40⁰ Sonnenabstand die Polarisation im Rot immer größer ist als im Grün, dagegen hat die farbige Polarisation der weiter von der Sonne abstehenden Regionen einen deutlichen Jahresgang, was der Verf. einem Mitspielen der selektiven Absorption des Wasserdampfes zuschreibt.

Da es fast stets üblich ist, alle Helligkeitsmessungen um Himmel auf den Zenit als Einheit zu beziehen, falls es sich nicht um absolute Photometrierungen handelt, so erhalten die ungemein zahlreichen, regelmäßigen und sorgfältigen Messungen Dornos der Polarisationsgröße und der Helligkeit im Zenitpunkt einen besonderen Wert. Der Verf. weist auch mit berechtigtem Nachdruck darauf hin, wie das Purpurlicht in den verschiedenen Jahreszeiten die spektrale Polarisation beeinflußt.

Mit Hilfe der lichtelektrischen Zelle gelingt es, den Durchgang des obersten Erdschattenrandes bei 6,25⁰ und 6,78⁰ Sonnendepression zu beobachten. Ein Wert, der mit sonstigen Beobachtungen gut übereinstimmt und dessen Schwankungen sich aus der wechselnden Transparenz der Atmosphäre erklären lassen.

Grundlegend sind die Untersuchungen über die Lage der Polarisationsebene und ihre Abhängigkeit von meteorologischen Faktoren. Da man bei photometrischer Bestimmung der Polarisationsgröße und der neutralen Punkte mit Hilfe der Einzelkomponenten zur Einstellung der Analysatoren (Nicols) notwendigerweise wissen muß, wie die Polarisationsebene am Himmel liegt, so sind die folgenden Resultate sehr wissenswert. Abgesehen von Punkten in der Nähe des Horizonts und in der Nähe der Sonne selbst, wird die Polarisationsebene immer durch Sonne-anvisierten Punkt-Auge festgelegt. Es kommen Abweichungen bis 2⁰ maximal vor. Nur dort, wo neue Strahlungsquellen zu der primären Lichtdiffusion hinzutreten (Sonne, Horizont, Erdbodenreflex, Purpurlicht), treten größere Abweichungen auf. Im grünen Licht sind die Drehungen der Polarisationsebene aus der normalen Lage stärker als im weißen.

Am Ende des I. Teiles gibt Dorno Richtlinien und Ziele für zukünftige Messungen der Himmelshelligkeit und Polarisation an; Größen, deren Kenntnis sowohl für die Theorie der atmosphärischen Optik, als auch für die praktische Meteorologie von großer und wachsender Bedeutung sind und für deren weitere Erforschung uns Dorno ein Musterbeispiel im vorliegenden Werke gegeben hat. H. Dember.

Berichtigung.

In der Mitteilung über „Schwere und Trägheit" von Ernst Reichenbächer (Nr. 8 dieses Jahrgangs) soll es auf Seite 235, 1. Absatz, drittletzte Zeile „unveränderlichen" statt „veränderlichen" heißen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Friedrich Meyer für Chemie, an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Professor Dr. Ernst Murmann für chemische Analyse.

Ernannt: An der Universität Gießen der ord. Honorarprofessor für theoretische Physik und Geodäsie mit Lehrauftrag für Meteorologie Geh. Hofrat Dr. Karl Fromme und der a. o. Professor für Mathematik Dr. Hermann Großmann zu außeretatsmäßigen ordentlichen Professoren, der Privatdozent Adjunkt Dr. Richard Fante an der Hochschule für Bodenkultur in Wien zum a. o. Professor für Chemie ebenda, die a. o. Professoren an der Universität Halle Dr. Heinrich Schulze (Pharmazeutische Chemie) und Dr. Karl Tubandt (Physikalische Chemie) zu ord. Professoren daselbst.

Gestorben: Der Professor der Physik an der Universität Charkow Dr. A. Grusinzew (1920), der Professor der theoretischen Mechanik, Hydrodynamik und Aerodynamik an der Universität und technischen Hochschule Moskau Dr. N. Jonkovsky (1921), der Professor der Physik an der Universität Moskau Dr. N. Umow (1915), der Professor der Chemie an der Universität Padua Dr. Carlo Moreschi, der ord. Professor der Chemie an der Universität Jena Geh. Hofrat Dr. Ludwig Knorr.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. | 15. Juni 1921. Redaktionsschluß für No. 14 am 24. Juni 1921. | 22. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das photographische Schwärzungsgesetz der Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker und W. Traub.

Die Abhängigkeit der Schwärzung der photographischen Platte von Intensität und Wellenlänge der wirksamen Strahlung, von Expositionsdauer und Entwicklungsverfahren ist für das optische Spektrum durch eingehende Untersuchungen[1]) erforscht worden, während für Röntgenstrahlen in dieser Hinsicht nur wenig Quantitatives bekannt ist. Über die photographische Wirkung homogener Röntgenstrahlen liegt nur eine einzige Arbeit vor: Friedrich und Koch[2]) verwenden als Strahlungsquelle die charakteristische Eigenstrahlung verschiedener Metalle und erzeugen mit Hilfe eines Röhrenphotometers mit verschiedener Strahlungsintensität bei gleichbleibender Zeit verschieden starke Schwärzungsmarken auf der Platte. Wegen der langen, mehrere Stunden beanspruchenden Expositionszeiten ist die Untersuchung auf das Gebiet der kleinen Schwärzungen, etwa $S < 1,1$ (nach Abzug der Schleierschwärzung) beschränkt.

Eine vollständige Aufnahme der Schwärzungskurve erfordert eine Versuchsanordnung, bei der in wesentlich kleineren Zeiten als bei Friedrich und Koch starke Schwärzungen erreicht werden können. Aus diesem Grunde wurde von der Methode des Röhrenphotometers ganz abgesehen und an Stelle der Intensitätskurve die Zeitkurve der Schwärzung aufgenommen.

1) I. M. Eder: Wiener Akad. Ber. Bd. 108, Abt. IIa, 1899; G. Leimbach, Zeitschr. für wiss. Photographie **7**, 157 ff., 1909.
2) W. Friedrich und P. P. Koch, Ann. d. Phys. **45**, 399, 1914.

Wie der eine von uns[1]) anläßlich der Verwendung der Eigenstrahlungserregung zum Zweck der Strahlenanalyse gezeigt hat, gelingt es durch entsprechende Anordnung des Sekundärstrahlers (in geringem Abstand von der Platte) in wenigen Minuten starke Schwärzungen hervorzurufen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die ganze Schwärzungskurve in Abhängigkeit von der Zeit bequem aufnehmen zu können. Voraussetzung ist dabei, daß die primäre Röntgenstrahlung völlig konstant bleibt. Mit welcher Genauigkeit diese Bedingung mit Hilfe einer Coolidgeröhre erfüllt werden konnte, wird im § 2 eingehend besprochen werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in 3 Teile:

1. Die Bestimmung der Schwärzung als Funktion der Expositionszeit für eine bestimmte Wellenlänge und Entwicklungsweise.
2. Der Verlauf der Schwärzungskurven für verschiedene Wellenlängen.
3. Die Bestimmung der Schwärzung als Funktion des Produktes aus Intensität und Zeit (Bunsensches bzw. Schwarzschildsches Gesetz).

Die Erledigung dieser 3 Aufgaben liefert bei Verwendung einer bestimmten, angegebenen Entwicklungsweise[2]) die Möglichkeit, alle auftretenden Fragen mit Ausnahme derer, wo es sich um eine Zurückführung der Schwärzung von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlängen auf deren absolute Intensitäten handelt, quantitativ beantworten zu können.

1) R. Glocker, Fortschr. a. d. Gebiet der Röntgenstr. **24**, 91, 1916.
2) Betr. des Einflusses der Entwicklungsweise wird auf die demnächst erscheinende Dissertation von Schlechter verwiesen.

§ 1. Versuchsanordnung und Photometrie.

Zur Ausblendung des Primärstrahlenbündels dienten die drei Bleiblenden A_1 (mit verschließbarer Bleiklappe), B_1 und B_2 von $2 \times 2{,}5$ bzw. $0{,}8 \times 1{,}6$ cm Öffnung. Der Abstand der Antikathode von dem Sekundärstrahler *S*, der $2{,}5 \times 3{,}8$ cm groß war, betrug 39 cm. Durch die mit Aluminiumblech ausgefütterte Bleiblende *D* wurde ein solcher Sekundärstrahlenkegel ausgeblendet, daß auf der 9×12 cm großen photographischen Platte *P* ein Schwärzungsfeld von 2×2 cm entstand. Blenden, Sekundärstrahler und Platte waren in einem bleigedeckten Zinkkasten untergebracht, der auf der Seite gegen die Röhre noch durch eine große Bleiwand *A* geschützt war. Durch zwei außen am Kasten angebrachte Triebe konnte mittels einer vertikalen und einer horizontalen Schlittenverschiebung jede gewünschte Stelle der Platte vor die mit schwarzem Papier verschlossene Öffnung *D* gebracht werden, so daß im Maximum 12 Felder auf einer Platte erzeugt werden konnten. Beim Exponieren lag die Platte der Blende *D* dicht an, um eine scharfe Abgrenzung der einzelnen Schwärzungsfelder zu erzielen. Beim Verschieben wurde mit Hilfe einer kastenförmigen Führung *K* die Platte von *D* um einige Millimeter abgehoben, um Entstehung von Schwärzungen infolge mechanischen Druckes zu vermeiden.

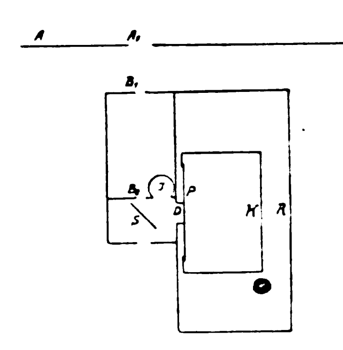


Fig. 1.

Um gleichzeitig mit der photographischen Wirkung die Ionisationswirkung der erzeugten Eigenstrahlung von *S* messen zu können, war bei *J* eine 6 cm lange zylindrische Ionisationskammer von 1,2 cm Durchmesser eingebaut. Die zentrale Elektrode war mit einem Wulfschen Elektrometer verbunden. Diese Anordnung ermöglichte erstens die Kontrolle der Strahlungskonstanz der Röntgenröhre und zweitens die Messung der relativen Intensitäten der Eigenstrahlung von *S* bei ein und demselben Strahler *S* und geänderter Betriebsweise der Röntgenröhre.

Da der Abstand zwischen *P* und *S* nur 4 cm betrug, war das streuende Luftvolumen wesentlich kleiner als bei den früheren Versuchen von Friedrich und Koch. Alle Wände in der Umgebung von *S* und *P* waren mit 0,2 mm dicker Aluminiumfolie belegt, um eine Sekundärstrahlung der Zinkwände zu vermeiden. Als Rückwand der Plattenkassette diente ein Aluminiumblech von 1 mm Dicke. Daß bei dieser Anordnung keine störenden Sekundärstrahlungen auf die Platte auftreffen, zeigen frühere Versuche des einen von uns[1]). Daß von der Rückseite der Platte keinerlei störende Wandstrahlung aufgenommen wurde, geht auch daraus hervor, daß die Zwischenräume zwischen den einzelnen Schwärzungsfeldern auf der photographischen Platte selbst bei den längsten Expositionszeiten völlig klar bleiben.

Als Sekundärstrahler wurden die in Tab. I angegebenen Stoffe verwandt (chemisch reine Präparate von Kahlbaum). Die Strahlungen sind insofern homogen, als sie nur zwei[2]) um etwa 10 Proz. verschiedene Wellenlängen enthalten, von denen die langwelligere K_α-Linie welche erheblich intensiver ist als die K_β Linie, in der Tab. I angegeben ist. Die Härte der Primärstrahlung wurde dem Anregungsgebiet der Strahler entsprechend eingestellt.

Tabelle I.

Sekundärstrahler	Wellenlänge für $K\alpha$ in Ångström	Halbwertschicht in Millimeter Aluminium
Selen	1,10	0,13
Strontium	0,87	0,25
Molybdän	0,71	0,55
Silber	0,56	1,0
Antimon	0,47	2,1
Barium	0,39	3,3

Alle Strahler wurden mit ungefilterter Primärstrahlung erregt. Da beim Barium vielleicht die *L*-Serie, die miterregt wird, nicht völlig in dem Luftraum zwischen *S* und *P* und in der Papierschicht bei *D* absorbiert wurde (Halbwertschicht in Aluminium 0,001 mm), wurde zur Kontrolle auf den Strahler eine chemisch reine Aluminiumfolie von 0,15 mm Dicke aufgelegt.

Die Coolidgeröhre wurde mit hochgespann-

1) R. Glocker, Fortschr. a. d. Gebiet der Röntgenstr. **24**, 98, 1916.

2) Von der sehr schwachen, nahezu mit $K\beta$ zusammenfallenden K_γ-Linie kann hier abgesehen werden.

tem Wechselstrom betrieben, von dem mittels eines synchron rotierenden Nadelschalters jeweils Stromimpulse von gleicher Richtung herausgeschnitten wurden (Reformapparat nach Dessauer). Den Primärstrom für den Einankerumformer lieferte die Akkumulatorenbatterie des Physikalischen Institutes [1]).

Als Plattenmaterial wurden vorwiegend die Hauff [2])-Röntgenplatten benützt. Die Entwicklung der Platte erfolgte völlig im Dunkeln 5 Minuten lang im frisch bereiteten Entwickler folgender Zusammensetzung bei 18° C.:

A.	Wasser	100,0,
	Natr. Sulfit (krist.)	40,0,
	Adurol (Hauff)	5,0,
	Pottasche	30,0,
	Bromkali	0,1.
B.	Wasser	500,0.

A und B zu gleichen Teilen vor dem Gebrauch gemischt.

Die Platten wurden 2—3 Minuten in fließendem Wasser abgespült, 20 Minuten in saurem Fixierbad fixiert und etwa $1^1/_2$ Stunden ausgewaschen. Künstlich beschleunigte Trocknung der Platte wurde vermieden.

Die Photometrie der Platten erfolgte zum Teil mit einem Martensphotometer, zum Teil mit einem nach dem Vorgang von Siegbahn [3]) selbst gebauten Photometer, bei dem die Lichtwirkung auf eine Thermosäule galvanometrisch gemessen wird. Soviel uns bekannt, sind solche Photometer bisher nur zu relativen Schwärzungsmessungen in willkürlichen Einheiten verwendet worden; während uns das Instrument zur Messung der Schwärzung in absolutem Maß diente.

Die Definition der absoluten Schwärzung S durch die Beziehung

$$S = \log_{10} \frac{J_0}{J}$$

(J_0 auf die Schwärzungsstelle der Platte auffallende, J hindurchgegangene Lichtintensität) erfordert, um ganz exakt zu sein, die Angabe der spektralen Zusammensetzung der Lichtquelle. Soweit es sich um optische Methoden handelt, insbesondere solche, bei denen das Auge als Strahlungsreagens dient, genügt die Angabe [1]) „weißes Licht". Bei Verwendung einer Thermosäule wird sich aber der Einfluß der spektralen Zusammensetzung der zum Photometrieren dienenden Strahlung wegen der starken Wirkung der ultraroten Gebiete deutlich bemerkbar machen. Um zu prüfen, inwieweit das mit der Thermosäule erhaltene Verhältnis

$$\log \frac{J_0}{J} = S$$

mit der optisch unter Benützung des Auges bestimmten Schwärzung S_N übereinstimmt, wurde eine Hartmannsche Schwärzungsskala mit der Thermosäule photometriert und in den Strahlengang Wasserfilter verschiedener Dicke (0—17 cm) eingeschaltet.

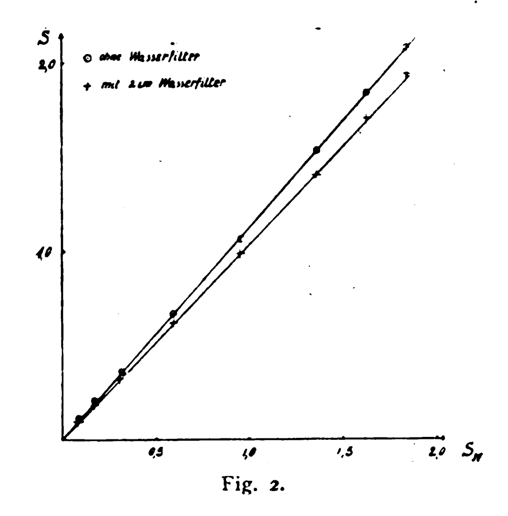


Fig. 2.

Wie Fig. 2 zeigt, ergeben sich nach Abzug der Schleierschwärzung lauter Gerade durch den Nullpunkt, welche sich mit zunehmender Ausschaltung der ultraroten Strahlen der 45°-Geraden annähern [2]), so daß allgemein gilt

$$S = a \cdot S_N.$$

Wegen dieser einfachen Gesetzmäßigkeit, daß die Absorption der ultraroten Strahlen in der Silberschicht proportional der der Lichtstrahlen erfolgt, ist die Anwendung eines Was-

1) Herrn Professor Dr. Regener danken wir auch an dieser Stelle bestens dafür, daß die Batterie uns zu alleiniger Verfügung stand, so daß die Primärspannung stets ganz konstant war.

2) Von der chemischen Fabrik Hauff haben wir vielseitige Unterstützung erfahren dürfen, für die wir zu großem Danke verpflichtet sind.

3) Ann. d. Phys. **42**, 689, 1913; **46**, 289, 1915.

1) Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Professor Dr. Hartmann, dem wir auch an dieser Stelle für die Herstellung der Schwärzungsnormalen bestens danken, stimmen die bei verschiedenen Lichtquellen optisch erhaltenen Schwärzungswerte innerhalb weniger Prozente überein.

2) Der Umstand, daß auch bei völliger Ausschaltung der ultraroten Strahlen die Thermosäule für S um 4 Proz. größere Werte liefert, ist damit zu erklären, daß die Linse hinter der Platte bei unserer Anordnung etwas weiter entfernt ist als beim Hartmannschen Mikrophotometer (Zerstreuung der Lichtstrahlen in der Silberschicht).

serfilters oder die Eichung mit einer Schwärzungsnormale entbehrlich, wenn nur das Verhältnis von absoluten Schwärzungen zu bestimmen ist.

Das Thermosäulenphotometer eignet sich gut für kleine Schwärzungen, während es für $S > 1$ wegen der kleinen Galvanometerausschläge wenig genaue Werte liefert.

§ 2. Die Schwärzung als Funktion der Zeit.

Bei Lichtstrahlen ist es üblich, bei der Schwärzungskurve 3 Teile zu unterscheiden: Das Gebiet der Unterexposition, in dem die Zunahme der Schwärzung annähernd proportional mit der Belichtungszeit erfolgt, das Gebiet der normalen Exposition, in dem die Schwärzung mit dem Logarithmus der Zeit zunimmt, das Gebiet der Überexposition, in dem die Schwärzung kaum merklich zu- und schließlich wieder abnimmt (Solarisation).

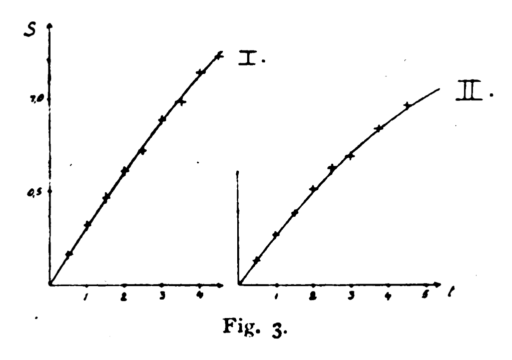


Fig. 3.

Zunächst wurde das Gebiet der Schwärzungen bis etwa $S = 1$ untersucht. 2 typische Kurven sind in Fig. 3 dargestellt; I ist $5^1/_2$ Minuten bei $18,5^0$, II $4^1/_2$ Minuten bei $17,6^0$ entwickelt.

Tabelle II.

Belichtungszeit in Minuten	Absolute Schwärzung I	II
$^1/_2$	0,17	0,13
1	0,33	0,27
$1^1/_2$	0,47	0,38
2	0,61	0,51
$2^1/_2$	0,72	0,63
3	0,88	0,69
$3^1/_2$	0,98	—
$3^3/_4$	—	0,84
4	1,15	—
$4^1/_2$	1,22	0,96
Schleier	0,29	0,25

Wie die Fig. 3 zeigt, gilt der Befund von Friedrich und Koch[1]), daß die Schwärzungskurve bis etwa $S = 1$ eine Gerade ist, nur für eine bestimmte Entwicklungsdauer und Entwicklungstemperatur. Die chemische Natur der Entwicklungssubstanz ist von geringem Einfluß, insofern als nach unseren Untersuchungen sich für die meisten bekannteren Entwickler[1]) ein optimales Entwicklungsverfahren ausfindig machen läßt, bei dem sich bis $S = 1$ ein geradliniger Verlauf der Schwärzungskurve ergibt. Allgemein läßt sich feststellen, daß lange Entwicklung und erhöhte Temperatur in diesem Sinne günstig wirkt.

Bei der Vergleichung von Röntgenstrahlenintensitäten[2]) auf Grund photographischer Schwärzungen ist es nötig, diesem Umstand Rechnung zu tragen und nicht allgemein als gültig anzunehmen, daß bis $S = 1$ Schwärzung und Belichtungszeit bzw. Intensität proportional sind. Dagegen wird man nach unseren Beobachtungen bei den praktisch wichtigen Entwicklungsverfahren (Metol-Hydrochinon, Adurol, Glyzin, Standentwicklung) bei den üblichen Entwicklungsdauern und Temperaturen ($15-20^0$) bis etwa $S = 0,6$ (einschließlich der Schleierschwärzung) immer diese Proportionalität als gut erfüllt annehmen dürfen.

Das von Friedrich und Koch bei mehrstündiger Exposition erhaltene Ergebnis, daß die Schwärzungskurve bis herab zu $S = 0$ geradlinig verläuft, findet sich bei unseren kurzzeitigen Aufnahmen wieder. Die Tatsache, daß die durch Röntgenstrahlen hervorgerufene Schwärzung im Gegensatz zu der durch Licht hervorgerufenen keinen Schwellenwert zeigt, geht auf das deutlichste aus Fig. 4 hervor;

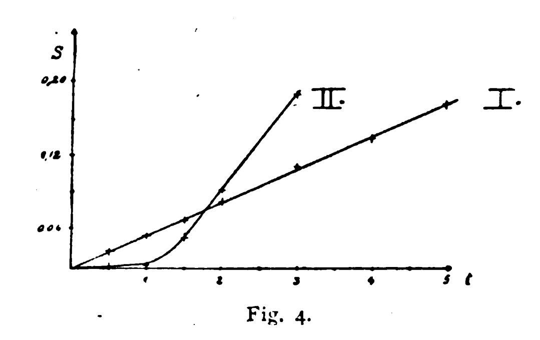


Fig. 4.

I ist eine Röntgenstrahlenkurve, II eine unter möglichst gleichen Bedingungen (an der Stelle des Sekundärstrahlers S befand sich ein Gipsblättchen, das von einer in $1^1/_2$ m Abstand vor

1) Rodinalentwicklung 8 Minuten.

1) Die betreffenden Kurven finden sich in der demnächst erscheinenden Dissertation von Schlechter.

2) Die Berechtigung dafür, daß hier Zeitkurve und Intensitätskurve der Schwärzung miteinander identifiziert werden, folgt aus dem § 4. (Gültigkeit des Bunsenschen Reziprozitätsgesetzes.)



der Blende B_1 aufgestellten Azolampe beleuchtet wurde), erhaltene Lichtkurve. Während bei Koch und Friedrich die Schleierschwärzungen 0,38—0,78 betrugen, sind diese bei unseren Aufnahmen viel kleiner, nämlich nur 0,09. Dies ist insofern wichtig, als ein kleiner Schwellenwert durch Schleierschwärzung möglicherweise verdeckt werden kann.

Tabelle III.

Belichtungszeit in Metallen	Absolute Schwärzung I	II
0,5	0,017	0,000
1	0,034	0,002
1,5	0,049	0,033
2	0,070	0,083
3	0,107	0,185
4	0,138	—
5	0,173	—
Schleier	0,09	0,10

Zur Sicherung des Resultates wurden die Felder mit den kleinen Schwärzungen jeweils doppelt auf die Platten gedruckt. Das Fehlen eines Schwellenwertes für Röntgenstrahlen scheint darauf hinzudeuten, daß die Wirkung der Röntgenstrahlen auf die photographische Platte eine prinzipiell andere ist als die der Lichtstrahlen[1]).

Das Gebiet der sogenannten normalen Exposition ist in Tab. IV und in Fig. 5 dargestellt

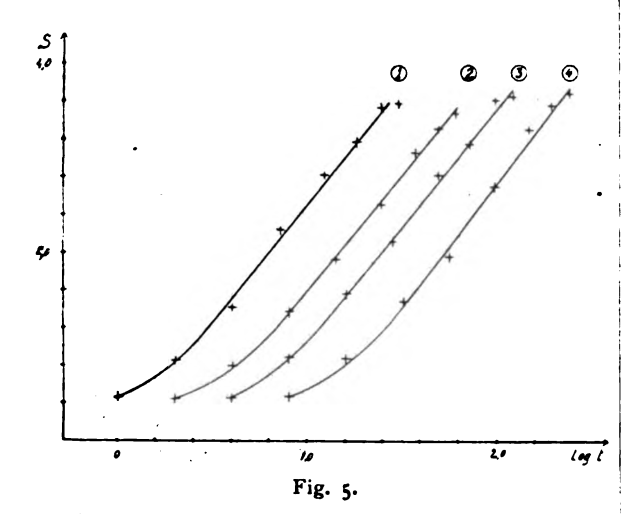


Fig. 5.

(Abszisse: Logarithmus der Zeit). Von etwa $S = 1,3$ bis nahezu 4 ist die Schwärzung proportional dem Logarithmus der Belichtungszeit, so daß sich hierin die Röntgenstrahlen ganz analog wie die Lichtstrahlen verhalten.

1) Vgl. hierzu die Anschauung von Lüppo-Cramer, daß die photographische Wirkung der Röntgenstrahlen in einer mechanischen Zerstäubung des Silberkornes bestehe.

Der Beginn der logarithmischen Geraden ist von der angewandten Entwicklungsweise abhängig (bei Fig. 5: $5^1/_2$ Minuten bei 18^0).

Tabelle IV.

Expositionszeit in Minuten	Absolute Schwärzung Kurve: 1 (Strontium)	2 (Silber)	3 (Antimon)	4 (Barium
1	0,45	0,44	0,45	0,47
2	0,83	0,79	0,89	0,88
4	1,40	1,37	1,56	1,48
7	2,23	1,92	2,09	1,95
12	2,82	2,50	2,82	2,70
18	3,14	3,07	3,11	3,31
24	3,93	3,29	3,63	3,54
30	3,97	3,47	3,65	3,69
Schleier	0,22	0,21	0,22	0,21

Anläßlich einer Untersuchung über die Ausmessung der Streustrahlung innerhalb des streuenden Mediums wurde gefunden[1]), daß im Gebiet der normalen Exposition die auf einer entwickelten Platte befindliche Silbermenge, welche chemisch analytisch bestimmt wurde, genau proportional dem Logarithmus der Expositionszeit zunimmt.

Im Verein mit der eben erwähnten logarithmischen Zunahme der Schwärzung ergibt sich hieraus, daß für Röntgenstrahlen, ebenso wie früher[2]) für Lichtstrahlen beobachtet wurde, die absolute Schwärzung (wenigstens im Gebiet der normalen Exposition) direkt proportional ist dem Gewicht des auf der Flächeneinheit der Platte ausgeschiedenen metallischen Silbers.

Genauigkeit der Messungen: Voraussetzung für die richtige Aufnahme der Zeitschwärzungskurven ist eine absolut konstante Röntgenstrahlenquelle. Messungen der vom Sekundärstrahler S ausgesandten Strahlungsintensität mit Hilfe der Ionisationskammer J (Fig. 1) ergaben eine überraschende Konstanz der Coolidgeröhre[3]). Bei einer Serie von 6 Ionisationsmessungen mit einer Beobachtungsdauer von je 5 Minuten betrug der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Wert des Ionisationsstromes nur 0,8 Proz., so daß Strahlungsschwankungen als Fehlerquelle gar nicht in Betracht kommen. Bei der Ausphotometrierung der Platten, wobei jeweils auf die Mitte der Felder eingestellt wurde, ergaben sich zu verschiedenen Zeiten und bei verschiedenen Beobachtern Abweichungen von etwa 1 Proz.

1) Glocker und Rothacker, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen. 1921.

2) J. M. Eder, Handbuch der Photographie 3, 222.

3) Der Heizstrom der Coolidgeröhre wurde mit einem feinstufigen Widerstand stets genau konstant gehalten.

Tabelle V.

Platte Nr.	14	61	58	57
Mittlere Schwärzung	0,6	1,0	1,1	1,3
Mittlerer Fehler des Resultates	± 2¼ Proz.	± 2 Proz.	± ¾ Proz.	± ½ Proz.
Maximale Abweichung des hellsten und dunkelsten Feldes	± 7 Proz.	± 5 Proz.	± 2 Proz.	± 1½ Proz.

Die Hauptfehlerquelle liegt an der Beschaffenheit der photographischen Platte. Die ungleichmäßige Schichtdicke bedingt bei den Röntgenstrahlen infolge ihrer größeren Tiefenwirkung stärkere lokale Verschiedenheiten der Empfindlichkeit als beim Licht.

Bei einer Reihe von Platten wurden auf jeder Platte 6 verschiedene Stellen mit gleicher Intensität bestrahlt; die Unterschiede zwischen dem größten und kleinsten Wert der Schwärzung sind für einige Platten in Tab. V angegeben; entsprechend dem Charakter der Schwärzungskurve sind für große Schwärzungen (normale Exposition) die lokalen Empfindlichkeitsunterschiede prozentual kleiner als für kleine Schwärzungen (Unterexposition); Unterschiede in der Dicke der Schicht wirken nämlich in gleicher Weise wie Verschiedenheiten der auftreffenden Strahlungsintensität.

Außerdem war der Schwankungsbereich der Empfindlichkeit unter sonst gleichen Verhältnissen für die verschiedenen Exemplare von Platten verschieden; die ungünstigsten überhaupt beobachteten Werte ergaben sich bei Platte Nr. 14, Tab. V.

Durch Verwendung von Spiegelglasplatten läßt sich eine größere Konstanz der Empfindlichkeit erreichen. Es wurde von der Verwendung von Spiegelglas jedoch abgesehen, weil es uns wichtig erschien, die Verhältnisse der photographischen Platte in der allgemein üblichen Form ihrer technischen Verwendung zu untersuchen.

§ 3. Die Schwärzungskurve als Funktion der Wellenlänge.

Beim Licht ist die Frage, ob die verschiedenen Wellenlängen bei gleicher Entwicklung verschiedene Schwärzungskurven besitzen, noch nicht eindeutig entschieden. Während Eder[1]) diese Frage bejaht, findet Leimbach[2]), daß im Gebiet der normalen Exposition die Schwärzungskurven der Wellenlängen zwischen 700 μμ und 415 μμ einander parallel verlaufen und völlig zur Deckung gebracht werden können.

Um diese Frage für Röntgenstrahlen zu untersuchen, wurden mit den in § 1 angegebenen Strahlungen verschiedene Platten exponiert und dann Gruppen von 3—6 Platten gleichzeitig entwickelt. Ein Beispiel für eine solche Serie liefert Fig. 5 und Tab. IV. Die logarithmischen Geraden verlaufen alle parallel. Besondere Sorgfalt wurde auf die Entdeckung einer bei Überschreitung der Brom- bzw. Silberabsorptionsbandkante etwa auftretenden Änderung im Typus der Schwärzungskurven verwandt (Anwendung von Strahlungen mit Wellenlängen dicht vor und hinter der Bandkante, Strontium—Molybdän bzw. Silber—Antimon). Es ergaben sich keine nachweisbaren Unterschiede.

Tabelle VI.

Belichtungszeit in Minuten	Absolute Schwärzung Selenstrahlung	Silberstrahlung
0,5	0,23	—
1,5	0,59	0,61
3	1,09	1,04
5	1,52	1,55
8	2,16	2,10
12	2,68	2,63
16	2,96	2,96
20	3,13	3,28
Schleier	0,10	0,09

Die Unabhängigkeit der Schwärzungskurve von der Wellenlänge geht besonders deutlich aus Fig. 6 hervor (Tab. VI). Durch entsprechende Betriebsweise der Coolidgeröhre wurde erreicht, daß bei Selen- und Silberstrahlung

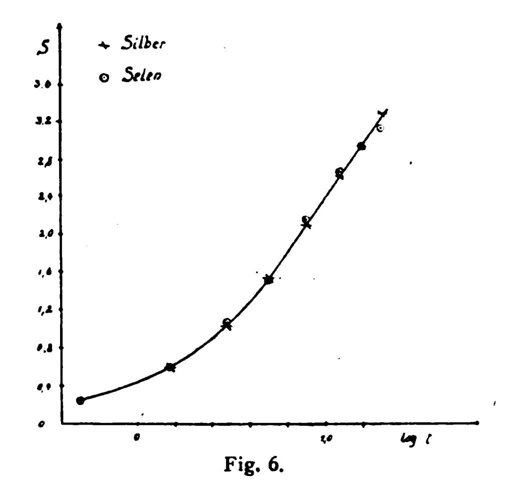


Fig. 6.

1) l. c.
2) l. c.

bei einer bestimmten Expositionszeit sich gleiche Schwärzungen ergaben. Dann sind, wie Fig. 5 zeigt, auch für alle anderen Expositionszeiten die Schwärzungen bei beiden Strahlungen gleich groß.

Diese überraschende Einfachheit des Schwärzungsgesetzes der Röntgenstrahlen ist von großer praktischer Bedeutung. Bei einem Strahlengemisch beliebiger, aber konstanter Zusammensetzung kann die Intensität photographisch bestimmt werden. In der Röntgenspektroskopie werden zum Beispiel Spektrallinien, welche bei einer beliebigen Expositionszeit gleiche Schwärzung zeigen, stets beide gleich geschwärzt bleiben, wenn die Spektralaufnahme länger oder kürzer belichtet wird.

Weiter folgt aus unseren Messungen die Unhaltbarkeit einer in der Röntgentechnik verbreiteten Anschauung, daß sehr harte Röntgenstrahlen bei noch so langer Expositionszeit keine solch intensiven Schwärzungen erzeugen wie weiche Strahlen.

Eine Verfeinerung der Untersuchungsmethode durch Verwendung streng monochromatischer Röntgenstrahlen (Spektrallinien) erschien uns auf Grund unserer Ergebnisse keine wesentlich neuen Resultate zu versprechen und wurde daher entgegen der ursprünglichen Absicht nicht ausgeführt.

§ 4. Das Schwarzschildsche Gesetz.

Die Beziehung zwischen der Zeitkurve und der Intensitätskurve der Schwärzung wird beim Licht durch das Schwarzschildsche Gesetz hergestellt: Gleiche Schwärzung ergibt sich immer dann, wenn

$$it^p = \text{const.} \quad \text{ist.}$$

i Lichtintensität, t Expositionszeit.

Der Exponent p liegt beim Licht für die verschiedenen Plattensorten nach den Beobachtungen von Leimbach zwischen 0,85 und 0,95.

Für nicht homogene Röntgenstrahlen ist diese Beziehung von Kröncke[1]) geprüft worden; aus seinen Beobachtungen an dem Strahlengemisch einer technischen Röntgenröhre folgt, daß für Schleußner-Röntgenplatten bei Eisenoxalentwicklung p nahezu 1, jedenfalls aber nicht kleiner als 0,96 ist.

Die große praktische Bedeutung des Gesetzes ließ uns eine erneute Untersuchung mit homogenen Strahlen wünschenswert erscheinen.

Als Strahlungsquelle dienten die Eigenstrahlungen von Selen, Silber und Antimon mit einer mittleren Wellenlänge von 1,10 bzw. 0,56 bzw. 0,47 Å.

1) Dissert. Göttingen 1913.

Mit zwei verschiedenen Strahlungsintensitäten wurden zwei oder mehrere Felder einer Platte so lange exponiert, bis der Faden des mit der Ionisationskammer J verbundenen Elektrometers um dieselbe Anzahl Skalenteile gewandert war. Nach Abzug des Spontanabfalls des Elektrometers samt Kammer und Zuleitung müßte sich dann in beiden Fällen gleiche Schwärzung ergeben, wenn das Bunsensche Gesetz gilt ($p = 1$). Dies war nicht streng der Fall. Da auf den Platten zum Zweck der Intrapolation stets einige Schwärzungen mit größerer und kleinerer Expositionszeit beigedruckt wurden und da das Verhältnis der Strahlungsintensitäten aus der Ionisationsmessung bekannt war, konnte der Faktor p berechnet werden.

Um einen etwaigen Fehlereinfluß einer nicht ganz exakten Bestimmung des Spontanabfalles zu vermeiden, wurde bei einem Teil der Aufnahmen das Intensitätsverhältnis (1 : 3,3 : 6,6) dadurch bestimmt, daß vor ein Blättchenelektroskop eine Kammer mit dem betreffenden Sekundärstrahler vorgesetzt und vor und nach der Exposition der Platte gemessen wurde[1]).

Um den Fehler der Inkonstanz der photographischen Schicht zu vermindern, wurden die Vergleichsfelder jeweils doppelt gedruckt.

Tabelle VII.

Platte Nr.	49	50	51	51a	54	60	62	74
Schwärzung	0,4	0,6	0,65	0,85	0,85	1,0	1,0	1,4
$p =$	0,92	1,04	0,98	0,99	0,95	1,0	1,0	0,98

Die Werte von p unterscheiden sich sehr wenig von 1; der Mittelwert ist $0{,}98 \pm 0{,}01$. Es scheint eine gewisse Tendenz vorhanden zu sein, daß p etwas kleiner als 1 ist, d. h. daß große Intensitäten bei Gleichheit des Produktes $I \times t$ stärker schwärzen. Doch sind die Abweichungen so klein, daß im allgemeinen unbedenklich das Bunsensche Gesetz (gleiche Schwärzung für $I \times t = \text{const.}$) in Anwendung gebracht werden kann. Für $p = 0{,}98$ würde z. B. die Abweichung vom Bunsenschen Gesetz bei einem Intensitätsverhältnis 1 : 2 nur etwa 1 Proz., bei 1 : 10 etwa 5 Proz. betragen.

Zusammenfassung.

1. Für die photographische Schwärzung

1) Siehe § 2. Schwankungen in der Strahlungsintensität betragen höchstens 0,8 Proz.



durch Röntgenstrahlen ist im Gegensatz zum Licht kein Schwellenwert vorhanden.

2. Bei Hauff-Röntgenplatten und Adurolentwicklung von 18° C verläuft die Schwärzungskurve als Funktion der Zeit bzw. Intensität genau linear bis etwa $S = 0{,}6$ (nach Abzug des Schleiers 0,2 im Mittel), dann nimmt die Schwärzung etwas weniger zu als der Proportionalität mit der Zeit entspricht, um von $S = 1{,}3$ ab genau mit dem Logarithmus der Zeit proportional zu werden.

3. Innerhalb des Wellenlängengebietes von $\lambda = 1{,}1$ bis 0,4 Å. ergeben sich für alle Wellenlängen gleiche Schwärzungskurven.

4. Das Bunsensche Reziprozitätsgesetz wurde als annähernd gültig gefunden.

Physikalisches Institut / Röntgenlaboratorium — Stuttgart.

(Eingegangen 13. Mai 1921.)

Über die Abhängigkeit der Reichweite der α-Strahler von der Anzahl der Bestandteile ihrer Atomkerne.

Von Hans Th. Wolff.

Die Reichweite R sämtlicher α-Strahler mit Ausnahme von ThC, RaF, AcX, AcC und AcC' läßt sich durch die Gleichung

$$\log R = \xi \log\left(\tfrac{3}{4} M - L + K\right) + \eta \qquad (1)$$

als Funktion ihres Atomgewichtes M und ihrer Atomnummer L (Kernladung) darstellen, wobei ξ, η und K Konstante bedeuten, die für alle Zerfallsreihen mit Ausnahme der Körper UI bis mit Ra dieselben Werte besitzen[1]). UII erfüllt sowohl die für die letzteren, als auch die für die übrigen α-Strahler gültige Formel, denn es gehört einerseits dem Anfang der Uranradiumreihe an, andererseits kann man es als Anfangsglied der von ihm abzweigenden Aktiniumreihe ansehen.

Es liegt die Annahme sehr nahe, daß sich die Kerne aller Atome der 3 Zerfallsreihen in ihrer Zusammensetzung nur durch den Bestand an Elektronen, Heliumkernen und X_3-Teilchen (Masse = 3 Atomgewichtseinheiten, Ladung = 2 positive Elementarquanten) unterscheiden. Enthält ein Atomkern n_α He-Kerne (= α-Strahlpartikeln), n_β Elektronen und $n_3 X_3$-Teilchen, so gilt für ihn:

$$M = 4 n_\alpha + 3 n_3 + M_0,$$
$$L = 2(n_\alpha + n_3) - n_\beta + L_0,$$

wobei M_0 und L_0 die Gesamtmasse und -ladung aller ev. noch vorhandenen anderweitigen Kernbestandteile bedeuten. Die Abweichungen der Atomgewichte von den ganzen Zahlen sollen hier unberücksichtigt bleiben. Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so ergibt sich:

$$\log R = \xi \log\left(n_\alpha + n_\beta + \tfrac{1}{4} n_3 + C\right) + \eta. \quad (2)$$

Die Konstante C hat den Wert $^3/_4 M_0 - L_0 + K$. Führt man die Bezeichnung ein:

$$n = n_\alpha + n_\beta + n_3,$$

so nimmt Gleichung (2) die Gestalt an:

$$\log R = \xi \log\left(n - \tfrac{3}{4} n_3 + C\right) + \eta. \qquad (3)$$

In Formel (1) kann man K innerhalb eines gewissen Spielraumes variieren unter gleichzeitiger Änderung von ξ und η, ohne die Genauigkeit der Beziehung wesentlich zu beeinflussen. Würde man $K = 0$ wählen und zugleich annehmen, daß die betrachteten Atomkerne nur aus He-, X_3-Teilchen, sowie Elektronen zusammengesetzt sind, also auch $M_0 = L_0 = 0$ setzen, so erhielte man $C = 0$ und könnte nun schreiben:

$$\log R = \xi \log\left(n - \tfrac{3}{4} n_3\right) + \eta. \qquad (4)$$

n bedeutet jetzt die Gesamtzahl sämtlicher Kernbausteine. Zur Prüfung der Genauigkeit dieser Gleichung wurden die Konstanten ξ und η nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Hierbei wurde angenommen, daß für Th gilt: $n_\alpha = 58$, $n_\beta = 26$ und $n_3 = 0$, für UII: $n_\alpha = 57$, $n_\beta = 26$ und $n_3 = 2$, und daß sich UII in UY unter Aussendung einer X_3-Partikel verwandelt. Man gelangt zu der Beziehung:

$$\log R = -10{,}1211 \log\left(n - \tfrac{3}{4} n_3\right) + 19{,}8840, \quad (5)$$

in welcher R die Reichweite bei 0° und 760 mm Hg-Druck ist. Zur Berechnung dienten die in Tab. I aufgeführten Körper mit Ausnahme von ThX. Es bedeutet:

$$\Delta = \log R_{\text{ber.}} - \log R_{\text{beob.}}$$

Tabelle I.

	$n - \frac{3}{4} n$	$\log R_{\text{beob.}}$	Δ
Th	84	0,412	— 0,0038
Ra Th	81	0,565	+ 0,0030
Th X	80	0,611	+ 0,0116
Th Em	79	0,676	+ 0,0019
Th A	78	0,732	+ 0,0019
Th C'	75	0,912	— 0,0057
U II	83,5	0,439	— 0,0046
Ra Em	80,5	0,596	— 0,0008
Ra A	79,5	0,653	— 0,0029
Ra C'	76,5	0,818	+ 0,0013
Pr Ac	82,25	0,497	+ 0,0037
Ra Ac	80,25	0,602	+ 0,0069
Ac Em	78,25	0,723	— 0,0031
Ac A	77,25	0,774	+ 0,0024

1) H. Th. Wolff, diese Zeitschr. **22**, 171, 1921.

Schließt man *ThX* aus, so beträgt der mittlere Fehler von

$$\log R_{\text{ber.}} \pm 0{,}0038$$

(1 Proz. Fehler von *R*), hingegen hat er für die obigen Körper bei Einschluß von *ThX* die Größe $\pm 0{,}0049$. Bei der Annahme $K = -26{,}09$ hatte sich l. c. für diese beiden Werte des mittleren Fehlers ergeben: $\pm 0{,}0032$ und $\pm 0{,}0045$. Bei der Berechnung des ersteren Fehlers war l. c. außer *ThX* auch *UII* ausgeschlossen worden, denn diese beiden Körper waren bei der Berechnung von ξ und η unberücksichtigt geblieben. Die Wahl $K = 0$ und $K = -26{,}09$ führen sonach zu nahezu gleich guten Ergebnissen, so daß man wohl die Darstellungsform (5) als brauchbar ansehen kann.

Wendet man auf die Produkte *UI* bis mit *Ra* Formel (4) an und berechnet ξ und η nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man die Gleichung:

$$\log R = -4{,}5805 \log (n - \tfrac{3}{4} n_3) + 9{,}2453. \quad (6)$$

Tab. II zeigt wohl, daß die Beziehung befriedigende Exaktheit besitzt:

Tabelle II.

	$n - \frac{3}{4} n_3$	$\log R_{\text{beob.}}$	Δ
UI	86,5	0,375	$-0{,}0022$
UII	83,5	0,439	$+0{,}0040$
Jo	82,5	0,464	$+0{,}0030$
Ra	81,5	0,496	$-0{,}0048$

Gleichung (4) kann man auch in der Form

$$R = \eta_1 \cdot (n - \tfrac{3}{4} n_3)^{\xi}, \quad \eta_1 = 10^{\eta} \quad (7)$$

schreiben. Es sei daran erinnert, daß ξ eine negative Größe $(-10{,}1211)$ ist. Eine besonders einfache Formel erhält man für diejenigen α-Strahler, welche keine X_3-Partikeln enthalten, also etwa für die Glieder der Thoriumreihe und ev. auch für die vom Verfasser l. c. S. 172 erwähnten hypothetischen Körper *AcEm'* und *AcA'*. Sie lautet:

$$R = \eta_1 \cdot n^{\xi}. \quad (7\text{a})$$

Da die Konstante *K* in (1) bis zu einem gewissen Grade willkürlich gewählt werden kann, so ist es erlaubt, in der für *UI* bis mit *Ra* gültigen Gleichung (6) den Summanden $-\frac{3}{4} n_3$ wegzulassen, wofern man den beiden Konstanten entsprechend abgeänderte Werte gibt. Also auch für die letztgenannten α-Strahler besteht eine Beziehung von der Form (7a). Entsprechendes gilt von den übrigen α-Strahlern der Radiumreihe, sowie denjenigen der Aktiniumreihe. Stellt man deren Reichweitenformel in der Gestalt (7a) dar, so haben die Konstanten η_1 und ξ jedoch nicht mehr für die 3 radioaktiven Familien dieselben Werte.

Zusammenfassung.

Die Reichweite *R* der meisten α-Strahler kann als Funktion der Anzahl der im Atomkern angenommenen Elektronen, *He*-Kerne und X_3-Teilchen dargestellt werden. Die Anzahl der letzteren möge n_3, die Gesamtzahl aller genannten Partikeln möge n heißen. Enthält der Kern keine anderweitigen Bestandteile, so gilt dann:

$$R = \eta_1 (n - \tfrac{3}{4} n_3)^{\xi}.$$

Die Konstanten η_1 und ξ haben für die 3 Zerfallsreihen dieselben Werte, abgesehen vom Anfang der *U-Ra*-Familie bis mit *Ra*. Zur Konstantenberechnung wurde die Methode der kleinsten Quadrate benutzt. Auch die einfachere Formel:

$$R = \eta_1 \cdot n^{\xi}$$

kann Anwendung finden.

Dresden, im Mai 1921.

(Eingegangen 18. Mai 1921.)

Die Grundform des gasförmigen akustischen Schwingungsgebildes.

(Der Tonraum.)

Mitteilung aus den Laboratorien der Signalgesellschaft Kiel.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Vor kurzem[1]) haben wir die Grundform des mechanisch akustischen Schwingungskörpers, den wir „Tonpilz" genannt haben, beschrieben. Derselbe wird in seiner reinsten Form dargestellt durch zwei elastizitätsfreie Massen, die durch eine masselose Elastizität miteinander verbunden sind. Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, wie man jedes Schwingungsgebilde, das aus Materie in fester Form besteht, auf diese Grundform zurückführen kann, und daß es für die Berechnung und für die Vorstellung in ähnlicher Weise wie bei elektrischen Schwingungsproblemen geboten ist, alle realen Schwingungskörper, die aus stetig verteilter Masse und Elastizität bestehen, auf solche reinen, idealen Tonpilze zurückzuführen.

Bei unseren Arbeiten auf luft-akustischem Gebiete wurden wir sehr bald vor die Frage gestellt: Wie sieht der dem Massenton-

1) Diese Zeitschr. **21**, 187, 1920.

pilz analoge gasförmige Schwingungskörper aus? Wir wollen im folgenden diese Frage zu beantworten suchen.

I. Der Tonraum.

Zwei an sich abgeschlossene Gasräume, die durch eine Öffnung miteinander kommunizieren (Fig. 1), stellen die einfachste Form eines gas-

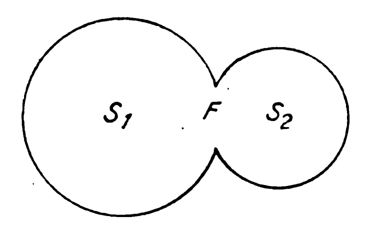


Fig. 1.

förmigen Schwingungsgebildes dar. Für die vorliegenden Überlegungen wollen wir annehmen, daß die Räume klein zur Wellenlänge des betreffenden Tones sind, d. h. daß der Vorgang quasistationär ist. Unter dieser Voraussetzung stellt die Anordnung der Fig. 1 die Grundform des geschlossenen quasistationären gasförmigen Schwingungsgebildes dar. Wir haben dieses Schwingungsgebilde den „Tonraum" genannt.

Bringen wir das Gas eines der beiden Räume auf einen höheren Druckzustand als denjenigen des zweiten Raumes und überlassen das System sich selbst, so strömt das Gas durch die Öffnung in den zweiten Raum, erzeugt dort Überdruck und in dem ersteren Raum Unterdruck, muß wieder zurückströmen und so fort, bis die Bewegung durch die vorhandene Dämpfung zur Ruhe kommt. Die Zeit jedes Wechsels ist durch die Größe der Räume und der verbindenden Fläche gegeben. Wie in dem Massen-Tonpilz die Schwingungsenergie einmal in kinetischer Form in beiden Massen und nach 1/4 Periode in potentieller Form in der Elastizität steckt, so steckt beim Tonraum die Energie einmal in potentieller Form in den beiden Gasräumen und nach 1/4 Periode in kinetischer Form in dem die Öffnung durchströmenden Gase. Wie beim Masssentonpilz sowohl die Bewegungs-Amplitude als auch die Schwingungsenergie umgekehrt proportional der betreffenden Masse ist, so ist, wie wir weiter unten sehen werden, beim Tonraum sowohl die Druckamplitude wie die Schwingungsenergie umgekehrt proportional dem Volumen des betreffenden Gasraumes; und wie bei sehr verschieden großen Massen praktisch die gesamte Schwingungsenergie des Massenpilzes in der kleineren Masse steckt, so ist beim Tonraum bei sehr verschieden großen Räumen praktisch die ganze Schwingungsenergie im kleineren Raume konzentriert. In der praktischen Akustik macht man von solchen Gebilden häufiger Gebrauch als vom eigentlichen Tonraum. Man nennt sie „offene" oder „Helmholtzsche" Resonatoren. Wir werden sie in einem besonderen Kapitel am Schlusse dieser Arbeit behandeln.

a) Die Schwingungsenergie.

Denkt man sich in einem der beiden Räume S_1 oder S_2 der Fig. 1 eine Volumenvermehrung oder -verminderung im Betrage von S herbeigeführt und stellt P die hierbei in demselben Raum auftretende Druckschwankung dar, so ist die Schwingungsenergie geschrieben in potentieller Form

$$V = \frac{1}{2} PS.$$

Da der Vorgang adiabatisch verläuft, so gilt, vom Vorzeichen abgesehen, die Beziehung

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{P}{P_0} = \frac{S}{S_0},$$

wenn P_0 und S_0 Normaldruck und -volumen sind und $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bedeutet. Infolgedessen wird

$$V = \frac{\varkappa}{2} \frac{P_0}{S_0} S^2.$$

Benutzen wir die Beziehung

$$a^2 = \varkappa \frac{P_a}{\varrho},$$

worin a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und ϱ die Dichte des betreffenden Gases bei dem Druck P_0 ist, so folgt für die potentielle Energie der Wert

$$V = \frac{a^2 \varrho}{2} \frac{S^2}{S_0}.$$

Denken wir uns nun die Volumenänderung S durch eine Schwingung des Gases von der Amplitude A in der Öffnung F herbeigeführt, so geht durch die Beziehung

$$S = FA$$

die Gleichung für die potentielle Energie in die Form über

$$V = \frac{a^2 \varrho}{2} \frac{F^2 A^2}{S_0}.$$

Diese Gleichung können wir nun auf beide Räume 1 und 2 anwenden und erhalten die Einzelbeträge der in ihnen schwingenden potentiellen Energie

$$V_1 = \frac{a^2 \varrho}{2} \frac{F^2 A^2}{S_1},$$

$$V_2 = \frac{a^2\varrho}{2} \frac{F^2 A^2}{S_2},$$

und den Betrag der gesamten Schwingungsenergie in potentieller Form zu

$$V_1 + V_2 = \frac{a^2\varrho}{2} F^2 A^2 \frac{S_1 + S_2}{S_1 \cdot S_2}.$$

Um die Eigenschwingungszahl des Tonraumes zu finden, haben wir nun noch die Schwingungsenergie in der kinetischen Form des die Öffnung F durchströmenden Gases zu berechnen. Denken wir uns, um den allgemeinen Fall zu betrachten, die Verbindung der beiden Räume nicht durch eine einfache Öffnung F wie in Fig. 1, sondern durch einen Kanal von der Länge L und dem Querschnitte F hergestellt, wie es Fig. 2 zeigt, so ist die kinetische Energie des diesen Kanal mit der Amplitude A durch-

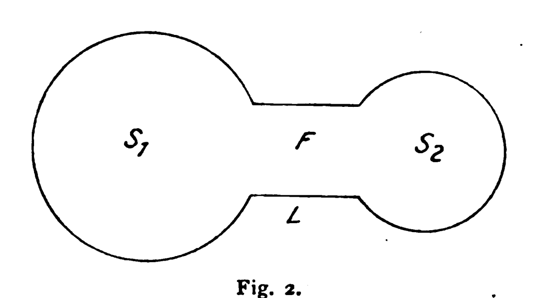


Fig. 2.

strömenden Gases bei der Frequenz ω in 2π Sekunden

$$T = \frac{1}{2} \varrho F (L + \alpha) \omega^2 A^2.$$

Hierin bedeutet α eine Korrektur, die an die Länge L angebracht werden muß, um auch die kinetische Energie der divergenten Strömungen in die anstoßenden Räume S_1 und S_2 hinein mit zu erfassen.

b) Die Eigenschwingungszahl.

Die Resonanzfrequenz eines jeden Schwingungsgebildes erhält man bekanntlich durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Schwingungsenergie in potentieller und kinetischer Form und infolgedessen für den Tonraum zu

$$\omega^2 = a^2 \cdot \frac{F}{L + \alpha} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_1 \cdot S_2}.$$

Die Längenkorrektur α ist von Rayleigh[1]) für besonders einfache Fälle theoretisch berechnet worden. Er legt seinen Untersuchungen einen geraden kreisförmigen Kanal, der in zwei unendliche, starre Ebenen mündet, zugrunde und berechnet die Korrektur für die beiden Grenzfälle des sehr kurzen und des sehr langen Kanals. Seine Rechnung ergibt, daß die Korrektur für ein Ende des sehr kurzen Kanals gleich $\frac{\pi}{4} R$ und des sehr langen Kanals gleich $\frac{8}{3\pi} R$ zu setzen ist, d. h. daß die Korrektur immer zwischen den Werten $0{,}785\, R$ und $0{,}85\, R$ liegt. Da die Bewegung des strömenden Gases in der Öffnung und im freien Medium von Rayleigh im Falle des sehr langen Kanals als gleich derjenigen einer Kolbenmembran angenommen wird, die in einer starren, unendlichen Ebene schwingt, so müssen die beiden Fälle die gleiche Korrektur liefern, nämlich $\frac{8}{3\pi} R$. Sind die beiden Räume S_1 und S_2 des betrachteten Tonraumes so beschaffen, daß die Strömung in ihnen so erfolgt, als wenn das Gas von der Öffnung F in jeden von ihnen, wie in einen durch eine starre Ebene begrenzten Halbraum strömte, so haben wir bei sehr kleiner Kanallänge als Korrektur für beide Enden $\frac{\pi}{2} R$ zu setzen. Wird die Kanallänge null, so strömt nach der Annahme das Medium, wie bei einem Strahler nullter Ordnung nur mit dem Unterschiede, daß die Phase der Bewegung zu beiden Seiten der durch die Öffnung F gelegten Ebene entgegengesetzt ist. In diesem durch die Fig. 1 dargestellten Fall wird die Eigenschwingungszahl durch die Gleichung gegeben

$$\omega^2 = 2 a^2 R \frac{S_1 + S_2}{S_1 \cdot S_2}.$$

Ersetzen wir die Schwingungszahl ω in 2π Sekunden durch diejenige in 1 Sekunde n und setzen wir den Wert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a des Schalles in Luft ein, so wird

$$n = 7500 \sqrt{R} \sqrt{\frac{S_1 + S_2}{S_1 \cdot S_2}}.$$

In der Tabelle I sind für einige kugelförmige Tonräume die berechneten und beobachteten Werte von n zusammengestellt. Zum Versuche dienten 4 Hohlkugeln a, b, c, d genannt, die, wie aus den Kolumnen 1 und 2 ersichtlich ist, gruppiert wurden. In der dritten und vierten Kolumne sind die Durchmesser, in der fünften und sechsten die Volumina angegeben, während in der siebenten der Radius der verbindenden Öffnung steht. Der auf Grund der obigen Formeln berechnete Wert von n findet sich in Kolumne 8, der beobachtete Wert in 9 und die prozentuale Abweichung

1) Rayleigh, Theorie des Schalles II, S. 205. Deutsche Ausgabe von Neesen, Braunschweig 1880.

von Beobachtung gegen Rechnung in Kolumne 10.

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		D_1	D_2	S_1	S_2	R	$n_{ber.}$	$n_{beob.}$	$\frac{n_{ber.}-n_{beob.}}{n_{ber.}}$
a	b	5,0	5,0	66,0	66,0	0,85	1190	1230	— 0,03
a	c	5,0	4,0	66,0	33,5	0,69	1320	1350	— 0,02
b	c	5,0	4,0	66,0	33,5	0,69	1320	1330	— 0,01
a	d	5,0	4,0	66,0	33,5	0,26	810	770	+ 0,05
b	d	5,0	4,0	66,0	33,5	0,26	810	770	+ 0,05
c	d	4,0	4,0	33 5	33,5	0,26	930	910	+ 0,02

Diese Beobachtungen und Messungen wurden ohne besondere Sorgfalt zur allgemeinen Orientierung angestellt und sollen auch nur dazu dienen, zu zeigen, daß die tatsächliche Strömung wohl ungefähr der angenommenen entsprechen wird, und daß insbesondere das Medium von der Öffnung in die beiden Kugelräume wie in freie Halbräume strömt.

c) Die Dämpfung.

Die Schwingungen in dem bisher betrachteten Tonraume wären ungedämpft, wenn keine innere oder Verlust-Dämpfung in dem strömenden Gase auftreten würde. Die Ermittlung dieser inneren oder Verlust-Dämpfung entzieht sich einer einigermaßen genauen Berechnung, da sie nicht nur von dem Koeffizienten der inneren Reibung des betreffenden Gases, sondern auch von der geometrischen Form und der Oberflächenbeschaffenheit der Wandungen, insbesondere der Öffnung und des Verbindungskanals abhängt; ihre Ermittlung geschieht am einfachsten und genauesten durch das Experiment.

Benutzt man solche Tonräume dazu, um Schallenergie aufzunehmen, abzugeben oder weiter zu leiten, so treten zu der Verlustdämpfung noch andere Dämpfungsbeträge, die den betreffenden Energiebeträgen entsprechen.

Wir wollen im folgenden einen besonders einfachen Fall behandeln und denken uns die beiden Räume mit je einer Zuführung versehen, durch die die Schallenergie zu- bzw. abströmen kann.

In der Fig. 3 mündet in den einen Raum S_1 eine Leitung mit dem Querschnitte F_1 und in den Raum S_2 eine Leitung mit dem Querschnitt F_2 ein. Um die Berechnung der entsprechenden Dämpfungen einfach zu gestalten, wollen wir annehmen, daß in dem Querschnitt der beiden Leitungen der Schall-

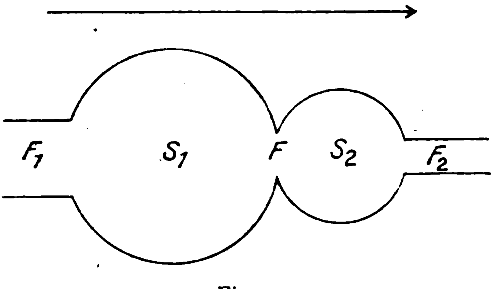


Fig. 3.

vorgang derartig beschaffen ist, daß Druck und Geschwindigkeit gleichphasig sind, d. h. daß durch die Leitungen ebene Schallwellen wandern.

Wir erhalten dann die durch die Schallenergie der ebenen Welle 1 erfolgende Dämpfung des aus den beiden Räumen S_1 und S_2 gebildeten Tonraumes, indem wir das Verhältnis der pro Periode durch die Fläche F_1 zu- bzw. abwandernden Energie zu der gesamten Schwingungsenergie bilden. Dieses Verhältnis ist dann bis auf den Faktor ½ die gesuchte Dämpfung. Ist die Druckamplitude im Raum 1 P_1, so wird[1]) die pro Periode durch die Fläche F_1 strömende Energie

$$\frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{P_1^2}{2a\varrho}F_1.$$

Mithin ist der der Leitung mit dem Querschnitt F_1 entsprechende Dämpfungsanteil

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{P_1^2}{2a\varrho}F_1}{\frac{a^2\varrho}{2}\cdot F^2 A^2\frac{S_1+S_2}{S_1\cdot S_2}}.$$

Aus den früher mitgeteilten Gleichungen folgt für den Raum 1

$$P_1 = K\frac{P_0}{S_1}S = a^2\varrho\frac{S}{S_1}$$

und

$$S = FA,$$

und damit die Beziehung zwischen P_1 und A

$$P_1 = a^2\varrho\frac{F}{S_1}A,$$

die wir in die Gleichung für die Dämpfung einzusetzen haben, um den Ausdruck zu erhalten

$$\mathfrak{d}_1 = \pi\frac{a}{\omega}\frac{F_1}{S_1^2}\cdot\frac{S_1\cdot S_2}{S_1+S_2}.$$

Führen wir die Resonanzfrequenz, wie oben berechnet, ein und ersetzen F_1 durch πR_1^2, so wird

$$\mathfrak{d}_1 = 2\pi^2\left(\frac{a}{\omega}\right)^3\left(\frac{R_1}{S_1}\right)^2 R.$$

1) Diese Zeitschr. 17, 601, 1916.

Denken wir uns eine Anordnung entsprechend der Fig. 3, von Schallenergie durchsetzt, die in der Richtung des Pfeiles aus der Leitung 1 durch den abgestimmten Tonraum nach der Leitung 2 strömt, so werden wir nur dann ein vollkommenes Übertreten der Energie erhalten, wenn die Dämpfung des akustischen Schwingungsbildes durch die Leitung 1 gleich derjenigen durch die Leitung 2 ist.

Als Bedingung hierfür folgt die Beziehung

$$\frac{R_1}{S_1} = \frac{R_2}{S_2},$$

und wir erkennen, wie wir Schallenergie bestimmter Frequenz in vollkommener Weise auf Leitungen verschiedenen Querschnitts übertragen können.

d) Die Kopplung zweier Tonräume.

Häufig wird man praktische Aufgaben der technischen Akustik nicht mit einem einzigen Schwingungsgebilde mit gutem Erfolge lösen können, sondern man wird gezwungen sein, zu zwei oder mehreren überzugehen, die den einzelnen besonderen Anforderungen der Energiewandlung, der Energiestrahlung usw. besser angepaßt werden können, als wenn man im Kompromißwege allen Bedingungen mit einem einzigen Schwingungsgebilde gerecht werden wollte.

Wie beim Massentonpilz der einfachste Fall der Kopplung durch eine gemeinsame Masse erfolgt, so geschieht dies in der Gasakustik bei der Kopplung zweier Tonräume durch einen gemeinsamen Schwingungsraum, d. h. durch eine gemeinsame Elastizität. In Fig. 4 sind zwei solche miteinander gekoppelte

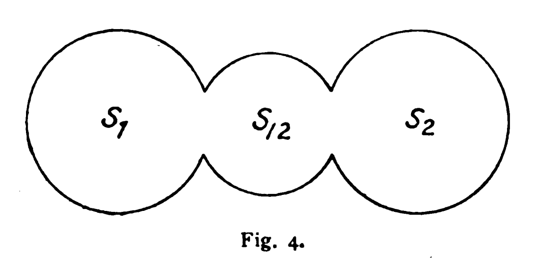


Fig. 4.

Tonräume dargestellt, wobei das eine System aus den beiden Räumen S_1 und S_{12} und das andere System aus den beiden Räumen S_2 und S_{12} besteht.

Nennen wir das Verhältnis der im Kopplungsgliede schwingenden Energie zur Gesamtenergie eines Systems, einschließlich Kopplungsglied, den Kopplungsquotienten des betreffenden Systems, so ist das Quadrat des gemeinsamen Kopplungsfaktors gleich dem Produkt aus den beiden einzelnen Kopplungsquotienten.

Die einzelnen Schwingungsenergien seien V_1, V_{12} und V_2, die Kopplungsquotienten k_1 und k_2, der Kopplungsfaktor k, dann ist

$$k_1 = \frac{V_{12}}{V_1 + V_{12}} = \frac{1}{1 + \frac{V_1}{V_{12}}} = \frac{1}{1 + \frac{S_{12}}{S_1}},$$

und analog

$$k_2 = \frac{1}{1 + \frac{S_{12}}{S_2}},$$

und daher

$$k^2 = \frac{1}{1 + \frac{S_{12}}{S_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S_{12}}{S_2}}.$$

Diese Formel für den Kopplungsfaktor hat zwei Grenzfälle von praktischer Bedeutung, die sehr lose und die sehr feste Kopplung, und man findet in der Formel das bereits aus der reinen Anschauung sich ergebende Resultat bestätigt, daß der Kopplungsfaktor gleich 0 bzw. 1 wird, wenn der Kopplungsraum S_{12} groß bzw. klein gegen jeden der beiden Räume S_1 und S_2 ist.

In entsprechender Weise sind diese beiden Grenzfälle beim gekoppelten Massentonpilz gegeben, wenn die gemeinsame Masse groß bzw. klein gegenüber den beiden freien Massen wird.

Ein den mechanischen Verhältnissen analoges elektrisches Beispiel ist in der Kopplung zweier elektrischer Schwingungskreise mit gemeinsamer Kapazität gegeben. Sind in Fig. 5

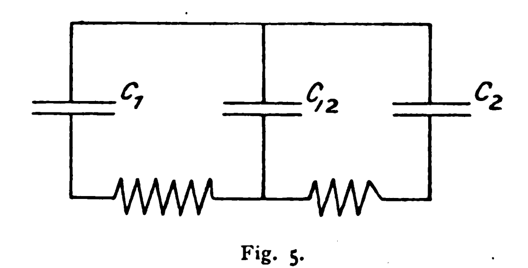


Fig. 5.

die freien Kapazitäten C_1 und C_2 und die gemeinsame Kapazität C_{12}, so ist die Kopplung beider Kreise

$$k^2 = \frac{1}{1 + \frac{C_{12}}{C_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_{12}}{C_2}},$$

Häufig wird man sich in der praktischen Akustik mit Vorteil der elektrischen Analogie bedienen und die aus dem Gebiete der elektrischen Schwingungen bekannten und meßbar



leicht zu verfolgenden Gesetze auf das mechanische Beispiel übertragen können.

In der Kenntnis der Eigenschwingungszahl, Dämpfung und Kopplung besitzt man diejenigen Größen, die für die Schwingungsvorgänge von elementarer Bedeutung sind und gestatten, das Verhalten der betreffenden Schwingungsgebilde unter irgendwelchen Verhältnissen im voraus zu bestimmen.

II. Der „Helmholtzsche" Resonator.

Ein besonders wichtiger und bekannter Spezialfall des allgemeinen Tonraumes ist der „offene" oder „Helmholtzsche" Resonator, der aus dem allgemeinen Tonraum dadurch entsteht, daß der eine der beiden Räume sehr viel mal größer als der andere ist und im besonderen durch die freie Atmosphäre gebildet wird. Halten wir den Raum S_1 und die Öffnung F fest und lassen wir S_2 der Fig. 1 immer größer werden und schließlich in die freie Atmosphäre übergehen, so verlassen wir den quasistationären geschlossenen Schwingungskreis und gehen zu einem offenen, strahlenden Gebilde über. Die Voraussetzung der quasistationären Bewegung soll allerdings für das Resonatorinnere aufrecht erhalten bleiben und mithin die Forderung, daß die Abmessungen des Resonators klein zur Wellenlänge sind. Damit der Vorgang im Innern quasistationär ist, muß die größtmögliche Entfernung irgendeines Punktes der Resonatorwand von der Schwingungsöffnung, d. h. im Falle des kugelförmigen Resonators der Kugeldurchmesser klein gegen λ sein, wenn λ die Wellenlänge des erzeugten Tones in Luft ist. Der Vorgang im äußeren freien Medium, dem früheren Raum S_2, ist jetzt nicht mehr quasistationär, es setzt vielmehr außer der wattlosen Komponente der Trägheit der mitschwingenden Mediummasse eine Schallstrahlung ein, die einen Wattvorgang bedeutet.

a) Die Eigenschwingungszahl.

Da das äußere freie Medium im Gegensatz zum geschlossenen früheren Raum S_2 keine elastische Wirkung mehr besitzt, so erhalten wir die Eigenschwingungszahl des Helmholtzschen Resonators aus derjenigen des Tonraumes, wenn wir $S_2 = \infty$ setzen. Es wird dann

$$\omega^2 = a^2 \frac{F}{L + \alpha} \cdot \frac{1}{S},$$

wenn S das Resonatorvolumen bedeutet. Die Korrektur α hängt, wie beim Tonraum von den räumlichen Verhältnissen ab. Ist der Helmholtzsche Resonator so gestaltet, daß man sowohl im Innern des Raumes S, wie auch außerhalb, eine Strömung, wie bei einer Öffnung in einer starren Wand, d. h. wie beim Einströmen in einen Halbraum annehmen kann, so beträgt, wie beim allgemeinen Tonraum, die Korrektur bei der Kanallänge 0, d. h. bei Resonatoren ohne Hals $\frac{\pi}{2} R$, und die Eigenschwingungszahl in 2π Sekunden wird gegeben durch die Gleichung

$$\omega^2 = 2 a^2 \frac{R}{S},$$

oder diejenige in einer Sekunde bei Einführung des Wertes von a für Luft

$$n = 7500 \sqrt{\frac{R}{S}}.$$

In der Tabelle II sind für einige kugelförmige Resonatoren ohne Hals, die bereits zu den obigen Messungen für den Tonraum gedient haben, die berechneten und beobachteten Werte von n zusammengestellt. In der ersten Kolumne ist der Durchmesser D des Resonatorraumes angegeben, in der zweiten das Volumen S, in der dritten der Radius der Öffnung, in der vierten der berechnete, in der fünften der beobachtete Wert von n und in der sechsten die prozentuale Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung.

Tabelle II.

1	2	3	4	5	6
D	S	R	$n_{ber.}$	$n_{beob.}$	$\frac{n_{ber.} - n_{beob.}}{n_{ber.}}$
5,0	66,0	1,67	1190	1080	+ 0,09
5,0	66,0	0,85	850	870	— 0,02
4,0	33,5	0,69	1080	1100	— 0,02
4,0	33,5	0,26	660	600	+ 0,09

Die Beobachtungen sind nur als orientierende Messungen ausgeführt und sollen auch nur dazu dienen, zu zeigen, daß die tatsächliche Luftbewegung ungefähr der angenommenen entspricht, d. h. daß sich um die strahlende Öffnung eine Bewegung einstellt, die einem Strahler nullter Ordnung in der Öffnung entspricht, wobei bei Gleichsinnigkeit der Phase im Außenraum die Phase im Resonatorraum entgegengesetzt ist derjenigen Bewegung, die bei einem in der strahlenden Öffnung vorhandenen Nullstrahler eintreten würde. Bei Resonatoren, deren Öffnungsradius klein ist im Verhältnis zum Radius des Resonatorraumes, wird die Bewegung innen und außen nahezu je wie in einem Halbraum erfolgen, während bei Re-

sonatoren, deren Öffnungsradius sich dem Resonatorraumradius nähert, die ganze Bewegung immer mehr und mehr sich auf das Außenmedium konzentriert und sich schließlich so einstellt, als ob die Öffnung nur nach außen in den Ganzraum Medium transportierte und nach dem inneren Resonatorraum zu nur noch elastische Wirkungen aufträten. Für die Eigenschwingungszahl ist dieses aber ohne Bedeutung, da in allen Fällen die gleiche Mediummasse schwingt, und zwar in den beiden betrachteten Grenzfällen einmal zur Hälfte im Resonatorraum und zur Hälfte im Außenmedium und im anderen Falle im freien Medium allein. Im allgemeinen wird sich eine Verteilung einstellen, die zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt, ohne daß sich hierbei, wie gesagt, die Eigenschwingungszahl zu ändern braucht. Anders verhält es sich mit der Strahlungsdämpfung eines solchen Resonators.

b) Die Dämpfung.

Die Reibungs- oder Verlustdämpfung von Helmholtzschen Resonatoren ist ebenso wie diejenige eines Tonraumes einer einigermaßen zuverlässigen Berechnung nicht zugänglich. Dagegen läßt sich die Strahlungsdämpfung bei angenommenem Strömungsvorgang berechnen, so daß man unter Umständen durch die experimentell zu ermittelnde Gesamtdämpfung eine Trennung der beiden Dämpfungsbeträge vornehmen kann.

Wir nehmen, wie vorhin zur Berechnung der Eigenschwingungszahl, an, daß der halslose Resonator so beschaffen ist, daß die Ebene der Öffnung gewissermaßen eine Symmetrieebene für die Bewegung ist, d. h. daß die Mediumbewegung innen und außen so vor sich geht, als ob ein Nullstrahler in der Öffnung nach innen und außen, wie in einem Halbraum strahlte, nach innen mit phasenentgegengesetzter Richtung. Dann ist[1]) der Strahlungswiderstand der Fläche F in dem Halbraum

$$w_s = 2\pi a \varrho \frac{F^2}{\lambda^2},$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho}{a} \omega^2 F^2.$$

Die pro Schwingungsperiode gestrahlte Leistung ist

$$\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho}{a} \omega^2 F^2 \cdot \frac{\omega^2 A^2}{2},$$

oder gleich

$$\frac{1}{2} \frac{\varrho}{a} \omega^3 F^2 A^2,$$

1) Diese Zeitschr. 18, 261, 1917.

und daher die entsprechende Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \frac{\varrho}{a} \omega^3 F^2 A^2}{\frac{a^2 \varrho}{2} F^2 A^2 \cdot \frac{1}{S}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{a}\right)^3 S,$$

oder auch

$$\mathfrak{d} = \frac{\omega}{a} R = \frac{2\pi R}{\lambda}.$$

Aus dieser Formel erkennen wir, daß die Strahlungsdämpfung von Resonatoren der angenommenen Art gleich ist dem Verhältnis von Umfang der Schallöffnung zur Wellenlänge des erzeugten Tones.

Ist die geometrische und räumliche Anordnung von der angenommenen verschieden, z. B. durch Einbau in starre Wände und dergl., so wird man fast immer von vornherein eine einigermaßen zutreffende Annahme über die Mediumbewegung machen und Eigenschwingungszahl und Dämpfung für die technische Anwendung mit genügender Genauigkeit berechnen können. Durch das Experiment kann man dann prüfen, ob die berechneten Werte mit den beobachteten übereinstimmen, und durch den Vergleich kann man dann rückwärts die ursprüngliche Annahme und Berechnungsgrundlage korrigieren. Doch soll hierauf und auf die experimentellen Bestimmungen der Dämpfungen von Tonräumen und Helmholtzschen Resonatoren nicht näher eingegangen werden, da hierüber in anderem Zusammenhange in Kürze an einer anderen Stelle berichtet werden soll.

Zusammenfassung.

Im vorstehenden ist die einfachste Form eines quasistationären gasförmigen akustischen Schwingungsgebildes, des „Tonraumes", beschrieben, nachdem in einer früheren Arbeit der „Tonpilz", die Grundform des aus fester Materie bestehenden akustischen Schwingungsgebildes behandelt ist.

Der Tonraum besteht aus zwei abgeschlossenen Räumen, die durch eine Schwingungsöffnung verbunden sind. Es sind die Formeln für seine Eigenschwingungszahl, für seine Dämpfung durch Zuleitungen und Strahlung und für die Kopplung zweier Tonräume gegeben.

Als Sonderfall des allgemeinen Tonraumes ist der „offene" oder „Helmholtzsche" Resonator behandelt, für den Eigenschwingungszahl und Strahlungsdämpfung berechnet sind.

Als experimentelle Stütze für die Formeln

der Eigenschwingungszahl von Tonräumen und Helmholtzschen Resonatoren sind einige Meßergebnisse mitgeteilt.

Kiel, im April 1921.

(Eingegangen 9. Mai 1921.)

Ein Verfahren zur experimentellen Aufnahme und Darstellung elektrischer Stromkurven in Polarkoordinaten.

Von Wilhelm Geyger.

Bei den in der Elektrotechnik gebräuchlichen Verfahren zur experimentellen Aufnahme und Darstellung elektrischer Stromkurven wird die Stromkurve in rechtwinkligen Koordinaten wiedergegeben. Diese Verfahren haben alle das Prinzipielle gemeinsam, daß dem schwingenden Lichtstrahl des Oszillographen eine dazu senkrecht verlaufende, geradlinige Bewegung erteilt wird, welche der Abszisse entspricht und somit den Zeitpunkten, deren zugehörige Ordinaten durch die Amplituden des schwingenden Lichtstrahls dargestellt werden. Diese gleichförmige Bewegung kommt dadurch zustande, daß sich Oszillographenbild und aufnehmendes Instrument (Auge oder photographische Platte) zueinander geradlinig bewegen, wobei stets eines dieser Teile unbewegt bleibt. Der Lichtstrahl des Oszillographen beschreibt dann in Nullstellung befindlich eine Gerade, in erregtem Zustand die gesuchte Stromkurve, die somit in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt wird.

Die experimentelle Darstellung von Stromkurven in Polarkoordinaten ist nach den Untersuchungen des Verfassers ebenfalls möglich und es soll der vorliegende Aufsatz ein Verfahren erklären, welches die photographische Aufnahme sowie die objektive Darstellung im Polarkoordinatensystem ermöglicht. Es wird hier dem schwingenden Lichtstrahl des Oszillographen eine drehende Bewegung erteilt, wobei die Nullstellung desselben den Drehungsmittelpunkt bildet, während die Radien des Systems durch die Amplituden des Lichtstrahls dargestellt werden. Die gleichförmige, rotierende Bewegung verläuft synchron mit der Frequenz des zu untersuchenden Wechselstromvorganges oder einem Bruchteil derselben. Der Lichtstrahl bleibt dann in seiner Nullstellung ruhend, während er in erregtem Zustand die gesuchte Stromkurve beschreibt, die somit in Polarkoordinaten wiedergegeben wird. Bei diesem Verfahren bewegen sich Oszillographenbild und aufnehmendes Instrument in drehender Bewegung zueinander, wobei eines davon unbewegt bleibt. Es muß sich also die photographische Platte drehen und der Oszillograph ruhen oder umgekehrt.

Die erstere Anordnung ist bei Oszillographen jeder Art anwendbar und verlangt eine drehbare photographische Platte. Diese ist in eine Kassette einzuschieben und zu befestigen, welche auf die Welle eines Elektromotors aufgesetzt ist, dessen veränderliche Tourenzahl ein dauernd angebrachter Tourenzähler anzeigt. Zwischen Platte und Oszillograph ist ein photographischer Apparat mit Momentverschluß aufgestellt und er ist mit der rotierenden Platte durch ein lichtdichtes Gehäuse verbunden. Eine solche Anordnung zeigt Fig. 1. Die Abstände zwischen Oszillograph, Objektiv und Platte sind so zu wählen, daß auf der Platte ein scharfes Bild des Lichtstrahls entsteht, welches so eingestellt wird, daß es in Ruhestellung mit dem Drehungsmittelpunkt zusammenfällt. Außerdem muß die dem Oszillographen zugeführte Stromstärke so bemessen werden, daß der Lichtstrahl in seiner äußersten Stellung (Maximalwert des Stromes) die wirksame Plattenfläche nicht verläßt. Diese Einstellung geschieht auf die übliche Weise mit Hilfe einer Mattscheibe, welche dabei die Platte ersetzt. Die Tourenzahl des die Platte drehenden Elektromotors wird durch Regulierwiderstände solange verändert, bis der Tourenzähler die erforderliche Tourenzahl anzeigt. Diese ist gleich der Periodenzahl des zu untersuchenden Stromes oder gleich einem Bruchteil derselben. Besonders geeignet ist hier ein Synchronmotor, welcher von derselben Stromquelle gespeist wird wie der Oszillograph. Das Gehäuse zwischen Objektiv und Platte muß lichtdicht abschließen, damit diese gegen fremde Lichteindrücke geschützt ist. Die Belichtungsdauer des Mo-

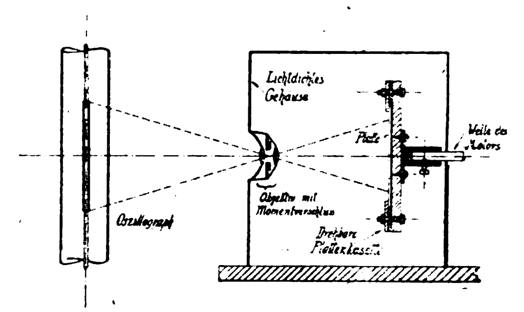


Fig. 1

mentverschlusses wird so kurz gewählt, als es die Empfindlichkeit der Platte zuläßt, sie darf jedoch nicht kürzer sein wie die Dauer einer Periode des untersuchten Stromes. Wenn der Motor sehr regelmäßig arbeitet, kann sie ein Vielfaches derselben betragen. Die Aufnahme selbst wird im verdunkelten Raum vorgenommen, welcher, soweit notwendig, mit einer Dunkelkammerlampe beleuchtet ist, im übrigen ist die Behandlung der Platte dieselbe wie bei allen derartigen Untersuchungen.

Für die zweite Anordnung, welche eine Drehung des Oszillographen verlangt, ist nur die Glimmlichtröhre verwendbar, da diese den einzigen Oszillographen darstellt, welchen man in eine genügend schnelle Umdrehung versetzen kann. Der hierzu vom Verfasser konstruierte Kurvenindikator (Fig. 2) besteht aus

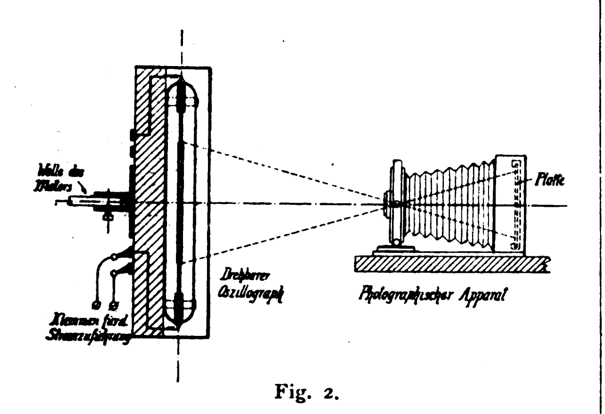


Fig. 2.

einer auf einer drehbaren Scheibe befestigten Glimmlichtröhre (gefüllt mit verdünntem Stickstoff von 7 bis 8 mm Quecksilberdruck), welche um die Trennstelle ihrer Glimmelektroden drehbar ist. Die Scheibe ist auf die Welle eines Elektromotors aufgesetzt, dessen Tourenzahl durch Regulierwiderstände veränderlich ist. Die Tourenzahl wird so gewählt, daß das entstehende Glimmlichtbild stillsteht, so daß es in dieser Stellung bequem photographiert werden kann. Was Optik, Belichtungsdauer und Behandlung der Platte anbelangt, so gilt das gleiche wie bei anderen Verfahren ähnlicher Art.

Zur objektiven Darstellung genügt das Betrachten des stillstehenden Glimmlichtbildes, dessen Umgrenzungslinie die gesuchte Stromkurve in Polarkoordinaten darstellt. Um dieselbe mehreren Personen gleichzeitig vorführen zu können (Vorlesung), projiziert man das Glimmlichtbild mittels eines geeigneten optischen Systems auf einen weißen Schirm. Zur Auswertung der Stromkurve kann man entweder das projizierte Schirmbild verwenden, dessen Grenzlinie auf dem Schirm nachgezeichnet wird, oder man benutzt die an einen Schirm vergrößert projizierten photographischen Aufnahmen, wozu Positive und Negative verwendet werden können. Um die Auswertung bequem und genau ausführen zu können, ist der Projektionsschirm mit einem Maßsystem versehen, bestehend aus Radien und Kreisen, deren Winkelwerte und Halbmesser eingetragen sind.

Um den Maßstab des Schirmbildes zu bestimmen, beschickt man den Oszillographen mit einem Gleichstrom von bekannter, in Ampère gemessener Stromstärke. Die von diesem auf dem Schirmbild hervorgerufene Ablenkung des Lichtstrahls wird in Zentimetern gemessen. Das Verhältnis der Stromstärke in Zentimetern zur Ablenkung in Ampère ergibt den gesuchten Maßstab. Bei Verwendung von Glimmlichtröhren ist die folgende Methode geeigneter, die auch in allen anderen Fällen angewendet werden kann. Der Effektivwert des durch die Glimmlichtröhre fließenden Stromes wird durch ein Meßinstrument in Ampère gemessen, während der Effektivwert der Stromkurve auf dem Schirm in Zentimetern bestimmt wird. Das Verhältnis des Effektivwertes in Ampère zum Effektivwert in Zentimetern ergibt den gesuchten Maßstab.

Um aus der in Polarkoordinaten vorliegenden Stromkurve den Effektivwert zu finden, muß der Radius des Kreises bestimmt werden, welcher den gleichen Flächeninhalt besitzt wie das von der Stromkurve eingeschlossene Flächenstück. Der Radius dieses Kreises stellt den Effektivwert des Stromes in Zentimetern dar, der Flächeninhalt der Kurve wird durch graphische Integration bestimmt. Die mathematische Grundlage des Verfahrens ist folgende (Fig. 3):

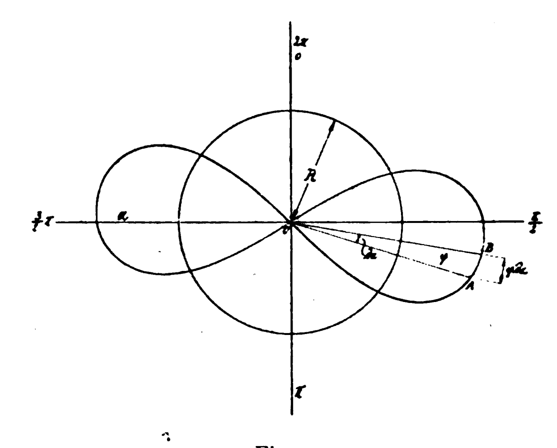


Fig. 3.



Es muß sein

$$F_{\text{Kreis}} = F_{\text{Kurve}},$$
$$F_{\text{Kreis}} = \pi \cdot R^2,$$
$$F_{\text{Kurve}} = \int_0^{2\pi} \partial f = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cdot \partial \alpha, \text{ denn } F_{OAB} = \partial f = \frac{\varphi^2}{2} \cdot \partial \alpha.$$

$$\pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cdot \partial \alpha, \text{ also ist}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cdot \partial \alpha}.$$

Das neue Verfahren ist das einzige, welches die experimentelle Darstellung von Stromkurven in Polarkoordinaten ermöglicht. Technisch bietet es gegenüber den anderen Verfahren mancherlei Vorteile, während die Auswertungsgenauigkeit für die meisten Fälle größer ist. Außerdem ist zu erwähnen, daß auch bei diesem Verfahren eine gleichzeitige Aufnahme mehrerer Strom- oder Spannungskurven möglich ist. Dies ist besonders wertvoll, denn man erhält dann eine experimentelle Darstellung der in der Wechselstromtechnik allgemein verwendeten Vektordiagramme.

(Eingegangen 2. Mai 1921.)

Über eine einfache Methode zur Bestimmung von Kapazitäten mittels Glühkathodenröhre.

Von Karolus und Prinz Reuß.

Die Eigenschaft der Glühkathodenröhre von einer bestimmten Spannung an einen von der Spannung unabhängigen Strom (Sättigungsstrom) zu liefern, läßt sich zu einer einfachen Methode zur Eichung von Kapazitäten verwenden. Der Sättigungsstrom kann bei den gebräuchlichen kleinen Senderöhren (Type R.S. 5 und Verstärkerröhren von Telefunken) durch Verändern des Heizstromes in einem Bereich von 10^{-3} Amp. bis zu 10^{-8} Amp. und darunter eingestellt werden. Bei Strömen dieser Größenordnung liegt die Sättigung bereits bei Spannungen von 10 bis 50 Volt. Das Gitter ist dabei zweckmäßig kurz geschlossen. Fig. 1 zeigt die Strom-Spannungskurven $J_a = f(E_a)$ für verschiedene Heizströme.

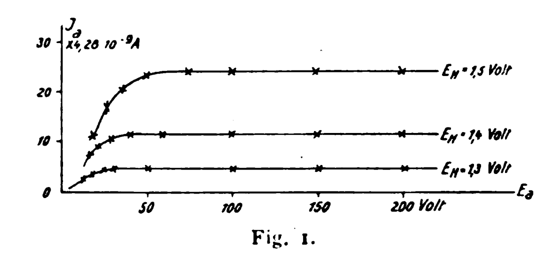


Fig. 1.

Lädt man mit dem Sättigungsstrom der Röhre eine Kapazität C in t Sekunden auf die Spannung V, so ist ohne weiteres aus dieser Strom-Spannungs- und Zeitmessung die Kapazität aus der bekannten Beziehung $C = \frac{J \cdot t}{V}$ gegeben. Man schaltet die unbekannte Kapazität in den Anodenkreis und beobachtet an einem an der Kapazität liegenden statischen Voltmeter (Wulfsches Faden- oder Quadrant-Elektrometer) die in einer bestimmten Zeit (mit der Stoppuhr gemessen) erreichte Spannung.

Man hat es dabei in der Hand, durch Veränderung des Heizstromes und damit des Sättigungsstromes eine gut meßbare Aufladezeit für Kapazitäten verschiedener Größe zu erhalten. Die Strommessung geschah mittels eines Spiegelgalvanometers (S. & H.) (Stromempfindlichkeit in der benutzten Anordnung $1^0 = 4{,}28 \cdot 10^{-9}$ Amp.).

Die Anodenspannung beträgt zweckmäßig 2—300 Volt. Der Kondensator ist zunächst kurz geschlossen. Bei Aufhebung des Kurzschlusses lädt er sich mit einer der Zeit proportionalen Aufladegeschwindigkeit auf. Dabei bleibt der Ladestrom so lange konstant, als die Differenz der Anodenspannung und der am Kondensator sich bildenden Gegen-E.M.K. oberhalb der Sättigungsspannung bleibt. — Bei Strömen von 10^{-8} Amp. konnte der Kondensator bis zu ca. 50 Volt, bei kleineren Strömen bis 100 Volt aufgeladen werden, ohne daß der Sättigungsstrom merklich abnahm. Wenn die Aufladung ganz erfolgt ist, muß natürlich der Anodenstrom bei guter Isolation auf 0 zurückgehen. Ein gegebenenfalls vorhandener Reststrom gibt somit ein Bild des Isolations-

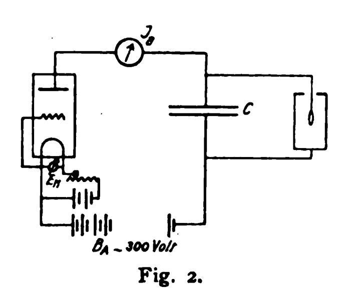


Fig. 2.

widerstandes des Kondensators und läßt sich in einfacher Weise als Korrektur anbringen. — Bei den gemessenen Kapazitäten konnte auf Anbringung der Korrektur verzichtet werden, da der Isolationsstrom unter 1 Proz. des Ladestroms blieb.

Nach der eben skizzierten Methode wurden die Stufen eines Glimmerkondensators von $^1/_{100}$ bis 1 M.F. durchgeeicht und folgende Resultate erhalten:

C_1	J_2	t	E	C_2
0,01 M. F.	$3{,}63 \cdot 10^{-8}$ Amp.	14,0	50	0,0101
0,02	3,63	28,0	50	0,0202
0,05	10,6	14,0	30	0,0495
0,1	11,2	27,0	30	0,101
0,75	99,2	22,6	30	0,748
1,0	99,2	30,2	30	1,005

Es bedeuten in der Tabelle:

C_1 die am Kondensator angegebene Kapazität,
J_a den Anodenstrom,
t die Aufladezeit,
E die am Kondensator gemessene Spannung,
C_2 die aus den Beobachtungen errechnete Kapazität.

Der durchschnittliche Fehler betrug somit rund 1 Proz. und könnte bei Anwendung besonderer Maßnahmen leicht noch verringert werden.

Wie aus der Tabelle zu ersehen, ist der Meßbereich sehr groß. Gemessen wurden Kapazitäten von 0,001 bis 10 M.F. Die unterste Grenze ist zunächst durch die Empfindlichkeit des Strommeßinstrumentes gegeben. Verzichtet man jedoch auf Messung des Stromes und damit auf absolute Eichung, so lassen sich durch Substitution Kapazitäten einiger hundert Zentimeter noch gut bestimmen. Dabei können die Kondensatoren auch zu bedeutend höheren Spannungen aufgeladen und dadurch die Aufladezeiten entsprechend vergrößert werden. Bei der relativen Eichung einer Kapazität braucht auch die Bedingung, daß der Strom während des ganzen Ladevorgangs einen konstanten Wert behält, nicht eingehalten zu werden. Vorausgesetzt, daß bekannte und unbekannte Kapazität auf denselben Endwert der Spannung aufgeladen werden, stehen die dazu nötigen Zeiten direkt im Verhältnis der Kapazitäten.

Die angegebene Methode wird sich dank ihrer Einfachheit mit Vorteil auch bei der Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten verwenden lassen.

Leipzig, Physikalisches Institut, den 20. April 1921.

(Eingegangen 9. Mai 1921.)

Berichtigung zu der „Theorie der Volumdilatation bei konzentrierten Lösungen"
(diese Zeitschr. **22**, 177—179, 1921).

Von Alfred Schulze.

Als Mittelwert für das Molvolumen der Bimole von Aceton ergibt sich

$$V_2 = 139{,}039,$$

woraus für die Dichte der Bimole folgt: $d_2 = 0{,}8350$.

(Eingegangen 9. Mai 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Untersuchungen über Aufbau und Zusammenschluß der Maßsysteme.

Von W. Porstmann.

(Schluß.)

Der Römer setzt seine zehn Hauptzahlen aus drei Zeichen zusammen: I, V und X. Der Araber braucht dazu eine den Römer wahrscheinlich unnütz groß dünkende Fülle von neun verschiedenen Zeichen. Der Vorteil offenbart sich aber, wenn es sich um die Schreibung größerer Mengen handelt. Beide Systeme benutzen ferner die lineare Anordnung von links nach rechts, und beide schreiben links den größten Komplex und setzen nach rechts die kleineren der Reihe nach an. Aus langer Übung mit dem arabischen System drängt sich von selbst auf, daß man die Potenzbenennung völlig weglassen kann, falls man sich entschließt, nach der beginnenden größten Potenz

jede folgende anzudeuten, vor allem auch die fehlenden. Hierzu ist ein neues Zeichen zu vereinbaren, die Null. 5090 besagt 5 T + o H + 9 Z + o E. Die oben dargestellte Menge würde zu schreiben sein 439. Diese Darstellung ist unzweideutig, sicher und nicht einfacher denkbar. Es stehen sich letzten Endes gegenüber CCCCXXXIX und 439. Trotz der vielerlei gemeinsamen Züge ist das Ergebnis beim arabischen System doch überraschend einfach.

Zunächst beherrschte man natürlicherweise nur die Zahlen des Alltags, die immerhin kleinen Mengen, die man bisher mit den römischen Ziffern bewältigt hatte. Es dauerte lange, jahrhundertelang, bis man das neue Verfahren grundsätzlich für die allgemeinen Zahlen anwandte und vor allem auch für immer größere Mengen. Das Hintennachhinken eines entsprechend einfachen Wortsystems hinderte vor allem die vollkommene Durchführung des ganzen Gedankens. Man hatte keine Namen für die Potenzen jenseits Tausend. Einer, Zehner, Hunderter, Tausender waren eingeführte Begriffe. Tausend war die größte Mengennorm, genau wie im römischen System. Was darüber lag, mußte alles in Tausendern ausgedrückt werden. Die entstehende Wortschwulst hat dann wieder verwirrend auf die Darstellung in Zeichen gewirkt, so daß ziemliches Durcheinander herrschte. Vor allem war noch nicht zum Bewußtsein durchgedrungen, daß man ein Mittel gefunden hatte, beliebig große endliche Mengen dem Begriffe und dem Zeichen nach zu beherrschen; man hatte noch nicht extrapolieren gelernt. Adam Ries, der wohl als der beste Rechner seinerzeit im arabischen System gelten darf, konnte beispielsweise die Million nicht anders ausdrücken, als daß er die Tausende, aus denen sie sich zusammensetzte, aneinanderreihte und hintereinander schrieb. Die Zahl 45 329 564 257, die wir heute in Worten lesen: 45 Milliarden 329 Millionen 564 Tausend 257, schrieb und las Ries so: 45 tausend tausendmaltausend 3 hunderttausendmaltausend 29 tausendmaltausend 5 hunderttausend 64 tausend und 257. Wir erkennen hier, daß die damalige Zeit kaum erst die römischen Ziffern verdaut hatte. Sie stand noch völlig unter deren Bann. Auch der Lateiner hat kein Wort für die Million, noch weniger eins für die Milliarde. Er drückt Million ganz ähnlich aus: zehnmaljehunderttausend (decies centena milia).

Es sind seit Adam Ries einige Jahrhunderte vergangen. Wir haben zu dem Erbe der alten Welt mancherlei hinzugefügt. Insbesondere haben wir die Grenze der beherrschbaren Mengen noch viel weiter hinausgerückt. Millionen, Milliarden, Billionen usw. sind geschaffen worden. Und wir wissen heute, daß das Dezimalprinzip nicht durch die Größe der Mengen in seiner Anwendung begrenzt ist. Nächst dieser Tat ist eine zweite von bisher unerkanntem Werte geworden, die sich eben so langsam, oder vielmehr noch langsamer als das Dezimalgesetz in dessen Gefolge aus unscheinbaren Anfängen heraus unbewußt zur Geltung gebracht hat: die Dreistellenregel.

Begriff, Zeichen und Wort sind die drei Baustoffe des Zahlensystems. Jeder dieser Stoffe bedarf einer planmäßigen Verarbeitung, wenn wir über die anschaulichen Zahlen hinauskommen wollen. Eine begriffliche Grundlage für das Zustandekommen eines Zahlensystems haben wir im Dezimalsystem erkannt. Durch das arabische Zeichensystem wurde die Beherrschung der Mengen und die Durchsetzung des Dezimalsystems stark gefördert. Wir betrachten es als ein vollkommen ausgebildetes Zeichengefüge. Wenn nun neue wesentliche Elemente im ganzen Zahlengefüge auftreten, so können wir sie nur noch im weitgehend ungeordneten Wortsystem suchen. Entsprechend werden wir von einem einwandfreieren Wortsystem eine ähnliche Belebung erwarten, wie sie durch den Ausbau des Zeichensystems zustande kam. Dieser bisher fehlende letzte Grundstein wird nun durch die Dreistellenregel gebracht. Sie ordnet in erster Linie die Wortzuordnung — nicht die einzelnen Worte, sondern die Beziehungen, denen sich diese beugen. Wir gewinnen ein System für den Aufbau der Worte, so wie wir im lateinischen und arabischen System solche für die Zeichen haben. Das auf Grund der Dreistellenregel geordnete Wortsystem können wir auch das Dreistellensystem nennen. Es beeinflußt die arabische Zeichenzuordnung nur unwesentlich, greift aber um so mehr gestaltend in die allgemeinen Normenverhältnisse ein. Dezimalsystem, arabisches System und Dreistellensystem sind dann die Eckpfeiler der neuzeitlichen Mengennormierung. Erst auf diesen Grundlagen können wir die Sondernormierungen in ihrer Entwicklung weiter verfolgen und vor allem nun bewußt weiter ausgestalten.

Bei der Zeichen- und Wortzuordnung müssen wir je zwei Teile unterscheiden: die einzelnen Zeichen und Worte und die Systeme, nach denen diese aufgebaut sind. Das arabische Zeichensystem läßt die einzelnen Zeichen für die Hauptzahlen vollständig beliebig, ob wir 4 oder dafür ein andres Zeichen schreiben, ist ganz gleichgültig. Die Forderung größter Einfachheit und Brauchbarkeit regelt diese

Frage. Trotzdem sind die arabischen Zeichen aber ebenso wie das System international. Die Dreistellenregel ordnet entsprechend das Wortgefüge für die Zahlen, während es die einzelnen Worte für die Hauptzahlen unberührt läßt. Auf die Lösung dieser Aufgabe wird hier nicht eingegangen, obwohl da noch ein großes Gebiet der Unordnung vorliegt. Die Dreistellenregel ist nun ebenfalls international im Gebrauch, die Worte dagegen sind national zersplittert.

Wie lesen wir die Zahlzeichen? Die Hauptzahlen von Null bis Neun haben selbständige Namen bekommen, ebenso die dezimalen Gruppen. Damit ist die erste Grundlage für die Zifferbenennung gewonnen. Im deutschen Sprachgebrauch haben wir die Dezimaler: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, Millioner, Zehnmillioner, Hundertmillioner, Milliarder usw. Ganz abgesehen von der nicht zu rechtfertigenden Silbenschwulst sehen wir, daß nicht alle Dezimaler einen selbständigen Namen haben. Die ersten vier sind unabhängig voneinander. Million, Milliarde, Billion sind ebenfalls selbständige Worte, die zwischenliegenden Dezimaler aber sind zusammengesetzt aus zehn oder hundert und einem selbständigen Dezimaler. Wir bevorzugen demgemäß bestimmte Dezimaler: Einer, Tausender, Millioner, Milliarder, Billioner usw. sind die Hauptdezimaler, dazu kommen Zehn und Hundert, die als Hauptdezimaler Verwendung finden wie auch allgemeiner zu Zusammensetzungen benützt werden. Hier haben sich, wie wir sehen, Abweichungen vom Zeichensystem eingebürgert, die wir etwas näher untersuchen wollen.

Mit Hilfe der Hauptzahlen und der Dezimaler müßten wir nach dem Zeichensystem die Zahl 60257 lesen: 6 Zt 0 T 2 H 5 Z 7 E. Das Zeichensystem hat die Angabe der Dezimaler durch die geregelte Anwendung des Stellengesetzes ausgeschaltet. Im Worte lassen wir herkömmlich dagegen die Dezimaler nicht weg (von der Unterdrückung des „Einer" abgesehen). Sämtliche europäische Sprachen deuten sie irgendwie an. Die Methoden der einzelnen Sprachengruppen sind allerdings untereinander verschieden, so daß wir hier vor einer Zersplitterung stehen, die wir nur an den Sonderfällen studieren könnten und deren Organisation noch aussteht. Die Benennung „Zehner" wird durchgängig mit der vorangehenden Hauptzahl verschmolzen: fünfzig, cinquante, fifty, quinquaginta. Sind gleichzeitig Zehner und Einer vorhanden, so tritt allenthalben eine Verschmelzung ein: sechzehn, seize, sixteen sedezim. Diese Verschmelzung wird wieder aufgehoben, sobald mehr als ein Zehner vorliegt. Die Hunderter verbinden die neueren Sprachen nicht mit der Hauptzahl: drei hundert, trois cents, three hundreds, dagegen trecenti. Auch die Tausender werden allenthalben nicht mit der Hauptzahl verschmolzen und selbständig gelesen wie die Hunderter. Die Zehntausender werden überhaupt nicht selbständig gelesen, ebenso die Hunderttausender nicht, erst die Millioner wieder. Das ist eine auffallende Eigentümlichkeit. Wir lesen jetzt 579: fünfhundertneunundsiebzig. In dieser Weise beherrschen wir die Zahlen von 1 bis 999, die Zählung bis in die Hunderte. Bei den größeren Zahlen tritt die Eigentümlichkeit auf, daß wir die Tausender, Millioner, Milliarder, kurz die millesimalen Dezimaler, als selbständige Einheiten stets bis in die Hunderte zählen, nie darüber hinaus. Wir zählen im Worte die Einer, Tausender, Millioner usw. stets von 1 bis 999. Mit der angedeuteten Wortbildung bis in die Hunderter kommen wir für alle weiteren Zahlen vollständig aus. Wir behandeln immer je drei Stellen des dezimalen Systems bei der Wortbildung selbständig und in gleicher Weise. Das ist die Dreistellenregel. Die Zahl 45329564 257 lesen wir 45 Milliarden 329 Millionen 564 Tausend 257 (Einer). Wir erkennen nun, warum wir für die millesimalen Dezimaler selbständige Worte haben (Tausend, Million, Milliarde usw.), während für die zwischenliegenden auf Zehn und Hundert bezogene Worte eingeführt sind, die beim Lesen überhaupt nicht angewandt werden — weil wir immer bloß von 1 bis 999 zu zählen brauchen. Die Worte Zehn und Hundert werden nur in der ersten millesimalen Gruppe selbständig zur Bildung der Zahlworte von 1 bis 999 benutzt.

Dieses Verfahren ist uns schon in Fleisch und Blut übergegangen. Es ist aber ein Beitrag der neuesten Zeit zur Beherrschung der Mengen. Adam Ries hatte das Hilfsmittel noch nicht. Er hatte nicht für die millesimalen Mengennormen selbständige Worte. Der Tausender war bei den Alten und im Mittelalter die größte Mengennorm. Sie wurde bei den Römern wie bei den neuen Kulturen selbständig gezählt und als Benennung benutzt, ohne je mit dem vorhergehenden Zahlwort verschmolzen zu werden. Dieser Umstand ist der Grund, daß wir nach drei Stellen gliedern; er geht also auf die Alten zurück. Die selbständige Behandlung der lateinischen Tausender ist der Anfang des Dreistellensystems, nur war es an diesem Anfang noch nicht zu erkennen. Adam Ries mußte bei der oben angeführten Zahl notwendig auch eine Gliederung anwenden, denn er kannte ja auch bloß Zahlworte bis 999. Er gliederte aber:

45 3 29 5 64 275. Das heißt, er benutzte dem Worte nach außerdem den Hundertmillioner und den Hunderttausender als selbständige Normen im Gegensatz zur Gegenwart. Er besaß erst eine einzige volle millesimale Gruppe, nämlich die Einergruppe von 1 bis 999.

Diese millesimale Gruppierung ist nun auch auf die Schreibweise übergegangen. Die Menge 45329564257 können wir nicht lesen und bewerten, wenn wir nicht von rechts nach links je drei Stellen zusammenfassen. Von vornherein erleichtern wir uns daher grundsätzlich bei größeren Zahlen die Wortbildung, indem wir diese Gruppierung auch schriftlich vornehmen und Lücken zwischen den millesimalen Dezimalern lassen. Dies ist eine Anwendung des Stellenwertes. Man benutzt sogar die F r e i l a s s u n g eines kleinen Raumes zur Zuordnung bestimmter Normen, die wir aber auf jeden Fall aussprechen und nicht etwa auch durch Sprechpausen andeuten. Dabei ist noch erschwerend zu merken, daß nicht jede Lücke dieselbe Bedeutung hat, sondern daß jede Lücke einer andern millesimalen Norm entspricht. Beim Lesen einer Zahl muß man daher jedesmal erst abzählen, wieviel Dreiergruppen vorhanden sind, um jede Lücke richtig zu benennen. Die dezimalen Normen sind in einer Zahl durch die Stellen in jeder Dreiergruppe gekennzeichnet, die millesimalen Dezimaler außerdem durch Lücken. Auffällig ist aber an der ganzen Methode wieder, daß gerade die Drei diese größte Gruppe ist, die wir anschaulich übersehen beim Schreiben wie beim Sprechen. Sie hat ihren Ursprung im lateinischen Zeichen- (III) und auch Wortsystem (mille wurde als erste lateinische Mengeneinheit genau so wieder wie der Einer behandelt), aber bis heute haben wir diese Gruppe nicht als zu klein empfunden. Es fragt sich, ob sich je etwa eine Vierstellenregel nötig machen wird, wenn wir unseren Mengenbereich in übersichtlicher Weise noch weiter ausdehnen wollen, oder ob hier andere Prinzipien ordnend eingreifen, oder gar ebenfalls unbewußt schon eingegriffen haben.

Das Dreistellensystem konnte in den alten Kulturen nur andeutungsweise einsetzen, da es sich erst bei der Bewältigung größerer Mengen, als die Alten beherrschten, in den Vordergrund drängt. Trotz der Bereitstellung des begrifflichen Dezimalsystems und des arabischen Zeichensystems könnten wir von beiden nur schlechten Gebrauch machen, wenn nicht das Dreistellensystem eine einfache, entsprechend übersichtliche Wortzuordnung vermittelte. Ohne das Dreistellensystem würden wir mit den Zahlen nur umgehen können, wie etwa die Taubstummen, ohne das arabische Zeichensystem dagegen wie die Blinden.

Auf Grund der neuen Regel haben wir bloß eine Zählung bis 999 von einigermaßen größerer Selbständigkeit, die entsprechend den dezimalen Stellenwerten vorgenommen wird. Alle größeren Mengen werden nach millesimalen selbständigen Einheiten gemessen, die alle bis 999 gezählt werden. Unser Wortsystem ist ein Dezimalsystem mit übergelagertem Millesimalsystem. Wie wir nun übersehen, müssen wir dreierlei wesentlich verschiedene Zählmethoden in unserm „Zählen" voneinander unterscheiden. Die Mengen von 0 bis 9 beherrschen wir nach anschaulichem Verfahren durch selbständige Zeichen und Worte für jede der Mengen, durch die Hauptzahlen. Die Namen der Mengen von 10 bis 999 werden aus den Hauptzahlen und den Dezimalern gebildet in eben beschriebener Weise. Größere Mengen werden durch wiederholte Zählung von 1 bis 999 unter Anwendung millesimaler selbständiger Mengennormen übersichtlich gemacht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Zeichen- und Wortsystem besteht nun darin, daß wir in der Bezeichnung keinerlei Schranken durch die Größe der Zahlen finden. Wir können sehr viele dezimale Stellen, auch zu dreien gruppiert, nebeneinander schreiben. In der Benennung dagegen stellen sich uns unüberwindliche Schranken entgegen, denn wir müssen die millesimalen Lücken richtig benennen, was schon nach wenigen Dreiergruppen praktisch unmöglich wird. Wir beherrschen auf diese Weise unsere Mengen wiederum nur insoweit, als sie unterhalb einer gewissen Grenze liegen. Die Milliarde lesen wir noch bequem. Bei Billionen sind vier derartige Dreiergruppen zu unterscheiden. Wir müssen da schon zweimal hinsehen, um die Billionengruppe richtig zu treffen. Noch größere Gruppen kommen nicht vor, obwohl wir theoretisch noch Namen dafür haben, — oder sie werden vermieden. Schon die Billion ist uns unbequem. Auch hier verlieren wir wiederum die anschauliche Übersicht, sobald mehr als drei bis vier Dreiergruppen vorliegen. Und um anschauliche Übersicht handelt es sich beim Zahlenlesen, da wir nicht erst die millesimalen Gruppen bei der Wortzuordnung der Reihe nach abzählen können. Letzten Endes setzt also doch das Unvermögen größerer anschaulicher Übersicht unserer Mengenbeherrschung eine Grenze. Durch Systembildung ist diese Grenze aber von den kleinen anschaulichen Hauptzahlen bis hinaus in die Billionen verschoben worden.

Die Behandlung noch größerer Mengen wird



unbequem und umständlich. Wir brauchen mit andern Worten neue Verfahren zu ihrer Beherrschung, denn größere Mengen liegen durchaus nicht außerhalb unseres Alltagsbereiches. Wir brauchen bloß an die kosmischen Längen zu erinnern. Die Entfernung der Sterne in Kilometern gemessen führt zu „unheimlich" großen Mengen, die wir mit den bisherigen Mitteln nicht beherrschen können. Hier haben wir dann die äußere Grenze des Wirkungsbereiches der Dreistellenregel. Verfahren grundverschiedener Art werden zur Übersicht über noch größere Mengen herangezogen.

Die Normung der Normensysteme.

Wir haben eine vom praktischen Standpunkt aus ideal zu nennende Mengenmessung. Und wir müssen den Satz als selbstverständlich und notwendig hinstellen, daß nun alle Normierungen besonderer Mengen der allgemeinen Mengenmessung unterzuordnen sind, falls nicht gerade besondere Eigentümlichkeiten der behandelten Mengen eine andere Lösung bedingen. Die Sondernormierungen sind an die millesimal-dezimale Mengenmessung anzuschließen. Herkömmlich aber sagt man, sie sind an das Dezimalsystem anzuschließen. Hierin liegt ein großer Unterschied. Es genügt nicht, wie allgemein angenommen und durchgeführt, die abgeleiteten Normen eines Maßsystems dezimal abzustufen. Dabei treten erfahrungsgemäß Unzulänglichkeiten auf, die eben daher rühren, daß unsere Mengenmessung nicht eine dezimale, sondern eine millesimal-dezimale ist. Das reine Dezimalsystem mag einstens auch für die Mengenmessung, z. B. von Adam Ries, beabsichtigt gewesen sein, es ist aber eine Abart desselben im Laufe der Zeit zur Herrschaft gelangt, und zwar ganz ohne Absicht. Daher ging die Umformung nicht in die bewußte Ausgestaltung der neuzeitlichen Maßsysteme über, und es ergaben sich notwendig Widersprüche oder zum mindesten vermeidbare Reibungen und Unklarheiten.

Die Frage nach dem Zweck einer Unterordnung der besonderen Maßsysteme unter die Mengenmessung ist leicht zu beantworten. Die getrennt entwickelten oder rückständigen Sondernormierungen bilden eine Zersplitterung untereinander. Die Ordnung dieser Zersplitterung unter Zugrundelegung der allen diesen Normierungen gemeinsamen Bestandteile, die eben in der allgemeinen Mengenbeherrschung vereinigt sind, beseitigt ein Chaos. Und gerade diese höhere Organisation der Normensysteme untereinander bringt der Menschheit eine derartige Energieersparnis, daß wir ohne sie die gegenwärtigen Wirtschaftszustände nicht aufrecht erhalten könnten, weil viel zu viel Arbeit an die Bewältigung der als grundverschieden angenommenen Maßsysteme und ihrer gegenseitigen Beziehungen gewandt werden müßte. Es ist ein Unterschied, ob das Kind in der Schule nur den Umgang mit Zahlen sich anzueignen braucht, um auch ohne weiteres den Umgang mit quantitativen Normierungen zu beherrschen, oder ob jedes einzelne Maßsystem getrennt und mit neuen Eigenheiten gelernt werden muß. Viel größer noch ist der entsprechende Unterschied in der Anwendung dieser Systeme im alltäglichen Haushalt der Völker.

Bei der Betrachtung der einzelnen Systeme erkennen wir, daß diese Gesamtnormierung schon ziemlich vorgeschritten ist. Andrerseits finden wir aber auch Verhältnisse, die wir mit den bisherigen Mitteln nicht recht zufriedenstellend überblicken und klar ausarbeiten können. Es fehlen uns die ordnenden Gedanken zu dieser Arbeit. Diese sind nun gewonnen in der Feststellung der einzelnen Baustoffe der Mengennormierung. Wenn wir jeden Grundstoff und seine planmäßige Verarbeitung sinngemäß auf die einzelnen Normierungen übertragen, werden wir die bisherige Undurchsichtigkeit der vielerlei Strömungen in einem Sondersystem vollständig klären und auch aus diesem Wust ein geordnetes Gefüge schaffen. Unsere Aufgabe ist: das begriffliche Dezimalsystem, das arabische Zeichensystem und die Dreistellenregel planmäßig in die Sondernormierungen hineinzuarbeiten.

Die sinngemäße Unterordnung der Einzelsysteme unter die drei Gesichtspunkte muß an den Sondernormierungen selbst vorgenommen werden. Begriffs- und Zeichensystem lassen sich unschwer in ihrer Wirkung abgrenzen, die Dreistellenregel dagegen bringt zahlreiche neue Forderungen an Aufbau und Gebrauch der Sondernormierungen. Mängel und Unstimmigkeiten in unseren Maßgefügen weiß jedermann aus seiner Erfahrung aufzuzählen. Wir brauchen bloß an die schwerfällige Benennung unserer Flächen- und Raummaße zu denken, die mit sechssilbigen Worten sich in unserer heutigen Welt wie Urväterhausrat ausnehmen. Ebenso schwerfällig ist ihre gegenseitige Umrechnung. oder scheut sich nicht etwa jeder, Quadratzentimeter in Quadratmeter umzudenken? Alle diese Fragen gehören hierher. Wie kommt es, daß wir von den vielen dezimalen Längenmaßen, die aufgestellt sind (Kilometer, Hektometer, Dekameter, Meter, Dezi-, Zenti-, Millimeter),

durchaus nicht alle benutzen? Dasselbe tritt ein bei den Gewichtsmaßen. Warum haben wir merkwürdigerweise in unseren Münzgefügen überhaupt nur eine einzige Einheit, warum sind wir mit bestem Erfolg ohne Kilo-, Hekto-, Dekamark und ohne Dezi-, Zenti-, Millimark ausgekommen? Welche Forderungen ergeben sich an eine haltbare Zeit- und Winkelmessung? Denn daß wir hier noch in altertümlichsten Verhältnissen herumstapfen, weiß und bedauert jeder, der mit diesen Maßen zu tun hat. Unsere zusammengesetzten Einheiten, wie solche für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Rotationen usw., stecken alle noch in den Kinderschuhen.

Es kann hier nicht auf diese zahlreichen wichtigen Fragen näher eingegangen werden, sie finden eingehende Erledigung und Ordnung in der Ausgangsarbeit, auf die hier verwiesen sei. Nur auf einige Punkte daraus sei noch aufmerksam gemacht. Ein strittiges Maß für Technik und Wissenschaft ist das Zentimeter. In der Arbeit findet sich der Nachweis, daß das Zentimeter als organisatorisch unhaltbares Maß grundsätzlich zu meiden ist, genau so wie Dezimeter, Hektometer und Dekameter. Entsprechende Folgerungen ergeben sich für alle anderen Maßgebiete. — Eine Beobachtung können wir ferner auf fast allen Maßgebieten machen, nämlich daß sie nicht mehr ausreichen. Größere und kleinere Maße als die bisher vorgesehenen werden gebildet, mit denen größte und kleinste Mengen gemessen werden, z. B. die Maße für die Lichtwellen oder überhaupt für die mikroskopischen Abmessungen. Andrerseits braucht der Astronom Maße, um seine unheimlich großen Dimensionen im Weltenraum zu meistern. Lichtjahre hat er als Berufsmaß eingeführt. Wir kommen hier gleichzeitig zur Beantwortung der Frage, wie es denn dem Menschen gelungen ist, noch größere Mengen, die er mit seinen Zahlen in beschriebener Weise nicht mehr übersehen kann, wie er diese trotzdem durch Verschiebung von Einheiten in gewisser Weise in seinen Geisteshorizont hereinholt. Wir kommen ferner so zur Erweiterung unseres Alltagsbereiches der Maße nach oben durch einen kosmischen Bereich und nach unten durch einen Mikrobereich. In welchem Zusammenhang haben all diese Maße zu stehen, wenn wir die zweckmäßigsten Formen anwenden wollen? Es ergibt sich schließlich ein allgemeinstes Gefüge, das all den riesigen Umfang umspannt, das Universalsystem, dem sich die Sondermessungen sinngemäß anzupassen haben, wenn sie ihren Bereich zweckmäßig beherrschen wollen.

(Eingegangen 31. Juli 1918.)

Tagesereignisse.

Am 27. und 28. Mai fand in Freiberg in Sachsen eine vom Sächsischen Bergamt einberufene Tagung statt, die sich die Vereinheitlichung der in Badeorten vorzunehmenden Messungen des Emanationsgehaltes radioaktiver Quellen zum Ziel gesetzt hatte. Nach einem Referat Prof. Ludewigs über die bisher üblichen Methoden und die dabei auftretenden Schwierigkeiten wurde eine Kommission eingesetzt, um die Richtlinien für untereinander vergleichbare Angaben für die Zukunft sicher zu stellen. Nach den Vorschlägen der Kommission einigte man sich auf die folgenden Grundsätze:

1. Es wird empfohlen, den Emanationsmessungen von Quellwässern in Zukunft Normallösungen zugrunde zu legen.
2. Die Versammlung ersucht Prof. Geiger sich dahin zu verwenden, daß die Physikalisch-Technische Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg den Interessenten Radiumnormallösungen von der Größenordnung 10^{-6} mg Radium zur Verfügung stellt.
3. Als internationale Radiumemanationseinheit wird das Curie anerkannt. Als praktische Einheit für die Angabe der Radioaktivität von Quellen wird 10^{-10} Curie pro Liter empfohlen.
4. Es wird empfohlen, bei Emanationsmessungen von Quellen nicht das Wasser selbst, sondern die ausgetriebene Emanation in den Meßraum zu bringen.

Bei allgemeiner Anerkennung, die sich Mache um die ersten quantitativen Messungen auf diesem Gebiete erworben hat, wurde es doch als wünschenswert angesehen, sich der Internationalen Einheit anzuschließen. Es konnte jedoch nicht verkannt werden, daß eine wesentlich kleinere Einheit (10^{-10} Curie) für die Praxis als wünschenswert erscheinen muß. Da es sich für die Bäderpraxis empfehlen wird, einen eigenen Namen für 10^{-10} Curie pro Liter zu wählen, wird hierfür der Name „Eman" vorgeschlagen.

An der Tagung nahmen teil: K. Bennewitz-Berlin, H. Dember-Dresden, L. Fresenius-Wiesbaden, H. Geiger-Charlottenburg, O. Hahn-Berlin-Dahlem, F. Henrich-Erlangen, E. Lorenser-Freiberg i. S., P. Ludewig-Freiberg i. S., W. Marckwald-Berlin, Lise Meitner-Berlin-Dahlem, St. Meyer-Wien, J. Tuma-Prag.

Ferner waren zugegen: Vertreter der sächsichen Regierung, des sächsischen Bergamts, der Bergakademie Freiberg i. S, und der Badeorte: Brambach, Bad Elster, Gastein, St. Joachimsthal, Karlsbad, Kreuznach, Oberschlema und Teplitz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent Dr. Paul Funk zum a. o. Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag, der ord. Professor der Mineralogie an der Universität Frankfurt/Main Dr. Arrien Johnsen in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. | 1. Juli 1921. Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1921. | 22. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Messung von Tourenzahlen mit Hilfe stroboskopischer Erscheinungen im Wechselstrombogenlicht.

Von Dr. Erich Günther.

Bei physikalischen und technischen Untersuchungen ergibt sich gelegentlich die Aufgabe, die Tourenzahl irgendeines rotierenden Gebildes, z. B. des Ankers eines Elektromotors, einer Registriertrommel oder -scheibe während einer längeren Zeit möglichst konstant zu erhalten, diese Konstanz dauernd zu kontrollieren und die Tourenzahl zu messen. Strebt man dabei eine größere Genauigkeit an, so ist der gewöhnliche technische Tourenzähler wenig geeignet. Ein sehr bequemes und recht genaues Hilfsmittel bilden dagegen stroboskopische Erscheinungen, wie man sie im Lichte einer Wechselstrombogenlampe beobachten kann. Beleuchtet man nämlich eine rasch rotierende weiße Scheibe, auf die in gleichen Winkelabständen schwarze Sektorstreifen aufgemalt sind, mit der Wechselstrombogenlampe, so erscheint bei bestimmter Tourenzahl der durch die Sektoren gebildete Stern dunkel auf hellem Grunde stroboskopisch ruhig stehend. Das tritt dann ein, wenn sich die Scheibe während einer Halbschwingung des Wechselstromes, also von einem Helligkeitsmaximum der Lampe bis zum nächsten, gerade um den Winkelabstand zweier Sektoren, weiter gedreht hat.

Ist die Frequenz des Wechselstromes $\frac{m}{2}$, die Anzahl der Helligkeitsmaxima der Lampe während einer Sekunde also m, die Tourenzahl des Motors pro sec. n, die Anzahl der Sektoren auf der Scheibe a, so erscheint der ruhig stehende stroboskopische Stern mit a-Strahlen, wenn

$$n = k \cdot \frac{m}{a},$$

wobei $k = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt werden kann; denn die Erscheinung wiederholt sich, wenn sich die Scheibe in 1/m sec. nicht nur um den einfachen, sondern um den zwei-, drei-, k-fachen Winkelabstand zweier Sektoren weiter dreht. Da aber die wirksame Lichtaussendung der Bogenlampe nicht momentan, sondern während einer gewissen Zeit erfolgt und die Scheibe sich in dieser Zeit um so weiter dreht, je größer ihre Tourenzahl ist, so erscheinen die stroboskopischen Sterne mit um so breiteren, verwascheneren Strahlen, je höher ihre Ordnung k ist. Beträgt die Tourenzahl nur die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel von $\frac{m}{a}$, wird also $n = \frac{m}{k' \cdot a}$ (wobei wiederum $k' = 1, 2, 3 \ldots$ sein kann), so erscheint ein stroboskopischer Stern mit $k' \cdot a$-Strahlen. Auch hier erhält man durch Multiplikation mit k, also für $n = k \cdot \frac{m}{k'a}$, Sterne höherer Ordnung; haben aber k und k' einen gemeinsamen Teiler, so ist $\frac{k}{k'}$ mit diesem zu kürzen, und erst dann gibt der Nenner des Ausdrucks für n die Anzahl der Strahlen des stroboskopischen Sternes an. Am schärfsten erscheint aber immer der Hauptstern, für den $n_0 = \frac{m}{a}$ ist. Bei einer Tourenzahl n, die nicht sehr von n_0 verschieden ist, steht der stroboskopische Stern nicht mehr ruhig, sondern er rotiert ebenfalls langsam, und zwar für $n > n_0$ im gleichen Sinne, für $n < n_0$ im entgegengesetzten Sinne wie die Scheibe. Ist N die

Tourenzahl des stroboskopischen Sternes, so ist:

$$N = n - n_0.$$

Aus dem Vorzeichen von N ergibt sich der Drehsinn des stroboskopischen Sternes. Die nahe Verwandtschaft der geschilderten Erscheinungen mit den akustischen Schwebungsvorgängen wird an der Hand dieser Formel klar.

Die Verwendung der Erscheinungen zum eingangs erwähnten Zwecke ergibt sich nun ohne weiteres: Mit Hilfe des ruhig stehenden stroboskopischen Sternes kann man die Konstanz der Tourenzahl während beliebig langer Zeiten optisch sehr genau kontrollieren und bei eintretenden Veränderungen notwendig werdende Einregulierung bequem vornehmen.

Die Tourenzahl selbst bestimmt man gleichzeitig ebenfalls recht genau nach der Formel $n_0 = \frac{m}{a}$. Da m gewöhnlich fest gegeben sein wird und a eine ganze Zahl sein muß, ist man allerdings an eine Reihe bestimmter Tourenzahlen gebunden. So ergibt sich für $m = 100$ und

$a =$	25	20	16	12	10	8	6	5	4	2
$n_0 =$	4	5	$6^1/_4$	$8^1/_3$	10	$12^1/_2$	$16^2/_3$	20	25	50 pro sec

Für ein beliebiges n, das nicht größer als 20 sein möchte, läßt sich die Messung an die Formel

$$N = n - n_0$$

anknüpfen; aus dieser ergibt sich

$$n = \frac{m}{a} \pm N$$

je nach dem Drehsinn des rotierenden stroboskopischen Sternes. Man bestimmt dann die Tourenzahl N mit der Stoppuhr, indem man entweder einen bestimmten Strahl des Sternes beim Umlauf verfolgt und sein Passieren bei einer festen Marke beobachtet, oder indem man die in einer gemessenen Zeit bei einer festen Marke passierenden Strahlen des rotierenden Sternes abzählt und die gefundene Zahl durch a dividiert, wodurch sich die Anzahl der Umläufe des Sternes in der fraglichen Zeit ergibt.

Grundlegend für das ganze Verfahren ist natürlich die Kenntnis und die Konstanz der Zahl m; entnimmt man den Wechselstrom einem großen Netz, also einer schweren Maschine, so kann man sich auf die Konstanz von m recht gut verlassen; empfehlenswert bleibt die Kontrolle mit Hilfe eines Wechselstromresonanzfrequenzmessers. Dann läßt die Methode sicher eine Genauigkeit von mindestens $^1/_4$ Proz. zu.

Um bequem arbeiten zu können, hält man sich eine Reihe von Kartonscheiben mit verschiedenen Sektorteilungen a, die leicht auswechselbar auf der rotierenden Achse befestigt werden können, vorrätig; man nimmt die schwarzen Sektoren nicht zu breit, gibt ihnen etwa $^1/_3$ der Breite der weiß bleibenden Sektoren. Besonders praktisch ist die Verwendung von Scheiben, bei denen sich die Sektoren nicht vom Mittelpunkt bis zum Rand erstrecken, sondern bei denen durch konzentrische Kreise eine Anzahl ringförmiger Abteilungen gebildet ist, deren jede eine besondere Teilung trägt. Man erhält dann mit einer Scheibe eine ganze Reihe von Tourenzahlen. Da es hier vorkommen kann, daß zwei benachbarte stroboskopische Sterne im entgegengesetzten Sinne rotieren, kann man die Tourenzahlbestimmung nach der Formel

$$n = \frac{m}{a} \pm N$$

noch dadurch verbessern, daß zwei Beobachter gleichzeitig die Zahlen N und N_1 für die benachbarten Sterne mit den Teilungszahlen a und a_1 messen.

Zur Herstellung der Erscheinung verwendet man eine nicht zu kräftige Bogenlampe, damit die Helligkeitsmaxima gut hervortreten; zur Not kann man auch schon eine Glühlampe benutzen.

Besonders empfehlenswert scheint mir die Methode dann zu sein, wenn gleichzeitig eine größere Anzahl von Beobachtern den Vorgang verfolgen soll, also bei Vorlesungs- und Unterrichtsversuchen. An anderer Stelle[1]) habe ich eine ganze Reihe von solchen Versuchen beschrieben, bei denen die Anwendung der Methode lohnend ist.

1) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **34**, Heft 3, 1921.

(Eingegangen 18. Mai 1921.)

Über die Dichte von Packungen und die Fallgeschwindigkeit von Lykopodium.

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

Von Alfred Ilgner.

Vorbemerkung: Im Jahrgang XI, 1910 S. 78 dieser Zeitschrift geben Keehan und Zeleny einen Bericht über ihre Versuche über die Fallgeschwindigkeit kleiner Körper in Luft und vergleichen die experimentell gefundenen Zahlen mit den theoretischen Werten, die sich aus der Stokesschen Formel errechnen lassen. Sie kommen zu folgendem

Ergebnis: „Die mittlere Größe, Dichte und Endgeschwindigkeit des Falles in Luft der annähernd kugelförmigen Teilchen von Lykopodium, Lykoperdon und Polytrichum wurden experimentell gewonnen. Die beobachteten Werte der Endgeschwindigkeit waren viel kleiner als die entsprechenden nach der Stokesschen Formel berechneten Werte. — Ähnliche mit künstlichen Kugeln aus einem schwarzen Wachs, aus Quecksilber oder Paraffin angestellte Versuche lieferten innerhalb weiter Grenzen für die Kugelgröße für die Endgeschwindigkeit Werte, die gut mit der theoretischen Formel übereinstimmten und somit deren Gültigkeit unter den angewandten Versuchsbedingungen bewiesen. — Irgendwelche befriedigende Erklärung für die Unstimmigkeit bei den Versuchen mit Sporen ist nicht ersichtlich. Vielleicht wird eine turbulente Bewegung des Fluidums durch einen nahezu kugelförmigen Körper leichter erregt als durch einen solchen, der vollkommen kugelförmig ist."

Diese Feststellungen von Keehan und Zeleny gaben die Anregung zu den Versuchen, über die im folgenden berichtet werden soll; — ihr Ziel war es, für Lykopodium die Abweichung zwischen den theoretischen und den gemessenen Werten aufzuklären.

Die Versuche von Keehan und Zeleny sind mit solcher Sorgfalt und mit so feinen Hilfsmitteln ausgeführt, daß an der Richtigkeit der gemessenen Zahlen kaum zu zweifeln ist. Um sicher zu sein, führte ich noch einmal Bestimmungen des Durchmessers der Lykopodiumteilchen und ihrer Dichte aus. — sie führten zu Werten, die den von Keehan und Zeleny angegebenen sehr nahe lagen (die Verschiedenheit des benutzten Materials mag diese ganz geringe Abweichung erklären) und die, in die Stokessche Formel eingesetzt, zu demselben Fehlergebnis führten. Der Fehler mußte also an einer anderen Stelle liegen. — Es wurde nun folgender Gedankengang einer experimentellen Prüfung unterzogen. Etwaige Unebenheiten der Oberfläche der Sporen müssen für die Reibung beim Fall in Luft das Volumen größer machen als es für die Dichtigkeitsbestimmungen ist; das gleiche vergrößerte Volumen mußte aber auch für das Ergebnis von Packungsversuchen maßgebend sein. Es wurde also die Frage nach der Dichte von Packungen kugelförmiger Körper herangezogen und durch Versuche geprüft. So gelang es, für die Lykopodiumteile eine scheinbare Dichte und einen scheinbaren Radius zu bestimmen, der, in geeigneter Weise in die Stokessche Formel eingesetzt, für die Endgeschwindigkeit einen Wert lieferte, der dem von Keehan und Zeleny gemessenen ziemlich nahe kam (2,04 gegen 1,76). Er wurde außerdem noch durch eigene Versuche geprüft und bestätigt (2,03 gegen 2,04).

I. Über die Dichte von Packungen kugelförmiger Körper.

§ 1. Wenn man eine Anzahl von Kugeln in ein Gefäß schüttet, so ist nur ein Teil des Gesamtvolumens von der eingebrachten Materie ausgefüllt. Ein mehr oder weniger großer Raum wird von der Luft eingenommen, die zwischen den Kugeln Platz findet. Im folgenden soll unter dem „Porenvolumen" solcher „Packung" die darin enthaltene Luftmenge verstanden werden, ausgedrückt in Bruchteilen des von der Packung insgesamt eingenommenen Raumes. Dieses Porenvolumen hängt ab von der Größe der Kugeln, von der Form des Gefäßes und von seiner Größe. Je nach dem Charakter der Füllung lassen sich zudem mehrere Arten von Packungen unterscheiden, die folgendermaßen bezeichnet werden sollen:

Einfache Packungen:	Solche aus nur jeweilen gleich großen Kugeln.
1. Ordnung:	Solche, bei denen die Elemente der Packung die Kugeln selbst sind.
2. Ordnung:	Solche, bei denen als Elemente der Packung Aggregate von Kugeln auftreten (Krümel).
Gemischte Packungen:	Solche aus Kugeln verschiedener Größe.

Die gemischten Packungen haben für die vorliegenden Untersuchungen kein Interesse; auf sie wird daher nicht näher eingegangen werden.

§ 2. Für die einfachen Packungen 1. Ordnung lassen sich für das Porenvolumen sofort obere und untere Grenzen errechnen. Die weiteste Packung erhält man, wenn man um jede Kugel den umschriebenen Würfel gelegt und diese Würfel dann so aufgeschichtet denkt, daß sie den ganzen Raum lückenlos erfüllen. Das Porenvolumen der ganzen Packung ist dann dasselbe wie innerhalb jeden Würfels, d. h. in sofort verständlicher Bezeichnung $\frac{W-K}{W}$; dies ergibt 47,64 Proz. Luft (unabhängig von der Kugelgröße!)

Die engste Packung erhält man, wenn man die Kugeln nicht in Würfel, sondern in

Pentagondodekaeder legt. Aus dem Kugelradius lassen sich Seitenkante und Inhalt des Dodekaeders berechnen und daraus das Luftvolumen zu 24,51 Proz.

Ein mittlerer Wert läßt sich ebenfalls sofort angeben: Man lagert die Kugeln so, daß die Mittelpunkte je 4 benachbarter Kugeln ein reguläres Tetraeder bilden und denkt aus der ganzen Packung das kleinste Parallelepiped herausgeschnitten, das sich durch 8 Kugelmittelpunkte legen läßt. Die 8 Kugelsektoren, die in diesem liegen, bilden zusammen genau eine Kugel. Die Grundfläche und Höhe des Parallelflächners lassen sich leicht finden, und so erhält man für die Packung des Porenvolumen 25,952. (Die ausgeführten Rechnungen findet man u. a. bei Mitscherlich: „Bodenkunde für Land- und Forstleute." Berlin 1905, S. 79ff. Lang: Forschungen der Agrikulturphysik I, 122.)

Es enthält also die

$$\left.\begin{array}{lll} \text{engste} & \text{Packung} & E = 24{,}51 \\ \text{mittlere} & \text{„} & M = 25{,}952 \\ \text{weiteste} & \text{„} & W = 47{,}64 \end{array}\right\} \text{Proz. Luft.}$$

§ 3. Nicht viel schwieriger wird die Rechnung für einfache Packungen 2. Ordnung — die in der Mineralogie unter dem Namen „Krümelstruktur" bekannt sind. Man erhält sie, wenn man eine Packung bildet, nicht aus einzelnen Kugeln, sondern aus Aggregaten, deren jedes selbst wieder eine Packung darstellt (natürlich beide Male eine Packung 1. Ordnung). Das Porenvolumen dieser Krümelpackung ist sofort auszurechnen, doch hat man dabei 9 Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob innerhalb der Krümel die Packung E, M oder W auftritt, — und die Krümel als solche in E, M, W gepackt sind. Diese 9 Arten werden durch Doppelsymbole bezeichnet werden, deren erster Buchstabe die Packung der Krümel, deren zweiter die Packung in den Krümeln angibt. — Der erste Fall (EE) mag durchgerechnet werden — die Werte für die anderen 8 sind ganz entsprechend zu erhalten. Die so gewonnenen Zahlen gelten jedoch nur mit mehr oder weniger großer Annäherung, da bei der Rechnung stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Krümel auch wieder Kugelgestalt haben. Zwischen den Krümeln ist, wenn diese in Packung E liegen, 24,51 Proz. Luft. Also sind von je 100 Raumteilen der ganzen Packung 75,49 Teile von den Krümeln selbst ausgefüllt. Wenn nun diese selbst auch wieder Packungen der Sorte E sind, so ist in ihnen wieder 24,51 Proz. Luft. Insgesamt beträgt das Luftvolumen also

$$24{,}51 + \frac{24{,}51 \cdot 75{,}49}{100} = 43{,}01 \text{ Proz.}$$

Für die 9 Packungen erhält man so folgende Werte:

Die Krümel liegen in Packung	In den Krümeln ist die Packung E	M	W
E	$EE = 43{,}01$	$EM = 44{,}11$	$EW = 60{,}47$
M	$ME = 44{,}102$	$MM = 45{,}182$	$MW = 61{,}242$
W	$WE = 60{,}47$	$WM = 61{,}23$	$WW = 72{,}57$

§ 4. Diese theoretischen Werte sind alle unabhängig von der Kugelgröße, — solange man den Raum, den die ganze Packung einnimmt, unbegrenzt läßt. Dies ändert sich aber sofort, wenn man die Kugeln in Gefäße packt, da dann noch Luftmengen zwischen der Gefäßwand und den äußeren Kugeln hinzukommen, — Luftmengen, die von der Gefäßform und -größe und von der Kugelgröße stark beeinflußt werden. Diese mehrfache Abhängigkeit wurde durch eine sehr große Anzahl von Messungen ermittelt. Es wurden dabei Stahlkugeln von 11,92 und 6,35 mm Durchmesser und Bleikugeln (Schrot) in 6 verschiedenen Größen, von 5 bis 1,25 mm Durchmesser verwendet. Mit jeder einzelnen dieser Kugelsorten wurden Packungsversuche in Gefäßen von verschiedener Form und Größe ausgeführt, in würfelförmigen, prismatischen, tetraedrischen, zylindrischen und kugelförmigen Gefäßen, deren Inhalt bei den kugelförmigen Gefäßen (Tarierfläschchen) bis zu 200 cm³, bei den zylindrischen bis zu 265 cm³ betrug.

Auf nähere Einzelheiten soll hier in diesem Zusammenhang — da die Packungstheorie hier nur als Mittel zum Zweck dient — nicht eingegangen werden. Es ergab sich im wesentlichen folgendes:

1. Das Luftvolumen fällt im allgemeinen mit der Kugelgröße (da bei kleineren Kugeln die Räume zwischen Wand und Kugeln sehr gering werden).
2. Das Porenvolumen hängt sehr stark ab von der Gefäßform. Am engsten werden die Packungen in Gefäßen mit runden Seitenwänden (Zylindern) und in Kugeln. Bei diesen wurde das Minimum des Luftvolumens erreicht.
3. Das Porenvolumen sinkt (bei gleichbleibender Gefäßform) mit wachsender Gefäßgröße.
4. Das Porenvolumen sinkt, wenn die Packung Erschütterungen ausgesetzt wird, nähert sich jedoch sehr schnell asymptotisch einem konstanten Wert.
5. Trägt man das Porenvolumen als Ordinate, die Kugelgröße als Abszisse in

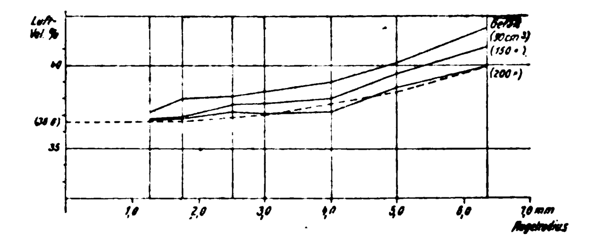


einem Koordinatensystem auf, so zeigen die Kurven keinen gleichmäßigen Abfall, sondern schwanken sehr stark. Nur bei kugelförmigen Gefäßen (ohne Hals) erhält man annähernd monoton fallende Kurven.

6. Es treten nie reine Packungen erster Ordnung auf! Die Zahlen und der Anblick der Packungen lehren, daß stets Unregelmäßigkeiten in der Lagerung der Teilchen vorkommen. Sämtliche gewonnnene Porenvolumen liegen zwischen 33,5 und 42,5 Proz. Sie liegen also wesentlich näher an dem Wert der weitesten Packung 1. Ordnung oder an den unteren Werten der Packungen 2. Ordnung, die gewissermaßen als vereinfachtes Symbol der auftretenden Unregelmäßigkeiten genommen werden können.

7. Vergrößert man die Reibung innerhalb der Packung (z. B. dadurch, daß man die Kugeln mit einem dünnen Schellacküberzug versieht, der sie leicht klebrig macht), so steigt das Luftvolumen.

8. Für den vorliegenden Fall — die Anwendung auf Lykopodium — mußte festgestellt werden, welchem Grenzwerte sich das Porenvolumen nähert, wenn der Kugelradius immer kleiner wird. Da es nicht möglich war, Kugeln zu bekommen, die auch nur annähernd so klein waren wie die Lykopodiumsporen, um mit diesen die Packungsdichte zu untersuchen, wurden die aus den Messungen mit größeren Kugeln gefundenen Kurven zeichnerisch auf kleine Werte des Radius extrapoliert. Fig. 1 zeigt die zu diesem Zwecke



benutzten Kurven, die aus Messungen mit der kleineren Stahlkugelsorte und den verschiedenen Schrotsorten in Tarierfläschchen von 90, 150 und 200 cm³ Inhalt gewonnen wurden, und die deutlich erkennen lassen, daß das Porenvolumen sich wirklich einem Grenzwerte nähert. Die für die Extrapolation günstigste Kurve ist die des größten Gefäßes. Gleicht man hier die Unebenheiten aus (durch die gestrichelte Linie — — — —), so erhält man eine Annäherungskurve, die sich asymptotisch einer Parallelen zur Abszissenachse nähert und die Ordinatenachse im Punkte 36,6 schneidet. D. h. also, in einer Packung von ganz kleinen Kugeln mußte das Porenvolumen 36,6 Proz. betragen.

II. Über die Fallgeschwindigkeit von Lykopodium.

§ 5. Durch mikroskopische Messung der trockenen Lykopodiumsporen erhielt ich für den Radius der annähernd kugelförmigen Teilchen im Mittel den Wert $r_a = 1{,}585 \cdot 10^{-3}$ cm. Ich führe zum Vergleich an, daß Keehan und Zeleny $1{,}58 \cdot 10^{-3}$ cm als den mikroskopisch gemessenen Radius angeben. R. Mecke[1]) hat in seiner Marburger Dissertation etwas kleinere Werte als Ergebnis seiner Messungen mitgeteilt: $1{,}53 \cdot 10^{-3}$ cm aus mikroskopischen Messungen, 1,518 im Mittel aus der Messung der von Lykopodiumsporen erzeugten Beugungsringe. Bringt man die Sporen in eine Flüssigkeit (Alkohol, Äther, Petroleum oder auch Wasser, in das sie jedoch nur mit großer Mühe einzubetten sind), so sieht man den Rand mit einem Kranz von kleinen Zacken umgeben. Nach der Beschreibung in botanischen Lehrbüchern ist die Oberfläche der Lykopodiumsporen mit einem netzförmigen System von Leisten überzogen. In trockenem Zustande treten diese Leisten am Rande nicht so deutlich in die Erscheinung; der Radius, den man in diesem Zustande mißt, ist daher der „äußere Radius" r_a, d. h. der Radius des die Leisten einschließenden Volumens. In der Flüssigkeit treten die Leisten sehr deutlich hervor, und man ist nun imstande, auch den Radius des eigentlichen Sporenkerns, des inneren Volumens, r_i zu messen. Ich fand ihn im Mittel zu $1{,}376 \cdot 10^{-3}$ cm.

§ 6. Die Dichte des Lykopodiums wurde bestimmt mit einem empfindlichen Volumenometer nach Regnault, — und durch Einschmelzen in Vaseline nach dem Verfahren von W. F. Smeeth[2]). Bei der ersten Methode wurden Mengen benutzt, die zwischen 40 und 70 g schwankten. Die für die Dichte gefundenen Werte stimmten ziemlich gut überein (z. B. 1,053, 1,064, 1,118, ...) — ihr Mittel war $\sigma_1 = 1{,}111$ gcm^{-3}. — Bei der Einschmelzmethode wurde folgendermaßen verfahren: Es wurde ein Glasschälchen mit Vaseline gefüllt, ein Glasstab mit eingeschmolzen und das Ganze gewogen. Das Gewicht in Luft ist P_1, in Wasser P. Also das Volumen der gefüllten Schale $V_1 = P_1 - P$. Dann wurde Lykopodium auf die Vaseline geschüttet und das Ganze wieder in Luft gewogen (P_2). Also ist das Gewicht des Lykopodiums $P_2 - P_1$. Darauf wurde die

1) R. Mecke, Ann. d. Phys. **61**, 498, 1920.
2) W. F. Smeeth, Proc. Dubl. Soc. **6**, 61—62, 1888.



Vaseline zum Schmelzen gebracht und das Lykopodium mit dem Glasstabe darunter gerührt, wobei jeder Verlust auf das sorgfältigste vermieden wurde. Nach dem Erstarren ergab eine erneute Wägung unter Wasser das Gewicht P_3. Demnach ist das Volumen des Lykopodiums und der Schale $V_2 = P_2 - P_3$ und das Volumen des Lykopodiums allein $V_2 - V_1$. Daraus erhält man die Dichte zu

$$\sigma = \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1}.$$

Die so gefundenen Zahlen stimmten wieder gut miteinander und auch ziemlich gut mit den Volumenometer-Messungen überein. Einige Werte aus der sehr großen Zahl von Messungen bringt die folgende Tabelle:

P_1	P	V_1	P_2	P_3	V_2	$V_2 - V_1$	$P_2 - P_1$	s
10,5858	3,9136	6,6722	11,5394	3,9854	7,5540	0,8818	0,9536	1,081
11,5210	3,9854	7,5356	13,0411	4,1219	8,9192	1,3736	1,5201	1,106
11,6734	3,8142	7,8592	12,9541	3,9275	9,0266	1,1674	1,2807	1,097
12,9346	3,9275	9,0071	13,9495	4,0135	9,9360	0,9289	1,0144	1,092

Das Gesamtmittel war hier $\sigma_2 = 1{,}093\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$,
bei den Volumenometer-
Messungen . . . . $\sigma_1 = 1{,}111$ „
also die Dichte $\sigma = 1{,}102\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$.

Keehan und Zeleny haben aus Volumenometer-Messungen den ein wenig höheren Wert der Dichte 1,175 gefunden, dagegen nach der Schwebemethode in Salzlösungen 1,13 und 1,09, also im ganzen Werte, die mit den meinigen in guter Übereinstimmung stehen. Die geringen Abweichungen spielen für das hier vorliegende Problem gar keine Rolle, denn Keehan und Zeleny berechnen aus den von ihnen gefundenen Werten des Radius und der Dichte die Endgeschwindigkeit des Falles der Lykopodiumsporen in der Luft zu 3,14 $\mathrm{cm \cdot sec^{-1}}$, während der experimentell gefundene Wert nur 1,76 betrug. Sollte sich diese Abweichung aus einer unrichtigen Bestimmung der Dichtigkeit erklären, so müßte die Dichtigkeit zu 0,61 angesetzt werden, ein Wert, der nur halb so groß wie die wirklich gemessenen Werte wäre. Diese Annahme ist ohne Frage unmöglich.

§ 7. Um hier weitere Aufschlüsse zu erhalten, wurden die Ergebnisse der Packungsversuche benutzt. Die Lykopodiummenge, die 100 cm³ erfüllte, wurde zu 44,03 g gemessen. Da nach § 5 in einer Packung so kleiner Kugeln 36,6 Proz. Luft enthalten sein muß, so würden danach 44,03 g Lykopodium den Raum von 63,4 cm³ einnehmen. Das ergibt eine scheinbare Dichte $\sigma_s = 0{,}695$. Also führen die Packungsversuche zu einem ebenso unrichtigen Wert der Dichte wie die Fallversuche. Aus der wahren Dichte 1,102 würde folgen, daß 44,03 g Lykopodium einen Raum von 40 cm³ einnehmen, die Lykopodiumpackung also nicht 36,6, sondern 60 Proz. Luft enthält. Die Abweichung erklärt sich durch die Vorstellung, daß die Lykopodiumsporen sich nicht mit ihren inneren Radien r_i, sondern mit ihren äußeren Radien r_a aneinander legen. Die Berechnung ist dann nur insofern ungenau, als der ganze Zwischenraum zwischen der äußeren und der inneren Kugelfläche als Luft gerechnet, Volumen und Masse der „Leisten" also vernachlässigt wird. Aus der wahren Dichte 1,102 und dem inneren Radius r_i folgt unter der gleichen Vernachlässigung das Gewicht eines einzelnen Teilchens $P = 1{,}2026 \cdot 10^{-8}$ g. Daraus läßt sich weiter errechnen, daß in 1 cm³ 36,6 Millionen Sporen enthalten sind. T. E. Wallis gibt an, daß 1 mg Lykopodium 94000 Sporen enthält; daraus würde sich P zu $1{,}064 \cdot 10^{-8}$ g ergeben[1]). Geht man endlich mit der scheinbaren Dichte 0,695 in das Gewicht P des einzelnen Teilchens hinein, so erhält man einen scheinbaren Radius r_s nach der Formel

$$r_s = \sqrt[3]{3P/4\pi\sigma_s}$$

und findet

$$r_s = 1{,}605 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm},$$

also einen Wert, der wieder sehr nahe gleich dem mikroskopisch gemessenen Werte des äußeren Radius r_a, d. h. $= 1{,}585 \cdot 10^{-3}$ cm ist.

§ 8. Mit diesen scheinbaren Werten kommt man nun sofort zum Ziel. — Die Stokessche Formel lautet:

$$V = \frac{2g}{9\eta} r^2 (\sigma - \varrho), \tag{1}$$

wobei

η der Reibungskoeffizient der Luft,
ϱ ihre Dichte,
σ die Dichte des fallenden Körpers,
r sein Radius,
V seine Endgeschwindigkeit ist.

Die Formel beruht auf der Gleichsetzung des Gewichts mit dem Reibungswiderstand, den

1) T. E. Wallis, Journal of the R. Microscopical Soc. 1920. Part. 2. June. S. 169—178.

Stokes zu $6 r \pi \eta V$ ansetzt. Ausführlich geschrieben lautet sie also:

$$6 r \pi \eta V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi (\sigma - \varrho) g. \qquad (2)$$

Auf der linken Seite steht der Reibungswiderstand. Hat der Körper nun durch das Leistennetz auf seiner Oberfläche ein vergrößertes Volumen, so wird dies den Reibungswiderstand beeinflussen und auch nur diesen. Also schreiben wir die Formel in der Gestalt:

$$6 r_a \pi \eta V = \tfrac{4}{3} r_i^3 \pi (\sigma - \varrho) g. \qquad (3)$$

Die Rechnung ergibt aus dieser Formel dann

$$V = 2{,}04 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Dieser Wert liegt dem von Keehan und Zeleny gemessenen (1,76) verhältnismäßig nahe und wurde experimentell geprüft und bestätigt.

§ 9. Es wurde ein Apparat benutzt, der im Prinzip dem von Keehan und Zeleny gebauten ähnlich, jedoch sehr viel weniger kompliziert war. Die Fallstrecke betrug 104 cm, die zugehörigen Fallzeiten wurden mit der Stoppuhr gemessen. Die Beobachtung war sehr schwierig, und die beobachteten Zeiten schwankten demgemäß ziemlich stark (von 49,0—53,4 sec). Das Mittel aus allen Zeiten war

$$T = 51{,}15 \text{ sec};$$

und somit ergab sich für die Endgeschwindigkeit

$$V = 2{,}03 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1},$$

— ein Wert, der mit dem theoretischen (2,04) bestens übereinstimmt. —

Versuche über die Fallgeschwindigkeit in Alkohol fielen weniger genau aus, was wohl in der Hauptsache daran liegen mag, daß es kaum möglich war, einzelne Lykopodiumteilchen zum Fallen zu bringen. Sowie die Sporen auf die Oberfläche des Alkohols fallen, ballen sie sich zu Komplexen zusammen, die für die Versuche natürlich nicht zu brauchen sind. — Die außerordentlich schwierigen Messungen ergaben für V_a den Wert 0,0077, während der theoretisch errechnete 0,0089 $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ betrug.

Zusammenfassung.

Die von Keehan und Zeleny gefundene Abweichung der Fallgeschwindigkeit von Lykopodiumsporen von dem nach der Stokesschen Formel berechneten Werte wird durch die Vorstellung erklärt, daß die Lykopodiumsporen infolge des ihre Oberfläche bedeckenden Netzes von feinen Leisten bei ihrer Bewegung ein größeres Luftvolumen mitschleppen, als sie durch ihre Masse verdrängen. Diese Auffassung findet ihre Bestätigung in Versuchen über die Dichtigkeit von Packungen, die ebenfalls für die Lykopodiumsporen ein viel zu großes Volumen und entsprechend eine viel zu kleine Dichte ergeben. Setzt man in die Stokessche Formel den scheinbaren äußeren Radius der Sporen in das Reibungsglied ein, in das Gewichtsglied dagegen die wahre Dichte und den inneren Radius, so erhält man die richtigen Werte der Fallgeschwindigkeit.

Gießen, Mai 1921.

(Eingegangen 23. Mai 1921.)

Einsteinsche Lichtquanten und räumliche Struktur der Strahlung.

Von M. Wolfke.

Trotz der beispiellosen Entwickelung der Quantentheorie im letzten Jahrzehnt sind wir der prinzipiellen Frage nach dem Wesen der Quanten selbst nicht viel näher getreten. Wir wissen zwar, daß das Wesen der Quantentheorie in einer Diskontinuität der Naturvorgänge, speziell in den molekularen und intramolekularen Gebieten zu suchen ist, darüber jedoch, wo man diese Diskontinuität einführen und wie man sie physikalisch deuten soll, haben wir trotz der vielen Quantenansätze bis heute noch wenig Positives und Befriedigendes erfahren. Daher kann jeder Hinweis auf verborgene Beziehungen in dem System der Quantenformeln und jede physikalische Deutung solcher Beziehungen einen heuristischen Wert haben. In diesem Sinne soll hier, im Anschluß an die Einsteinschen Lichtquanten, die räumliche Struktur der Hohlraumstrahlung näher untersucht werden.

Bekanntlich vertritt Einstein in der Quantentheorie der Strahlung seit jeher einen extremen Standpunkt. Einstein[1]) postuliert die Diskontinuität nicht nur allein für die Wechselwirkung zwischen der Materie und dem Strahlungsfeld, sondern er nimmt an, daß auch im Strahlungsfeld selbst die Energie an diskrete Zentren, die sogenannten Lichtquanten, gebunden ist. Die Gründe, welche Einstein für diese Auffassung anführt, sind so überzeugend, daß man die Lichtquanten trotz der schwerwiegenden Einwände, die sich aus der klassischen Optik ihnen entgegenstellen, doch nicht ohne weiteres verwerfen kann. Diese Gründe als auch die Einwände sind so bekannt, daß ich hier darauf nicht näher eingehen werde.

Betrachtet man die Hohlraumstrahlung vom

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17**, 132, 1905; diese Zeitschr. **10**, 185 u. 817, 1909; Verhandl. d. D. Phys. Ges. **18**, 318, 1916; diese Zeitschr. **18**, 121, 1917.

Standpunkt der Lichtquantenhypothese aus, so ergibt sich nach Einstein[1]), daß sich die Strahlung bei geringen Strahlungsdichten, d. h. im Gültigkeitsbereich der Wienschen Strahlungsformel so verhält, als ob sie aus diskreten räumlich voneinander unabhängigen Quanten $h\nu$ bestehen würde. Auch bei größeren Strahlungsdichten machen sich die Quanten bemerkbar. Wie Debye[2]) bewiesen hat, genügt schon allein die Annahme, daß die Strahlungsenergie in Quanten $h\nu$ über die Eigenschwingungen des Hohlraumes verteilt ist, um zu dem Planckschen Strahlungsgesetz zu gelangen. Auch ich[3]) habe das Plancksche Strahlungsgesetz allein unter der Voraussetzung, daß die Strahlungsenergie über diskrete Lichtatome verteilt ist, erhalten. Im Anschluß daran sprach ich[4]) ehemals den Gedanken aus, daß sich die bei großen Strahlungsdichten anfänglich kontinuierliche Strahlung mit zunehmender Verdünnung in Quanten auflöst. Dieser Gedanke wurde dann noch deutlicher in der Polemik[5]) zwischen Krutkow und mir hervorgehoben. Es zeigte sich, daß die Einsteinschen Lichtquanten, die im Gültigkeitsbereich der Wienschen Strahlungsformel räumlich voneinander unabhängig sind, diese räumliche Unabhängigkeit bei größeren Strahlungsdichten verlieren. Bis jetzt wurde jedoch noch nicht explizite untersucht, in welchen räumlichen Beziehungen bei großen Strahlungsdichten die Einsteinschen Lichtquanten zueinander stehen. Hier soll nun in ähnlicher Weise, wie Einstein[6]) seinerzeit die räumliche Unabhängigkeit der Lichtquanten aus der Wienschen Strahlungsformel folgerte, die räumlichen Beziehungen dieser Lichtquanten zueinander aus dem Planckschen Strahlungsgesetz abgeleitet werden.

1. Teilstrahlungen der Hohlraumstrahlung.

Vor allem werden wir beweisen, daß die schwarze Strahlung aus einer Reihe von, nach Art der Wienschen Strahlungsformel zusammengesetzten, voneinander thermodynamisch unabhängigen Teilstrahlungen besteht.

Der Plancksche Ausdruck für die Strahlungsdichte $\mathfrak{u}$ der schwarzen Strahlung läßt sich bekanntlich in einer Reihe entwickeln:

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c., § 5.
2) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **33**, 1427, 1910.
3) M. Wolfke, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **15**, 1123 u. 1215, 1913.
4) M. Wolfke, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **16**, 4, 1914.
5) Diese Zeitschr. **15**, 133, 308, 363 u. 463, 1914.
6) A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c.

$$\mathfrak{u} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{u}_i, \qquad (1)$$

deren i-tes Glied:

$$\mathfrak{u}_i = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \qquad (2)$$

ist. Wir sehen, daß die einzelnen Glieder dieser Reihe nach Art der Wienschen Strahlungsformel gebaut sind.

Wenn diese Teilstrahlungen $\mathfrak{u}_i$ der schwarzen Strahlung tatsächlich Strahlungsenergien repräsentieren, die thermodynamisch voneinander unabhängig sind, so muß die Summe aller Entropiedichten $\mathfrak{s}_i$ der Teilstrahlungen gleich der Entropiedichte $\mathfrak{s}$ der gesamten Hohlraumstrahlung sein, also:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}. \qquad (3)$$

Es läßt sich dann leicht beweisen, daß, bei Erfüllung der obigen Bedingung, für jede dieser Teilstrahlungen der schwarzen Strahlung die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} = \frac{1}{T} \qquad (4)$$

gilt[1]).

Zu diesem Zwecke betrachten wir einen Hohlraum vom Volumen V mit der Strahlungsenergie U und der Entropie S. Auf Grund der Reihe (1) und der Gleichung (3) lassen sich die Größen U und S durch folgende Summen der Integrale darstellen:

$$U = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \mathfrak{u}_i \, d\nu;$$

$$S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \mathfrak{s}_i \, d\nu.$$

Falls sich die Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, also für die schwarze Strahlung, muß die Variation der Entropie δS, bei konstantem Volumen und konstanter Strahlungsenergie, für alle möglichen Energieverteilungen über die einzelnen Teilstrahlungen und Frequenzen, verschwinden. Wir erhalten folgende Bedingungsgleichungen:

$$\delta V = 0; \quad \delta U = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta \mathfrak{u}_i \, d\nu = 0; \qquad (5)$$

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 2. Aufl. 1913, § 91, 92, 93, S. 87—89.

und

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta \mathfrak{s}_i \, d\nu = 0. \tag{6}$$

Die Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ ist Funktion von $\mathfrak{u}_i$ und ν, so daß bei konstantem ν die Gleichung (6) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} \delta \mathfrak{u}_i \, d\nu = 0. \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung (5), kann die Gleichung (7) nur dann für beliebige $\delta \mathfrak{u}_i$ gelten, wenn:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} = \text{const.} \tag{8}$$

für alle Frequenzen und alle Teilstrahlungen ist. Die Konstante bestimmen wir in bekannter Weise aus dem Entropiezuwachs der schwarzen Strahlung bei unendlich kleiner Zunahme der Strahlungsenergie bei konstantem Volumen; indem wir die Gleichungen (7), (8) und (5) berücksichtigen, wird:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} \delta \mathfrak{u}_i \, d\nu = \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta \mathfrak{u}_i \, d\nu =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} \cdot \delta U = \frac{\delta U}{T},$$

woraus ohne weiteres die zu beweisende Beziehung (4) folgt.

Um die thermodynamische Unabhängigkeit der einzelnen Teilstrahlungen $\mathfrak{u}_i$ zu beweisen, werden wir die Gültigkeit der Beziehung (4) voraussetzen und mit Hilfe dieser Beziehung und der Gleichung (2) die Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ bestimmen und alsdann prüfen, ob auch die Gleichung (3) restlos erfüllt ist.

Indem wir aus der Gleichung (2) $\frac{1}{T}$ berechnen und in die Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial \mathfrak{u}_i} = -\frac{k}{ih\nu} \log \frac{c^3 \mathfrak{u}_i}{8\pi h\nu^3}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt die gesuchte Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ der $i$ten Teilstrahlung:

$$\mathfrak{s}_i = -\frac{k\mathfrak{u}_i}{ih\nu}\left(\log \frac{c^3 \mathfrak{u}_i}{8\pi h\nu^3} - 1\right). \tag{9}$$

Wir bilden jetzt die Summe aller dieser Entropiedichten und ersetzen darin $\mathfrak{u}_i$ durch den Ausdruck (2), alsdann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8\pi k\nu^2}{c^3}\Bigg\{ \log e^{\frac{h\nu}{kT}} \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} + \\ + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Summationen ergeben:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1};$$

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} = -\log\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right).$$

Indem wir in dem Ausdruck (10) die Summationsresultate einsetzen und in der Klammer das Glied

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \log\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)$$

addieren und subtrahieren, erhalten wir nach einer einfachen Umformung:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8\pi k\nu^2}{c^3}\left\{\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right)\log\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\log\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1) folgt:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8\pi k\nu^2}{c^3}\left\{\left(1 + \frac{c^3\mathfrak{u}}{8\pi h\nu^3}\right)\log\left(1 + \frac{c^3\mathfrak{u}}{8\pi h\nu^3}\right) - \frac{c^3\mathfrak{u}}{8\pi h\nu^3}\log\frac{c^3\mathfrak{u}}{8\pi h\nu^3}\right\}.$$

Dieser letztere Ausdruck für die Summe der Entropiedichten der Teilstrahlungen ist aber identisch mit der Entropiedichte der gesamten Hohlraumstrahlung[1]). Wir sehen daraus, daß die Gleichung (3) tatsächlich erfüllt ist. Damit ist der am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

1) Vgl. M. Planck, l. c., Gleichung (279), S. 163.

2. Physikalische Bedeutung der Teilstrahlungen.

Wir wollen jetzt die physikalische Bedeutung einer einzelnen solchen Teilstrahlung, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese, nach der Einsteinschen Methode[1]) näher untersuchen.

1) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c.

Die Entropiedichte einer $i$ten Teilstrahlung ist durch den Ausdruck (9) gegeben. Sei ε_i die Energie, die der $i$ten Teilstrahlung in einem Hohlraum mit Volumen V_0 zukommt, so daß

$$\varepsilon_i = V_0 \mathfrak{u}_i$$

ist. Betrachten wir diese Strahlung einmal in dem Volumen V_0 und das andere Mal in einem Teilvolumen V vereinigt, dann sind die entsprechenden Entropien nach Gleichung (9):

$$S_0 = -\frac{k\varepsilon_i}{ih\nu}\left(\log\frac{c^3\varepsilon_i}{8\pi h\nu^3 V_0} - 1\right),$$

$$S = -\frac{k\varepsilon_i}{ih\nu}\left(\log\frac{c^3\varepsilon_i}{8\pi h\nu^3 V} - 1\right),$$

und die Entropieveränderung beim Übergang vom Volumen V_0 zu dem Volumen V wird:

$$S - S_0 = \frac{k\varepsilon_i}{ih\nu}\log\frac{V}{V_0}.$$

Indem wir die bekannte Boltzmannsche Beziehung zwischen der Entropie und der Wahrscheinlichkeit:

$$S - S_0 = k\log W_i$$

berücksichtigen, erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit W_i, daß sich die im Volumen V_0 eingeschlossene Strahlungsenergie ε_i zu einem beliebigen Zeitmoment in dem Teilvolumen V befindet, den Ausdruck:

$$W_i = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{ih\nu}}, \tag{11}$$

der nichts anderes bedeutet, als daß die $i$te Teilstrahlung aus:

$$\frac{\varepsilon_i}{ih\nu}$$

voneinander räumlich unabhängigen Strahlungsquanten $ih\nu$ zusammengesetzt ist. Der Ausdruck (11) läßt sich nämlich als ein Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $\frac{V}{V_0}$ deuten, und zwar dafür, daß sich ein einzelnes von den Quanten $ih\nu$ in beliebigem Zeitmoment im Teilvolumen V befindet, was direkt auf die gegenseitige Unabhängigkeit dieser Ereignisse und damit auf die räumliche Unabhängigkeit der Quanten $ih\nu$ selbst voneinander schließen läßt.

Wir wollen diese aus i-Quanten $h\nu$ bestehenden Lichtquanten im Gegensatz zu den „Lichtatomen", die nur aus einem $h\nu$ bestehen, „Lichtmoleküle" nennen.

Aus allen diesen vorhergehenden Betrachtungen ersehen wir, daß die Hohlraumstrahlung, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus betrachtet, aus voneinander räumlich unabhängigen Lichtmolekülen $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$.... zusammengesetzt ist.

Wir untersuchen jetzt, wie sich die Zahlen der verschiedenen Lichtmoleküle in Abhängigkeit von der gesamten Strahlungsdichte ändern. Die Zahl der Lichtmoleküle pro Volumeneinheit, welche aus i-Lichtatomen zusammengesetzt sind, ist:

$$n_i = \frac{\mathfrak{u}_i}{ih\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{e^{-\frac{ih\nu}{kT}}}{i}.$$

Wir bilden das Verhältnis:

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} = \frac{i+1}{i}\cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}, \tag{12}$$

Im Gebiete der Gültigkeit des Wienschen Strahlungsgesetzes, also bei geringen Strahlungsdichten, ist $\frac{h\nu}{kT}$ sehr groß gegen 1 und wir sehen aus (12), daß das Verhältnis der Zahl der Lichtmoleküle mit i-Lichtatomen zu der Zahl derjenigen mit $i+1$-Lichtatomen sehr groß wird, so daß praktisch nur die Lichtquanten mit einem Quant $h\nu$, also die Lichtatome allein, vorhanden sein werden. Mit abnehmendem Wert von $\frac{h\nu}{kT}$, also bei steigender Strahlungsdichte, wird das Verhältnis (12) immer kleiner werden, die Reihe (1) wird immer langsamer konvergieren, so daß dann allmählich auch die Lichtmoleküle mit größerer Quantenzahl erscheinen werden. Wir sehen daraus, wie mit zunehmender Strahlungsdichte eine Assoziation von Lichtquanten zu immer komplizierteren Lichtmolekülen stattfindet, bis schließlich die Quanten bei sehr großen Strahlungsdichten, im Gültigkeitsbereich des Jeans-Rayleighschen Strahlungsgesetzes, sich zu einem Kontinuum zusammenballen! Umgekehrt mit abnehmender Strahlungsdichte dissoziiert das Strahlungskontinuum in immer einfachere Lichtmoleküle, bis es sich schließlich in diskrete Lichtatome auflöst!

Zusammenfassung.

In dieser Abhandlung wurde Folgendes bewiesen:

1. Die schwarze Strahlung besteht aus einer Reihe von, nach Art der Wienschen Strahlungsformel zusammengesetzten, thermodynamisch voneinander unabhängigen Teilstrahlungen.

2. Diese Teilstrahlungen lassen sich, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus, als aus voneinander räumlich unabhängigen Lichtmolekülen $ih\nu$ zusammengesetzt deuten.



3. Die bei großer Strahlungsdichte kontinuierliche Hohlraumstrahlung löst sich, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus, mit abnehmender Strahlungsdichte in immer einfachere Lichtmoleküle auf, die schließlich bei sehr kleinen Strahlungsdichten in diskrete Lichtatome dissoziieren.

Zürich, April 1921.

(Eingegangen 2. Mai 1921.)

Erwiderung auf H. Dinglers Kritik an der Relativitätstheorie.

Von Hans Reichenbach.

In letzter Zeit hat Herr H. Dingler die Behauptung aufgestellt, daß die begrifflichen Grundlagen der Relativitätstheorie falsch seien[1]). Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Dinglersche Argumentation entscheidende Fehler enthält und daher unhaltbar ist.

1. Herr Dingler knüpft an das bekannte Beispiel des beschleunigten Eisenbahnwagens an. Obgleich dieses Beispiel durch die häufige Erwähnung nachgerade recht trivial geworden ist und von Relativitätstheoretikern, besonders im Anschluß an Herrn Lenards wiederholt vorgebrachtes Mißverständnis oft genug restlos geklärt wurde[2]), sei hier der Vollständigkeit halber noch einmal darauf eingegangen. Herr Dingler erklärt, daß der gebremste Eisenbahnwagen dem gleichförmig bewegten nicht vergleichbar sei, weil im ersten Fall die (negative) Beschleunigung nicht an den Gegenständen des Coupés direkt angreift, sondern auf sie erst durch elastische Kräfte übertragen wird. Nur in einem „echten" Gravitationsfeld, das man sich etwa durch eine große Masse, parallel zu den Schienen wirkend, erzeugt denken könne, sei völlige Äquivalenz gegeben; aber hier sei auch kein Unterschied zwischen gleichförmiger und beschleunigter Bewegung bemerkbar, wenn Reibungskräfte verschwinden. Dies letztere ist richtig, nur ist es vom Standpunkt der Newtonschen Theorie nicht hinreichend zu erklären. Denn der beschleunigte Eisenbahnzug stellt in diesem Falle ein (frei fallendes) System dar, in dem die Newtonschen Gesetze gelten, obgleich es sich zur Schar der gleichförmig bewegten Inertialsysteme des Weltalls beschleunigt bewegt. Für die Newtonsche Theorie ist es ein Zufall, daß in diesem System die Gravitationskräfte überall gerade kompensiert werden durch Trägheitskräfte, so daß ein „scheinbares" Inertialsystem entsteht; derselbe Zufall, der träge und schwere Masse gerade gleich macht.

Nun wird zwar Herr Dingler diesen Zufall bestreiten, denn er hat an anderer Stelle einen „Beweis" für die Gleichheit von träger und schwerer Masse gegeben[1]). Wie sehr Herr Dingler dieses Problem überhaupt verkennt, sei dadurch illustriert, daß ich seinen Beweis hier wiedergebe. Er denkt sich eine Wage, an der zwei gleich schwere Massen aufgehängt sind, und schließt daran folgende Ausführungen: „Ich kann aber eine derartige ruhende Wage mit den beiden im Gleichgewicht befindlichen Massen in folgender Weise auffassen: Die Massen erhalten durch die Gravitation der Erde eine gewisse gleiche Beschleunigung nach unten. Daß sie dieser Beschleunigung nicht Folge leisten, ist bewirkt durch eine genau ebenso große, genau entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung nach oben. Dadurch, daß beide sich aufheben, ist die Wage in Ruhe. Nun wird aber der Zug nach oben nicht ebenfalls durch Gravitation ausgeübt, sondern durch irgendeine Nahkraft (etwa meine Hand usw.). In Hinsicht auf diesen Zug, welcher den beiden Massen eine Beschleunigung nach oben erteilt und am Drehpunkt des Hebels angreift, sind die beiden Massen aber nicht schwere, sondern träge Massen. Da aber natürlich kein Ausschlag der Wage erfolgen kann (sonst wären die Massen ja auch nicht gleich schwer gegen die Voraussetzung), so bleibt die Wage im Gleichgewicht, und es zeigt sich, daß die beiden Massen auch gleich träge sind." Hier wird die seltsame Behauptung aufgestellt, daß der von der Aufhängevorrichtung ausgeübte und durch den Wagebalken übertragene elastische Zug, der die beiden Massen nach oben zieht und die Gravitation kompensiert, der trägen Masse proportional sei. Wie das zusammenhängt, obgleich von Bewegung gar nicht die Rede ist, und die träge Masse durch den Widerstand gegen Bewegungsänderung definiert ist — wird Herrn Dingler zu erklären schwer fallen. (Es scheint, daß der doppelte Gebrauch des Wortes Beschleunigung, einmal im kinematischen Sinne für den Geschwindigkeitszuwachs und andererseits im dynamischen Sinne für die Feldstärke der Gravitation, die Ursache seiner Verwechslung wurde.) In Wahrheit ist natürlich der elasti-

1) Diese Zeitschr. **21**, 668, 1920.

2) Vgl. z. B. A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie, Naturwiss. **6**, 700—701, 1918; und A. Kopff, Das Rotationsproblem in der Relativitätstheorie, Naturwiss. **9**, 9ff., 1921.

1) H. Dingler, Grundlagen der Physik, Berlin 1919, S. 94.

sche Zug durch die schwere Masse bestimmt, deren Zug er zu kompensieren hat. In Herrn Dinglers Beweis für die Gleichheit von träger und schwerer Masse kommt also die träge Masse gar nicht vor.

Aber durch Herrn Dinglers Kritik des Eisenbahnproblems wird die Frage, um die es sich handelt, überhaupt verschoben. Wenn der Zug durch Reibung gebremst wird, so sind die verursachenden Kräfte allerdings nicht massenproportional. Daß diese Kräfte aber die losen Gegenstände des Coupés nicht mitnehmen, liegt an dem Trägheitswiderstand dieser Körper; wäre die Trägheit beliebig klein, so würde eine beliebig kleine Kraft genügen, die Bewegungsänderung auf die Körper zu übertragen. Der beobachtete Effekt — das horizontale[1]) Verrücken der Körper, der Druck auf die Seitenwand — ist also durch die Trägheit der Körper verursacht und auch quantitativ dadurch gegeben. Wenn Trägheitswirkungen auftreten sollen, so darf die Beschleunigung gerade nicht durch massenproportionale Kräfte erzeugt werden. Darum ist es völlig sinnlos, die Reibungskräfte aus dem Problem ausschalten zu wollen; sie (oder irgendwelche elastischen Kräfte) haben die Aufgabe, zwei Körpersysteme in relativ zueinander beschleunigte Bewegung zu versetzen. Mit massenproportionalen Kräften ist dies gar nicht möglich. (Auch Herrn Lenards hierauf bezügliche Einwände treffen das Problem gar nicht.) Erst so entsteht jener konstruierte Tatbestand, den die Relativitätstheorie betrachtet; denn sie will ja zeigen, daß in zwei zueinander beschleunigten Körpersystemen die Unterscheidung zwischen Trägheit und Gravitation willkürlich ist.

Und die Relativitätstheorie stellt nun folgende oft genug bewiesene Behauptung auf, die auch Herr Dingler nicht bestreiten kann: Nimmt man an, der (gebremste) Zug steht still, und es tritt ein Gravitationsfeld[2]) auf, so entsteht dieselbe Wirkung, wie wenn man annimmt, daß der Eisenbahnzug in einem gravitationsfreien System (negativ) beschleunigt wird. An der Richtigkeit dieser Behauptung ist nicht mehr zu zweifeln; es gibt gar keine Erscheinung, auch außerhalb des Eisenbahnzuges, die nicht von beiden Standpunkten in gleicher Weise erklärt werden könnte. Die Relativitätstheorie schließt nun folgendermaßen weiter: Es ist bewiesen, daß zwei verschiedene Ereignisse E_1 und E_2 dieselbe Wirkung W haben; also darf ich aus dem beobachteten Eintreten von W nicht schließen, daß nur E_1 eingetreten sein kann. Wenn man aber behauptet, wie Herr Dingler (und auch Herr Lenard), daß die Wirkungen im Coupé beweisen, daß der Zug bewegt ist, so begeht man diesen Fehlschluß[1]). Es ist das große Verdienst von Mach[2]) auf diesen Fehlschluß hingewiesen zu haben; er fügt dem hinzu, daß man eigentlich E_1 und E_2 in diesem Falle als identisch ansehen muß. Real ist nur die Relativbewegung der beiden Dinge.

2. Herr Dingler will den Bewegungszustand der Inertialsysteme des Weltalls, abgesehen von der gleich zu erwähnenden Drehung, durch Beziehung auf die Gesamtheit der Fixsterne festlegen. In diesen durch allmähliche astronomische Approximation gewonnenen Systemen und exakt nur in diesen gilt, so führt er aus, das Galileische Trägheitsgesetz. Hier geht Herr Dingler die von ihm unbemerkte Voraussetzung ein, daß die Rechnungen an verschiedenen Fixsternen, die auf Anwendung der Newtonschen Gesetze beruhen, überall zu derselben Inertialschar führen. Diese Annahme, die auch in der Newtonschen Theorie liegt, läßt sich aber a priori gar nicht beweisen, im Gegenteil erscheint sie von vornherein unwahrscheinlich. Es ist der Sinn der Einsteinschen Theorie, daß sie diese Voraussetzung durch eine viel näher liegende und experimentell aufs beste bewiesene Hypothese ersetzt: es gibt zu jedem Punktereignis ein Inertialsystem, aber im allgemeinen zu jedem Weltpunkt ein besonderes. Dies ist das Einsteinsche Äquivalenzprinzip; das Gravitationsfeld läßt sich lokal immer „wegtransformieren". An Stelle des Integralprinzips der Newtonschen Theorie tritt also ein Differentialprinzip; und während dieses durch die Gleichheit von träger und schwerer Masse experimentell gesichert erscheint, wird die Integrabilität auf

1) Denn die vertikale Komponente bei etwa herunterfallenden Körpern entsteht durch das Erdfeld, und dieser Effekt interessiert hier nicht.

2) Dieses Gravitationsfeld herrscht nicht nur innerhalb des Coupés, sondern auch in der Umgebung des Zuges. Die Frage nach der Ursache dieses Gravitationsfeldes brauchen wir hier nicht zu behandeln; es läßt sich bekanntlich ähnlich auf Massenwirkungen zurückführen, wie alle andern Gravitationsfelder.

1) Man wende auch nicht ein, die Annahme, daß E_1 stattfindet, sei einfacher und darum zu bevorzugen. Es liegen hier drei Erklärungsmöglichkeiten vor: 1. E_1 hat stattgefunden; 2. E_2 hat stattgefunden; 3. es ist beliebig, E_1 oder E_2 als vorliegend zu betrachten. Daß die letztere Annahme die einfachere ist, d. h. im Rahmen einer einheitlichen Theorie möglichst viele Tatsachen erklärt, ist durch die Einsteinsche Durchführung der allgemeinen Kovarianz bewiesen.

2) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig 1904, 5. Aufl., S. 252. Die betreffende Stelle ist wiedergegeben bei A. Kopff, a. a. O., S. 10.

besonders einfache Fälle beschränkt, die nur ausnahmsweise und angenähert realisiert sind.

Die Orientierung der Inertialschar gegen Rotation will Herr Dingler durch das Foucaultsche Pendel festlegen. Er hält dies für einen ganz neuen, von ihm in 15 Jahren entwickelten Gedanken (diese Zeitschr. a. a. O. S. 670, 2). Dies muß befremden, denn es ist nichts als der Newtonsche Gedanke, der die Annahme eines in bezug auf Drehung absoluten Raumes bedeutet. Ob man die absolute Orientierung durch das Verschwinden der Zentrifugalkraft oder durch die Pendelebene definiert, ist kein nennenswerter Unterschied; es bleibt immer dieselbe Auszeichnung der Trägheitskräfte als absolut[1]). Der Dinglersche Standpunkt ist also ein Gemisch von Mach und Newton; in bezug auf Translation ist der Bewegungszustand der Inertialsysteme des Weltalls durch die Fixsternmassen bestimmt, in bezug auf Drehung durch den absoluten Raum. Man wird diese Lösung des Bewegungsproblems nicht gerade konsequent nennen können, auch gilt dies nicht von einer Erkenntnistheorie, die solche Lösungen zuläßt. Der Fehler dieser Lösung ist direkt bewiesen, wenn man die allgemeine Kovarianz als empirisch bestätigt ansehen kann, denn dann bedeutet sie wie oben den Schluß aus der Beobachtung von W auf das Stattfinden von E_1.

3. Die Gleichzeitigkeit will Herr Dingler durch den Transport von Uhren definieren, die, an derselben Stelle verglichen, gleich gehen. Er gibt zu, daß diese Definition der Gleichzeitigkeit auf gewissen Voraussetzungen beruht, formuliert aber das notwendige Axiom ganz unscharf und behauptet dann, daß die Relativitätstheorie es ebenso voraussetzt. Er nennt als Voraussetzung, „daß sich durch eine bloße Bewegung der Uhr ihr Gang nicht ändere“ (a. a. O. S. 672, 1), und behauptet dann, daß ja auch die Relativitätstheorie mit einem gleichmäßigen Gang der Uhren rechnet, obwohl jede ruhende Uhr als bewegt aufgefaßt werden kann. Er übersieht dabei, daß alle Spekulationen über die Gangänderung einer einzelnen Uhr leer sind, und daß erst der Vergleich mit anderen Uhren zu beobachtbaren Phänomenen führt. Das Axiom muß deshalb so lauten: „Zwei Uhren, die an einer Stelle benachbart gleichgestellt werden, sind, wenn sie auf verschiedenen Wegen an eine andere Stelle transportiert werden, dort wieder synchron“. Dies ist eine empirisch nachprüfbare Behauptung. Die Relativitätstheorie erklärt sie für falsch, sie behauptet also, daß die Uhren im allgemeinen bei dem zweiten Zusammentreffen nicht mehr synchron sind. Sie hat dazu zwar keinen direkten, aber sehr viele indirekte Beweise; Herr Dingler aber hat für das Axiom keinen anderen Beweis, als daß man vor Einstein immer daran geglaubt hat. Daß aber die Relativitätstheorie im Widerspruch zu ihrer expliziten Behauptung dieses Axiom dennoch irgendwo implizit voraussetzt, kann ihr auch der Gegner nicht nachsagen.

4. Die Aussage, daß die Relativitätstheorie empirisch bestätigt sei, erkennt Herr Dingler nicht an, weil zuvor bewiesen werden müßte, „daß jede Theorie empirisch bestätigt oder widerlegt werden könnte, oder daß die Relativitätstheorie eine solche Theorie sei“ (a. a. O. S. 673, 2). Dies ist einer von den vielen Fällen, wo Herr Dingler einen richtigen Gedanken durch falsche Formulierung entstellt. Wenn ich bewiesen habe, daß ein Körper viereckig ist, so ist damit der Beweis erbracht, daß es viereckige Körper gibt, und daß der Körper einer von diesen sei. Es ist unnötig, zuvor den allgemeinen Satz zu beweisen, sondern dieser Beweis wird durch den Beweis des Einzelfalls mitgeliefert. Das Problem liegt vielmehr darin, ob der Beweis des betreffenden Einzelfaktums anerkannt werden kann; dazu ist nötig, daß man Kriterien für einen richtigen Beweis aufstellt und nachsieht, ob der betreffende Beweis diese Kriterien erfüllt. Und hier liegt das Richtige in Herrn Dinglers Behauptung: Diese Kriterien beruhen auf logischen Forderungen, und darum sind logische Forderungen in der Physik enthalten[1]). Es ist aber ein großer Irrtum, wenn man behauptet, die Relativitätstheorie sei sich dieser Forderungen nicht bewußt. Sie hat sie im Gegenteil stets angewandt. Als Kriterien der Geltung einer Theorie für die Wirklichkeit führe ich an:

1. Die Theorie muß in sich widerspruchsfrei sein.
2. Die Theorie muß die einfachste unter allen denen sein, die dasselbe Erscheinungsgebiet umfassen.
3. Die Interpretation der empirischen Daten muß nach dem normalen Induktionsverfahren der Physik erfolgen.

1) Vom Standpunkt der Relativitätstheorie ist natürlich das Foucaultsche Pendel sehr leicht erklärt: das am Nordpol der Erde aufgestellte Pendel würde auch dann seine Ebene, von der Erde aus betrachtet, ändern, wenn die Erde als ruhend angenommen wird und die Fixsterne rotieren. Die Fixsterne „nehmen die Pendelebene mit“.

1) Allerdings folgt daraus nicht, daß diese Forderungen völlig willkürlich sind, wie Dingler in seinem genannten Buch behauptet. Für die Beurteilung dieser Fragen verweise ich auf mein Buch: Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, Springer 1920, Abschnitt V und VI.

Alle drei Kriterien werden von der Relativitätstheorie erfüllt. Über das zweite Kriterium ist natürlich noch kein abschließendes Urteil möglich, aber bisher ist jedenfalls eine gleichwertige einfachere Theorie nicht aufgestellt, trotz vieler Versuche. Für die Bedeutung des dritten Kriteriums verweise ich auf meine genannte Schrift (S. 60—64).

5. Herr Dingler vertritt die Ansicht, daß über die Geltung der Geometrie keine empirische Entscheidung getroffen werden kann. Dies ist insofern richtig: Will man an der euklidischen Geometrie festhalten, so kann man die Physik so abändern, daß diese Forderung erfüllt wird. Man muß aber die andere, erkenntnistheoretisch ebenso fundamentale Forderung aufgeben, daß die natürlichen starren Körper die Kongruenzaxiome der Theorie erfüllen. Herr Dingler bestreitet diese Alternative und gibt dafür folgenden Beweis: Um zu beweisen, daß die euklidische Geometrie, angewandt auf die natürlichen starren Körper, falsch sei, muß ich die euklidische Geometrie selbst wieder in allen meinen empirischen Messungen voraussetzen; darum sei der Beweis ein Zirkel. Es handelt sich also um einen Einwand im Sinne des von mir genannten ersten Kriteriums. Auf das Fehlerhafte dieses Beweisgangs habe ich bereits an anderer Stelle[1]), bei der Diskussion der Kantischen Philosophie, hingewiesen, denn Herrn Dinglers Beweis ist ja nichts anderes als die Schlußweise der Kantischen Aprioritätsphilosophie. Hier sei der Inhalt meines Gedankengangs in einer Formulierung, die mir Herr K. Grelling kürzlich gesprächsweise mitteilte, wiedergegeben. Voraussetzung: *A* ist *B*. Ich beweise durch logisch richtige Operationen und Hilfssätze hieraus, daß *A* nicht *B* ist. Dann folgt, daß in der Tat *A* nicht *B* ist, denn die gegenteilige Annahme führt ja zum Widerspruch. Vorausgesetzt muß dafür nur werden, daß nicht auch die Annahme: „*A* ist nicht *B*" zur Konsequenz „*A* ist *B*" führt, denn sonst läge eine echte Paradoxie vor.

Dies ist nun in der Tat die Schlußweise, die in der Relativitätstheorie vorliegt. Das möge an einem Beispiel gezeigt werden, welches zwar nicht die Ungültigkeit der 3-dimensionalen euklidischen Geometrie beweist, aber etwas Ähnliches für die 4-dimensionale Raumzeitwelt zeigt. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist unter der Voraussetzung der euklidischen Geometrie (im 3- und 4-dimensionalen Raum) bewiesen worden; denn bei Messungen an der Drehwage liegt allen Auswertungen der Instrumentsablesungen diese Geometrie zugrunde. Eine weitere Bestätigung der Gleichheit beider Massen liegt darin, daß das Newtonsche Gravitationsgesetz wenigstens näherungsweise im Weltraum gilt, denn auch dieses Gesetz arbeitet ja mit der Massengleichheit; allerdings hat diese Bestätigung nicht den Genauigkeitsgrad der Eötvösschen. Aus der Gleichheit der beiden Massen folgt nun, daß es zu jedem Weltpunkt ein lokales System gibt, in dem keine Gravitationswirkungen bemerkbar sind, nämlich das Ruhsystem eines frei fallenden Massenpunktes. Für Weltpunkte verschiedener Newtonscher Gravitationsfeldstärke (d. h. inhomogene Felder) sind diese lokalen Inertialsysteme zueinander in beschleunigter Bewegung. Es tritt nun eine zweite, ebenfalls unter der Voraussetzung euklidischer Maßverhältnisse experimentell gut bewiesene Voraussetzung hinzu: daß in solchen gravitationsfreien Systemen die spezielle Relativitätstheorie gilt. Wir müssen hinzufügen, daß dies auch für Koordinatensysteme beliebig geringer Ausdehnung gilt, daß also die absolute Größe der räumlichen Dimensionen keinen Einfluß auf die Geltung der speziellen Relativitätstheorie besitzt (Homogenität des Raumes). In dem lokalen Inertialsystem gilt also das Minkowskische Linienelement $ds^2 = \sum dx_\nu^2$. Hieraus folgt wieder, daß in jedem dazu beschleunigt bewegten System dieser einfache Ausdruck nicht gilt, wenn man dort die Koordinaten durch ruhende starre Stäbe und Uhren definiert (wir nennen dies: „natürliche Koordinaten"), denn jede nicht linear-orthogonale Transformation verwandelt ja das Linienelement in $ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Versucht man nun, den ganzen Raum durch ein Koordinatennetz zu erfüllen, das in jedem Punkt die euklidische Maßbestimmung $ds^2 = \sum dx_\nu^2$ trägt, so müssen die einzelnen Teile des räumlichen Koordinatennetzes zueinander beschleunigt bewegt sein, denn sie müssen ja in jedem Punkt dem lokalen Inertialsystem entsprechen. Hieraus folgt, daß das Koordinatennetz im allgemeinen nicht mittels starrer Stäbe realisiert werden kann. Damit ist bewiesen — denn die Umkehrung gilt auch, weil nur die lokalen Inertialsysteme eine euklidische Maßbestimmung besitzen —, daß ein durch starre Stäbe und ruhende Uhren realisiertes Koordinatensystem nicht an allen Punkten des Raumes vierdimensional-euklidische Maßverhältnisse besitzt. Wir vollziehen also folgendes Schlußschema:

Voraussetzung a: Geltung der euklidischen Geometrie [in natürlichen Koordinaten.

1) a. a. O. S. 62.

Hilfssatz b: Gleichheit von träger und schwerer Masse.

Hilfssatz c: Geltung der speziellen Relativitätstheorie in solchen Koordinatensystemen, in denen keine Gravitationswirkungen beobachtbar sind, auch für beliebig kleine Bezirke.

Folgerung d: Ungültigkeit der euklidischen Geometrie in natürlichen Koordinaten.

Dies ist der im obigen logischen Verfahren geschilderte Widerspruch. Das umgekehrte Schema gilt hier natürlich nicht, d. h. aus der Voraussetzung der nichteuklidischen Geometrie folgt nicht die Geltung der euklidischen, so daß eine Paradoxie nicht vorliegt.

Es soll nun keineswegs behauptet werden, daß damit die Ungültigkeit der euklidischen Geometrie für natürliche Koordinaten mit absoluter Sicherheit bewiesen sei; sondern diese Ungültigkeit folgt immer nur, wenn man Hilfssatz b und c anerkennt. Hier handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß der Beweis wenigstens logisch möglich ist; denn Hilfssatz b und c sind wenigstens logisch mögliche Annahmen.

Es gibt nun zwei in Betracht kommende Lösungen des Widerspruchs: entweder man läßt a fallen oder c. Herr Dingler wird vermutlich die letzte vorziehen; aber er setzt sich damit in Widerspruch zu einem empirisch gut bestätigten und logisch zulässigen physikalischen Resultat, eben der speziellen Relativitätstheorie. (Auch Herr Dingler hat noch keinen haltbaren Einwand gegen die spezielle Relativitätstheorie vorbringen können.) Was ich hier aber vor allem feststellen möchte, ist, daß Herr Dingler seine Lösung nicht damit begründen darf, daß eine andere Lösung unmöglich sei. Denn auch die Relativitätstheorie gibt eine zulässige Lösung des Widerspruchs, wie sogleich gezeigt werden soll.

Die Relativitätstheorie betrachtet b und c als empirisch so gut fundiert, daß sie die Ungültigkeit der euklidischen Geometrie als bewiesen ansieht. Damit ist bereits ein physikalisches Resultat gewonnen, wenn auch von negativem Charakter. Jedoch begnügt sie sich nicht damit, sondern sie will positiv die Geltung einer bestimmten anderen Geometrie, der Riemannschen, beweisen. Und hier entsteht das größere logische Problem, das durch das Grellingsche Schlußschema noch nicht berührt ist: wenn a fällt, darf ich dann zum Beweis der Riemannschen Geometrie wieder b und c verwenden, die doch selbst a enthalten? Die Problem läßt sich so formulieren: Nachdem bewiesen ist, daß A nicht B ist, will ich beweisen, A ist C. Es stehen mir aber nur Sätze (nämlich b und c) zur Verfügung, die auf der Annahme A ist B beruhen, also voraussetzen, A ist nicht C. Darf ich nun so schließen: A ist nicht C, ich beweise A ist C, also gilt A ist C?

Das wäre ein Fehlschluß. Aber dies ist auch gar nicht die Schlußweise der Relativitätstheorie. Betrachtet man nämlich die Sätze b und c genauer, so findet man, daß sie gar nicht a notwendig voraussetzen, sondern schon dann gelten, wenn a nur für kleine Raumgebiete gilt. Z. B. in den Dimensionen der Drehwage, an der die Gleichheit von schwerer und träger Masse bestätigt wird, oder der Elektronenröhren, in denen sich die Elektronen nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie bewegen. Denn die Meßgenauigkeit unserer empirischen Resultate läßt eine Unterscheidung zwischen euklidischer und nichteuklidischer Geometrie in kleinen Dimensionen gar nicht zu. Zwar ist die Bestätigung der Massengleichheit aus der Geltung des Newtonschen Gesetzes wieder an die Geltung der euklidischen Geometrie in astronomischen Dimensionen gebunden; aber hier ist die Bestätigung gerade ungenau, und es bleibt offen, diese angenäherte Gleichheit durch nur angenäherte Geltung der euklidischen Geometrie zu erklären[1]). Die Sätze b und c sind also mit der Geltung einer Riemannschen Geometrie von schwacher Krümmung ebenfalls vereinbar. Es ergibt sich dann folgendes Schlußverfahren:

Voraussetzung: A ist B oder C.
Hilfssätze, beruhend auf dieser Voraussetzung.
Folgerung: A ist C und nicht B.

Dies ist ein erlaubter Beweis für die Behauptung A ist C[2]). Ich habe diese Schluß-

1) Die Relativitätstheorie behauptet also, daß eine genaue Bestätigung der Massengleichheit an Sternen unter Benutzung der euklidischen Geometrie und des Newtonschen Gesetzes niemals erbracht werden kann; aber das ist trivial, denn es besagt eben nur, daß das Newtonsche Gesetz nicht gilt. Eine quantitativ exakte Bestätigung des Äquivalenzprinzips in astronomischen Dimensionen ist nur durch die Anwendung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen zu erzielen. Eine solche Bestätigung wäre keineswegs leer, sondern es ist das allgemeine Verfahren der Physik, eine Voraussetzung anzunehmen, und durch ihre widerspruchslose Durchführbarkeit in der Erfahrung ihre Gültigkeit stets erneut zu beweisen. Die astronomischen Bestätigungen der Relativitätstheorie sind darum ebenso Beweise für die Theorie als Gesamtheit wie für die Hilfssätze *b* und *c*.

2) Es ist noch hinzuzufügen, daß durch die Vereinbarkeit der Sätze *b* und *c* auch mit C das obige Grellingsche Schlußverfahren nicht gestört wird; denn

weise an anderer Stelle[1]) „Verfahren der stetigen Erweiterung" genannt; sie ist sehr charakteristisch für die moderne Physik und erlaubt eine ungeahnte Erweiterung der Forschungsprinzipien. Sie wird z. B. auch in der Quantentheorie angewandt, wo die diskrete Struktur der Energie mit Hilfe von Experimenten nachgewiesen wird, die makroskopische Stetigkeit der Energie voraussetzen. Denn jede rechnerische Auswertung der experimentellen Anordnung arbeitet natürlich mit dem Energiebegriff im alten Sinne, als einer stetigen Größe. In diesem Falle erfolgt der Schluß gerade umgekehrt, von großen auf kleine Dimensionen.

Logisch erkenntnistheoretische Einwände lassen sich deshalb gegen die Relativitätstheorie nicht erheben.

6. Ich bin, wie Herr Dingler, seit langem der Ansicht, daß eine Axiomatik der Physik notwendig ist, ja, daß der gegenwärtige Stand dieser Wissenschaft die Axiomatik dringend fordert. Es geht aber nicht an, daß die bereits vorliegenden Resultate, die aus der Physik herausgewachsen sind und in der Relativitätstheorie einen großartigen Ausbau gefunden haben, als „zur alten Physik gehörig" abgetan werden. Ich halte es für sehr bedauerlich, wenn das axiomatische Verfahren durch Verkennung physikalischen Denkens und inkorrekte Schlußweisen von vornherein diskreditiert wird.

hier ändert sich nichts, wenn die Hilfssätze auf „*A* ist *B* oder *C*" beruhen.

1) a. a. O., S. 66—68.

Stuttgart, Physikal. Institut d. Techn. Hochschule, April 1921.

(Eingegangen 18. Mai 1921.)

Eine elementare geometrische Darstellung der Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie.

Von P. Gruner.

Die verschiedenen geometrischen Darstellungen der Lorentz-Transformation benützen entweder rechtwinklige Koordinatensysteme mit imaginären Drehungswinkeln (bzw. imaginären Zeitkoordinaten) oder schiefwinklige Koordinatensysteme mit reellen Größen, bei denen aber die Einheitsmaße auf jeder Achse verschieden sind und erst durch das Minkowskische Einheitshyperboloid bestimmt werden müssen. Zur Einführung der Anfänger in das Verständnis der Relativitätstheorie ist aber eine geometrische Darstellung erwünscht, bei der keine imaginären Größen und keine verschiedenen Einheitsmaße auftreten. Eine solche Darstellung ist leicht zu finden, wenn man sich auf die Vergleichungen bloß zweier eindimensionaler Raumkoordinatensysteme beschränkt.

Zwei lineare, geradlinige Bezugssysteme OX und $O'X'$ mögen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen (man denke an zwei unendlich lange, parallele Eisenbahnzüge, die in absolut dunkler Nacht aneinander vorbeifahren), die Uhrangaben t und t' auf jedem System seien so reguliert, daß die Punkte O und O' im Moment ihres Zusammentreffens die Zeiten $t=0$ und $t'=0$ aufweisen, so gilt für jedes Zusammentreffen (Koinzidenz) irgend zweier Punkte mit den Abszissen x und x' und den Uhrangaben t und t' das System der Lorentzschen Transforformationsgleichungen:

$$x' = \beta(x - \alpha \cdot c \cdot t) \qquad x = \beta(x' + \alpha \cdot c \cdot t'),$$
$$c \cdot t' = \beta(c \cdot t - \alpha \cdot x) \qquad c \cdot t = \beta(c \cdot t' + \alpha \cdot x),$$

worin

$$\alpha = \frac{v}{c}, \; \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ (es ist stets } \beta > 1).$$

Setzt man zur Vereinfachung $c = 1$ [1]), also $\alpha = v$, so kann man die Ereignisse auf zwei schiefwinklige Raum-Zeit-Koordinatensysteme OXT und $O'X'T'$ mit gemeinsamem Ursprung beziehen; nach Minkowski müssen dieselben je ein Paar konjugierter Durchmesser der invarianten Einheitshyperbel

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = 1$$

sein. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß es zwei solche Paare gibt, bei denen die Durchmesser alle gleich lang sind, und die symmetrisch zu den Achsen der Hyperbel liegen, also wechselseitig orthogonal stehen. Diese bilden die für geometrische Darstellung besonders geeigneten Raum-Zeit-Koordinatensysteme.

Diese Systeme lassen sich (wie mir Herr Dr. Sauter, Ingenieur in Bern, freundlichst mitteilte) auch direkt herleiten.

Man lege die Achse $OT \perp$ zur Achse OX' und die Achse OT' unter einer Neigung Θ zu OX', so daß

$$\cos\Theta = \alpha = \frac{v}{c},$$

also

$$\sin\Theta = \frac{1}{\beta}, \text{ cotang } \Theta = \alpha \cdot \beta.$$

1) Am vorteilhaftesten stellen sich die Relativitätsformeln dar, wenn man als Längeneinheit 1 Kilometer und als Zeiteinheit $1/_{300000}$ Sekunde wählt. Wir schlagen für diese Zeiteinheit den Namen „Lichtsekunde" vor.

Die Achse OX wird dann wiederum $\perp OT'$ gestellt. Dann gelten in der Tat für die Parallelkoordinaten gemäß Fig. 1:

$$x' = \frac{x}{\sin\Theta} - t \cdot \text{cotang}\,\Theta,$$

$$t' = \frac{t}{\sin\Theta} - x \cdot \text{cotang}\,\Theta,$$

d. h. die oben angeführten Transformationsformeln für $c = 1$.

An Hand dieser leicht zu konstruierenden Koordinatensysteme lassen sich die Längenkon-

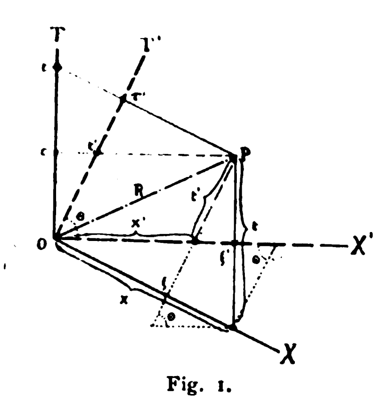


Fig. 1.

traktion und die Uhrgangverlangsamung ohne weiteres überblicken.

Im „gestrichelten" System $OT'X'$ (Fig. 2) geben die zur Zeitachse OT' parallel gelegten Weltgeraden die „Weltgeschichte" der in diesem System ruhenden Punkte. So stellt $A'B'$ stets die Länge l' eines in ihm ruhenden Maßstabes dar. Die im „ungestrichelten" System

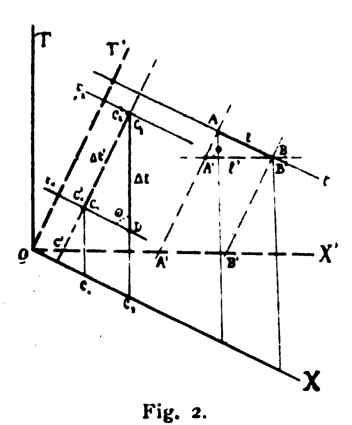


Fig. 2.

OTX ruhenden Beobachter können diese Länge l' nur messen, indem sie den Ort A und B der Endpunkte von l' bei g l e i c h e r Uhrangabe t (also auf einer Geraden parallel zu OX) ermitteln; sie finden dafür

$$l = l' \cdot \sin\Theta = \frac{1}{\beta} l',$$

d. h. die bekannte L o r e n t z - Kontraktion.

Ebenso kann der Uhrgang e i n e r Uhr C' (Fig. 2) des gestrichelten Systems vom anderen System aus nur dadurch beurteilt werden, daß zwei Beobachter C_1 und C_2 dieses letzteren Systems ihre Uhrablesungen mit den Ablesungen der an ihnen vorbeigehenden Uhr C' vergleichen. Zeigt letztere ein Zeitintervall

$$\Delta t' = C_1' C_2',$$

so finden die ungestrichelten Beobachter das Zeitintervall

$$\Delta t = DC_2,$$

das durch die beiden zu OX parallelen, durch C_1 und C_2 gelegten Geraden bestimmt ist. Die Figur ergibt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sin\Theta} = \beta \cdot \Delta t',$$

d. h. die bekannte E i n s t e i n sche Verlangsamung des Uhrganges der bewegten Uhr.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Anschaulichkeit dieser einfachen geometrischen Methode darzutun. Es sei aber (ebenfalls nach Dr. S a u t e r) noch darauf hingewiesen, daß durch diese Wahl der Koordinatensysteme auch der etwas abstrakte Begriff von k o v a r i a n t e n und k o n t r a v a r i a n t e n K o m p o n e n t e n eines Vektors anschaulich gemacht werden kann.

Es bezeichnen nämlich (Fig. 1):

die P a r a l l e l p r o j e k t i o n e n des Vektors R: x, t; x', t' die kontravarianten Komponenten desselben und

die O r t h o g o n a l p r o j e k t i o n e n: ξ, τ; ξ', τ' die kovarianten Komponenten desselben.

Denn es ist leicht einzusehen, daß

$$x \cdot \xi = x' \cdot \xi', \quad t \cdot \tau = t' \cdot \tau'$$

ist, also die notwendige Invarianzbedingung

$$x \cdot \xi + t \cdot \tau = x' \cdot \xi' + t' \cdot t'$$

besteht. Daß auch hier allerlei anschauliche Folgerungen, auch betreffs des Fundamentaltensors $g_{i\kappa}$, gezogen werden können, versteht sich von selbst.

B e r n, 19. Mai 1921.

(Eingegangen 21. Mai 1921.)



Graphische Darstellung der Optik bewegter Körper.

Von Ed. Guillaume.

Im vorliegenden Berichte soll gezeigt werden, wie eine bemerkenswerte graphische Darstellung es gestattet, die wichtigsten Relationen der Optik bewegter Körper aufzustellen, falls man den universellen Zeitbegriff zuläßt[1]).

Betrachten wir, wie gewöhnlich, zwei rechtwinklige Koordinatensysteme S_1 (x_1, y_1, z_1), S_2 (x_2, y_2, z_2), welche sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v in Richtung ihrer zusammenfallenden x-Achsen fortbewegen. Um die Überlegung zu vereinfachen, denken wir uns die Systeme als Kontinua K_1 und K_2, welche sich gegenseitig durchdringen, wie etwa zwei Gase bei der Diffusion.

Betrachten wir im Ursprunge O_2 von S_2 eine Lichterregung (Huyghensschen Erregungspunkt im Kontinuum K_2), im Augenblicke wo er mit O_1 zusammenfällt. Diese Lichterregung pflanzt sich nach allen Richtungen fort mit der Geschwindigkeit $c_0 = 300000$ km/sec im Kontinuum K_2. Wenn wir von O_2 aus nach allen Richtungen den Vektor c_0 abtragen, erhalten wir ein sphärisches Hodograph:

$$c_2 = c_0. \quad (1)$$

Welches ist nun das Hodograph für einen Beobachter im Kontinuum K_1? Nach dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gehen vom Erregungspunkte in K_1 Strahlen aus, die sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit c_0 fortpflanzen. Was wir suchen, ist aber die momentane Geschwindigkeit im Augenblicke der Emission. Der Erregungspunkt O_2 wirkt dann auf K_1 wie eine bewegte Lichtquelle, und die von S_1 aus beobachtete Frequenz ν_1 wird von der Frequenz ν_2 auf S_2 verschieden sein. Die zweite Lorentzsche Gleichung:

$$u_2 = \beta(u_1 - \alpha x_1), \text{ wo } \beta^2 = 1:(1-\alpha^2), \ \alpha = v:c_0,$$

in welcher wir

$$x_1 = u_1 \cos\varphi_1$$

einsetzen, gibt uns den gewünschten Aufschluß. Wenn wir sie nämlich nach der universellen Zeit t, in Sekunden ausgedrückt, ableiten und setzen:

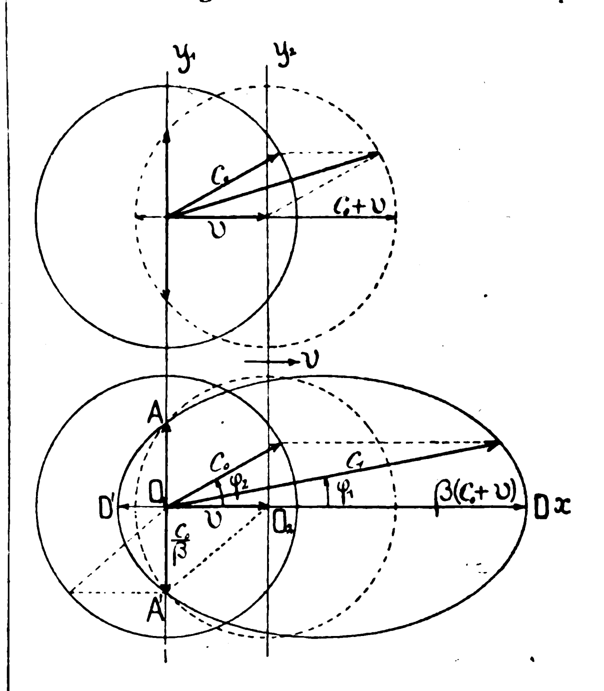
$$\frac{du_1}{dt} = c_1; \quad \frac{du_2}{dt} = c_2 = c_0,$$

so erhalten wir:

$$c_1 = \frac{c_0}{\beta(1 - \alpha\cos\varphi_1)}. \quad (2)$$

1) Diese Zeitschr. **22**, 109—114, 1921.

Das Hodograph ist also ein Rotationsellipsoid, für welches der Punkt O_1, d. h. der mit dem Erregungspunkte O_2 bei der Emission zusammenfallende Punkt von K_1, ein Brennpunkt ist. Die Exzentrizität ist α und hängt nur von der Relativgeschwindigkeit v ab. In der Figur ist der Meridian des Ellipsoids angegeben, und sie zeigt in prägnanter Weise, worin sich die Relativitätstheorie von der Newton-Ritzschen Emissionstheorie unterscheidet. Diese stützt sich auf die Regel vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (oberer Teil der Figur). In der Relativitätstheorie ist sozusagen das Parallelogramm verzerrt, in Richtung der Bewegung gedehnt.



Es läßt sich leicht ableiten:

a) Für den Dopplereffekt:

$$\frac{c_1}{\nu_1} = \frac{c_2}{\nu_2};$$

b) Für die Licht-Aberration:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\alpha + \cos\varphi_2}{1 + \alpha\cos\varphi_2};$$

c) Für die Fizeau-Fresnelsche partielle Mitführung (n = Brechungsindex):

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{n}; \quad \cos\varphi_1 = \frac{1 + \alpha n}{n + \alpha};$$

d) Für den Michelson- und Morleyschen Versuch (d = Abstand der im K_1 liegenden Spiegel):

$$\Delta t_y = \frac{d}{O_1A} + \frac{d}{O_1A'} = \frac{2\beta d}{c_0} = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}},$$

$$\Delta t_x = \frac{d}{O_1 D} + \frac{d}{O_1 D'} = \frac{d}{\beta}\left(\frac{1}{c_0 + v} - \frac{1}{c_0 - v}\right) = \\ = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}},$$

also

$$\Delta t_y = \Delta t_x,$$

ohne daß es nötig ist, die Lorentz-Kontraktion einzuführen. Es ist aber zu bemerken, daß die Zeiten Δt_x und Δt_y (in Sekunden ausgedrückt) rein fiktiv sind, da die Geschwindigkeiten $O_1 A$, $O_1 A'$, $O_1 D$, $O_1 D'$ nach Voraussetzung momentane Übergangsgeschwindigkeiten von einem Systeme zum andern sind. Die wirklichen Durchlaufzeiten haben als gemeinsamen Wert $2d/c_1$.

Mit Hilfe der mehrparametrischen Darstellung der Zeit läßt sich das Ellipsoid auch wiederfinden. Betrachten wir die Lichterregung im Zeitpunkt o, so ist die erzeugte Welle nach τ_2^0 Sekunden auf S_2 die Kugel:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c_0^2 (\tau_2^0)^2, \qquad (1')$$

wo τ_2^0 denselben Wert für alle Punkte (x_2, y_2, z_2) der Kugel hat. Auf S_1 ist die Kugel dargestellt durch:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 \tau_1^2; \qquad (3)$$

τ_1 ist aber keine Konstante, sondern:

$$\tau_1 = \frac{\tau_2^0}{\beta(1 - \alpha\cos\varphi_1)}, \qquad (4)$$

so daß die Welle von S_1 aus unter der Form eines Ellipsoids erscheint.

Da die Relativisten wünschen, daß die Welle von S_1 aus betrachtet ebenfalls kugelförmig erscheint, müssen sie annehmen, daß die Kugel für S_1 sich aus Punkten zusammensetzt, die keine gleichzeitige Existenz besitzen. Der Grund dieser Nichtgleichzeitigkeit ist leicht zu erkennen. Die τ_1 sind die Zeiten (in Sekunden ausgedrückt), welche das Licht brauchen würde, um die Radienvektoren des Ellipsoids mit der Geschwindigkeit c_0 zu durchlaufen:

$$\tau_1 = \frac{c_1 \times 1^{\text{sec}}}{c_0}.$$

Man begreift dann, warum die Lichtstrahlen nicht gleichzeitig die verschiedenen Oberflächenpunkte des Ellipsoids erreichen können. Während die Kugel (1′) und das Ellipsoid synchron sind, stellt (3) für Einstein eine Fläche dar, deren Punkte nicht gleichzeitig bestehen können[1]).

Es ist wichtig, festzustellen, daß das Ellipsoid in Widerspruch steht mit der Verschiebung der Spektrallinien des Sonnenspektrums durch die Gravitation. Der Grund dafür ist folgender. Für uns sind die τ nur Lichtwege, geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit; sie sind also Zeitmaße der Längen u. Für Einstein dagegen werden die τ als Angaben von Uhren betrachtet (Uhren mit Zifferblättern oder schwingende Atome). Setzt also Einstein:

$$\tau_1 = A\tau_2$$

(A = Konstante. Vgl. „Die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, gemeinverständlich", 10. Aufl., S. 88), so nimmt er an, daß sie eine Beziehung darstellt zwischen verschiedenen Dauern, wie wenn es sich um Perioden handeln würde. Für uns aber bedeuten τ_1 und τ_2 die Zeiten, welche das Licht brauchen würde, um die Lichtwege u_1 und u_2 zurückzulegen. Nehmen wir nun an, daß diese gleichzeitig durchlaufen werden, so sind dann τ_1 und τ_2 nur verschiedene Maße der gleichen Dauer, d. h. Maße mit Uhren von Schwingungsdauern Θ_1 und Θ_2 vorgenommen, so daß:

$$\Theta_1 \tau_1 = \Theta_2 \tau_2. \qquad (5)$$

Man weiß aber, daß in der Relativitätstheorie die Perioden der Dopplerschen Gleichung genügen:

$$\Theta_1 = \Theta_2 \beta(1 - \alpha\cos\varphi_1), \qquad (6)$$

so daß (4) und (6) miteinander multipliziert, wirklich zur Gleichung (5) führen, wobei Θ_1 und Θ_2 die Eigenperioden der Wellen sind, aus denen sich u_1 und u_2 zusammensetzten. Es folgt daraus, daß τ_1 und τ_2 selbst nicht als Perioden angesehen werden können. Was uns übrigens das Spektroskop zeigt, ist nicht die Periode des emittierenden Atoms selbst, sondern die Perioden der emittierten Lichtstrahlen, beim Erreichen des Apparats und diese sind gerade Θ_1 und Θ_2. Jedenfalls bleibt der Gedankengang Einsteins unbegreiflich. Nimmt man an, daß die oben angegebene Doppler-Relation a) allgemein, also auch für die Gravitation Gültigkeit hat, so gelangt man zu einer Beeinflussung durch das Feld, nicht nur für die Quelle, sondern für jeden Punkt des Lichtstrahls, der von der Lichtquelle im Unendlichen emittiert wird. Die Frequenz wäre also eine Funktion des Ortes und wäre für einen Lichtstrahl von der Sonne zur Erde gegeben durch eine Relation der Form:

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{\frac{r - a}{r + a}} < \nu_0,$$

1) Vgl. hierzu: M. v. Laue, „Die Relativitätstheorie", Bd. I, 3. Aufl., S. 50 (1919); ferner A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. 17 (1905), § 3, wo ein unzutreffender Schluß vorliegt.

wobei $a = 2GM : c_0^2$ (G = Gravitationskonstante; M = Masse der Sonne); ν_0 = Frequenz des emittierenden Atoms auf der Sonne; r = Abstand von der Sonne zur Erde, wo die Frequenz ν_r beobachtet wird.

Bern, Mai 1921.

(Eingegangen 23. Mai 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

von J. Franck.

Der folgende Bericht bildet eine Fortsetzung des im Jahre 1919 in dieser Zeitschrift von J. Franck und G. Hertz[1]) über das gleiche Thema erstatteten zusammenfassenden Bearbeitung. Seit dem Erscheinen dieses Artikels sind eine sehr große Zahl von Arbeiten über Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen ausgeführt worden. Zum großen Teil sind es wieder Untersuchungen amerikanischer und englischer Forscher, die mit großem experimentellen Erfolge auf diesem Gebiete gearbeitet haben. Als Gesamtresultat ergibt sich der schon im vorigen Bericht als gesichert angesehene Zusammenhang mit der Bohrschen Atomtheorie und eine Bestätigung der Bohrschen Grundannahmen. In einzelnen Fällen liegen jedoch starke Widersprüche zwischen den Resultaten und Anschauungen verschiedener Autoren vor, so daß eine einheitliche Betrachtung zur Klärung beitragen kann. Das ist besonders dort der Fall, wo experimentell wertvolle Arbeiten, wie das bei einem neuen Gebiete vorkommt, auf eine bei näherem Zusehen nicht haltbare Weise gedeutet sind. Hinzu kommt, daß solche Untersuchungen sich als ein die optischen Methoden ergänzendes selbständiges Hilfsmittel zur Erforschung von Spektralzusammenhängen und des Atombaus erwiesen haben. Daher schien es angebracht, eine zusammenfassende Darstellung des Gebietes zu bringen, die weniger historisch als kritisch ist, und die es vermeidet, die experimentellen und theoretischen Grundlagen, soweit sie ausführlich im letzten Berichte besprochen sind, den Lesern dieser Zeitschrift noch einmal in extenso zu bringen.

Meßmethoden.

Die Methoden zur Messung der Spannungen, die Elektronen durchlaufen haben müssen, um beim Zusammenstoß mit Atomen oder Molekülen eine Lichtemission derselben anzuregen oder auch, um sie zu ionisieren, sind zum Teil schon im früheren Berichte besprochen worden. Insoweit das der Fall ist, genügt eine kurze Rekapitulation.

Zur Bestimmung der Anregungsspannungen des Anfangsgliedes der Absorptionsserien einatomiger Gase (der sogen. Resonanzlinien) wird oft die Methode des unelastischen Elektronenstoßes nach Franck und Hertz benutzt. Sie ist in ihrer alten Form nur anwendbar, wenn es sich um Gase ohne Elektronenaffinität, also Metalldämpfe und Edelgase, handelt. Das Prinzip der Methode ist folgendes:

Elektronen, die von einer Glühkathode ausgehen (die in der Fig. 1 mit dem Buchstaben D bezeichnet wird), werden in einem mit dem zu untersuchenden Gase gefüllten Raum (R)

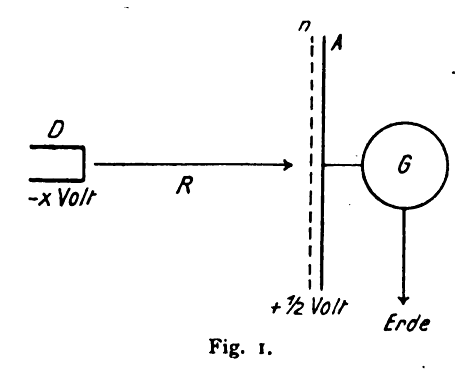


Fig. 1.

beschleunigt, und es wird der Bruchteil dieser Elektronen als Funktion der beschleunigenden Spannung mit einem Galvanometer G gemessen, der nach zahlreichen Zusammenstößen mit den Atomen eine merklich von Null verschiedene kinetische Energie besitzt. Man erhält dann Kurven, die bis zum Einsetzen der das Resonanzlicht anregenden Stöße einer gewöhnlichen glühelektrischen Stromspannungskurve gleichen; nur tritt wegen des komplizierten Weges, den die Elektronen unter vielfacher Reflexion an den Atomen zurücklegen, der Raumladungscharakter der Kurve schon bei sehr schwacher Elektronenemission deutlicher in Erscheinung als bei glühelektrischen Versuchen im Vakuum. Sobald die kritische Geschwindigkeit der Elektronen erreicht ist,

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. **20**, 132, 1919.

sinkt der Strom jäh ab, um mit weiter wachsender Feldstärke wieder anzuwachsen, bis die Elektronen das zweite Mal die zur Resonanzlinienanregung nötige Energie gewonnen haben. Da dieses Spiel sich periodisch wiederholt, so bekommt man scharfe Strommaxima im Abstande der Resonanzspannung, ohne durch die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen oder durch Kontaktpotentiale gestört zu werden, denn durch diese Einflüsse wird die Voltskala als Ganzes verschoben, der Abstand der Maxima voneinander jedoch nicht beeinflußt. Wird das Verhältnis von Druck zu Feldstärke so gewählt, daß die Elektronen zwischen zwei Zusammenstößen größere Beträge an kinetischer Energie gewinnen, so erreichen eine Anzahl Elektronen Geschwindigkeiten, die zur Anregung höherer Glieder derselben Serie oder Glieder einer ultravioletteren Absorptionsserie genügen.

Tabelle I.

Beobacht. Voltzahlen nach der korr. Voltskala	Berechnete Kombinationen aus $a = 4{,}9$ Volt und $b = 6{,}7$ Volt	ΔV
4,9	$a = 4{,}9$	0
—	$b = 6{,}7$	—
9,8	$2a = 9{,}8$	0
11,2	$a + b = 11{,}6$	$-0{,}4$
13,5	$2b = 13{,}4$	$+0{,}1$
14,7	$3a = 14{,}7$	0
16	$2a + b = 16{,}5$	$-0{,}5$
17,6	$a + 2b = 18{,}3$	$-0{,}7$
19,3	$4a = 19{,}6$	$-0{,}3$
20,2	$3b = 20{,}1$	$+0{,}1$
21,2	$3a + b = 21{,}4$	$-0{,}2$
	mittlere Abweichung:	$-0{,}2$ Volt

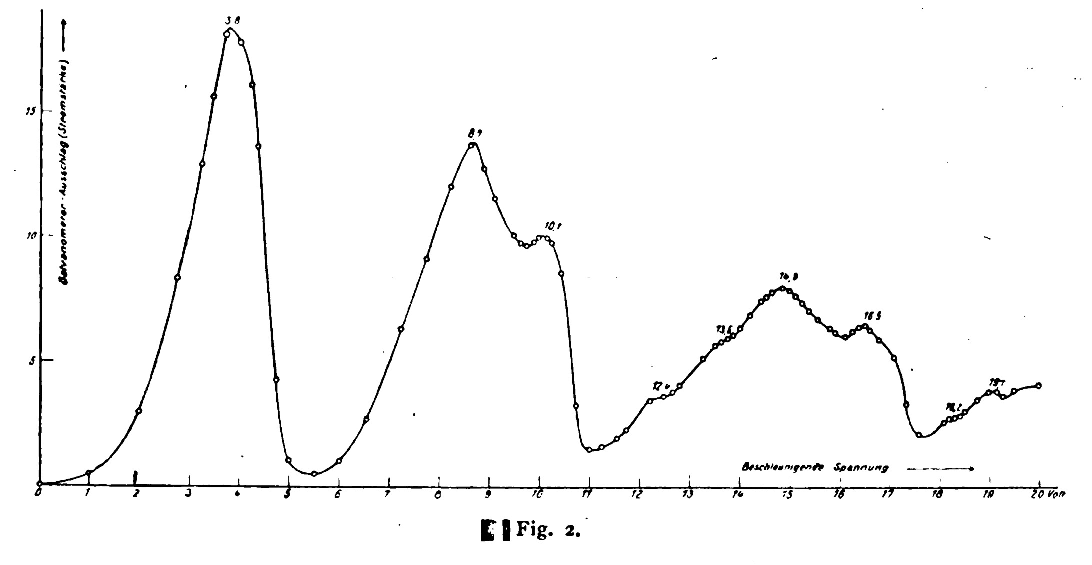


Fig. 2.

Die Fig. 2 zeigt als Beispiel eine in Quecksilberdampf aufgenommene Kurve, bei der die Bedingungen so gewählt sind, daß außer der Linie 2536 Å (in der Serienterminologie mit $1{,}5\,S - 2p_2$ bezeichnet) bei 4,9 Volt auch die Linie 1849 Å = $1{,}5\,S - 2P$ bei 6,7 Volt angeregt wird. In der folgenden Tabelle sind die Voltwerte der Maxima nach Anbringung der aus dem Abstand der ersten beiden Maxima sich ergebenden Korrektur eingetragen. Es zeigt sich, daß von 10 Volt an alle Kombinationen zwischen 4,9 und 6,7 Volt auftreten. Die Kurve ist der Berliner Dissertation von E. Einsporn entnommen.

Diese Methode läßt sich so modifizieren, daß man auch die Lage starker Absorptionsgebiete mehratomiger Gase, die eine Elektronenaffinität besitzen, nachweisen kann oder bei Untersuchung einatomiger Gase höhere Glieder der Absorptionsserie anregen bzw. den Energieaufwand zur Erreichung der Grundbahnen höherer Serien feststellen kann.

Man erteilt dazu, wie es die Fig. 3 zeigt, den vom Glühdraht D emittierten Elektronen ihre Beschleunigung auf einem Wege, der so

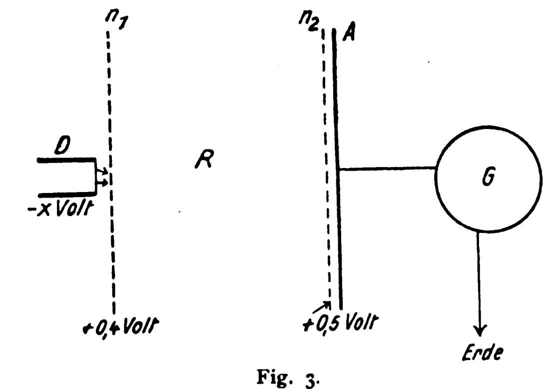


Fig. 3.

kurz ist, daß die meisten Elektronen keine Zusammenstöße auf ihm erfahren und folglich die angelegte Spannung frei durchlaufen. Erst nachdem die Elektronen die gewünschte Geschwindigkeit haben, läßt man sie durch ein Netz in einen Raum R eintreten, in dem sie mit den Atomen oder Molekülen zusammenstoßen. Nachdem sie den Stoßraum durch ein zweites Netz verlassen haben, bestimmt man wieder den Bruchteil, der eine von Null verschiedene kinetische Energie hat. Eine genaue Durchmessung des von diesen Elektronen getragenen Stromes als Funktion der beschleunigenden Spannung zeigt neben den starken Maximis, die der Anregung der Resonanzlinien entsprechen, noch weitere schwache Maxima, die den Übergang der Atome in einen höheren Quantenzustand anzeigen. Im Falle des Quecksilbers sind dabei unter anderen die Seriennglieder $1{,}5\ S - 2\,p_1$ und $1{,}5\ S - 2\,p_3$ gefunden worden, die nach optischen Methoden, wie weiter unten ausgeführt wird, nicht beobachtbar sein können.

Die Fig. 4 zeigt das Auftreten dieser sekundären Maxima in diesem Fall[1].

Wie erwähnt, ist das Verfahren auch auf mehratomige Gase angewandt worden mit dem Resultate, daß auch hier deutliche Maxima auftraten. Diese Tatsache ist ein Beweis da-

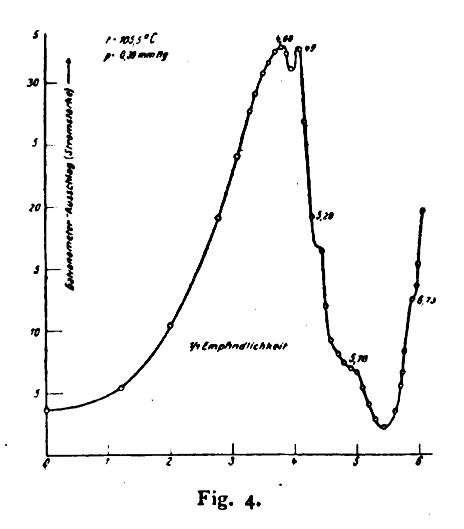


Fig. 4.

für, daß der quantenhafte Energieverlust, der zur Lichtanregung führt, im allgemeinen groß ist gegen die durch Einwirkung der Elektronenaffinität eintretenden Energieverluste bei der halbelastischen Reflexion. Die Voltwerte der Maxima gestatten jedoch nur nach der $h\nu$ Beziehung, die Wellenlänge starker Absorptionsgebiete festzustellen, und es scheint uns unberechtigt, wenn von einer Zahl von Forschern die Meinung vertreten wird, daß man auf diese Weise eine Resonanzspannung von Jod, Schwefel, Phosphor, Stickstoff usw. feststellen könne. Die Moleküle werden im Normalzustand durch das stoßende Elektron getroffen. Dabei werden primär naturgemäß Bandenspektren angeregt. Die Anregung von Linienspektren tritt unter gleichzeitiger Dissoziation des Moleküls als ein sekundärer Prozeß auf, wie weiter unten diskutiert wird. Wir wollen die eben beschriebene Methode im weiteren Texte als unelastischen Elektronenstoß II bezeichnen.

Die zweite Untersuchungsart für Anregungs- und Ionisierungsspannung, die oft benutzt wird, ist die alte Lenardsche Methode in zwei neuen Modifikationen. Die erste dieser Modifikationen stammt von B. Davis und F. Goucher[1]), die zweite anscheinend gleichzeitig von Frank Horton[2]), Franck und Knipping[3]) und Foote und Mohler[4]).

Das allgemeine Prinzip ist, daß man sich wie oben Elektronen gegebener Geschwindigkeit herstellt (siehe Fig. 5), sie durch ein Netz in einen Raum R eintreten läßt, in dem sie mit Atomen zusammenstoßen und sie dann

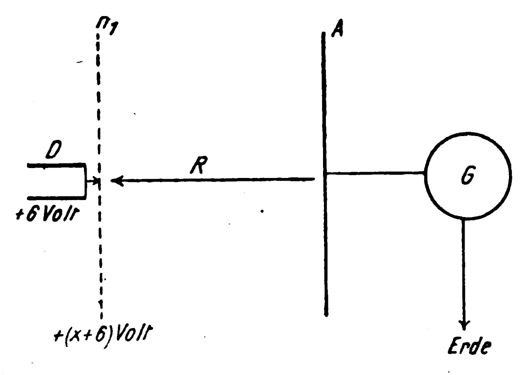


Fig. 5.

durch starke Gegenfelder wieder zurückwirft. Beobachtet werden nur die bei den Zusammenstößen an den Atomen ausgelösten direkten oder indirekten elektrischen Wirkungen. Direkte Wirkungen treten auf, sobald die kinetische Energie der Elektronen genügt, um die getroffenen Atome zu ionisieren, so daß positive Ionen an einer Elektrode gesammelt werden können. Indirekte Wirkungen, wenn die Geschwindigkeit der Elektronen nur genügt, um die Atome zur Lichtaussendung anzuregen. Das Licht löst dann an der Sammel-

1) J. Franck u. E. Einsporn, Zeitschrift f. Physik.

1) B. Davis u. F. Goucher, Phys. Rev. **10**, 84, 1917.
2) Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. **95**, 108, 1919.
3) Franck u. Knipping, diese Zeitschr. **20**, 481, 1919.
4) Foote u. Mohler, Phys. Rev. **15**, 321, 1920.



elektrode einen Photoeffekt aus. Die Wirkung ist in diesem Falle ein Elektronenverlust des Auffängers, also ebenfalls eine positive Aufladung wie bei der Ionisation. Davis und Goucher haben zwischen den beiden Effekten zu unterscheiden gelehrt, indem sie vor der Sammelelektrode (siehe Fig. 6) ein zweites

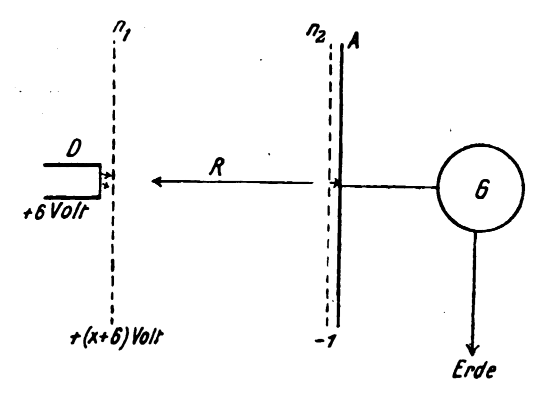


Fig. 6.

Drahtnetz anbrachten und zwischen dieses und die Elektrode ein schwaches Feld so legten, daß die lichtelektrisch ausgelösten Elektronen zum Auffänger zurückgezogen werden, dagegen erreichen die am Netz ausgelösten Elektronen jetzt den Auffänger und laden ihn negativ auf. Bei der Spannung, bei der Ionisation eintritt, kehrt der Strom seine Richtung um und geht zu positiven Werten über.

Die Fig. 7 bringt in den Kurven II a und

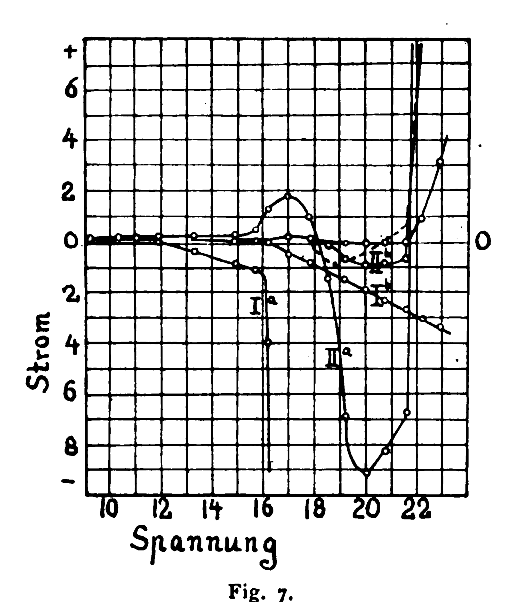


Fig. 7.

II b ein Beispiel, aus dem das geschilderte Verhalten deutlich hervorgeht; sie ist einer Arbeit von Frank Horton und Ann Davies über Lichtanregung und Ionisation des Neons entnommen[1]). Wir haben dieses Beispiel gewählt, weil es außer der wichtigen Unterscheidung zwischen den beiden Atomprozessen auch die Begrenztheit der Methode zeigt. Die genannten Verfasser schließen aus solchen Kurven auf 3 Ionisierungspannungen und 2 Resonanzspannungen, während wir nur je einen Wert als Resonanzspannung und einen als Ionisierungspannung für reell halten. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, die weiter unten besprochen werden sollen, sei auf folgende Eigenschaften der Methode, die zu Täuschungen Anlaß geben können, hingewiesen. Die negative Aufladung des Auffängers wird, wie oben erwähnt, durch lichtelektrisch am Drahtnetz n_2 der Fig. 6 ausgelöste Elektronen bedingt, aber nur ein Teil dieser Elektronen wird zum Auffänger hingezogen, ein anderer Teil wird in umgekehrter Richtung in den Stoßraum hinein beschleunigt durch die starke Spannung, die die vom Glühdraht kommenden Elektronen zurückwirft. Da die Schaltung meistens so ausgeführt ist, daß diese Bremsspannung der Primärelektronen immer um einige Volt höher ist als ihre Beschleunigungsspannung, so können die lichtelektrischen Elektronen schon eine Geschwindigkeit erreichen, die sie befähigt, Atome zu ionisieren, ehe die Primärelektronen die Ionisierungsspannung durchlaufen haben. Diese sekundäre Ionisation bewirkt eine Umkehr des Stromes, die je nach den Bedingungen bei verschiedenen Voltwerten liegt. Im Falle des Wasserstoffs (Dissertation Krüger) und im Falle des Quecksilbers (Dissertation Einsporn) haben wir den Umkehrpunkt je nach Wahl der Verhältnisse um mehrere Volt verschieben können. Die Lage der wahren Ionisierungsspannung markiert sich dabei immer an derselben Stelle durch den starken Zuwachs der Stromstärke. Wir werden auf diesen Einfluß der sekundären Ionisation noch einige Male zurückkommen müssen.

Die zweite Modifikation des Lenardschen Verfahrens verzichtet auf die qualitative Unterscheidung zwischen Lichtanregung und Ionisation und ersetzt sie durch Beobachtung der quantitativen Unterschiede zwischen diesen beiden Effekten, da die Ionisation viel stärkere Ströme liefert.

1) Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. Soc. London A. 98, 124, 1920.

(Fortsetzung folgt.)



BESPRECHUNGEN.

F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. Dreizehnte, stark vermehrte Auflage (43.—46. Tausend). Neu bearbeitet von H. Geiger, E. Grüneisen, L. Holborn, K. Scheel und E. Warburg. gr. 8⁰. XXVIII u. 724 S. m. 353 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1921. Gebunden M. 34.—. (Hierzu Teuerungszuschlag des Verlags 120 Proz.).

Trotz des stark vermehrten Inhaltes des Buches hat sein Umfang gegenüber der letzten Auflage etwas abgenommen. Das wurde erreicht durch Zusammenziehung verwandter Aufgaben und Fortlassung der geographischen Bestimmungen. Größere Umarbeitung erfuhren die Kapitel über Druckmessung (neu aufgenommen: Druckmessung aus der Reibung, aus der Radiometerwirkung und aus der Wärmeleitung), über Thermometrie (alle Temperaturangaben beziehen sich auf die reproduzierbare Skala der Reichsanstalt, die der thermodynamischen Skala sehr nahe kommt), über Kalorimetrie und über Strahlungsmessung. Der Abschnitt über Wechselströme ist stark vermehrt, ebenso der über Röntgenstrahlen, wo die Methoden zur spektralen Zerlegung ausführlich behandelt werden. Im Kapitel elektrische Schwingungen sind die Verstärkerröhren in den verschiedenen Schaltungen eingehend berücksichtigt. Die Messungen an ionisierten Gasen und die Radioaktivität sind bis zu den neuesten Resultaten fortgeführt.

Die Tabellen sind ergänzt. Als neu hinzugekommen ist eine Korrektionstabelle für Pentan-, Toluol- und Alkohol-Thermometer, ferner Tabellen für den spezifischen Widerstand von Isolatoren, für die Spannung der Metalle bezogen auf eine normale Wasserstoffelektrode, für das periodische System der Elemente, für die Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} für $x = 0$ bis $x = 6$ (von $x = 0$ bis $x = 1$ in Stufen von 0,01, von $x = 1$ bis $x = 6$ in Stufen von 0,1). Die alte Tabelle über die linearen Ausdehnungskoeffizienten, die spezifische Wärme, das Wärmeleitvermögen usw. für feste Stoffe ist auf das Doppelte vergrößert.

Wünschenswert dürfte es wohl sein, wenn in der nächsten Auflage eine Tabelle über die Ionisierungsspannungen und die Resonanzpotentiale aufgenommen würde.

Eine neue Auflage des „Kohlrausch", dieser conditio sine qua non des Physikers, bedarf wohl für den Leser dieser Zeitschrift keiner besonderen Empfehlung, besonders wenn sie wie die vorliegende 13. Auflage so bis zum letzten Stande der Wissenschaft weitergeführt ist.

Zu bemerken bleibt, daß trotz der Zeitumstände Papier und Druck ausgezeichnet sind. Edgar Meyer.

Berichtigungen

zu der Arbeit „Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt" von Friedrich Kottler[1]).

Bei der Revision der genannten Arbeit sind die folgenden Berichtigungen weggeblieben, die sich hingegen in den Sonderabdrücken bereits berücksichtigt finden:

1) Diese Zeitschr. **22**, 274—280, 1921.

Zu Nr. 4 auf S. 275 nach den Worten des Textes: „Unsere Voraussetzung der Unabhängigkeit der Längen von der stationären Beschleunigung trifft hier nicht zu, da die hier vorzunehmende Beschleunigung eine nicht stationäre ist". Anmerkung: Man beachte, daß die Fiktion der Starrheit mit dem Ehrenfestschen Paradoxon unverträglich ist.

Zu Nr. 4 auf S. 276 nach den Worten des Textes: „Diese Richtung ist mathematisch definiert durch die gerade Linie und diese wieder als kürzeste Verbindungslinie AB". Anmerkung: Die natürliche Geometrie auf der rotierenden Kreisscheibe ist nach Nr. 3 eine nichteuklidische Geometrie in einer euklidischen Ebene. Daher erscheinen ihre „Geraden" dem ruhenden Beobachter im allgemeinen krumm!

In Formel (5a) auf S. 279 hat es zu heißen:

$$\frac{\omega^2}{c^2 - x'^2\omega^2 - y'^2\omega^2} \quad \text{statt} \quad \frac{\omega^2}{c^2 - x'^2 + y'^2\omega^2}.$$

Auf S. 280 hat es statt $\tau(XYZT)$ zu heißen: $\tau(x'y'z't)$ und einige Zeilen tiefer nach der Formel

$$g_{14}dx' + g_{24}dy' + g_{44}dt = \lambda d\tau$$

ist einzuschalten: wo λ irgendein variabler Faktor ist.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Max Dehn in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt a. M.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer (infolge Eintritt in den Vorstand der Hartmann & Braun A.G. Frankfurt|Main).

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1921. 22. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 16 am 22. Juli 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Freie Schwingungen in Kondensatorkreisen.

Von Otto Emersleben.

Der Gedanke, ein drahtloses Ferngespräch dadurch zu führen, daß man auf den (Mikrophon-) Widerstand eines Stromkreises die Schwingungen der menschlichen Sprache überträgt, ist auf viele Arten[1]) ausgeführt worden. Es ist das aus dem Fernsprecher mit Draht in seiner gewöhnlichen Ausführung hervorgegangene Verfahren. Dagegen ist die Möglichkeit, durch Änderung der Kapazität eines Kondensators dasselbe Ziel zu erreichen, meines Wissens bisher noch nicht durchgeführt worden[2]). Herr Schanze hat auf Anregung von Herrn Professor Reich Versuche darüber im Institut für angewandte Elektrizitätslehre in Göttingen angestellt, über die er später berichten wird. Als ich auf Herrn Schanzes Bitte die dabei vorliegenden Verhältnisse durchdachte, kam ich zu der Überzeugung, daß zunächst die denkbar einfachsten Anordnungen einer theoretischen Klarlegung bedürften. In einem Beitrag zur Theorie der drahtlosen Telephonie, in dem Herr Pedersen[3]) zwei gekoppelte Schwingungskreise betrachtet (S. 476 ff.), sind infolge Auftretens einer Gleichung vierten Grades die Ergebnisse nicht mehr so einfach, daß sich die besonderen Merkmale des drahtlosen Fernsprechens in voller Schärfe ergäben. Daher will ich zunächst davon absehen, die Gesamterscheinung der drahtlosen Lautübertragung zu betrachten, sondern untersuche im folgenden das Verhalten eines einzelnen Schwingungskreises, wenn ich in ihm die Kapazität einer periodischen Veränderung unterwerfe. Gleichzeitig soll dieselbe Frage bei Veränderung des Widerstandes behandelt werden, da, soviel ich weiß, auch dies bisher noch nicht in ähnlicher Weise geschehen ist. Ein Vergleich wird wesentliche Verschiedenheiten zwischen den Wirkungen einer Widerstands- und einer Kapazitätsänderung ergeben.

1) Zenneck, Lehrb. d. drahtl. Telegraphie. 4. Aufl., S. 445 f. Stuttgart 1916.
2) Für das Fernsprechen mit Draht durch Kapazitätsveränderung liegen bereits einige Arbeiten vor.
3) Jahrb. d. drahtl. Telegraphie u. Telephonie 5, 449 ff., 1912.

Durch diese Vereinfachung gelange ich zu einer (im § 1 genau ausgedrückten) Fragestellung, die zwar der drahtlosen Telephonie ihre Anregung verdankt, da zur Fortentwicklung der Technik des drahtlosen Fernsprechens auf dem Wege der Widerstands- und Kapazitätsänderung ihre Beantwortung mir nötig erscheint, die aber andererseits auch an sich für den Physiker ein allgemeines Interesse haben dürfte; genau so wie der Thomsonsche Schwingungskreis, als dessen Verallgemeinerung sich meine Anordnung herausstellen wird, den theoretischen und Experimentalphysiker schon lange beschäftigt hatte, ehe die drahtlose Telegraphie entstand, die auf Thomsons Untersuchungen aufbaute.

§ 1. Die physikalische Fragestellung.

Gegeben sei ein Kondensatorkreis mit Kapazität C, Widerstand R und Selbstinduktion L der Strombahn[1]) (Fig. 1). Damit die Verhältnisse möglichst einfach bleiben und unsere Ergebnisse nicht durch Nebeneinflüsse getrübt werden, will ich noch dieselben Einschränkungen machen, die hier William Thomson den von ihm behandelten Schwingungskreisen auferlegte[2]):

1. Die Belegungen des Kondensators seien nur durch die dünne Schicht eines Isolators voneinander getrennt,

2. die Kapazität des Kondensators sei sehr groß gegenüber der des Schließungsdrahtes.

1) Zenneck, Lehrbuch, S. 1.
2) Drude-König, Physik des Äthers. 2. Aufl., S. 447 ff. Stuttgart 1912.

Ich will geradezu annehmen, die Kapazität des Drahtes sei o, die des Kondensators also C.

Was die praktische Durchführbarkeit dieser beiden sehr wichtigen Voraussetzungen, die ich in Zukunft als die Thomsonschen Bedingungen bezeichnen werde, anbetrifft, so sei bemerkt, daß die Erfüllung der ersten von ihnen auf keine Schwierigkeit stoßen wird. Ob auch die

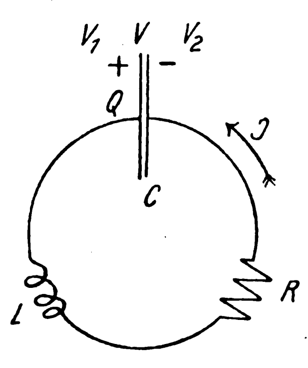


Fig. 1.

zweite Annahme erfüllt ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

Thomson nahm C, R und L als fest gegebene Größen an. Sei Q die auf der anfangs (d. h. zur Zeit $t = 0$) positiv geladenen Belegung des Kondensators vorhandene Ladung (Elektrizitätsmenge), $V = V_+ - V_-$ die Potentialdifferenz beider Kondensatorplatten, J die Stärke des Stroms, der von der anfänglich positiv geladenen Seite fließt, dann sind $Q(t)$, $V(t)$ und $J(t)$ Lösungen der Differentialgleichung für $y(t)$[1]:

$$L \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + R \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{y}{C} = 0, \quad L, R, C \text{ konstant.} \qquad (1)$$

Die Oszillationen, die bei nicht zu großem Widerstand[2]), $R^2 < \frac{4L}{C}$, auftreten, will ich als die Eigenschwingungen des Kondensatorkreises bezeichnen.

An die klassischen Ergebnisse Lord Kelvins anknüpfend, möchte ich jetzt seine Untersuchungen auf den Fall ausdehnen, daß R und C sich mit der Zeit ändern. Welche Gestalt wird dann die Differentialgleichung des Vorganges annehmen? Werden wieder Q, V und J derselben Gleichung genügen? Wird sie etwa genau die Gestalt (1) beibehalten, nur daß R und C jetzt Funktionen der Zeit sind? Um das Ergebnis des § 2 vorwegzunehmen: Die Elektrizitätsmenge wird einer Differentialgleichung der alten Form:

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R(t) \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C(t)} = 0 \qquad (2)$$

1) Drude, S. 449.
2) Drude, S. 450.

genügen; Spannung und Stromstärke werden durch andere Differentialgleichungen bestimmt, die wir aber nicht aufzustellen brauchen; denn aus Q folgt durch Division V, durch Differentiation J (Formeln 4 b, c).

Um aus (2) $Q(t)$ zu berechnen, nehme ich für C und R zunächst als besonders einfach an, daß diese Größen sich periodisch um einen kleinen Betrag verändern:

$$C(t) = C_0(1 + \varkappa \sin \alpha t) \qquad 0 \leqq \varkappa < 1, \quad (3a)$$
$$R(t) = R_0(1 + \lambda \sin \alpha t)^{1)}, \qquad 0 \leqq \lambda < 1. \quad (3b)$$

wo R_0 und C_0 positive Konstanten sind. L soll in der ganzen Arbeit konstant bleiben, wenn auch die physikalische Verwirklichung einer nach gegebenen Gesetzen veränderlichen Selbstinduktion auf keine wesentlichen Schwierigkeiten stößt. Die Widerstandsänderung (3b) ist leicht technisch zu verwirklichen, indem man von einem Mikrophon mit Widerstand R_0 ausgeht und diesen mit der Frequenz α zwischen den Grenzen $(1 + \lambda)\ R_0$ und $(1 - \lambda)\ R_0$ schwanken läßt. Ähnlich kann man bei Änderung der Kapazität vorgehen. Da ich unter Kapazität stets die Größe verstehe, der man diesen Namen beilegt, wenn auf dem Kondensator die Verhältnisse der Elektrostatik bestehen, so ist ihr Betrag umgekehrt proportional dem Abstand d der Platten. Lasse ich diesen Abstand zwischen dem $(1 - \varkappa)$ und $(1 + \varkappa)$ fachen Werte des ursprünglichen Betrages d_0 periodisch schwanken: $d = d_0(1 - \varkappa \cdot \sin \alpha t)$, so ändert sich die Kapazität wie:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 - \varkappa \cdot \sin \alpha t} \cdot \qquad (3a^*)$$

Dieser Wert weicht von (3a) erst in Gliedern von der Größenordnung $\varkappa^2$ ab, wird daher meist eine brauchbare Annäherung geben.

Das Hauptziel der Arbeit wird, um es noch einmal zusammenzufassen, die Beantwortung der Frage sein:

„Wie hängt die Ladung des Kondensators eines den Thomsonschen Bedingungen genügenden Schwingungskreises von der Zeit ab, wenn ich bei konstanter Selbstinduktion Widerstand und Kapazität nach (3) ändere?“

Für kleine Widerstände werden auch jetzt wieder Oszillationen auftreten, die ich als die freien Schwingungen des Kondensatorkreises bezeichnen will, so daß die Thomsonschen Eigenschwingungen des Kreises den Spezialfall $\varkappa = \lambda = 0$ dieser freien Schwingungen bedeuten. $\varkappa$ und λ werden stets so klein genommen werden, daß ich Glieder mit höherer als erster

1) Vgl. Herrn Pedersens Arbeit: l. c., S. 449.

Potenz in diesen Parametern vernachlässigen kann.

§ 2. Die Differentialgleichungen des Problems.

Das Gesamtverhalten unseres Schwingungskreises kann nur durch partielle Differentialgleichungen richtig beschrieben werden, deren vollständiger Integration unübersteigbare Hindernisse im Wege stehen. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die ich als Erweiterung von (1) suche, vernachlässigen alle Vorgänge, die im Dielektrikum außerhalb des Kreises stattfinden. Wir haben unsere Bedingungen so gewählt, daß diese Einflüsse fast verschwinden (geringer Abstand der Kondensatorplatten!). Immerhin müssen wir daran denken, daß Begriffe wie Selbstinduktion, Gesamtwiderstand eines Drahtstückes von stationären oder langsam veränderlichen Strömen entnommen sind[1]). Wenn so das Gebiet, in dem die abzuleitenden Differentialgleichungen unbedingte Gültigkeit haben, nicht zu groß genommen werden darf, ist es der Technik vielfach gelungen, durch Einführung von Zusatzgrößen, z. B. eines Zusatzwiderstandes, als Ersatz für Energieumsetzungen im umgebenden Nichtleiter, den Gültigkeitsbereich einer Formel so bedeutend zu erweitern, daß in den Händen eines geschickten Elektrotechnikers unsere Ergebnisse in ausgedehnten Fällen brauchbar bleiben werden.

So bitte ich es zu verstehen, wenn ich zum Beweise der Formel (2) von den drei Gleichungen:

$$J(t)R = -L \cdot \frac{dJ}{dt} + V, \tag{4a}$$

$$Q = C(t) \cdot V, \tag{4b}$$

$$J = -\frac{dQ}{dt} \tag{4c}$$

ausgehe, die man z. B. in Drudes Physik des Äthers, S. 448/49 findet. In der Anwendung dieser Beziehungen betrachtet Drude späterhin C als konstant, so daß die späteren Gleichungen, wo $\frac{dC}{dt} = 0$ gesetzt sind, für uns nicht mehr in Betracht kommen. Beim Beweis der Gleichungen (4a—c) ist von der Konstanz von R und C jedoch noch kein Gebrauch gemacht worden, so daß sie als mit der Zeit beliebig veränderlich angesehen werden dürfen. Aus (4c) folgt:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2},$$

daher gibt (4a):

$$-\frac{dQ}{dt} \cdot R(t) = L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + V.$$

Aus (4b) folgt für $C \neq 0$:

$$V = \frac{Q}{C(t)}, \tag{4d}$$

daher:

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R(t) \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C(t)} = 0. \tag{2}$$

Wenn daraus $Q(t)$ bekannt ist, folgen:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C(t)}; \tag{4d}$$

$$J(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}. \tag{4c}$$

§ 3. Die Lösung der Differentialgleichung.

Indem ich in (2) die Werte (3a) und (3b) von C und R einsetze, erhalte ich die Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} L\frac{d^2Q}{dt^2} + R_0\frac{dQ}{dt}(1 + \lambda \sin \alpha t) + \\ + \frac{Q}{C_0(1 + \varkappa \cdot \sin \alpha t)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Ich setze (6a) $\alpha t = x$, (6b) $Q(t) = y(x)$, dann ist:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot y';$$

es wird:

$$\alpha^2 L y'' + \alpha R_0 (1 + \lambda \sin x) y' + \\ + \frac{y}{C_0(1 + \varkappa \sin x)} = 0.$$

Durch die Abkürzungen (6c):

$$2\delta = \frac{R_0}{\alpha L} \text{ und (6d) } h = + \frac{1}{\alpha\sqrt{C_0 L}}$$

wird (5*) auf die einfachere Form gebracht:

$$y'' + 2\delta \cdot y'(1 + \lambda \sin x) + \frac{h^2 y}{1 + \varkappa \cdot \sin x} = 0. \tag{5}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten sich für alle Werte der komplexen Veränderlichen x analytisch verhalten mit Ausnahme der Punkte, in denen der auftretende Nenner verschwindet:

$$1 + \varkappa \cdot \sin x = 0. \tag{7}$$

Dort treten singuläre Stellen auf (Pole erster und für $\varkappa = \pm 1$ zweiter Ordnung). Da für uns nur Werte $0 \leq \varkappa < 1$ in Betracht kommen, und für reelle x $|\sin x| \leq 1$, verhalten sich die Koeffizienten von (5) für alle reellen x regulär. Nach bekannten Sätzen über Differentialgleichungen hat (5) für jedes Paar von Anfangswerten $y(0)$ und $y'(0)$ genau eine Lösung, die sich in der ganzen Ebene, höchstens mit Ausnahme der

1) Vgl. Sommerfeld, Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes. Ann. d. Phys. **67**, 235f., 1899.

singulären Stellen der Koeffizienten, d. h. der $\varkappa$-Werte, die (7) erfüllen, analytisch verhält. Die Lösung ist auch analytisch in den Parametern $\varkappa$ und λ[1]), kann also in eine Potenzreihe nach diesen Größen entwickelt werden. Da ich von der Lösung $y(x) \equiv 0$, die den Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$ entspricht, in Zukunft absehe, kann ich das Integral in der Form schreiben:

$$y(x) = e^{\int_0^x z(t)\,dt}. \qquad (8)$$

Dann ist:

$$y' = z(x) \cdot y; \quad y'' = (z^2 + z')\,y.$$

So ergibt sich die Differentialgleichung für $z(x)$:

$$z' + z^2 + 2\delta z \cdot (1 + \lambda \cdot \sin x) + \frac{h^2}{1 + \varkappa \cdot \sin x} = 0. \qquad (9)$$

Ich setze:

$$z = z_j(x) + \varkappa \cdot z_2(x) + \lambda z_3(x) + \bar{z}(x), \qquad (10)$$

wo $\bar{z}(x)$ λ und $\varkappa$ in mindestens zweiter Ordnung enthält, so daß ich es für kleine λ und $\varkappa$ vernachlässigen kann; die Lösung ist ja analytisch in $\varkappa$ und λ.

Die Substitution (8) ist so eingerichtet, daß sich aus dem klassischen Fall:

$$\varkappa = \lambda = 0$$

z_j als eine Konstante ergibt:

$$\left.\begin{aligned} z_j &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - h^2} & j &= 0, 1. \\ &= -\delta + i\Delta_j; & \Delta_j &= (-1)^j \sqrt{h^2 - \delta^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Für $\delta^2 < h^2$, d. h. $R_0^2 < \frac{4L}{C_0}$ stellt dies eine Schwingung dar. Bis auf eine willkürliche Konstante als Faktor und eine Phasenverschiebung ist in diesem Fall:

$$Q(t) = e^{-\frac{R_0}{2L} \cdot t} \cos \omega t \cdot \qquad (12)$$

Für die Frequenz $\omega > 0$ dieser Eigenschwingung gilt:

$$\omega^2 = \frac{1}{C_0 L} - \frac{R_0^2}{4L^2}. \qquad (13)$$

Auf diese bekannten Formeln werde ich nachher zurückgreifen.

a) $\lambda = 0 \quad 0 \leqq \varkappa < 1.$

Es genügt mir, zwei partikuläre Integrale von (9) zu kennen. Ich will jetzt $z_2(x)$ berechnen. Ich behaupte, ich kann es in der Form $z_2 = A_j \cos x + B_j \sin x$ schreiben, wo A und B konstant sind. Daß heißt, ich setze an für $\lambda = 0$:

$$z(x) = z_j + \varkappa (A_j \cos x + B_j \sin x) + \varkappa^2 \ldots \qquad (11\,\text{a})$$

1) Vgl. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. I. Bd., S. 14. Leipzig 1895.

Daraus:

$$z'(x) = \varkappa(-A_j \sin x + B_j \cos x) + \varkappa^2 \ldots$$

Die Differentialgleichung für $\lambda = 0$:

$$z' + z^2 + 2\delta \cdot z + \frac{h^2}{1 + \varkappa \cdot \sin x} = 0 \qquad (9\,\text{a})$$

multipliziere ich mit dem Nenner und setze (11a) ein. Die von $\varkappa$ freien Glieder verschwinden wegen (11) von selbst. Da oben bereits darauf hingewiesen wurde, daß z als Potenzreihe in $\varkappa$ darstellbar ist, genügt es zum Beweis der Behauptung, daß ich z_2 als lineare Funktion von $\cos x$ und $\sin x$ darstellen kann, ein Wertepaar A, B anzugeben, das den Faktor von $\varkappa$ zum Verschwinden bringt. Dieser Koeffizient ist:

$$-A \cdot \sin x + B \cdot \cos x + 2 z_j (A \cos x + B \sin x) + 2\delta (A \cos x + B \sin x) + z_j^2 \sin x + 2\delta z_j \sin x.$$

Er ist gleich Null, wenn die Faktoren von $\sin x$ und von $\cos x$ einzeln verschwinden, d. h. wenn:

$$\begin{cases} -A + 2(z_j + \delta) B + z_j^2 + 2\delta z_j = 0, \\ 2(z_j + \delta) A + B = 0, \end{cases}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} -A + 2i\Delta_j \cdot B &= h^2, \\ 2i\Delta_j A + B &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13\,\text{a})$$

Dies Paar linearer Gleichungen hat eine Lösung, wenn seine Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2i\Delta_j \\ 2i\Delta_j & 1 \end{vmatrix} = 4\Delta^2 - 1 \neq 0.$$

Es ist nach (11), (6) und (13):

$$\Delta^2 = h^2 - \delta^2 = \frac{1}{\alpha^2 C_0 L} - \frac{R_0^2}{4\alpha^2 L^2} = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2,$$

$$D = 4\Delta^2 - 1 = 4\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 - 1 \text{ ist } = 0$$

nur für $\alpha = 2\omega$.

Diese Lösung versagt daher nur, wenn die Frequenz, mit der ich die Kapazität ändere, gleich der doppelten Eigenfrequenz des Kreises ist. In allen anderen Fällen ist:

$$A_j = \frac{h^2}{D}; \quad B_j = \frac{-2\Delta_j \cdot h^2}{D} \cdot i \qquad j = 1, 2.$$

In den praktisch vorkommenden Fällen ist stets $\alpha < 2\omega$[1]). Daher gibt es stets (für $j = 0$ und $j = 1$ je) ein Wertepaar A_j, B_j, das (11a) erfüllt. Bis auf Glieder höherer Ordnung in $\varkappa$ ist also:

$$z(x) = -\delta + \Delta_j \cdot i + \frac{\varkappa}{D} h^2 (\cos x - 2\Delta_j i \sin x)$$

ein Integral von (9a).

Aus (8) $y(x) = e^{\int_0^x z(t)\,dt}$ folgt, wenn ich Reelles und Imaginäres trenne:

1) Vgl. § 4, Fußnote 1.

$$y_j = e^{-\delta x + \varkappa \cdot \frac{h^2}{D} \cdot \sin x} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \cos \varDelta_0 \left[x + 2\varkappa \frac{h^2}{D} (\cos x - 1) \right] + \right.$$
$$\left. + i(-1)^j \sin \varDelta_0 \left[x + 2\varkappa \cdot \frac{h^2}{D} (\cos x - 1) \right] \right\} \cdot$$

Es ist, wenn wir uns der früheren Substitutionen erinnern:

$$\delta x = \delta \alpha t = \frac{R_0}{2L} t \qquad \varDelta_0 x = \frac{\omega}{\alpha} \cdot \alpha t = \omega t.$$

Ich setze:

$$F_\varkappa = \frac{h^2}{D} = \frac{1}{\alpha^2 C_0 L \left(4 \frac{\omega^2}{\alpha^2} - 1\right)} = \frac{1}{C_0 L (4\omega^2 - \alpha^2)}. \tag{14}$$

Wenn dann Q_0 und φ Integrationskonstanten sind, hat bei festem Widerstand und veränderlicher Kapazität die Elektrizitätsmenge den zeitlichen Verlauf:

$$\left. \begin{array}{l} Q_\varkappa(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{R_0}{2L} t + \varkappa F_\varkappa \sin \alpha t} \cdot \\ \cdot \cos \left[\omega t + 2\varkappa F_\varkappa \cdot \frac{\omega}{\alpha} (\cos \alpha t - 1) + \varphi \right] \cdot \end{array} \right\} \tag{15a}$$

b) $\varkappa = 0 \quad \lambda \gtreqless 0.$

Um $z_3(x)$ zu berechnen, gehe ich aus von der Differentialgleichung für $\varkappa = 0$:

$$z' + z^2 + 2\delta z \cdot (1 + \lambda \sin x) + h^2 = 0. \tag{9b}$$

Ähnlich wie im Fall (a) setze ich jetzt:

$$z_3(x) = A_j \cos x + B_j \sin x.$$

Ein Nenner braucht diesmal nicht beseitigt zu werden. Im übrigen verlaufen die Rechnungen genau wie vorhin, ich begnüge mich daher diesmal mit Angabe des Ergebnisses:

$$D \cdot A_j = 2\delta^2 - 2\delta \varDelta_j i.$$
$$D \cdot B_j = -4\delta \varDelta^2 - 4\delta^2 \varDelta_j i.$$

Bis auf Glieder höherer Ordnung in λ ist:

$$z(x) = -\delta + \varDelta_j i + \lambda \cdot \frac{2\delta}{D} (\delta \cos x - 2\varDelta^2 \sin x)$$
$$+ \lambda \frac{2\delta}{D} \cdot \varDelta_j i (-\cos x - 2\delta \sin x).$$

Von y_j schreibe ich diesmal nur den reellen Teil:

$$\Re(y) = e^{-\delta x + \frac{2\lambda\delta}{D} [\delta \sin x + 2\varDelta^2 (\cos x - 1)]}$$
$$\cdot \cos \varDelta_0 \left[x + \frac{2\lambda\delta}{D} (-\sin x + 2\delta (\cos x - 1)) \right] \cdot$$

Jetzt, bei fester Kapazität und veränderlichem Widerstand, hat die Elektrizitätsmenge den Verlauf:

$$\left. \begin{array}{l} Q_\lambda(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{R_0}{2L} t + \lambda F_\lambda \sin(\alpha t + \psi) - \lambda \cdot G} \\ \cdot \cos [\omega t + \lambda (H \cos (\alpha t - \chi) - K) + \varphi], \end{array} \right\} \tag{15b}$$

wo:

$$\left. \begin{array}{l} F_\lambda = \frac{R_0}{L(4\omega^2 - \alpha^2)} \sqrt{\left(2 \frac{\omega^2}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{R_0}{2L}\right)^2}; \\ G = \frac{2 R_0}{\alpha L \left(4 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)}; \\ \operatorname{tg} \psi = \frac{4\omega^2 L}{\alpha R_0} \qquad -\frac{\pi}{2} < \psi \leqq \frac{\pi}{2}; \\ H = \frac{\omega R_0}{L(4\omega^2 - \alpha^2)} \sqrt{\left(\frac{R_0}{\alpha L}\right)^2 + 1}; \\ \operatorname{tg} \chi = \frac{\alpha L}{R_0} \qquad -\frac{\pi}{2} < \chi \leqq \frac{\pi}{2}; \\ K = \frac{R_0^2 \omega}{L^2 \alpha (4\omega^2 - \alpha^2)}. \end{array} \right\} \tag{16}$$

c) $\varkappa \neq 0; \ \lambda \neq 0.$

Bei gleichzeitiger Änderung von Kapazität und Widerstand werden sich die Wirkungen der reinen Kapazitäts- und der reinen Widerstandsänderung überlagern, da ich nur die ersten Potenzen von $\varkappa$ und λ berücksichtige.

§ 4. Die Elektrizitätsmenge.

Die Werte für $Q_\varkappa$ und Q_λ des vorigen Abschnittes vereinfachen sich bedeutend, wenn wir zwei Annahmen machen, die in der Praxis stets erfüllt sind.

Es sei die Frequenz, mit der ich Widerstand oder Kapazität ändere, sehr klein gegenüber der Eigenfrequenz des Kondensatorkreises und der Widerstand klein genug. In Formeln:

$$\alpha^2 \ll (2\omega)^2 \text{ [1]}, \tag{17a}$$

$$R_0^2 \ll \frac{4L}{C_0}. \tag{17b}$$

Aus (13) und (17b) folgt, daß angenähert:

$$\omega^2 = \frac{1}{C_0 L}.$$

Bei den folgenden Formeln lasse ich einfache Zwischenrechnungen wieder weg. Es wird dann angenähert:

$$F_\varkappa = \tfrac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_\varkappa(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{R_0}{2L} t + \frac{\varkappa}{4} \sin \alpha t} \\ \cos \left[\omega t - \varkappa \frac{\omega}{2\alpha} (1 - \cos \alpha t) + \varphi \right] \cdot \end{array} \right\} \tag{18a}$$

Ein Vergleich mit der Thomsonschen Formel ($\varkappa = 0$) zeigt, daß hier wie dort Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω auftreten, über die sich bedeutend langsamere mit der Frequenz α der

1) Sei die Eigenfrequenz eines Kreises, wie er in der drahtlosen Telegraphie benutzt wird, z. B. $\omega = 10^6$. Die Frequenz der menschlichen Stimme ist im ungünstigsten Falle $\alpha = 2 \cdot 10^4$. Selbst dann ist $(\alpha : 2\omega)^2 = 10^{-4}$ gegen 1 zu vernachlässigen.

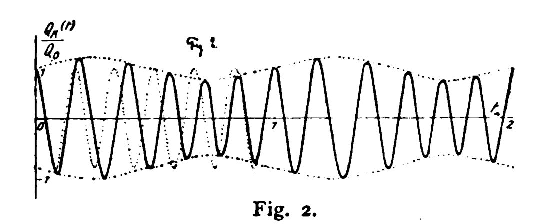


Fig. 2.

Kapazitätsänderung lagern. Diese machen sich auf doppelte Weise bemerkbar (vgl. Fig. 2!):

1. Die Amplitude der Schwingung multipliziert sich ständig mit dem Faktor $e^{\frac{\varkappa}{4}\cdot \sin \alpha t}$, genähert $=\left(1+\frac{\varkappa}{4}\cdot \sin \alpha t\right)\cdot$ Die Amplitude der Schwingung schwingt selbst wieder, und zwar mit einer Amplitude, die das $\frac{\varkappa}{4}$ fache der Gesamtamplitude ist. Proportionalität mit $\varkappa$ war von vornherein zu erwarten. Daß aber im übrigen ein Faktor $\frac{1}{4}$ auftritt, derselbe bei allen Kondensatorkreisen unabhängig von R_0, L, C_0 und auch unabhängig von α, zeichnet die Kapazitätsänderung vor der Widerstandsänderung aus.

2. Die Nullstellen (Knoten) der Schwingung, d. h. die Stellen, an denen:

$$\omega\left(t-\frac{\varkappa}{2\alpha}(1-\cos \alpha t)\right)$$

ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, treten um die Zeit $\varkappa\cdot\frac{1-\cos \alpha t}{2\alpha}$ später auf als bei gewöhnlicher gedämpfter Schwingung.

Fig. 2 soll dies Verhalten an einem Beispiel veranschaulichen[1]).

Die Größen, die in der Formel für Q_λ auftreten, vereinfachen sich nicht ganz so stark. Es wird genähert:

$$\left.\begin{aligned} G&=\frac{R_0}{2\alpha L}\cdot\\ \text{Weiter wird:}&\\ F_\lambda&=G,\\ \psi&=\frac{\pi}{2},\\ \operatorname{ctg}\chi&=2G,\\ H&=\frac{G}{2}\cdot\frac{\alpha}{\omega}\sqrt{(2G)^2+1},\\ K&=\frac{\alpha}{\omega}\cdot G^2. \end{aligned}\right\} \quad (16^*)$$

1) Es wurde gesetzt: $\varkappa=\frac{4}{15}\pi$; $\alpha=2\pi$; $\omega=12\pi$. (Für diese noch nicht sehr kleinen Werte von $\varkappa$ und $\frac{\alpha}{\omega}$ entschied ich mich um der Deutlichkeit der Zeichnung willen.) $R_0=0$. Zum Vergleich ist die dem Werte $\varkappa=0$ entsprechende Sinuskurve punktiert mit eingezeichnet. Strich-punktiert: Kurve der Amplitudenschwankungen.

Die Größe G, die hier überall auftritt, hängt nicht nur von den Konstanten des Kondensatorkreises, sondern auch noch von der Frequenz α ab. Die Amplitude von $Q_\lambda(t)$ ist:

$$Q_0\cdot e^{-\frac{R_0}{2L}t+\lambda\cdot\frac{R_0}{2\alpha L}(\cos \alpha t-1)}. \qquad (18\text{b})$$

Auch hier schwankt infolge Veränderung des Widerstandes die Amplitude, sie verkleinert sich um den Faktor:

$$\left[1-\lambda\cdot\frac{R_0}{2\alpha L}(1-\cos \alpha t)\right]\cdot$$

Doppelt so hohe Frequenz α hat nur halbe Wirkung! Ist der Widerstand ein Mikrophon, das durch die Sprache in Bewegung gesetzt wird, so hat ein hoher Ton eine geringere Wirkung auf die Amplitudenänderung der Schwingung der Elektrizitätsmengen. Genauer wirkt die Oktave nur halb so stark wie der Grundton. Bei Änderung der Kapazität treten derartige Unterschiede bei verschiedenen Tonhöhen nicht auf. Da man bestrebt sein wird, den Widerstand möglichst klein zu wählen, wird meist:

$$\frac{R_0}{2\alpha L}<\frac{1}{4}$$

sein, so daß die relative Widerstandsänderung λ größer als die relative Kapazitätsänderung $\varkappa$ genommen werden muß, um dieselbe Wirkung auf die Schwingung der Elektrizitätsmenge zu erhalten. Damit die Wirkung beidemal dieselbe ist, muß sich verhalten:

$$\varkappa:\lambda=2R_0:\alpha L.$$

§ 5. Die Spannung.

Es ist (4b) $Q=C\cdot V$.

Daher ist bei veränderlichem Widerstand:

$$V_\lambda=\frac{Q_\lambda}{C_0}\cdot \qquad (19\text{b})$$

Der konstante Faktor C_0 bewirkt, daß für die Spannung bei veränderlichem Widerstand genau das gilt, was oben für Q_λ gesagt wurde. Ladung und Spannung stimmen bis auf den Faktor C_0 überein.

Bei veränderlicher Kapazität ist:

$$V_\varkappa=\frac{Q_\varkappa}{C_0(1+\varkappa\cdot\sin \alpha t)}\cdot \qquad (19\text{a})$$

Die Amplitude von $Q_\varkappa$ ändert sich bei Kapazitätsveränderung um den Faktor $e^{\frac{\varkappa}{4}\cdot\sin \alpha t}\cdot$ Die Spannungsschwingung wird daher in ihrer Amplitude um den Faktor:

$$\frac{e^{\frac{x}{4}\cdot\sin\alpha t}}{1+x\cdot\sin\alpha t}, \text{ d. h. } (1-\tfrac{3}{4}x\sin\alpha t)$$

geändert. Auch hier behält das oben für die Elektrizitätsmenge Gesagte volle Gültigkeit, statt des Faktors $\frac{1}{4}$ tritt jetzt der noch absolut größere Faktor $-\frac{3}{4}$ auf. Auch diese Zahl ist unabhängig von der Frequenz α, so daß bei verschiedenen Tonhöhen das Stärkeverhältnis im Einfluß der einzelnen Töne erhalten bleibt. In diesem Fall haben wir gleiche Wirkung auf die verhältnismäßige Amplitudenveränderung, wenn sich verhält:

$$x:\lambda = 2R_0 : 3\alpha L.$$

§ 6. Nicht rein-sinusförmige Änderungen.

Es ist bisher immer nur von einer Änderung der Kapazität oder des Widerstandes um einen Faktor $1+x\sin\alpha t$ gesprochen worden. Man sah, es entsprach dieser Einwirkung in der Änderung der Spannungsamplitude als „Bild" ein Faktor:

a) $1-\frac{3}{4}\cdot x\cdot\sin\alpha t$ bei Kapazitätsänderung,

b) $1-x\frac{R_0}{2L}\cdot\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha} = 1-x\frac{R_0}{2L}\int\limits_0^t \sin\alpha x\,dx$

bei Widerstandsänderung.

Wird jetzt nicht mehr rein sinusförmige Änderung angenommen, sondern eine solche um den Faktor $1+f(t)$, wo $f(t)$ eine klein bleibende periodische Funktion der Gestalt:

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \sin\nu\alpha t$$

ist, so ist das „Bild" im Fall:

a) der Faktor $1-\frac{3}{4}f(t)$,

im Fall:

b) der Faktor $1-\frac{R_0}{2L}\int\limits_0^t f(x)\,dx$[1]).

Wie man sieht, gibt die Kapazitätsveränderung das Bild auf $\frac{3}{4}$ der ursprünglichen Größe verkleinert (nicht in absoluter Größe, sondern als Verhältnis der Amplituden zu verstehen!), sonst aber getreu wieder, während bei Widerstandsänderung eine Verzerrung eintritt, die bei großen Frequenzunterschieden beträchtlich werden kann. Dies ist die Wirkung auf die Spannung des Kondensatorkreises. Wie die Stromstärke beeinflußt wird, ist in dieser Arbeit nicht untersucht worden, wohl aber sind die Formeln für $Q_x(t)$ und $Q_\lambda(t)$ abgeleitet (18a) und (15b), dazu (16*), aus denen durch Differentiation:

$$J = -\frac{dQ}{dt}$$

1) Beweis: die in x linearen Glieder überlagern sich, quadratische und höhere Glieder werden vernachlässigt.

gebildet werden kann. Hier wurde von einer eingehenden Untersuchung der Stromstärke abgesehen, da die Ergebnisse nicht so charakteristisch sind wie bei Ladung und Spannung, sofern ich außer meinen beiden Bedingungen (17a) und (17b), die ja allgemein erfüllt zu sein pflegen, nicht noch wesentliche Einschränkungen machen will. Die Stromstärke selbst spielt aber auch nicht eine so große Rolle in der Technik der Schwingungen wie die Spannung und vor allem die Ladung. Wohl geht man vielfach von dem Begriff der Stromstärke aus, aber die aus ihr gebildete Funktion, die in der Meßtechnik die größte Bedeutung besitzt, ist $\int J(t)\,dt$, das ist aber wegen (4c) $= -Q$, also bis auf das Vorzeichen gerade die Ladung.

Ergebnisse.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Verallgemeinerung des bekannten Thomsonschen Schwingungskreises: Kapazität und Widerstand sind nicht mehr konstant, sondern ändern sich mit der Zeit. Während bei Thomson Ladung, Spannung und Stromstärke ein und derselben Differentialgleichung genügen, ist dies in dem von mir betrachteten allgemeineren Kondensatorkreise nicht mehr so. Aber die Ladung genügt noch einer Differentialgleichung, die aus der ursprünglichen Thomsonschen entsteht, indem formal C und R durch $C(t)$ und $R(t)$ ersetzt werden. (Übrigens erfüllt bei fester Kapazität auch die Spannung noch dieselbe Differentialgleichung.) Die Differentialgleichung der Ladung habe ich in gewissen wichtigen Fällen angenähert integriert, die Spannung daraus berechnet und den Weg zur Bestimmung der Stromstärke angegeben.

Es werde die Kapazität um den Faktor:

$$1+x\sin\alpha t,$$

der Widerstand um den Faktor:

$$1+\lambda\sin\alpha t$$

bei kleinem x und λ mit Frequenz α periodisch geändert, die klein ist gegenüber der Eigenfrequenz ω des Schwingungskreises. Wie bei den Thomsonschen Eigenschwingungen treten auch bei uns bei kleinem Widerstande Schwingungen der Ladung, Spannung und Stromstärke um den Wert 0 auf. Die Zeiten, die zwischen zwei Nullagen (Knoten) verstreichen, ändern sich jetzt periodisch. Auch die Amplituden der Schwingung schwingen selbst mit der Zeit. Dies Ergebnis dürfte praktisch besonders wichtig sein, da in der drahtlosen Technik gerade die Amplituden der Schwingung beachtet werden. Um es deutlich zusammenzufassen, führe ich eine Bezeichnung ein: Wenn Kapazität oder Widerstand um den Faktor $1+f(t)$ geändert werden,

so mag sich daraus eine Änderung der Amplitude der Schwingung (von Ladung, Spannung oder Stromstärke) um den Faktor $1 + g(t)$ ergeben. Ich will dann $g(t)$ als das durch diese Übertragung erhaltene Bild der Funktion $f(t)$ bezeichnen.

Ist $f(t)$ irgend eine Reihe aus lauter Sinusgliedern, deren absoluter Betrag klein gegen 1 bleibt, so ist bei Kapazitätsänderung das Bild von $f(t)$ in bezug auf die Ladung $\frac{1}{4} f(t)$, in bezug auf Spannung $-\frac{3}{4} f(t)$, also zwar etwas verkleinert, sonst aber das getreue Abbild der gegebenen Änderung. Wesentlich ist, daß der Maßstab der Verkleinerung nicht nur von $f(t)$, sondern auch von den Größen des Stromkreises unabhängig ist.

Bei Widerstandsänderung ist das Bild von $f(t)$ auf Ladung und Spannung dasselbe, nämlich:

$$-\frac{R_0}{2L} \cdot \int_0^t f(x)\, dx.$$

Der Maßstab dieser Änderung hängt einmal vom Verhältnis Widerstand : Selbstinduktion des Kreises ab, im übrigen tritt im Bilde die Funktion $f(t)$ nicht selbst, sondern ihr Integral auf. Wozu das führt, mag ein Beispiel zeigen: Wenn ich von zwei rein sinusförmigen Schwingungen ausgehe, deren zweite die n fache Frequenz der ersten hat, so wird diese im Bild nur $\frac{1}{n}$ mal so stark zum Ausdruck kommen wie die erste. Es tritt also in gewissem Sinne eine unter Umständen erhebliche Verzerrung des Bildes auf — ganz im Gegensatz zur Kapazitätsänderung.

Am Schluß meiner Ausführungen möchte ich Herrn Grandjot für die Sorgfalt danken, mit der er die Formeln nachgerechnet hat.

Göttingen, im Mai 1921.

(Eingegangen 10. Juni 1921.)

Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome.

(Antwort an Herrn L. Vegard.)

Von Adolf Smekal.

Herr Vegard wählt in seinen Bemerkungen[1]) zu meiner Notiz[2]) über den obigen Gegenstand den Ausdruck, ich hätte ihm „um eine Basis für meinen Aufsatz zu schaffen" gewisse „Ansichten zugeschrieben", mit denen er sich nicht einverstanden erklären könne.

1) L. Vegard, diese Zeitschr. **22**, 271, 1921.
2) A. Smekal, diese Zeitschr. **21**, 505, 1920.

Ich will, um mich der Notwendigkeit einer energischen Zurückweisung dieser Form wissenschaftlicher Polemik zu überheben, lieber annehmen, daß Herr Vegard infolge seiner mangelhaften Kenntnis der deutschen Sprache die Bedeutung dieser Ausdrucksweise bei uns nicht ganz richtig einzuschätzen vermag. —

Zunächst kann ich mit großer Befriedigung feststellen, daß Herr Vegard kein einziges Argument gegen meine Beweisführung der Unzulänglichkeit der Elektronenringvorstellung gefunden hat, daß in irgendeiner Weise exakt mathematisch fundiert wäre. Ich habe entgegen seiner diesbezüglichen, ohne jeden Beleg aufgestellten Behauptung sämtliche möglichen Störungen eines ebenen kreisförmigen Elektronenringsystems berechnet, bis auf die magnetischen, deren Einfluß man vorläufig überhaupt bloß abschätzen kann (dies findet sich in meinen Arbeiten[1]) auch ausdrücklich angegeben). Insbesondere hätte sich Herr Vegard aber auch leicht selbst davon überzeugen können, daß der Effekt der von ihm besonders hervorgehobenen Energieänderungen außerhalb des „Rekombinationsbereiches" im Falle einer „Rekombination von Primärkreisen" vernachlässigbar klein ist; für den Fall der „Rekombination von Sekundärkreisen" ist das Resultat z. B. für K_α in einer früheren Arbeit[2]), auf die ich Herrn Vegard bereits in meiner Notiz aufmerksam gemacht habe, exemplifiziert und gezeigt, daß es auch nicht die Elektronenringvorstellung zu retten vermag.

Herr Vegard meint nun, daß die Erklärung der Unterschiede seiner bloß auf der Annahme *ebener* Elektronenringanordnungen beruhenden Formeln von den Messungsergebnissen noch eine offene Frage sei, „deren Aufklärung wohl in einer Änderung der dynamischen Spezifikation der Elektronensysteme zu suchen sei." In meiner von Herrn Vegard *allein zitierten Notiz* hatte ich naturgemäß keinen Anlaß, einen allgemeineren als den von ihm allein behandelten Fall zu diskutieren. Wir wollen also zunächst seine Änderungsvorschläge besprechen, soweit sie zur Rettung der Ringvorstellung dienen sollen. Es werden diesbezüglich, *ohne den geringsten Versuch zu rechnerischer Behandlung dieser Fälle*, folgende Möglichkeiten genannt: 1. Abweichungen vom Coulombschen Gesetze. 2. Gegenseitige Neigung der Elektronenringe. 3.

1) A. Smekal, Wien. Ber. **128** (2a), 639, 1919; **129** (2a), 635, 1920.
2) F. Reiche u. A. Smekal, Ann. d. Phys. **57**, 124, 1918.

Drehung der Ringe gegeneinander. Gegen Fall 1 liegt mehr als ein triftiger Grund vor, trotzdem habe ich ihn behandelt[1]) und gezeigt, daß er die zum ersten Male von Kossel[2]) sichergestellte Zweizahl der K-Elektronen aus K_α auf Grund der Ringvorstellung nicht ergeben kann. Fall 2 wurde von Reiche und mir[3]) einerseits, Sommerfeld[4]) anderseits behandelt und führt ebenfalls bloß zu negativen Resultaten. Fall 3 wurde zuerst von Reiche und mir[5]) erwähnt und sein Einfluß auf die Röntgenlinienformeln besprochen. Alle von Herrn Vegard zur Rettung der Ringvorstellung genannten Abänderungsvorschläge wurden also bereits früher von mir diskutiert und — soweit angängig — einer rechnerischen Behandlung unterzogen. Meine Ablehnung der Ringvorstellung war daher von vornherein auf jene Basis gestellt, die Herr Vegard in seinen „Bemerkungen" jetzt als bezüglich der Ringvorstellung in Frage kommend, auseinandersetzt und nur seiner Literaturunkenntnis kann es zugeschrieben werden, daß diese Dinge in solchem Zusammenhange nochmals zur Sprache gekommen sind.

Daß es selbstverständlich ausreichend ist, zur Ablehnung der Ringvorstellung bloß kreisförmige Ringzustände zu betrachten, erwähne ich hier bloß deshalb, weil Herr Vegard besonderen Wert darauf legt, daß er das Wort „elliptischer Zustand"[6]) eines Ringes als Erster im Gebiete der Röntgenspektren verwendet hat und weil damit zugleich gesagt ist, daß das numerisch keineswegs einfache Problem der gegenseitigen Störungen zweier in elliptischen Zuständen befindlicher Ringe hier ganz ohne Belang bleibt.

Herr Vegard beschäftigt sich schließlich auch noch mit der von mir aus Störungsgründen abgelehnten Annahme einer „Rekombination von Sekundärkreisen" beim Emissionsvorgang. Nachdem es mir kürzlich gelungen ist zu zeigen, daß das Kombinationsprinzip bei allen Röntgenlinien exakt gültig ist, sofern man nur die Linien zutreffend interpretiert[1]), ist die von Herrn Vegard versuchte Erklärung der Abweichungen von den Kosselschen Beziehungen auf Grund dieser Annahme unrichtig, so daß dieser Punkt also noch aus einem zweiten viel allgemeineren Grunde erledigt ist. Bezüglich des K_β-Kombinationsdefektes hätte dies Herrn Vegard zur Zeit der Abfassung seiner „Bemerkungen" übrigens bereits selbst bekannt sein können, da die richtige Interpretation von K_β bereits vor Jahresfrist unabhängig von Kossel[2]) und von Duane und Stenström[3]) angegeben worden ist.

Soweit endlich Herr Vegard seinen Vorschlag auf „Änderung der dynamischen Spezifikation der Elektronensysteme" unter Aufgabe der Ringvorstellung auf die „Annahme eines dreidimensionalen kinematischen Bildes für die Elektronenbahnen" bezieht, befindet er sich völlig auf dem Gebiete meiner Folgerungen. Von den Born-Landéschen Arbeiten habe ich in meiner Notiz nur gesagt, daß sie die Notwendigkeit der räumlichen Atommodelle sichergestellt haben; jede weitere von Herrn Vegard an die Erwähnung dieser Arbeiten anschließende Kritik betrifft also nicht den Inhalt meiner Notiz. Daß die Landéschen Modelle sich in der Theorie der Röntgenspektren nicht verwenden lassen, habe auch ich gefunden und stehe daher nicht an, Herrn Vegard in diesem einzigen — und zwar außerhalb der Frage nach der Ringvorstellung und dem Inhalt meiner Notiz stehenden Punkte recht zu geben. —

Bezüglich der Leistungen seiner Theorie gibt Herr Vegard nunmehr zu, daß der von ihm erzielte Grad der Übereinstimmung[4]) mit der Erfahrung nicht zu dem Schlusse berechtigt, daß „es kaum mehr möglich ist, daran zu zweifeln, daß die zugrunde liegende Voraussetzung auch der Wirklichkeit entspricht", wenigstens soweit unter dieser „Voraussetzung" komplanare Ringsysteme verstanden, werden können. Aber er scheint die qualitative

1) A. Smekal, Mitteil. Ra-Inst. Nr. 129, Wien. Ber. **129** (2a), 455, 1920; § 5.

2) W. Kossel, Zeitschr. f. Phys. **2**, 470, 1920.

3) F. Reiche u. A. Smekal, l. c. und Die Naturwissenschaften **6**, 304, 1918.

4) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **19**, 297, 1918.

5) F. Reiche u. A. Smekal, l. c.; A. Smekal, Wien. Ber. **127** (2a), 1229, 1918, § 4.

6) Von einer rechnerischen Behandlung dieser auch von anderen benutzten (übrigens unzutreffenden) Vorstellung durch Herrn Vegard ist mir nichts bekannt, obwohl Herr Vegard diese Annahme als wesentlichen Zug seiner Theorie bezeichnet: „. . . meine Arbeit über die Erklärung der Röntgenspektren . . . würde . . . gewiß nichts bedeuten . . . . . ."

1) A. Smekal, Wien. Ber. **130** (2a), 25, 1921 (Sitzung vom 10. Februar 1921); Zeitschr. f. Phys. **5**, 91, 121, 1921. Zu fast übereinstimmenden Ergebnissen kommt jüngst A. Dauvillier, C. R. **172**, 1350, 1921.

2) W. Kossel, Zeitschr. f. Phys. **1**, 119, 1920.

3) W. Duane u. W. Stenström, Proc. Nat. Acad. **6**, 477, 1920.

4) Die Behauptung von Herrn Vegard, es sei „sinnlos", etwa aus $K\alpha$ auf die Besetzungszahl des L-„Ringes" zu schließen, weil eine Änderung der letzteren um eine Einheit Änderungen der berechneten Frequenzen von der Größenordnung der Meßfehler verursache, ist unzutreffend, wie man sich z. B. auf Grund der Tabelle II der Krooschen Arbeit (diese Zeitschr. **19**, 307, 1918) überzeugt. Noch viel günstiger liegt die Sache natürlich bezüglich der Siegbahn-Hjalmarschen Präzisionsmessungen.

Wiedergabe des Verlaufes der Hauptlinien mittels der falschen Elektronenbesetzungszahlen $p_1 = 3$, $p_2 = 7$ für einen immerhin wertvollen Zug seiner Theorie anzusehen. Demgegenüber muß betont werden, daß die Ursache dieser qualitativen Übereinstimmung wesentlich durch die vor Herrn Vegards Untersuchungen von Sommerfeld[1]) konstatierte Wasserstoffähnlichkeit der Hauptlinien, sowie die von ihm festgestellte Einquantigkeit des K-, Zweiquantigkeit des L-Terms, usw. bedingt wird. Sieht man von der erledigten Ringvorstellung ab, so gehen die von Herrn Vegard in seiner Theorie gemachten, rechnerisch verwerteten Annahmen in keiner Weise über Kossels frühere Ergebnisse und Sommerfelds Feststellungen von 1916 hinaus, ohne ein der relativistischen Deutung des L-Dubletts gleichwertiges Moment zu enthalten. Insbesondere die Form, in der Herr Vegard in seinen „Bemerkungen" die Grundgleichungen seiner Theorie schreibt, sind nichts anderes als ein adäquater Ausdruck der Kosselschen Vorstellungen vom Emissionsmechanismus der Röntgenlinien, ergänzt durch die, wie wir heute wissen, ganz unzutreffende Annahme, daß die gegenseitigen Störungen der Elektronenschalen (Herr Vegard gebraucht den weniger kennzeichnenden Ausdruck „Elektronensysteme") in erster Annäherung vernachlässigbar klein sind. —

Im Hinblick auf obige Besprechung von Herrn Vegards Kritik meiner oben erwähnten Notiz, halte ich mich für berechtigt, meine dortigen Folgerungen in vollem Umfange aufrecht zu erhalten und hoffe, daß sich Herr Vegard hiervon bei genauerer Einsichtnahme in die Literatur selbst überzeugen wird. Allerdings sind die hier notgedrungen nochmals besprochenen Fragen heute bereits völlig uninteressant. Herr Bohr ist in einer neuen fundamentalen Arbeit, von der bisher leider erst eine Übersicht über die erhaltenen, weitreichenden Resultate erschienen ist, zu einem genaueren Einblick in den Aufbau und die Dynamik der Elektronenhülle der Atome gelangt, welcher allem Anschein nach es ermöglichen wird, eine brauchbare Modelltheorie der Röntgenspektren zu liefern. Gegenüber diesen positiven Ergebnissen, in deren Gefolge die Unmöglichkeit der Ringvorstellung mittels des Korrespondenzprinzipes in wesentlich eleganterer und einfacherer Weise erschlossen worden ist, als in meinen früheren Arbeiten, haben die damaligen umständlichen, im wesentlichen nur zu negativen Aussagen führenden Betrachtungen jetzt das meiste Interesse verloren.

Wien, II. Physikalisches Institut der Universität, Juni 1921.

(Eingegangen 20. Juni 1921.)

[1]) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 125, 1916.

Bemerkung zur Ostwaldschen sogenannten Farbentheorie.

(Zu O. Meißners Aufsatz: „Kalorimetrische Untersuchungen. VII".)

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

Auf S. 268, 1921 dieser Zeitschrift bespricht O. Meißner einige der Einwände, die von mir gegen die Ostwaldsche sog. Farbenlehre erhoben wurden[1]). O. Meißner vermutet eine mißverständliche Auffassung meinerseits und erklärt sich dies aus meiner Unkenntnis des Ostwaldschen Buches „Physikalische Farbenlehre". In der Tat war mir dieses Buch unbekannt und ist es auch heute noch; wenn ich aber bedenke, daß ich bisher in 32 verschiedenen Aufsätzen in Denkschriften, Akademieberichten, Zeitschriften usw. die Farbenlehre dargestellt gefunden habe, so gebe ich die Hoffnung auf, in einer 33. Fassung etwas Neues zu finden, wenn in den 32 andern Aufsätzen immer dasselbe steht.

Auf O. Meißners „Gegenbeweise" näher einzugehen bin ich nicht in der Lage; ich halte eine Diskussion in diesem Falle für aussichtslos. Herrn Meißners Standpunkt charakterisiert sich durch den letzten Absatz des 2. Punktes der obzitierten Schrift; es heißt dort: „Schließlich spricht im Kapitel 14 des zitierten Werkes Ostwald ausdrücklich von Farben mit gleichen Kennzahlen, die verschiedenartige Emissionskurven haben, bezeichnet sie als „metamer", erklärt sie für tatsächlich vorhanden und behauptet, im Gegensatz zu Kohlrausch, daß sie auch auf das menschliche Auge denselben Eindruck machen. Mit Rücksicht auf die Heringsche Theorie und die Tatsache der Dreidimensionalität des Farbkörpers halte ich diese Ansicht für richtig, kann sie aber wegen Mangels der nötigen experimentellen Hilfsmittel nicht verifizieren."

Für alle Leser, die sich ein wenig mit der Farbenlehre befaßt haben, könnte ich durch den Hinweis auf diesen Absatz die Meißnersche Verteidigung als genügend bewertet ansehen. Für diejenigen, die diesem Spe-

[1]) Diese Zeitschr. **21**, 473, 1920.

zialkapitel fremd gegenüberstehen, füge ich erläuternd hinzu: Unsere ganzen Anschauungen von der Funktionsweise des farbigen Sehens beruhen auf der bekannten Tatsache, daß es physikalisch verschiedene Lichter gibt, die als gleichfarbig empfunden werden. Wir, die wir nicht „veil" sondern „violett" sagen, nennen sie „gleichaussehende Lichter"; Ostwald sagt „metamer". Diese Tatsache ist qualitativ und quantitativ in den Aussagen der Farbengleichungen niedergelegt, die wir, um nur einige Namen zu nennen, Maxwell, Helmholtz, König, Hering usw. verdanken und die als exaktes Tatsachenmaterial jeder Sehtheorie zugrunde gelegt werden müssen. — Es muß wohl ein Mißverständnis sein, wenn Herr Meißner meint, ich wolle meine eigene Anschauungsbasis verleugnen; es muß ein Mißverständnis sein, wenn Herr Meißner meint, daß wir auf W. Ostwalds Behauptung von der Existenz solcher „metamerer" Kurven angewiesen seien, wir haben hierüber ein sehr ausgiebiges und fundiertes Zahlenmaterial. Ein von so erstklassigen Experimentatoren gewonnenes Zahlenmaterial, daß auch Herr Meißner selbst ihm bedenklos Vertrauen entgegenbringen kann und — falls er noch nie mit einem Farbenkreisel gearbeitet hat — dies nicht erst abzuwarten braucht, um an die Existenz gleich aussehender Pigmente mit verschiedenen Remissionskurven zu glauben. Jedenfalls macht mir der Inhalt dieses wiederzitierten Absatzes es begreiflich, daß auch alle anderen Bemerkungen O. Meißners gegenüber meinen Einwürfen so wenig die Sache treffen, daß ich auf eine Widerlegung wohl verzichten kann.

Ich möchte aber die Gelegenheit nicht versäumen, meinem lebhaften Bedauern Ausdruck zu geben, daß nicht Wilhelm Ostwald selbst für seine Lehre einsteht; da ich Herrn Geheimrat Ostwald im Vorjahre meine Arbeit übersendet und da ich ihn außerdem vor einigen Monaten brieflich ersucht habe, im Interesse der Sache und des Fortschrittes Stellung zu nehmen, so muß ich annehmen, daß er, der sich immer über den Mangel an Beachtung beklagt, die seine Lehre in der Wissenschaft fände, dies nicht aus Versehen unterläßt. Deshalb und wegen der nicht zu leugnenden Gefahr, die in jener Flut von mehr oder wenig gleichlautenden Propaganda-Schriften liegt, wiederhole ich nochmals das Schlußurteil meiner vorjährigen Studie: Die Ostwaldsche sog. Farbenlehre ist eine für viele Zwecke und für die erste Orientierung vielleicht ganz geeignete Faustregel zur Klassifizierung der Pigmente; vom wissenschaftlichen Standpunkt aus betrachtet ist sie wegen ihrer Unzulänglichkeit keineswegs zu begrüßen.

Graz, I. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, 20. Juni 1921.

(Eingegangen 23. Juni 1921.)

Über die Wärmeausdehnung der Aluminium-Zink-Legierungen.

Von Alfred Schulze.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Da die Aluminium-Zink-Legierungen in letzter Zeit einige technische Bedeutung erlangt haben, so scheint es von Wichtigkeit zu sein, das Verhalten dieser Legierungen hinsichtlich ihrer thermischen Ausdehnung genauer zu studieren.

Die Ausdehnungsbestimmungen erfolgten nach der Rohrmethode[1]). Es wurden Stäbe von 22 cm Länge und 0,7 cm Durchmesser, die mit ebenen Endflächen versehen waren, benutzt. Der Versuchsstab ruhte in einem Umhüllungsrohr aus Jenaer Glas 1565^{III} (Supramexglas) auf einer im Boden des Rohres eingeschmolzenen stumpfen Spitze. Auf die obere Fläche des Versuchsstabes setzt sich ein Glasstab aus demselben Jenaer Glas 1565^{III} wiederum mit einer stumpfen Spitze auf, der bis an das Ende des Umhüllungsrohres reicht. Beide sind auf einen halbkreisförmigen Querschnitt abgeschliffen. Auf den ebenen Schliffflächen sind Teilungen angebracht, aus deren Verschiebung gegeneinander die relative Ausdehnung des Versuchsstabes gegen das Umhüllungsrohr ermittelt werden kann. Mit Hilfe der Werte, die die Formel[2]):

$$\Delta l = 0{,}3306 \cdot \tau + 0{,}014574 \cdot \tau^2$$

(Δl = Längenänderung in mm/m; $\tau = \frac{t}{100}$ in dem Temperaturgebiet von $t = 0^0$ bis 500^0) für die Ausdehnung des Glases 1565^{III} ergibt, konnte der absolute Wert der Ausdehnung des Versuchsstabes angegeben werden.

Außer reinem Aluminium und reinem Zink wurden sieben Legierungen (12,5 Proz.; 25 Proz.; 37,5 Proz.; 50 Proz.; 62,5 Proz.; 75 Proz.; 87,5 Proz. *Al*) untersucht, die von der Chemischen Fabrik Griesheim-Elektron in Frankfurt a. M. der Reichsanstalt zur Verfügung gestellt waren. Die Beobachtungen wurden außer im Wasserbade (bei Zimmertemperatur) bei 100^0 im Wasser-

1) Henning, Ann. d. Phys. (4) **22**, 631—639. 1907.
2) Scheel, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **38**, 98, 1918.

Die Längenänderungen der Aluminium-Zink-Legierungen zwischen 20° und t^0 in mm/m.

t^0	0 Proz. *Zn* 100 Proz. *Al* beob.	Formel	12,5 Proz. *Zn* 87,5 Proz. *Al* beob.	Formel	25 Proz. *Zn* 75 Proz. *Al* beob.		Formel	37,5 Proz. *Zn* 62,5 Proz. *Al*		50 Proz. *Zn* 50 Proz. *Al*		62,5 Proz. *Zn* 37,5 Proz. *Al*		75 Proz. *Zn* 25 Proz. *Al*		87,5 Proz. *Zn* 12,5 Proz. *Al*		100 Proz. *Zn* 0 Proz. *Al* beob.		Formel
100	1,89	1,90	1,91	1,90	2,09		2,08	2,13		2,12		2,09		2,17		2,11		2,91		2,91
200	4,41	4,41	4,46	4,48	4,87		4,88	4,94		4,97		4,93		5,13		5,24		6,77		6,76
230					5,80	5,78 ↑	5,75							6,22						
240					6,07	—	6,05							6,53						
250					6,37	6,36	6.35	6,65	6,93 ↑	6,74	7,08 ↑	6,86	6,90 ↑	7,00	8,75 ↑	7,07		8,79	8,79 ↑	8,76
260								6,95	7,34	7,05	8,01	7,22	—				↑	9,20	—	9,17
264																—	7,69			
266																—	9,09			
270					6,92	—	6,95	7,24	7,69	7,59	8,49	7,67	9,17	7,65	9,62	7,88	9,50	9,59	9,58	9,58
280					7,24	7,21	7,25	↓ 7,67	8,03	↓ 8,65	8,78	↓ 8,21	9,54	↓ 9,71	10,03	↓ 8,43	—	10,00	—	9,99
285																10,03				
290					↓ 7,50	7,54	7,55			9,08		9,92		10,52		10,45		↓ 10,37	10,40	10,40
300	7,06	7,06	7,26	7,26	7,85		7,86	8,50		9,43		10,21		10,91				10,80		10,81
400	9,85	9,85	10,30	10,27	11,05		11,03													
	$\Delta l = 2{,}30 \cdot \tau + 0{,}07 \cdot \tau^2$		$\Delta l = 2{,}27 \cdot \tau + 0{,}10 \cdot \tau^2$		$\Delta l = 2{,}51 \cdot \tau + 0{,}09_4 \cdot \tau^2$													$\Delta l = 3{,}54 \cdot \tau + 0{,}10 \cdot \tau^2$		

dampf, bei 200° im Methylbenzoatdampf und in höheren Temperaturen im elektrisch geheizten Salpeterbad angestellt. Vor Beginn der Messungen wurden die Stäbe (100 Proz.; 87,5 Proz.; 75 Proz. *Al*) auf 420°, die übrigen Stäbe auf 320° angelassen.

In der nebenstehenden Zahlentafel sind die gemessenen Längenänderungen der 9 Versuchsstäbe zwischen 20° und t^0, bezogen auf mm/m, zusammengestellt. Die einzelnen Zahlen sind Mittelwerte aus je einer Meßreihe. Die Meßergebnisse haben eine Genauigkeit von ungefähr 1 Proz.

Der Aluminiumstab zeigt eine wenig geringere Ausdehnung als die von Scheel[1]) gemessenen; der Unterschied beträgt 3 Proz. bei 400°. Dagegen sind die Werte für die Ausdehnung des Zinks außerordentlich hoch. Nach unseren Messungen ist Δl zwischen 20° und 100°: 2,91 mm/m. Das entspricht einem mittleren Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta t} = 36{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

Thermische Nachwirkungen traten nicht auf. Für käufliches Zink, das starke thermische Nachwirkung zeigt, ist früher etwa $\alpha^0/_{100} = 30 \cdot 10^{-6}$ gefunden. Für reines Zink sind, wie schon von Thiesen, Scheel und Sell[2]) gefunden wurde, Ausdehnung und Nachwirkung geringer ($\alpha^0/_{100} = 26{,}3 \cdot 10^{-6}$). Das von Grüneisen[3]) untersuchte reine Metall wies sogar nur einen Ausdehnungskoeffizienten von $\alpha^{16}/_{100} = 17 \cdot 10^{-6}$ auf. Worauf der jetzt gefundene hohe Wert zurückzuführen ist, bleibt noch weiteren Untersuchungen vorbehalten. Durch Verunreinigungen ist er nicht zu erklären. Denn wie die Analyse ergab, die im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt von Herrn Dr. Hüttner ausgeführt wurde, enthielt das Zink nur 0,2 Proz. Blei, 0,05 Proz. Eisen und eine Spur Kieselsäure. In dem Temperaturgebiet von 20° bis 300° läßt sich die thermische Ausdehnung von Zink durch eine quadratische Interpolationsformel gut darstellen (siehe die Zahlentafel).

In der gleichen Weise ist dies für reines Aluminium, sowie für die Legierungen mit 87,5 und 75 Proz. *Al* in dem Temperaturgebiet von 20° bis 400° der Fall. Bei den anderen untersuchten Legierungen ist der Verlauf der Ausdehnungskurve komplizierter (siehe nebenstehende Figur). Während für die Legierung mit 75 Proz. *Al* bei steigender und fallender

1) Siehe Holborn, Scheel u. Henning, Wärmetabellen, S. 25.

2) M. Thiesen, K. Scheel u. L. Sell, Wiss. Abhandl. d. Physik.-Techn. Reichsanstalt **2**, S. 75.

3) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4) **33**, 33, 1910.

o bei steigender Temperatur beobachtet
× „ fallender „ „

Temperatur dieselben Werte für die thermische Ausdehnung gefunden wurden, ergaben die Messungen an den Legierungen von 62,5 Proz. *Al* an in dem Temperaturgebiet von 250° bis 280° bei fallender Temperatur höhere Werte als bei steigender Temperatur. Dieses eigentümliche Verhalten der Ausdehnung deutet auf eine chemische Umwandlung hin. In der Nähe des Umwandlungspunktes ändert sich die Ausdehnung der Stäbe sprunghaft. Infolge von Verzögerung dieser Umwandlungen bei steigender, sowie bei fallender Temperatur wurden Hysteresisschleifen beobachtet. Ihre Fläche war bei der Legierung mit 28 Proz. *Al* am größten. Wie besondere Versuche zeigten, sind diese Verzögerungserscheinungen von der Zeit unabhängig. Beobachtungen an reinem Zink ergaben sowohl bei steigender wie bei fallender Temperatur dieselben Werte.

Aluminium bildet nun nach den Untersuchungen von Bauer und Vogel[1]) mit Zink bis zu einem Gehalt von 70 Proz. Mischkristalle. Bei 443° findet eine Umsetzung der primär ausscheidenden γ-Mischkristalle (Zink in Aluminium gelöst) mit der Restschmelze zu einer neuen Kristallart von der Zusammensetzung Al_2Zn_3 (mit 21,65 Proz. *Al*) statt, die bei 256° wieder in die beiden Mischkristalle α und γ zerfällt.

Danach ist es also vermutlich die Bildung bzw. der Zerfall der Verbindung Al_2Zn_3, die die Unregelmäßigkeiten in den Kurven der thermischen Ausdehnung hervorrufen. Daß die Verbindung nur in dem Konzentrationsgebiet von 1 bis 70 Proz. *Al* vorhanden ist, findet durch unsere Messungen ebenfalls eine gute

1) O. Bauer u. O. Vogel, Mitteil. a. d. Kgl. Materialprüfungsamt 1915, Heft 3/4, S. 146—198; Zeitschr. f. Metallographie 8, 101—178, 1916.



Bestätigung, da erst bei der Ausdehnung der Legierung mit 62,5 Proz. *Al* eine Hysteresiserscheinung auftritt.

Charlottenburg, Mai 1921.

(Eingegangen 10. Juni 1921.)

Die Bedeutung des elektrischen Windes für den Induktionsfunken.

Von F. Trey.

Fragestellung. Neben der von Hertz entdeckten Zündung eines elektrischen Entladungsfunkens durch ein ionisierendes Agens haben Elster und Geitel das Löschen eines Funkens mit denselben Mitteln experimentell nachgewiesen, allerdings bei veränderten Nebenumständen. Von Lebedinsky[1]) sind dann, meines Wissens zum erstenmal, beide Effekte nebeneinander an ein und derselben Funkenstrecke, bei unveränderter Funkenlänge, Stromrichtung usw., beobachtet worden, und zwar hat es sich gezeigt, daß ein Induktionsfunke zwischen einer Spitze (+) und einer Kugel (—) von schwachem ultraviolettem Licht gezündet, bei intensivem Licht aber wieder gelöscht wird. Alle bisherigen Erklärungsversuche dieser entgegengesetzten Wirkungen ein und desselben Agens führen übereinstimmend zu der Annahme, daß innerhalb der Funkenstrecke durch die Ionisation zwei Vorgänge veranlaßt werden, welche die Bildung des Funkens in entgegengesetztem Sinne beeinflussen. Über den einen der beiden Vorgänge herrscht volle Einigkeit, indem angenommen wird, daß die erzeugten Ionen direkt den Entladungsvorgang selbst einleiten, ja für die Entstehung eines Funkens unbedingt erforderlich sind. Daraus folgt die Zündwirkung. Der zweite Vorgang muß zurzeit noch als unaufgeklärt betrachtet werden. Es wird in dieser Arbeit die Behauptung aufgestellt, daß der bei starker Ionisierung auftretende intensive elektrische Wind dieser zweite Vorgang ist, und daß also die Steigerung des Windes über eine bestimmte Intensität hinaus das Löschen des Funkens zur Folge hat.

Versuchsanordnung. Das Auftreten beider oben erwähnten Effekte an ein und derselben Funkenstrecke ist nicht immer leicht zu erhalten. Es hat sich erwiesen, daß eine geringe Änderung der Schärfe der Nadelspitze entscheidend wirken kann. Das Ausschlaggebende ist hierbei jedenfalls die Veränderung des elektrischen Feldes. Es konnte denn auch gezeigt werden, daß eine Verschiebung eines Metalldiskus auf der Nadel[1]) oder eine entsprechende Veränderung an der Kugelelektrode[2]) ein Zuspitzen oder Entschärfen der Nadel vollständig äquivalent zu ersetzen vermag. Am bequemsten erhält man eine zugleich zünd- und löschempfindliche Funkenstrecke, indem man über der Spitze einen vorne bis auf eine kleine Öffnung geschlossenen Zylinder verschiebt. Auf den Bildern ist dieser bewegliche Teil, hinten mit einer Hartgummiplatte versehen, leicht erkenntlich. Bedeckt der Zylinder die Nadel ganz, so haben wir den einen extremen Fall: einen Funken zwischen zwei stumpfen Elektroden; wird der Zylinder dagegen möglichst weit nach hinten verschoben, so ist bei derselben Nadel das Maximum der Zuspitzung erreicht. Nach einigen Versuchen findet man unschwer die Stellung, bei welcher der Funke schon durch eine schwache Ionisationsquelle, z. B. durch ein Radiumpräparat in großer Entfernung, gezündet wird. Nähert man das Radiumpräparat, so wächst die Häufigkeit der Funken, um dann recht plötzlich von einer bestimmten Entfernung an wieder abzunehmen; geht man noch näher, so bilden sich überhaupt keine Funken mehr (Löschwirkung). Nähert man nun aber das Radium nicht allmählich, sondern so schnell, daß sich in der kurzen Zeit überhaupt kein Funke bilden konnte, dann hat es den Anschein, als habe sich durch das Heranbringen des Radiums in der Funkenstrecke nichts geändert. Es kann nun gezeigt werden, daß dieses doch der Fall ist, und zwar kann die Bildung eines sehr intensiven elektrischen Windes, jedenfalls durch das Radium verursacht, nachgewiesen werden.

Setzt man nämlich die Funkenstrecke vor die Linse (Zeiß-Achromat, Durchmesser 11 cm, Brennweite 166 cm) eines Toeplerschen Schlierenapparates und erzeugt man mit Hilfe eines unterhalb des Funkens befindlichen Hitzdrahtes eine aufsteigende Schliere in der Luft, so läßt sich der elektrische Wind, wie Bild 2 zeigt, sehr gut beobachten. Das Radiumpräparat befindet sich in einem Glasröhrchen, und dieses wiederum, oberhalb der Funkenstrecke, in einem unten offenen Halter aus Glas. Auf eine große Intensität des Windes darf man daraus schließen, daß die warme Luft der Schliere vom Winde weit über die Kugelelektrode hinaus in fast horizontaler Richtung weggetragen wird. Das stimmt mit den großen von Chattock[3]) bestimmten Geschwindigkeiten bis zu 1,8 cm/sec

---

1) Lebedinsky, Journ. d. russ. phys. Gesellsch. **35**, 187, 1903.

1) Bontsch-Brujewitsch, Journ. d. russ. phys. Gesellsch. **45**, Heft 8, 1913.

2) F. Trey, Journ. d. russ. phys. Gesellsch. **47**, Heft 6, 1915.

3) Chattock, Phil. Mag. (5) **48**, 401, 1899.

pro 1 Volt/cm überein. Bild 1 weist dieselbe Anordnung, jedoch ohne Radium, auf: die Schliere steigt kerzengerade in die Höhe, obgleich das Induktorium eingeschaltet ist, und es nur einer geringen Ionisationsquelle bedarf, um Funken auszulösen. Daß das Röhrchen mit dem Radium nicht da ist, erkennt man an den hellen Streifen auf dem leeren Halter. Die Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft beträgt bei dieser vertikalen Schliere etwa 10 cm/sec. Die ganze Länge der benutzten Aufstellung (Schlierenapparat) betrug 9 m. Die Aufnahmen wurden mit einem Fernrohrobjektiv ($d = 4{,}5$ cm, $f = 53$ cm) gemacht. Als Illuminator diente nach Wood ein Funke eines 30 cm-Induktors zwischen zwei Magnesiumbändchen, die zwischen zwei Spiegelglasscheiben gelegt waren. Der Durchmesser der Originalphotographien beträgt 14 mm.

Die Bildung des elektrischen Windes kann man noch auf folgende Art nachweisen, die zudem eine mehr qualitative Untersuchung der Erscheinung ermöglicht. In der negativen Kugelelektrode wird gegenüber der Spitze eine Höhlung ausgedreht und in diese ein Heizdraht aus Platin (etwa 2 cm lang, Durchmesser 0,1 mm) eingeführt. Dieses Drähtchen (a, Fig. 1) stört die

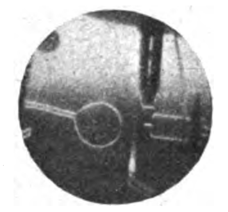


Fig. 1.

Löschwirkung in keiner Weise, gestattet aber leicht die durch den Wind verursachte Abkühlung und dadurch die Intensität des Windes zu beobachten. Es kann sowohl mittels Strom- und Spannungsmessung am Heizdraht die durch Abkühlung verursachte Veränderung des Widerstandes bestimmt werden, als auch direkt mittels eines an den Heizdraht angelöteten Thermoelementes die verursachte Temperaturerniedrigung festgestellt werden. Die im Schema (Fig. 1) verzeichneten Apparate, Ampèremeter und Voltmeter, werden zweckmäßig durch je eine Anordnung nach dem Kompensationsverfahren ersetzt. Die Veränderungen des Widerstandes sind nicht sehr beträchtliche, da ja nicht der ganze Draht vom Winde gleichmäßig getroffen wird. Nach der Mitte des Drahtes zu ist die Abkühlung recht groß, so daß mit Thermoelement und Galvanometer (G I) gut beobachtet werden konnte. In der Tabelle I sind die hierbei erhaltenen Resultate schon in Celsius-Grade umgerechnet angeführt.

Tabelle I.

Nr.		Heizdraht		Thermoelement
		Stromstärke in Amp.	Widerstand in Ohm	Temperatur
1	ohne Ionisation	0,620	0,669	75°
	ionisiert	0,621	0,660	45°
	Differenz	0,001	0,009	30°
2	ohne Ionisation	0,678	0,690	92°
	ionisiert	0,680	0,680	59°
	Differenz	0,002	0,010	33°

Die Abkühlung des Drahtes um 30° bzw. 33° entspricht einer Luftströmung, wie sie durch eine 2 mm weite Düse von einem gewöhnlichen Tretgebläse erzeugt wird. Es sei noch bemerkt, daß ein zufällig übergehender Funke eine geringe vorübergehende Erwärmung des Heizdrahtes zur Folge hat.

Mit einer Funkenstrecke, die in genannter Weise mit einer Vorrichtung zum Messen des elektrischen Windes versehen ist, läßt sich weiter zeigen, daß eine der Löschwirkung vollkommen analoge Erscheinung auftritt, wenn die Entfernung der Elektroden so weit vergrößert wird, daß überhaupt kein Funke, weder mit noch ohne Radium, übergehen kann, natürlich bei gegebener Spannung. Schaltet man nämlich zwischen Kugel und Erde ein empfindliches Galvanometer (G II) (1 mm $= 10^{-8}$ Amp.), so kann die Stromstärke der ohne Funken erfolgenden Elektrizitätsströmung von der Spitze zur Kugel beobachtet, und ihre Abhängigkeit von der Intensität der Ionisierung, bzw. der Nähe des Radiumpräparates ermittelt werden. Gleichzeitig gibt das Thermoelement am Heizdraht die Größe des elektrischen Windes in willkürlichen Einheiten an. An einer Funkenstrecke, die bei geringerem Elektrodenabstand den Löscheffekt gibt, ist dann folgende Beobachtungsreihe gemacht worden:

Tabelle II.

Entfernung des Radiums in cm	∞	50	40	30	20	15	10	5	2
Stromstärke in Amp. $\times 10^{-7}$	0,0	2,1	3,6	4,8	6,0	6,0	3,6	1,2	0,3
Intensität des elektr. Windes	0	14	21	29	34	39	43	44	46

Man sieht (Fig. 2), daß die elektrische Strömung von der Spitze (+) zur Kugel (—) bei einer bestimmten Entfernung des Radiums ein Maximum erreicht, um dann wieder bis auf Null herabzusinken. Demgegenüber nimmt der Wind fast linear zu; nach dem Überschreiten des Strommaximums nimmt der Betrag der Wind-

zunahme etwas ab. Da das Radiumpräparat in Glas eingeschlossen war, wurde die Ionisation in erster Linie durch γ-Strahlen veranlaßt. Jedenfalls waren keine α-Teilchen tätig. Ein Versuch, bei dem die β-Strahlung durch eine Eisenplatte abgeblendet war, ergab im wesentlichen dasselbe Resultat.



Fig. 2.



Fig. 3.

Schlußfolgerungen. Zur Erklärung der Löschwirkung ist vielfach der photoelektrische Effekt an der negativen Kugelelektrode herangezogen worden. Es läßt sich nun aber einerseits gar keine Abhängigkeit des Effektes von dem Material der Elektrode feststellen, und andererseits wirkt auch eine in der Nähe der Funkenstrecke gehaltene Spitze durch Ionisation löschend. Daher kann der photoelektrische Effekt weder als Ursache noch als notwendige Bedingung für die Erscheinung des Löschens angesprochen werden. Hingegen kann aber auf Grund der angeführten Versuche der innere Zusammenhang zwischen dem elektrischen Wind und der Löschwirkung wohl als feststehend betrachtet werden. Es fragt sich nur, ob wir es beim elektrischen Wind mit einer Nebenerscheinung oder mit der Ursache der Löschwirkung selbst zu tun haben. Wenn letzteres der Fall sein sollte, müßte ein gezündeter Funke durch eine Luftbewegung in der Richtung von der Spitze zur Kugel gelöscht werden können. Die hierzu angestellten Versuche haben dieses vollauf bestätigt. Ein durch eine Düse hinter der Spitze austretender Luftstrom löschte den Funken regelmäßig. Die rein mechanische Bewegung der Luft kann also für die Löschwirkung verantwortlich gemacht werden. Fragen wir weiter, worin diese Wirkung des Windes wohl bestehen möge, so begeben wir uns auf das Gebiet der Hypothese. Man kann, meines Erachtens, z. B. das Entstehen einer ungeordneten turbulenten Luftbewegung innerhalb der Funkenstrecke, wie sie Bild 2 erkennen läßt, als eine Erscheinung ansprechen, welche die Bildung der Funkenbahn zu stören, ja auch zu verhindern vermag. Die der Bildung einer Funkenbahn vorausgehenden Vorgänge sind ja noch keineswegs endgültig festgestellt; jedenfalls kann aber mit Toepler[1]) angenommen werden, daß jede Funken- bzw. Blitzbahn „durch aneinandergereihte Büschelentladungen geöffnet wird", die sich in der Gegend der größten Konzentration der Kraftlinien bilden. Diese, zuweilen auch glimmlichtartigen, Vorgänge an einzelnen Stellen zwischen den Elektroden sind von so geringer Leuchtkraft und so kurzlebig, daß sie nur sehr schwer zu beobachten sind; auch überdeckt der unmittelbar darauf folgende Funke durch sein intensives Licht die einleitenden Vorgänge vollständig. Sie können aber auf indirektem Wege sichtbar gemacht werden. Beobachtet man bei sehr spitzer Nadel und bei Bedingungen, unter denen nur hin und wieder ein Funke übergeht, eine Funkenstrecke im Schlierenapparat, so erscheint an der Stelle eines jeden Büschels ein kleiner leuchtender Fleck, da, sei es nun durch die Temperatur oder auch durch die Druckänderung beim elektrischen Vorgang, die optische Dichte der Luft verändert wird. Auf dem Bilde 3 ist eine Büschelentladung so photographiert worden. Man erkennt von der Spitze ausgehend einen recht intensiven geraden Büschel, fast doppelt so lang als die Spitze selbst. Kurz vor der Kugel ist aber noch ein heller Fleck sichtbar, der einem gesonderten Büschel entspricht. Ich habe bis zu 3 solcher, den Funken vorausgehender „Ionisationsherde" beobachten können. Dieses würde also die Annahme bestätigen, daß die Vernichtung der isolierenden Eigenschaft der Luft beim elektrischen Funken in dem Auftreten solcher gesonderter Büschel oder Ionisationsherde besteht. Eine turbulente Luftbewegung muß diese Vorgänge beeinträchtigen, und so könnte die Löschwirkung des Windes ihre Erklärung finden. Sehr wahrscheinlich ist übrigens, daß auch Raumladungen, sei es direkt oder auch indirekt, durch ihre Beeinflussung des elektrischen Feldes bei der Bildung der Ionisationsherde eine Rolle spielen. Naturgemäß können auch diese durch eine Bewegung der Luft stark beeinflußt werden. Es sei noch betont, daß für das Zustandekommen der Ionisation an solchen vereinzelten Stellen ein schneller Wechsel des elektrischen Feldes notwendige Vorbedingung zu sein scheint, und daher alle erwähnten Erscheinungen als für den Induktionsfunken charakteristisch angesehen werden müssen und mit einer elektrostatischen Maschine gar nicht oder nur in sehr veränderter Gestalt erhalten werden können. Zu ähnlichen Vorstellungen über solche „Explosionszentren" ist auch Mikola[2]) bei der Untersuchung Lichtenbergscher Figuren gelangt. Ob das Gesagte

1) M. Toepler, Meteor. Zeitschr. 1917, S. 238.
2) Mikola, diese Zeitschr. 18, 161, 1917.



zur Erklärung der von Wolfke[1]) gefundenen Umkehrungen der Gleichstromkomponente bei geblasenen Funkenstrecken herangezogen werden kann, soll demnächst noch näher untersucht werden.

Zusammenfassung.

1. Es werden 3 Methoden angegeben, welche die Beobachtung des elektrischen Windes in einer Funkenstrecke ermöglichen.
2. Es sind den Funken vorangehende Büschelentladungen nach der Schlierenmethode photographiert worden.
3. Es wird die Bedeutung des elektrischen Windes für die Vorgänge im Funken, insbesondere für den Löscheffekt, diskutiert.

1) Wolfke, diese Zeitschr. **22**, 123, 1921.

Riga, Phys. Labor. der Hochschule Lettlands.

(Eingegangen 10. Juni 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

Von J. Franck.

(Fortsetzung.)

Die benutzte Apparatur ist diejenige der Fig. 7. Die Änderung besteht, wie Fig. 8 versinnbildlicht, in der angewandten Schaltung. Zwischen dem Glühdraht und dem ersten Netz wird den Elektronen ihre Geschwindigkeit gegeben. Zwischen den beiden Netzen stoßen sie mit den Atomen zusammen, ohne daß ihre Geschwindigkeit durch elektrische Felder wesentlich verändert wird. Zwischen dem zweiten Netz und dem Auffänger liegt die starke Spannung, die die Primärelektronen wieder zurückwirft. Die beobachteten Effekte sind die gleichen wie bei der Original-Lenardschen Methode, nur erreicht man eine viel bessere Ausnutzung der Elektronenstöße, so daß man auch schwache Effekte gut nachweisen kann. So erhält man bei Untersuchung der lichtelektrisch ausgelösten Ströme als Funktion der Geschwindigkeit der Primärelektronen von der Resonanzspannung an einen Strom, der jedesmal dann einen verstärkten Anstieg, also einen Knick, in der Kurve zeigt, wenn ein neuer Quantensprung angeregt wird. Natürlich muß man, um alle Feinheiten beobachten zu können, die Elektronenemission sehr konstant halten und als Glühdraht ein möglichst kleines Stück Wolframdraht verwenden, um ein Potentialgefälle längs des Glühdrahtes zu vermeiden. Es ist selbstverständlich, daß nach diesem Verfahren nur solche Spektrallinien untersucht werden können, die einen lichtelektrischen Effekt ergeben, also im Ultravioletten liegen. Der Vorteil der Methode gegenüber dem optischen Nachweis von Spektrallinien liegt darin, daß die Methode keine Begrenzung nach der kurzwelligen Seite des Spektrums hin kennt und Quantenübergänge liefert, die bei Emission oder Absorption von Licht nicht auftreten. Die Korrekturen wegen der Anfangsgeschwindigkeiten der Elektronen müssen durch eine direkte Messung der Anfangsgeschwindigkeit festgestellt werden, oder besser noch ergänzt man das Verfahren durch die Methode des unelastischen Stoßes zur Festlegung des Anfangspunktes des lichtelektrischen Stromes. In manchen Fällen ist das schwierig oder gar nicht durchzuführen, und man kann sich dann durch Zusatz eines Eichgases zu dem zu untersuchenden Gase oder Dampf helfen. Die Anregungsspannungen des Eichgases müssen genau bekannt und leicht kenntlich sein, sie dürfen nicht tiefer liegen als die Ionisierungsspannung des zu eichenden Gases; sonst wird durch das Licht, das das zu untersuchende Gas ausstrahlt, das Eichgas ionisiert, und man erhält ganz verzerrte Kurven. Als bestes Eichgas haben wir Helium wegen seiner hohen Ionisierungsspannung benutzt.

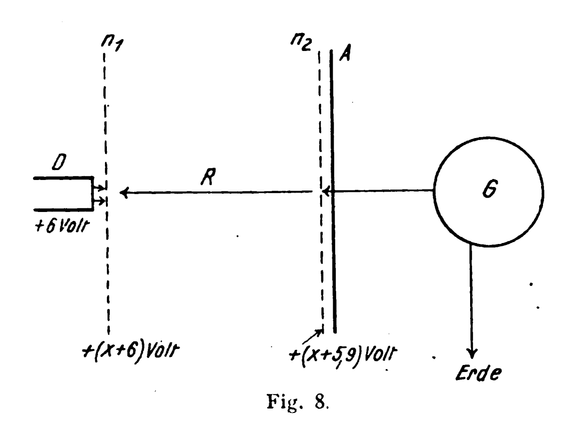


Fig. 8.

Fig. 9 zeigt eine lichtelektrische Kurve, die im Quecksilberdampf, der bisher am sorgfäl-



tigsten durchgemessen ist, von Franck und Einsporn[1]) erhalten wurde. Um das plötzliche Einsetzen des Stromes bei 4,68 Volt deutlicher sichtbar zu machen, ist in der mit I bezeichneten Kurve die Nullinie ein Stück über der Abszissenachse gezeichnet. Die Kurven II

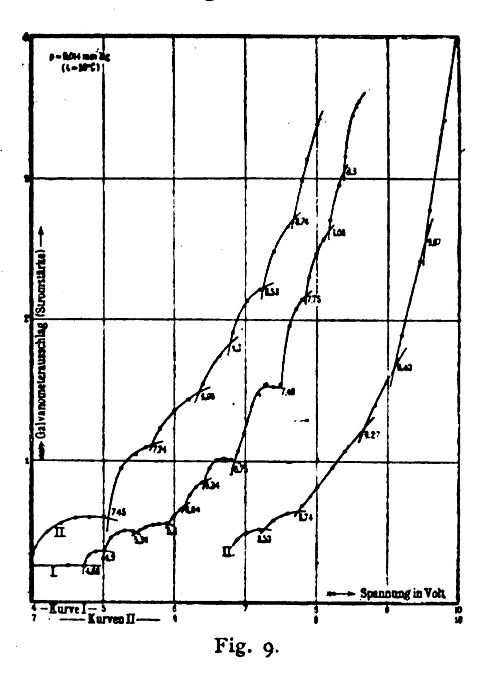


Fig. 9.

sind die Anschlußkurven am Ende von I. Man sieht, daß mit wachsender Spannung immer weitere neue Knicke auftauchen. Die aus der Lage der Knicke nach der $h\nu$ Beziehung sich ergebenden Wellenlängen sollen bei der Diskussion der Resultate besprochen werden.

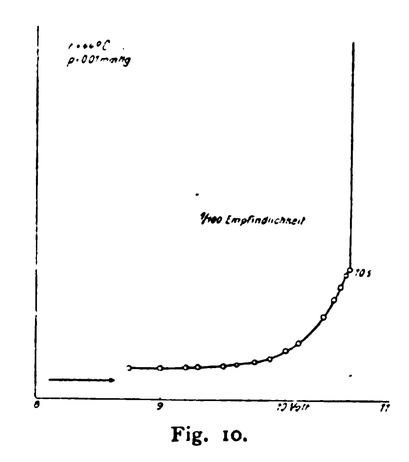


Fig. 10.

Fig. 10 zeigt das plötzliche Einsetzen der Ionisation im Quecksilberdampf. Der lichtelektrische Teil der Kurve erstreckt sich bis zum Punkte 10,5 Volt der Spannungsskala; die wahre Ionisierungsspannung liegt nach Anbringung der Korrektur bei 10,38 Volt. Hinweisen möchten wir auf den über ca. 0,8 Volt sich erstreckenden steileren Anstieg der Kurve vor dem eigentlichen Einsetzen der Ionisation. Dieser Anstieg ist nicht nur durch die sich häufenden Linien am Ende der Serie hervorgerufen, sondern auch bedingt durch die Geschwindigkeitsverteilung der Primärelektronen, von denen die wenigen, die besonders schnell sind, schon einen im Vergleich zum lichtelek-

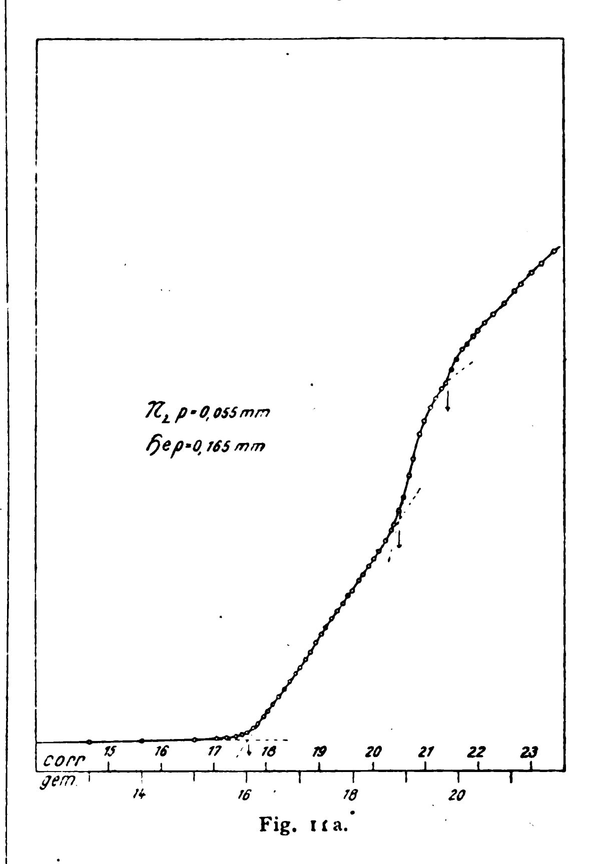


Fig. 11a.

trischen Strom bemerkbaren Ionisationsstrom hervorzurufen vermögen. Will man die Ionisierungsspannung durch Eichung mittels der lichtelektrischen Knicke festlegen, so muß man infolgedessen den Beginn des starken Anstiegs, der in der abgezeichneten Kurve fast senkrecht in die Höhe geht, als Wert für die Ionisierungsspannung einsetzen. Es scheint uns, daß durch unrichtige Interpretation dieser Verhältnisse manche Resultate über Messung der Ionisierungsspannung zu niedrig angegeben sind.

Als ein weiteres Beispiel der Anwendung des lichtelektrischen Verfahrens sollen hier zwei weitere Kurven, die im zweiatomigen

1) J. Franck u. E. Einsporn, Zeitschr. f. Phys. **2**, 18, 1920.

Stickstoff durch Brandt (Berliner Dissertation) aufgenommen sind, folgen.

Die obere Kurve zeigt das starke Einsetzen der Ionisation bei 17,75 Volt, wobei die Eichung durch die typischen, mit einem Pfeil bezeichneten Heliumknicke vorgenommen ist. Die untere Kurve zeigt in sehr viel größerem Maßstabe und mit einer sehr großen Häufung der Meßpunkte den zwischen 7,5 Volt und 8,3 Volt liegenden Teil der lichtelektrischen Kurve. Man sieht, wie eng nebeneinander die Knicke gelegen sind, so daß man bei Umrechnung nach der $h\nu$ Beziehung den Charakter einer Bandenstrahlung erkennt. Die

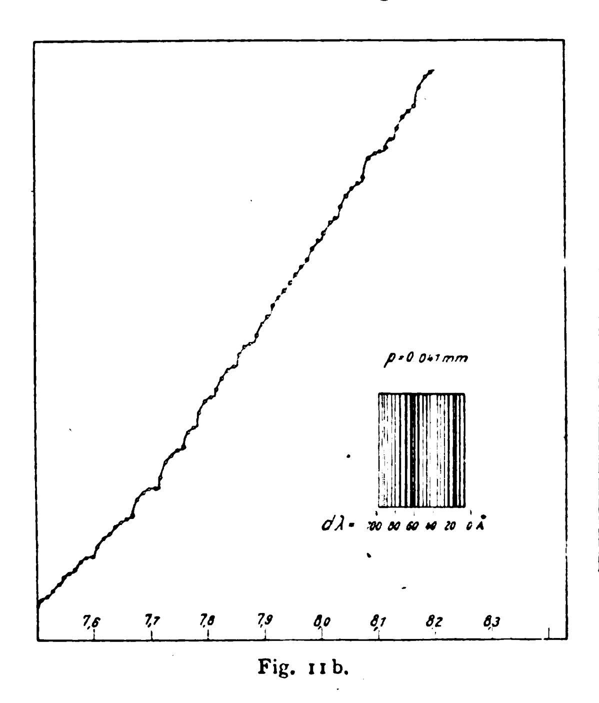


Fig. 11 b.

theoretische Seite dieses Resultats wird unter „Resultate" besprochen.

Einen weiteren methodisch interessanten Versuch, die Lenard-Methode zur direkten Unterscheidung zwischen Lichtanregung und Ionisation tauglich zu machen, hat neuerdings Compton[1]) unternommen. Er benutzt die unveränderte Lenard-Schaltung, wie sie Fig. 12 andeutet.

Die Auffangeelektrode ist jedoch bei Compton ein drehbarer Faradaykäfig, der mit einem Drahtnetz bespannt ist; man kann durch Drehung um die Achse A erreichen, daß wahlweise der massive Boden B des Käfigs oder der netzüberspannte Hohlraum H als Auffänger dient. Treffen positive Ionen auf, so muß die beobachtete Aufladung unabhängig sein von der Stellung des Auffängers. Wird dagegen der Faradaykäfig einer lichtelektrisch wirkenden Strahlung ausgesetzt, so muß eine Drehung den Effekt merklich beeinflussen. Wird der Boden getroffen, so verlassen alle ausgelösten Elektronen den Auffänger. Wird die Netzseite exponiert, so verlassen ihn nur diejenigen, die an der Vorderseite des Netzes ausgelöst werden, während alle im Innern des Käfigs entstehenden Elektronen wieder eingefangen werden. Das Verhältnis der Ströme in beiden Stellungen läßt sich berechnen, aber auch durch direkte Eichung durch Bestrahlung mit einer unabhängigen Lichtquelle feststellen.

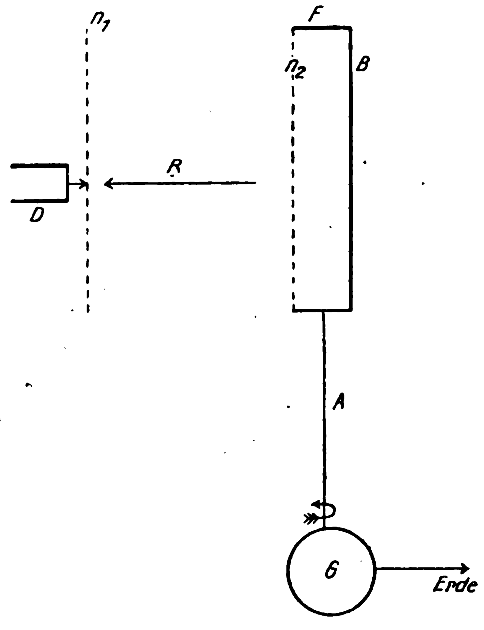


Fig. 12.

Compton hat mit dieser Anordnung Helium untersucht und findet, daß auch im ganz reinen Helium schon von der ersten Grenze der Lichtanregung an eine schwache Ionisation auftritt, während die starke Ionisation bei der von andern Autoren bestimmten Ionisierungsspannung einsetzt. Auch dieses Resultat ist unseres Ermessens durch die oben geschilderte sekundäre Ionisation zu deuten und nicht, wie es Compton vermutet, durch schnell aufeinander folgende Elektronenstöße, die das gleiche Atom treffen. Die Methode darf nur benutzt werden, um Ionisation von Lichtanregung zu unterscheiden, nicht aber, um schwache Ionisation neben einer Lichtanregung nachzuweisen. Will man dieses Problem, das für die Vorgänge im Lichtbogen eine Rolle spielt, lösen, so muß man die Abbremsung der Primärelektronen durch starke Gegenfelder

1) Compton, Phil. Mag. **40**, 553, 1920.

vollkommen vermeiden und versuchen, durch geeignet angebrachte magnetische Felder die Primärelektronen zurückzubiegen. Eine derartige Anordnung wird zurzeit hier im Institute ausprobiert.

Hiermit sind die bisher bekannten Methoden zur Messung von Anregungsspannungen erschöpft. Es sind aber noch zwei weitere Methoden zur Messung der Ionisierungsspannung zu nennen.

Die ältere stammt von Tate und wird in einer großen Zahl von Untersuchungen im Bureau of Standards mit gutem Erfolge in Metalldämpfen angewandt. Sie besteht in einer einfachen Messung der Charakteristik des von einem Glühdraht kommenden Elektronenstromes in dem zu untersuchenden, sehr verdünnten Metalldampfe. Die Bedingungen sind so gewählt, daß ein Teil der Elektronen Zusammenstöße erst ganz nah an der Anode ausführt. Dann erhält man Kurven, die die Form einer Sättigungskurve anzeigen bis zu dem Punkte, bei dem die Geschwindigkeit der Elektronen zur Ionisierung der Atome genügt. An dieser Stelle setzt ein jäher weiterer Anstieg der Kurve ein.

Die Fig. 13 zeigt ein Beispiel derartiger Messungen, wobei gleichzeitig die Methode der Auswertung der Voltskala durch Untersuchung nach der Methode des unelastischen Stoßes durch darübergedruckte Kurven angedeutet ist. Das Beispiel ist einer Arbeit von Foote, Mohler und Stimson entnommen, die über die Ionisation und Anregungsspannung des Bleidampfes handelt. Selbst bei den hier notwendigen hohen Temperaturen arbeitet, wie man sieht, die Methode noch sehr gut.

Das letzte zu nennende Verfahren ähnelt dem eben besprochenen. Es stammt in der Idee unabhängig von J. J. Thomson und Langmuir, deren Mitarbeiter es ausgeführt haben[1]). Diese Autoren benutzen gewöhnliche Verstärkerröhren mit Füllungen der zu untersuchenden Gase. Nach Langmuir steigt der Elektronenstrom bei starker Glut der Elektrode mit der $^3/_2$ten Potenz der Spannung. Dies Verhalten bleibt, wie oben erwähnt, auch bei Gasfüllung bestehen. Sobald aber positive Ionen durch Stoß erzeugt werden, bricht die Raumladung zusammen, so daß der Strom nunmehr wesentlich schneller ansteigt. Die erste Abweichung vom $v^{3/2}$-Gesetz wird als Ionisierungsspannung genommen. Die Methode ist zweifelhaft in ihrer Anwendung, sobald man Gase mit Elektronenaffinität benutzt.

1) Found, Phys. Rev. **15**, 132, 1920.
Stead u. Gossling, Phil. Mag. **40**, 1920.

Bei ihrer Anwendung sind die Korrekturen wegen der Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen bisher nur geschätzt. Die Anwendung ganz reiner Gase ist notwendig, da man sonst,

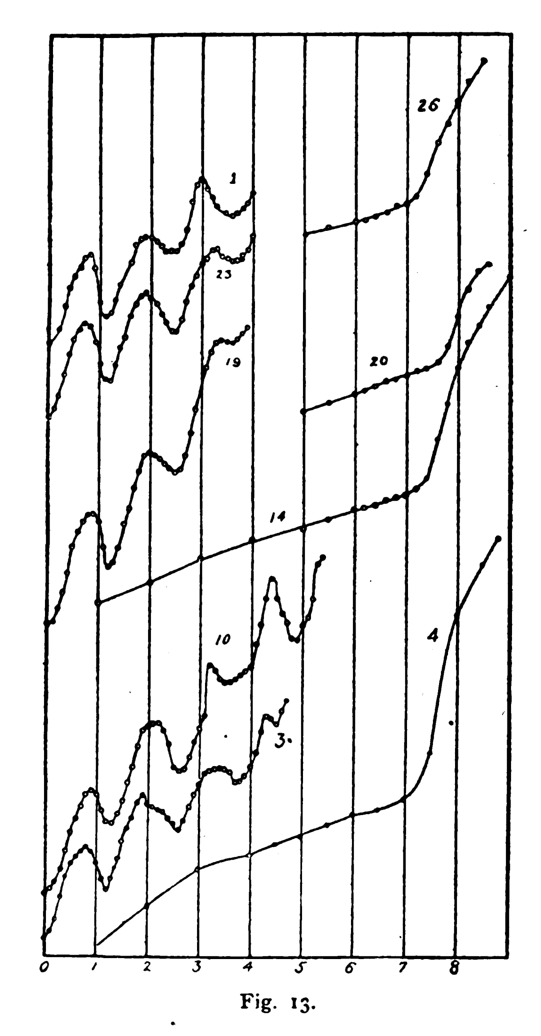


Fig. 13.

wie das z. B. beim Helium geschehen ist, unfreiwillig den Beginn der Lichtanregung statt der Ionisation festlegt. Das kurzwellige Licht ionisiert die Verunreinigungen.

Resultate.

Metalldämpfe. Da in Metalldämpfen und Edelgasen sich keine negativen Ionen bilden, vielmehr die Zusammenstöße der Elektronen mit den Atomen völlig elastisch verlaufen bis auf diejenigen, die die zur Anregung von Quantensprüngen notwendige Energie übertragen, so bieten sich der Untersuchung der Anregungs- und Ionisierungsspannungen in ihnen die kleinsten methodischen Schwierigkeiten. Die Metalldämpfe sind, soweit es sich um solche Metalle handelt, die unter 400 bis

Tabelle II. Alkalimetalle.

Metall	Resonanzspannungen beob.	ber.	Resonanzlinien $1,5\,S - 2p_2^1$	Ionisierungsspannungen beob.	ber.	Seriengrenze $1,5\,S$	Beobachter und Methode
Li	—	1,84 Volt	$\lambda = 6707,8$ Å	—	5,36 Volt	$\lambda = 2299,7$	—
Na	2,13	2,092 Volt 2,094 „	$\lambda = 5895,94$ Å $= 5889,97$ Å	5,13 Volt	5,11 Volt	$\lambda = 2412,13$	Tate u. Foote, Phil. Mag. **36**, 75, 1918. Unelast. Stoß, Charakteristik.
K	1,55	1,602 Volt 1,609 „	$\lambda = 7699,01$ Å $= 7664,94$ Å	4,1 Volt	4,32 Volt	$\lambda = 2856,7$	„
Rb	1,6	1,55 Volt 1,58 „	$\lambda = 7947,6$ Å $= 7800,3$ Å	4,1 Volt	4,15 Volt	$\lambda = 2968,4$	Foote, Roguley u. Mohler, Phys. Rev. **13**, 59, 1919. Unelast. Stoß u. Charakteristik.
Cs	1,48	1,38 Volt 1,45 „	$\lambda = 8943,5$ Å $= 8521,1$ Å	3,9 Volt	3,87 Volt	$\lambda = 3184,3$	„

Tabelle III. Aus der II. Gruppe des periodischen Systems.

Metall	Anregungsspannungen der ersten Glieder der Absorptionsserien Volt beob.	ber.	Wellenlängen der Anfangsglieder der Absorptionsserien $1,5\,S - 2p_2$ und $1,5\,S - 2P$	Ionisierungsspannung beob.	ber.	Seriengrenze $1,5\,S$	Beobachter und Methode
Magnesium	2,65 a, b 4,42 b	2,7 4,33	4572,65 Å 2853,06 Å	7,75 a 8,0 b	7,61	1621,7	a) Foote u. Mohler, Phil. Mag. **37**, 33, 1919. Unel. Stoß, Charakteristik. b) Mohler, Foote u. Meggers, Journ. Opt. Soc. Amer. **4**, 364, 1920. Unel. Stoß, Charakteristik.
Calcium	1,90 2,85	1,88 2,92	6574,59 Å 4227,9 Å	6,01	6,09	2027,56	Mohler, Foote u Stimson, Scient. Papers Bur. of Stand. Nr. 368, 1920. Unel. Stoß, Charakteristik.
Strontium	— —	1,79 2,68	6894,45 Å 4608,61 Å	—	5,67	4608,61	—
Barium	— —	1,56 2 23	7913,52 Å 5537,04 Å	—	5,19	2379,28	—
Zink	4,1 a 4,18 b 5,65 b	4,01 5,77	3076,88 Å 2139,33 Å	9,3 a 9,5 b	9,35	1319,98	a) Tate u. Foote, Wie bei *Mg*. b) Mohler, Foote u. Meggers, Wie bei *Mg*.
Cadmium	3,88 a 3 95 b 5,35 b	3,78 5,39	3262,09 Å 2288,79 Å	8,92 a 90, b	8,95	1378,69	a) Siehe *Zn*. b) Siehe *Zn*.
Quecksilber	4,9 a 4,76 b 6,7 a 6,45 b	4,86 6,67	2537,48 Å 1849,6 Å	a) 10,38 b) 10,2	10,39	1187,96	a) Franck u. Hertz usw. Literatur siehe alter Bericht, ferner Franck u. Einsporn, loc. cit. b) Mohler, Foote u. Meggers, Wie bei *Zn*. Weiteres siehe weiter unten.

Aus der III. Gruppe des periodischen Systems.

Metall	beob.	ber.	Wellenlängen	Ionisierungsspannung beob.	ber.	Seriengrenze	Beobachter und Methode
Thallium	1,07	1,07 0,95 ?	11513 13014 ?	7,3	—	?	Foote u. Mohler. Wie bei *Mg*.

Aus der IV. Gruppe des periodischen Systems.

Metall	beob.	ber.	Wellenlängen	Ionisierungsspannung beob.	ber.	Seriengrenze	Beobachter und Methode
Blei	1,26	1,198?	10291?	7,93	—	?	Mohler, Foote und Stimson. Wie bei *Ca*

500^0 C einen merklichen Dampfdruck haben, wiederum leichter zu behandeln als die Edelgase. Ihrem elektropositiven Charakter entsprechen kleinere Abtrennungsarbeiten der Valenzelektronen, als sie die in Frage kommenden verunreinigenden Gase aufweisen. Kleine Beimengungen verursachen daher keine wesentliche Störung. Ferner liegt bei den Metalldämpfen das Absorptionsspektrum im allgemeinen im gut zugänglichen Spektralgebiet. Die Absorptionsserien sind daher bekannt, und ein Vergleich mit der Bohrschen Atomtheorie läßt sich direkt durchführen. Die Lage der Anregungsspannungen und der Ionisierungsspannungen berechnet sich aus der $h\nu$ Beziehung, und derartige Untersuchungen sind daher jetzt der Hauptsache nach eine Kontrolle des optisch gewonnenen Serienschemas und eine Methode zur Bestimmung des Wertes von h. Wir beschränken uns daher darauf, in den folgenden Tabellen die vielfach bestimmten Werte der Resonanz- und Ionisierungsspannungen der in Frage kommenden Metalle nach Gruppen des periodischen Systems getrennt anzugeben. Den gefundenen Werten werden die theoretischen gegenüber gestellt, wobei diese letzteren berechnet sind unter Benutzung des Wertes $h = 6{,}545 \cdot 10^{-24}$ erg/sec und $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ erg/sec. (Tabelle II.)

Zu bemerken ist zu dieser Tabelle, daß Lithium der Vollständigkeit halber mit aufgenommen ist, obgleich Messungen in diesem Dampf wegen seiner chemischen Eigenschaften wohl schwer auszuführen sein werden. Ferner sieht man, daß die Genauigkeit der Untersuchungen nicht genügte, um für nahe beieinander liegende Dupletlinien getrennte Anregungsspannungen nachweisen zu können. Bei Cäsium mit seinen weitgespannten Duplets hätte die Genauigkeit genügen müssen, jedoch hat sich nur die kurzwelligere Komponente bei dem Verfahren des unelastischen Stoßes bemerkbar gemacht. Der Nachweis der getrennten Anregung sollte jedoch, trotzdem das langwelligere Glied des Duplets schwächer ist, unter geeigneten Versuchsbedingungen gelingen.

Als Gesamtresultat dieser vielen Untersuchungen ergibt sich ein Wert von $h = 6{,}56 \cdot 10^{-27}$ erg/sec. Seine Genauigkeit erreicht beinahe diejenige der Präzisionsbestimmungen. Ferner verdient hervorgehoben zu werden, daß bei den Untersuchungen über Thallium und Blei das Serienschema nicht bekannt ist und somit die Untersuchungen über Elektronenstoß die optisch unbekannte Grenze der Absorptionsserie vorausberechnen lassen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Friedrich Adler, Ortszeit, Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik; eine Untersuchung über die Lorentzsche und die Einsteinsche Kinematik. XVI u. 237 S. mit Figuren. Wien 1920, Verlag der Wiener Volksbuchhandlung. M. 40.—.

Die Schrift behandelt kritisch die Kinematik des speziellen Relativitätsprinzips. Der Verfasser beansprucht, in der Einsteinschen Abhandlung von 1905 verschiedene Fehlschlüsse aufgedeckt und das Bestehen eines ausgezeichneten Bezugssystems erwiesen zu haben.

Im ersten Kapitel wird, um den mathematischen Apparat bereitzustellen, ein ruhendes Bezugssystem K zugrunde gelegt. Bei der Ableitung der Transformationsgleichungen wird zunächst die „Voigtsche Ortszeit" verwandt, welche noch keine Raum- und Zeitkontraktionen enthält. Zwei Systeme S und S', welche sich in K mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen bewegen, werden als gleichwertig erkannt. Damit sich auch beim Übergang zwischen zwei beliebigen Systemen Kugelwellen in Kugelwellen transformieren, müssen entweder die Zeitkoordinate t und die der Bewegung parallele x-Koordinate, oder die zur Bewegung senkrechten y- und z-Koordinaten variiert werden. Die erste Annahme führt zu den Einsteinschen Transformationsgleichungen; die zweite entspricht einer Dilatation senkrecht zur Bewegungsrichtung, und ist als Sonderfall in einer von H. A. Lorentz angegebenen Transformation enthalten, welche aus der Einsteinschen durch eine Streckung aller 4 Koordinaten im Verhältnis l hervorgeht. Über den Wert von l kann nur die Dynamik eine Entscheidung liefern.

Im zweiten Kapitel werden ausführlich die Begriffe der Ortszeit, Systemzeit und Zonenzeit erläutert. Die „Zonenzeit" ist eine durch Konvention ausgezeichnete Ortszeit, die überall innerhalb eines gewissen Gebietes verwendet wird; die „Systemzeit" dagegen ist der Inbegriff aller Ortszeiten dieses Gebietes. Um die Uhren nach Systemzeit zu stellen, verwendet Einstein die Methode der Lichtsignale. Zur Herstellung der Zonenzeit hingegen kann man sich einer Uhr bedienen, die am Orte der Normaluhr mit dieser verglichen, und dann an andere Orte des Systemes gebracht wird. Freilich wäre diese „Übertragung der Zeit durch Konvektion" mit einem Fehler behaftet, wenn — wie Einstein annimmt — der Gang der Uhren von deren Translationsgeschwindigkeit abhinge; der Verfasser leugnet jedoch das Bestehen einer solchen Abhängigkeit.

Es wird sodann eine Methode der galvanischen Längenvergleichung angegeben, bei welcher — im Hinblick auf die Lorentz-Kontraktion — die Längen zweier relativ zueinander bewegter Stäbe direkt verglichen werden sollen: „An den Endpunkten der zu vergleichenden Stäbe seien isoliert Kontakte — metallische Schneiden angebracht. Die beiden Schneiden

eines Stabes seien durch einen Metallfaden verbunden, der bei einem der Stäbe durch ein Element, beim anderen durch ein Galvanometer führt. Wir können uns Stab und Element, bzw. Stab und Galvanometer miteinander beweglich denken. Läßt man nun die beiden Stäbe (bzw. deren Schneiden) übereinander weggleiten, so sollen sie im Falle, daß ein Ausschlag am Galvanometer auftritt, als ‚gleich lang' bezeichnet werden." Mir scheint nun — selbst als Gedankenexperiment — eine solche galvanometrische Längenvergleichung nicht möglich zu sein. Denn offenbar müssen die Schneiden eine gewisse Breite (b) besitzen, damit der Strom Zeit hat, durch das Galvanometer zu fließen; ist v die Relativgeschwindigkeit der Stäbe, a ihre Länge, so muß die Zeit b/v mindestens gleich $a/2c$ sein, mithin b mindestens gleich $1/2 a \cdot \beta$, wo $\beta = v/c$. Andererseits soll aber kein Strom durch das Galvanometer fließen, wenn einer der Stäbe eine Lorentz-Kontraktion erfahren hat; es müßte also b kleiner als $1/2 a \beta^2$ sein. Da $\beta < 1$, so ist diese Bedingung mit der ersten nicht vereinbar. Schon aus diesem Grunde kann die Methode nicht zum Ziele führen.

Nach diesen Vorbereitungen werden im dritten Kapitel die Einsteinsche Transformation und das Additionstheorem der Geschwindigkeit als Ausgangspunkt gewählt. Es werden drei Systeme K, S, S' betrachtet; anfangs sollen sie sich in relativer Ruhe befinden; in Bewegung gesetzt, sollen S und S' entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten in bezug auf das „Symmetralsystem" K besitzen. Es werden die Abgangszeiten bestimmt; während dieselben für alle Punkte von K gleich null sind, ordnen sich den Punkten von S und S' im allgemeinen Ortszeiten des Abganges zu, welche von null und voneinander verschieden sind. Es müssen also die Zeiger der Uhren in S und S', damit die Uhren die Systemzeit anzeigen, schon anfangs dementsprechend gestellt werden. Aus dieser Differenz der Abgangszeiten entspringen Zeitdifferenzen, welche nichts mit dem Einfluß der Konstruktion oder der Bewegung der Uhren auf ihren Gang zu tun haben. Jedoch mit den Uhren von K verglichen, weisen sowohl die Uhren von S wie diejenigen von S' einen langsameren Gang auf. K ist dadurch ausgezeichnet, daß seine Uhren am schnellsten gehen, d. h. daß es die kleinste Zeiteinheit hat. Während nun Einstein den verschiedenen Gang der Uhren, welche in den verschiedenen Systemen die Systemzeiten anzeigen, als Abhängigkeit des Ganges von der Geschwindigkeit der Translation denkt, besteht nach Ansicht des Verfassers eine solche Abhängigkeit nicht. Vielmehr müssen zwei Uhren, damit sie in zwei ungleichwertigen Systemen die Systemzeiten anzeigen, eine etwas verschiedene Konstruktion besitzen; auch in Ruhe nebeneinder befindlich, würden sie nicht gleich beschaffen sein, sondern verschieden gehen. Es wird somit die gerade vom relativischen Standpunkte aus paradoxe Folgerung Einsteins bestritten, daß zwei Uhren gleicher Beschaffenheit und anfangs gleicher Zeigerstellung eine Standdifferenz aufweisen sollen, wenn sie nach relativer Bewegung gegeneinander sich wiederum treffen; die Fehlschlüsse, welche Einstein zu seinem „Uhrenparadoxon" geführt haben, werden ausführlich erörtert.

Wie die Zeiteinheit, so kann auch die Längeneinheit zur Definition des ausgezeichneten Bezugssystems dienen; doch wird hier die oben beanstandete Methode der galvanischen Längenvergleichung herangezogen.

Von Einstein wird zur Definition der Zeiteinheit implizite die Lichtuhr verwandt; durch Konvention wird dabei in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen der Lichtgeschwindigkeit der gleiche Wert zugeschrieben. Wenn so über die Lichtgeschwindigkeit, und außerdem über das Längenmaß, verfügt ist, ist das Zeitmaß mit bestimmt; man kann dann nicht mehr verlangen, daß es in verschiedenen Systemen durch gleich beschaffene Uhren zu verwirklichen sei. Andererseits ist es jedoch zulässig, außer dem Längenmaß das Zeitmaß festzulegen, indem man fordert, daß die Zeiteinheit vom Bezugssystem unabhängig sei. Dann erhält die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Systemen verschiedene Werte (vom Referenten wurde dieser Weg schon in der 2. Auflage von Band II, s. Theorie der Elektrizität [1908] angegeben), während der Gang der Uhren von der Systemgeschwindigkeit unabhängig bleibt. Da also die Methode der Zeitübertragung durch Konvektion einwandsfrei ist, kann man in den verschiedenen Systemen die Zonenzeit neben der Systemzeit einführen. Aus der Verschiedenheit der Zeigerstellungen kann man auf die Bewegung des Systems schließen. Ausgezeichnet ist das Bezugssystem, in welchem die Systemzeit überall gleich der Zonenzeit ist.

Durch die Umstände ist der Verfasser verhindert worden, seine kritischen Untersuchungen auf die allgemeine Relativitätstheorie auszudehnen. Statt sich auf die Bemerkung zu beschränken, die spezielle Relativitätstheorie sei ein „Grenzfall" der allgemeinen, sollten die Relativisten die paradoxen Hypothesen der Einsteinschen Abhandlung von 1905 vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie aus erörtern. Da hier die Lichtgeschwindigkeit mit wachsendem Schwerpotentiale zunimmt, und da nach dem Äquivalenzprinzip die Geschwindigkeitszunahme der Vermehrung des Schwerepotentiales äquivalent ist, so folgt auch auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie, daß die Lichtgeschwindigkeit um so größer sein muß, je schneller das System sich bewegt. Ausgezeichnet ist dasjenige System, in welchem die Lichtgeschwindigkeit den kleinsten Wert hat. Dabei bleiben die Naturgesetze in allen Systemen die gleichen.

M. Abraham.

K. Fajans, Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen. (Sammlung Vieweg, Heft 45.) Dritte Auflage. gr. 8⁰. VIII u. 124 S. Mit 12 Abbildungen u. 11 Tabellen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. Geheftet M. 6.50 u. Teuerungszuschlag.

Das ausgezeichnete Buch von Fajans, das die durch die radioaktive Forschung entstandene neuere Lehre von den chemischen Elementen behandelt, liegt schon in der dritten Auflage vor. Die erste Auflage, die 1919 erschien, ist in dieser Zeitschrift ausführlich von K. Bergwitz referiert worden (21, 167, 1920). Es mag deswegen hier genügen, auf die Unterschiede der beiden Ausgaben hinzuweisen.

Es werden jetzt neu die grundlegenden, ungemein wichtigen Untersuchungen von Rutherford besprochen, nach welchen durch α-Bombardement aus Stickstoff und Sauerstoff neben H-Teilchen auch $\overset{3}{He}{}^{++}$-Partikel, d. h. die Kerne eines mit dem gewöhnlichen Helium isotopen Elementes (Atomgewicht 3 statt 4) entstehen.

In einem Anhange sind ferner die Versuche von Aston behandelt. Nach einer sehr klaren Darstellung des Astonschen Massenspektrographen werden die damit erhaltenen Ergebnisse dargestellt und eine Übersicht über die bisher gefundenen Isotope der gewöhnlichen Elemente gegeben.

Trotz des Einspruches von anderer Seite hält der Verfasser, wie mir scheint, vorläufig mit Recht, auf Grund seiner Überlegungen an der Definition fest: „Ein chemisches Element ist ein Stoff, der durch kein Mittel in einfachere Bestandteile zerlegt und nicht als Gemisch anderer Stoffe erkannt werden kann". Hierbei muß man allerdings heute vom Stickstoff und Sauerstoff absehen. Edgar Meyer.

Tagesereignisse.

AEF

Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen.

Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen (Adresse: Elektrotechnischer Verein, Berlin W 57, Potsdamerstr. 68) stellt den Entwurf XX, Bezeichnungen für Vektorgrößen, gemäß § 4, Abs. 3 seiner Satzung, zur Beratung und lädt die beteiligten Vereine ein, ihm das Ergebnis ihrer Beratungen bis Mitte Januar 1922 mitzuteilen. Zur gleichen Frist kann auch jedes Mitglied der beteiligten Vereine, wie auch sonst jedermann, sich zu dem Entwurf äußern. Es wird gebeten, von Äußerungen in Zeitschriften dem AEF stets wenigstens einen Abdruck zu senden.

Entwurf XX. Bezeichnungen für Vektorgrößen.

1. Vektoren werden mit (kleinen oder großen) Frakturbuchstaben bezeichnet: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$

   Zusatz 1: In besonderen Fällen können Vektoren auch durch Überstreichen gekennzeichnet werden, z. B.: $\overline{r}$, $\overline{\omega}$.

   Zusatz 2: Soll ein Vektor durch seinen Anfangspunkt A und seinen Endpunkt B dargestellt werden, so schreibt man $\overrightarrow{AB}$.
2. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ wird mit $|\mathfrak{A}|$ bezeichnet; wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, auch mit A.
3. Der zum Vektor $\mathfrak{A}$ gehörige Einheitsvektor wird mit A^0 bezeichnet: $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{A}^0$. In besonderen Fällen kann der Einheitsvektor auch mit dem entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden: $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\mathfrak{a}$.
4. Zur Darstellung der Vektorsummen und Vektordifferenzen dienen die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.
5. Das skalare Produkt zweier Vektoren wird dadurch bezeichnet, daß man die beiden Vektoren nebeneinander schreibt: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Nötigenfalls sind Vektorsummen, Vektordifferenzen und skalare Produkte in runde Klammern einzuschließen: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$. Skalare Faktoren können auch durch einen Punkt abgetrennt werden: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$.

   Zusatz: $\mathfrak{A}^2$ bedeutet das skalare Produkt des Vektors $\mathfrak{A}$ mit sich selbst.
6. Das Vektorprodukt zweier Vektoren wird dadurch bezeichnet, daß man die beiden Vektoren nebeneinander schreibt und in eckige Klammern einschließt: $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})]$.

   Zusatz: Das Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ kann durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ bezeichnet werden.
7. Für den Gradienten des Skalars φ, für die Divergenz und den Rotor des Vektors $\mathfrak{A}$ werden die Bezeichnungen grad φ, div $\mathfrak{A}$, rot $\mathfrak{A}$ benutzt.

   Zusatz 1: Der Rotor des Rotors von $\mathfrak{A}$ wird mit rot rot $\mathfrak{A}$ bezeichnet.

   Zusatz 2: Soll von dem skalaren Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Gradient gebildet, dabei aber nur $\mathfrak{A}$ als veränderlich, $\mathfrak{B}$ als konstant betrachtet werden, so wird dies durch $\text{grad}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ausgedrückt.
8. Der Hamiltonsche Operator wird mit ∇ (sprich Nabla) bezeichnet. Wenn seine Anwendung auf Gradienten, Divergenzen, Rotoren führt, sind in den Rechnungsergebnissen die in 7. vorgeschlagenen Bezeichnungen zu bevorzugen. ∇^2 kann durch $\triangle$ ersetzt werden.

   Zusatz: Wenn in $\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ nur der Vektor $\mathfrak{A}$ als veränderlich, $\mathfrak{B}$ als konstant betrachtet werden soll, so wird dies durch $\nabla_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ausgedrückt; das Gleiche gilt in entsprechenden Fällen bei anderen Produktbildungen mit ∇.
9. Die an Unstetigkeitsflächen (Sprungflächen) den Begriffen grad φ, div $\mathfrak{A}$, rot $\mathfrak{A}$ und ∇ entsprechenden Differenzenbildungen werden mit Grad φ, Div $\mathfrak{A}$, Rot $\mathfrak{A}$ (große Anfangsbuchstaben) und $\overline{\nabla}$ bezeichnet.
10. Die Grundvektoren (drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren) werden mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnet.
11. Die vektorielle Projektion eines Vektors $\mathfrak{A}$ auf einen andern $\mathfrak{B}$ wird mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$, die vektorielle Projektion auf eine Gerade x mit $\mathfrak{A}_x$ bezeichnet, dagegen die skalaren Komponenten in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit

$$A_x, A_y, A_z.$$

Wenn die Richtungen von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit denen der Achsen x, y, z übereinstimmen, so ist

$$\mathfrak{A}_x = A_x\,\mathfrak{i},\; \mathfrak{A}_y = A_y\,\mathfrak{j},\; \mathfrak{A}_z = A_z\,\mathfrak{k};$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_z = A_x\,\mathfrak{i} + A_y\,\mathfrak{j} + A_z\,\mathfrak{k}.$$

Zusatz: In besonderen Fällen können die skalaren Komponenten auch mit anderen passend gewählten lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k},\quad \overline{\omega} = p\,\mathfrak{i} + q\,\mathfrak{j} + r\,\mathfrak{k}.$$

Zu diesem Entwurf werden Erläuterungen gegeben von Fr. Breisig, Fr. Emde, Hamel, E. Jahncke, A. Korn, Reißner, R. Rothe und K. W. Wagner. Diese sind publiziert: Elektrotechn. Zeitschr. **42**, 659, 1921.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Göttingen und Leiter der anorganisch-chemischen Abteilung des Physikalisch-Chemischen Laboratoriums der Siemens-Halske A.-G. in Berlin-Siemensstadt Dr Ernst Wilke-Dörfurt zum ord. Professor der Chemie an der Bergakademie Clausthal, der Vorstand der Chemischen Abteilung an der Universität Arizona Professor P. H. M. P. Brinton zum Professor für analytische Chemie an der Universität Minnesota, K. C. Browning zum Professor der Chemie und Metallurgie am Artillery College, dem früheren Royal Ordnance College, in Woolwich, der Abteilungsvorsteher am Chemischen Laboratorium der Universität Heidelberg Professor Dr. Ernst Müller in gleicher Eigenschaft an der Universität Kiel, Dr. Robert Robinson zum ord. Professor für Chemie an der St. Andrews Universität.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Wien Hofrat Dr. Viktor v. Lang.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. | 1. August 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 17 am 5. August 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anomaler Zeemaneffekt und Seriensysteme bei *Ne* und *Hg*.

Von A. Landé.

Inhalt: § 1. Spektroskopische Aufspaltungsregeln im Magnetfeld. § 2. Das Neonspektrum. § 3. Das Quecksilberspektrum.

§ 1. Die quantentheoretisch begründete Synthese der anomalen Zeemantypen aus magnetischen Termen[1]) läßt sich, unabhängig von jeder theoretischen Deutung als spektroskopische Tatsache gefaßt, wie folgt darstellen. Die Schwingungszahl ν_0 einer Spektrallinie ist die Differenz zweier Terme W und W'. Durch ein magnetisches Feld wird jeder Term W für sich in mehrere Einzelterme $W+Z$, zerspalten, wobei die dem Feld H proportionalen Zusatzschwingungszahlen Z eine Anzahl verschiedener Werte annehmen. Eine bestimmte Aufspaltungslinie (Parallel [π]- oder Senkrecht [σ]-Komponente bei transversaler Beobachtung) hat also die Schwingungszahl

$$\left.\begin{aligned}\nu &= (W+Z)-(W'+Z') = \\ &= (W-W')+(Z-Z') = \nu_0 + \Delta\nu.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Daher ist ihr Abstand $\Delta\nu$ vom Ort der unzerspaltenen Linie

$$\Delta\nu = Z - Z'. \quad (1')$$

Die für einen Term W charakteristische Reihe der magnetischen Aufspaltungsterme Z berechnet man auf folgende Weise. Jeder Term W wird in der Spektroskopie durch gewisse Buchstaben (s, p, d..) und Indizes (p_1, p_2, p_3..) bezeichnet. Statt dessen charakterisieren wir ihn durch (zunächst zwei) ganze Zahlen n und k (siehe die von Sommerfeld[2]) übernommene Zuordnung (Teil I Tabelle 2) und behaupten:

Zum Term n, k gehört die Wertereihe

$$\left.\begin{aligned} &Z = m\cdot\omega_0\cdot g \text{ mit} \\ &m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm k \\ &\text{bei Einfach- und Triplettermen,} \\ &m = \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \pm (k-\tfrac{1}{2}). \\ &\text{bei Dublettermen,}\end{aligned}\right| \quad (2)$$

wobei

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{H}{4\pi c}, \quad (2')$$

worin g eine unten noch näher zu bestimmende Funktion von n und k ist, und ω_0 den Abstand der σ-Komponente in Wellenzahlen von der Bildmitte im normalen Zeemantriplett bei der Feldstärke H angibt. Es wird also nach (1') der Abstand $\Delta\nu$ einer Komponente von der Bildmitte im Maß ω_0:

$$\Delta\nu/\omega_0 = m\cdot g - m'\cdot g'.$$

Die $s, p, d, \ldots$ Terme besitzen der Reihe nach die Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$, für welche die übliche Serienkombinationsregel gilt:

A) Es werden nur die Terme kombiniert, bei denen $n - n' = \pm 1$ ist.

Für die Zahlen k bzw. k' der beiden Terme gilt ferner nach Sommerfeld l. c. die Auswahlregel:

B) Es werden nur die Terme kombiniert, bei denen $k - k' = 0$ oder $= \pm 1$ ist.

Wir ergänzen diese Regel durch den Zusatz:

B') Die Kombination $k = 0 = k'$ fällt aus.

C) Es treten allein diejenigen σ- und π-Komponenten wirklich auf, bei denen $m - m' = \pm 1$ ist (σ-Komponenten), oder bei denen $m - m' = 0$ ist (π-Komponenten).

C') Die Kombination $m = m'$ bei $k - k' = 0$ fällt aus (Teil I § 5).

Man konstruiert nach (1')(2) die Lagen der Zeemankomponenten $\Delta\nu$ aus den Aufspaltungstermen Z und Z' mit Hilfe des folgenden Schemas (3) (3'). Man schreibt zunächst die Wertereihe $m\cdot g$ und $m'\cdot g'$ der beiden Terme W und W' hin, gleiche m untereinander (Beispiel Tabelle 3):

1) A. Landé, Über den anomalen Zeemaneffekt, Teil I. Zeitschr. f. Phys. **5**, 231, 1921, zitiert als Teil I. Dort ist in Gl. (4') der Druckfehler $\omega/\omega_0 =$ zu verbessern in $\varepsilon =$. In Tab. 3 bei (sd_2) ist $\sigma = 12/6$ zu ergänzen.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **63**, 221, 1920.

Einfach- und Tripletterme
$$\left\{\begin{array}{c} -kg,\ -(k-1)g, \ldots, -1g,\ 0,\ 1g, \ldots, (k-1)g,\ kg \\ \searrow\ \downarrow \quad \times\ \times\ \downarrow\times\downarrow\times\downarrow\times\ \times\ \downarrow\ \swarrow \\ -k'g' \quad , \ldots\ -1g', 0,\ 1g', \ldots\ k'g' \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Dubletterme
$$\left\{\begin{array}{c} -(k-\frac{1}{2})g,\ -(k-\frac{3}{2})g, \ldots, -\frac{1}{2}g,\ \frac{1}{2}g,\ \ldots, (k-\frac{3}{2})g,\ (k-\frac{1}{2})g \\ \searrow \quad \downarrow\ \times\ \ \times\downarrow\times\downarrow\times\ \times \quad \downarrow\ \swarrow \\ -(k'-\frac{1}{2})g', \ldots, -\frac{1}{2}g',\ \frac{1}{2}g',\ \ldots\ (k'-\frac{1}{2})g' \end{array}\right\} \qquad (3')$$

Bildet man nun in (3) (3′) die Differenz zwischen zwei Gliedern der ersten und zweiten Zeile, die durch einen senkrechten (bzw. 45° geneigten) Pfeil verbunden sind, $m - m' = 0$ (bzw. $m - m' = \pm 1$), so erhält man nach (2) und (C) die Werte $\Delta\nu/\omega_0$ für die π-Komponenten (bzw. σ-Komponenten). Dabei ist (C′) zu beachten. Wegen (B) folgt u. a. als Regel für die Anzahl der so erhaltenen Komponenten:

α) Bei der magnetischen Aufspaltung einer Dublettlinie ist die Anzahl der π-Komponenten (d. i. die Anzahl der senkrechten Pfeile in (3′)) doppelt so groß wie die kleinere der beiden Zahlen k und k'.

β) Bei der magnetischen Aufspaltung einer Triplettlinie ist die Anzahl der π-Komponenten stets gleich $k + k'$. Doppelt so groß ist die Anzahl der σ-Komponenten.

β′) Speziell ist im Falle $k - k' = 0$ eine π-Komponente in der Bildmitte nicht vorhanden (C′).

Ferner sieht man aus (3) (3′) sofort:

γ) Die π-Komponenten folgen einander in gleichen Abständen $\Delta = g - g'$. Dasselbe gilt für die rechts und die links der Bildmitte liegenden Gruppen der σ-Komponenten.

γ′) Dabei ist im Sonderfall (β′) eine π-Komponente in der Bildmitte ergänzt zu denken.

Regeln für die relative Intensität der einzelnen Komponenten heißen für $k - k' \neq 0$ [bzw. $k - k' = 0$]:

δ) Diejenigen π-Komponenten sind die stärksten [schwächsten], welche durch Pfeile in der Mitte des Übergangsschemas (3) (3′) dargestellt werden; diejenigen σ-Komponenten sind die stärksten [schwächsten], welche durch Pfeile am rechten und linken Rande des Übergangsschemas dargestellt werden.

Die Lage der einzelnen Komponenten hängt noch von den Werten der Faktoren $g(k, n)$ ab. Bei den Dubletts fanden wir in Teil I die einfache Zusammensetzung $g = k : (n - \frac{1}{2})$ dieses Faktors, bei den Tripletts kompliziertere Funktionen (Teil I Gl. 12). Letztere werden wir demnächst im Teil II zusammen mit denen der sogenannten Einfachterme zu einheitlichen Formeln zusammenfassen. Die quantentheoretische Begründung obiger magnetooptischer Kombinationsregeln und ihre Anwendung auf die Zerlegungen der vollständigen Dubletts und Tripletts war im Teil I gegeben, mit Ausnahme von (B′), deren Erklärung noch aussteht.

Wir wollen jetzt fortschreiten zu dem gemischten System von Einfach- und Triplettermen, wie es beim *Hg*-Spektrum und beim *Ne*-Spektrum vorliegt.

§ 2. F. Paschen[1]) hat nach Vorarbeiten von Watson[2]) und Meißner[3]) auf Grund seines umfangreichen Beobachtungsmaterials fast sämtliche 800—900 Bogenlinien des Neonspektrums in ein System von Serien eingeordnet und in Terme aufgelöst. Er erhielt vier s-Termfolgen, zehn p-, vier s'- und acht d-Termfolgen. Diese kombinieren aber nur in begrenzter Auswahl. Zum Beispiel treten die zehn p-Termfolgen mit den vier s-Termfolgen nicht zu $10 \times 4 = 40$, sondern nur zu 30 Hauptserien zusammen usw., in Analogie zu Rydbergs Auswahl der „vollständigen" Dubletts und Tripletts.

Die vorkommenden Serien sind in Paschens Tabelle IV zusammengestellt oder auch aus W. Grotrians[4]) übersichtlicher graphischer Darstellung zu ersehen. Wir suchen nun in dieser Serienauswahl das Wirken desselben quantentheoretischen Auswahlprinzips (B), das von Sommerfeld[5]) zur Ordnung der vollständigen Dubletts und Tripletts durch formale Einführung „innerer" Quantenzahlen angewendet wurde (siehe Teil I § 1). Aus der Serienauswahl im Neonspektrum kann man durch einiges Probieren rückwärts auf die „innere" Quantenzahl k jedes Terms schließen auf Grund von (B) (B′) und gelangt so zu der in Fig. 1 gegebenen Zuordnung. An den linken Rand der horizontalen Linien sind die Zahlenwerte k angeschrieben, an den rechten Rand die zugehörigen Terme in Paschens Bezeichnung. Diese Zuordnung findet sich dann nachträglich bestätigt, wenn wir gemäß (B) Pfeile zwischen je zwei horizontalen Linien ziehen, welche gleiches k oder

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **60**, 405, 1919; **63**, 201, 1920.
2) H. E. Watson, Proc. Cambridge Phil. Soc. **16**, 130, 1902.
3) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **58**, 333, 1919.
4) W. Grotrian, diese Zeitschr. **21**, 639, 1920.
5) A. Sommerfeld, l. c. und auch: Atombau und Spektrallinien, 2. Auflage, S. 540.

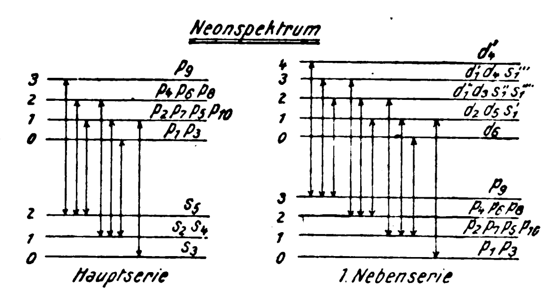


Fig. 1.

um ± 1 differierendes k besitzen. Nach (B) sind Übergänge zwischen $k = 0$ und $k' = 0$ auszulassen. Diese Pfeile geben dann in der Tat die beobachteten Serien richtig wieder, bis auf geringe Ausnahmen, die auch in dem Schema von Grotrian störend auftraten. Es sind nämlich zwei Linien schwacher Intensität vorhanden, welche Paschen einer in das Schema nicht hineinpassenden Serie $2p_2 - md_4$ zuschreibt; es fehlen ferner in der Beobachtung die Serienlinien $2p_2 - md_1''$, $2p_8 - md_1''$, $2p_5 - md_5$, $2p_7 - md_5$, $2p_9 - ms_1''''$. Gegenüber den über hundert Serien, die nach obiger Zuordnung k richtig und vollständig eintreffen, fallen jedoch diese 5 fehlenden nicht ins Gewicht. „Es wäre aber wohl wünschenswert, nach diesen fehlenden Serien noch einmal besonders zu suchen" (Grotrian).

Aus der getroffenen Zuordnung k, indirekt also aus dem vollständigen Schema der Kombinationsserien des Neons, können nun nach § 1 eine Reihe von Aussagen über die zu erwartenden anomalen Zeemantypen der betreffenden Serien gemacht werden.

Zunächst ist auf Grund von (β) die Anzahl der π- und σ-Komponenten für jede Termkombination eindeutig angebbar. Zum Beispiel muß die Serie ($s_5\, p_4$) mit $k = 2$, $k' = 2$ im Magnetfeld $2 + 2 = 4$ π-Komponenten und 4 rechte und 4 linke σ-Komponenten zeigen. Wegen $k = k'$ ist in der Bildmitte keine π-Komponente vorhanden (β').

Die Einzelheiten des Zeemanbildes hängen von den charakteristischen Faktoren g und g' der beteiligten Terme ab. Da aber derselbe Term mit seinem g in verschiedenen Kombinationen wiederkehrt, genügt es, sein g aus einer dieser Kombinationen zu analysieren, um dieses g bei der Bildung andrer Kombinationen verwenden zu können. Kennt man z. B. den Wert g für einen Term (s_4 hat $g = \frac{3}{2}$), und findet in dem Zeemanbild der Kombination dieses Terms mit einem andern den Abstand $\varDelta$ zwischen je zwei σ-Komponenten (die Serie ($s_4\, p_8$) hat im Zeemanbild den Abstand $\varDelta = \frac{1}{3}$ zwischen je zwei σ-Komponenten), so ist wegen (γ) sofort auch $g' = g - \varDelta$ bekannt (p_8 hat $g' = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$). Auf diese Weise gelangt man sukzessive dazu, aus wenigen exakt beobachteten Zeemantypen die g-Werte aller Terme zu analysieren und durch ihre wechselseitige Kombination die übrigen Zeemantypen vorauszusagen oder unsicher beobachtete Typen zu kontrollieren. Dabei kann stets das Schema (3') als sicherer Führer benutzt werden bzw. die Regeln (β) (β') (γ) und die Intensitätsregel (δ).

Zum Beispiel sieht man einem von der Beobachtung gelieferten Typ sofort an, ob er einer Richtigstellung bedarf. Wenn etwa als Zeemantyp von ($p_6\, s_5$) angegeben wird: π-Komponenten bei $\pm \frac{2}{6}$, $\pm \frac{3}{6}$, σ-Komponenten bei $\pm \frac{6}{6}$, $\pm \frac{7}{6}$, $\pm \frac{9}{6}$, $\pm {}^{10}/_6$, so findet sich Regel (γ) nicht erfüllt und fordert eine Korrektion des ja oft als unsicher bezeichneten Versuchsergebnisses.

Auf dem angegebenen Wege gelangt man zur Tabelle 1 für die magnetischen Aufspaltungsreihen $m \cdot g$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k$) der verschiedenen Neonterme und durch Kombination nach (3') zu den sichtbaren Aufspaltungsbildern in der Hauptserie (Tabelle 2). In Tabelle 2 sind die theoretischen Aufspaltungen und die experimentellen von Lohmann[1]) und Takamine und Yamada[2]) zusammengestellt,

Tabelle 1

für $m \cdot g$ bei Neon.

Term	k \ m	0	± 1	± 2	± 3
p_9	3	0	$\pm {}^4/_3$	$\pm {}^8/_3$	$\pm {}^{12}/_3$
p_4	2	0	$\pm {}^4/_3$	$\pm {}^8/_3$	
$p_6\, p_8$	2	0	$\pm {}^7/_6$	$\pm {}^{14}/_6$	
p_2	1	0	$\pm {}^4/_3$		
p_7	1	0	$\pm {}^2/_3$		
$p_5\, p_{10}$	1	0	± 1		
$p_1\, p_3$	0	0			
s_5	2	0	$\pm {}^3/_2$	$\pm {}^6/_2$	
s_4	1	0	$\pm {}^3/_2$		
s_2	1	0	± 1		
s_3	0	0			

und zwar bereits in der von Krönert[3]) auf die richtigen Rungeschen Nenner und auf ganzzahlige Zähler reduzierten Form.

Auch die relativen Intensitäten der π- und σ-Komponenten innerhalb eines Typs können nach Regel (δ) angegeben werden.

Für die Typen der 1. Nebenserie können gemäß der Zuordnung k in Fig. 1 die Anzahl der π- und σ-Komponenten nach (β) (β') eben-

1) W. Lohmann, Dissertation, Halle 1907.

2) Takamine u. Yamada, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. 7, 277, 1913—1914.

3) J. Krönert, Dissertation, München 1920 (ungedruckt); vgl. auch A. Sommerfeld l. c. § 4.

Tabelle 2.

Serie	Theorie	Beobachtung
$s_2 p_1$ $s_2 p_{10}$ $s_3 p_5$	$\frac{(0)\ 1}{1}$	$\frac{(0)\ 1}{1}$
$s_2 p_5$ $s_2 p_3$ $s_3 p_{11}$		?
$s_3 p_2$	$\frac{(0)\ 4}{3}$	$\frac{(0)\ 4}{3}$
$s_3 p_7$	$\frac{(0)\ 2}{3}$	$\frac{(0)\ 2}{3}$
$s_4 p_1$ $s_4 p_3$	$\frac{(0)\ 3}{2}$	$\frac{(0)\ 3}{2}$
$s_4 p_2$	$\frac{(1)\ 8,\ 9}{6}$	$\frac{(1)\ 8,\ 9}{6}$ [1])
$s_4 p_7$	$\frac{4\ (5)\ 9}{6}$	$\frac{4\ (5)\ 9}{6}$
$s_2 p_2$	$\frac{(1)\ 3,\ 4}{3}$	$\frac{(1)\ 3,\ 4}{3}$
$s_2 p_7$	$\frac{(1)\ 2,\ 3}{3}$	?

Abweichende Beobachtungen von Lohmann:

1) $\frac{(1)\ 3,\ 4}{6}$ 2) $\frac{(0)\ (1)\ 6,\ 7,\ 8}{6}$; 3) $\frac{(1)\ (2)\ 6,\ 7,\ 8,\ 9}{6}$.

Die eingeklammerten Ziffern bedeuten π-Komponenten. Die Pfeile über den Ziffern sind in der Richtung der theoretisch zu erwartenden Intensitätszunahme gezogen (Pfeilspitze über der stärksten σ- bzw. π-Komponente).

Tabelle 2a.

Serie	Theorie	Beobachtung
$s_5 p_5$ $s_5 p_{10}$	$\frac{(0)\ (1)\ 2,\ 3,\ 4}{2}$	$\frac{(0)\ (1)\ 2,\ 3,\ 4}{2}$
$s_2 p_4$	$\frac{(0)\ (1)\ 3,\ 4,\ 5}{3}$	$\frac{(0)\ (2)\ 6,\ 8,\ 9}{6}$
$s_2 p_6$ $s_2 p_8$	$\frac{(0)\ (1)\ 6,\ 7,\ 8}{6}$	$\frac{(0)\ (1)\ 7,\ 8,\ 9}{6}$
$s_4 p_4$	$\frac{(0)\ (1)\ 7,\ 8,\ 9}{6}$	$\frac{(0)\ (1)\ 7,\ 8,\ 9}{6}$ [2])
$s_4 p_6$ $s_4 p_8$	$\frac{(0)\ (2)\ 5,\ 7,\ 9}{6}$	$\frac{(0)\ (2)\ 6,\ 7,\ 9}{6}$ $\frac{(0)\ (2)\ 5,\ 7,\ 9}{6}$
$s_5 p_2$	$\frac{(0)\ (1)\ 8,\ 9,\ 10}{6}$	$\frac{(0)\ (1)\ 8,\ 9,\ 10}{6}$
$s_5 p_7$	$\frac{(0)\ 4\ (5)\ 9,\ 14}{6}$	$\frac{(0)\ 4\ (5)\ 9,\ 14}{6}$
$s_5 p_4$	$\frac{(1)\ (2)\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}{6}$	$\frac{(1)\ (2)\ 7,\ 8,\ 9,\ 11}{6}$ [3])
$s_5 p_6$ $s_5 p_8$	$\frac{(2)\ (4)\ 5,\ 7,\ 9,\ 11}{6}$	$\frac{(2)\ (3)\ 6,\ 7,\ 9,\ 10}{6}$ $\frac{(2)\ (4)\ 4,\ 7,\ 8\ \ 11}{6}$
$s_5 p_9$	$\frac{(0)\ (1)\ (2)\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}{6}$	$\frac{(0)\ (1)\ (2)\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}{6}$

falls exakt angegeben werden, die Einzelheiten der betreffenden Typen aber nur in einigen besonderen Fällen, da zur Analyse von g-Werten für die $s^{(r)}$, d und $d^{(r)}$-Terme nur wenig Material vorliegt[1]).

Bemerkenswert ist, daß die Neonterme s, p, d sich nach ihrer kleinsten Laufzahl 1,5; 2; 3 ebenso verhalten, wie auch beim *Hg* die Terme s, p, d. Nach ihrer magnetischen Aufspaltung (Tabelle 1) und nach ihren Zahlen k verhalten sie sich dagegen analog den Termen p, b, d des *Hg*.

Man kann gemäß Tabelle 1 die verschiedenen Terme des Neonspektrums entsprechend ihrer magnetischen Aufspaltung einteilen in „Einfachterme" mit $g = 1$ bzw. mit unbestimmten g (letzteres bei $k = 0$ und deshalb fehlender Termaufspaltung) und „Tripletterme" mit $g \neq 1$. Nach Tabelle 1 wären zu bezeichnen als

Einfachterme: $s_2\ s_3\ p_1\ p_3\ p_5\ p_{10}$,
Tripletterme: $s_4\ s_5\ p_2\ p_7\ p_4\ p_6\ p_8\ p_9$,

was auch Paschen l. c. S. 413 bemerkt.

Nach Paschen besteht also das Neonspektrum aus Serien kombiniert aus je zwei „Einfachtermen", Serien kombiniert aus je zwei „Tripletttermen" und Serien aus einem Einfach- und einem Tripletterm kombiniert. Jedoch ist, wie in Teil II gezeigt werden soll, eine prinzipielle Unterscheidung zwischen „Einfach"- und „Triplett"-Termen nach ihrer magnetischen Aufspaltung nicht wesentlich. Man kann nämlich zeigen, daß alle Tripletterme, auch die beim Neon auftretenden neuartigen, zusammen

1) J. Krönert bemerkt l. c., daß die von Franck und Hertz gemessene Ionisierungsspannung des Neon von 16 Volt einem Grundterm $\nu = 130\,000\ \text{cm}^{-1}$ entspricht, während der größte optisch in Erscheinung tretende Serienterm $(1{,}5\ s_5)$ $\nu = 39888$ hat. Das Neonspektrum hat also bereits „angeregte" Zustände als Grundbahnen.

mit den Einfachtermen in ihren Faktoren g einem einheitlichen Gesetz gehorchen, und daß der unter anderen resultierende Wert $g = 1$ neben gebrochenen g-Werten sachlich keinerlei bevorzugte Rolle spielt.

Diese Bemerkung gilt auch für das *Hg*-Spektrum, welches als Typus eines Einfach-Triplettseriensystems besprochen werden soll[1]).

§ 3. Das *Hg*-Spektrum wurde von Paschen, Kayser und Runge, Eder und Valenta, Stiles, Miller aufgelöst in ein System von Einfachtermen S, P, D, und Triplettermen s; $p_1\, p_2\, p_3$; $d_1\, d_2\, d_3$, die untereinander und wechselseitig kombinieren. In Fig. 2 sind diese Terme

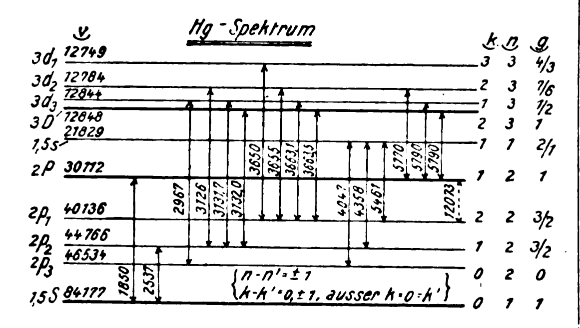


Fig. 2.

mit niedrigster Laufzahl (z. B. $1{,}5\,S$) nach ihren Wellenzahlen ν geordnet und als horizontale Grade dargestellt. An den rechten Rand der Graden sind die (nachträglich zu bestätigenden Gesamtquanten-)Zahlen k angeschrieben, die bei der Serienauswahl (B) (B'), § 1 maßgebend sind. Weiter rechts stehen die magnetischen Aufspaltungsfaktoren g (Teil I Tab. 2) bzw. $g = 1$ bei den Einfachtermen. Kombinationen sind zugelassen zwischen den Termen mit $k - k' = \pm 1$ oder $= 0$ (Auswahlregel B) unter Ausschluß von $k = k' = 0$ (B'). Die Kombinationen sind durch Pfeile dargestellt mit angeschriebener Wellenlänge λ der betreffenden Spektrallinie.

Den Termen s und S, p und P, d und D,.. sind der Reihe nach die (azimutalen Quanten-)Zahlen $n = 1, 2, 3,\ldots$ zugeordnet, für deren Änderung die Auswahlregel (A) gilt. Die von $1{,}5\,S$ ausgehenden zwei Pfeile sind die beiden Absorptionslinien $\lambda = 2537$ und $\lambda = 1849$ des *Hg*. Sie sind Resonanzlinien,

1) **Nachtrag bei der Korrektur.** Aus der Dissertation von Lohmann, die mir erst jetzt im Original zugänglich wird, ersehe ich, daß die gemessenen Intensitäten bei den *Ne*-Aufspaltungen sämtlich in voller Übereinstimmung mit den theoretischen Intensitäten (Tab. 2a) stehen. Dadurch wird die Intensitätsregel (δ) und ihre quantentheoretische Ableitung (Teil I § 5) von neuem gestützt.

da von $2p_2$ und von $2P$ nur der ganze Zurücksprung nach $1{,}5\,S$ möglich ist. Die Zustände $2p_1$ und $2p_3$ können dagegen wegen (B) und (B') weder von $1{,}5\,S$ erreicht werden noch nach $1{,}5\,S$ zurückfallen, sind also metastabil. Die Kombinationslinien $(1{,}5\,S - 2p_1)$ und $(1{,}5\,S - 2p_3)$ sind verboten $(1{,}5\,S - 2p_2)$ ist erlaubt, $(2P - 2d_1)$ ist wegen (B) verboten, $(2P - 3d_2)$ und $(2P - 3d_3)$ erlaubt; $(2p_3 - 3D)$ ist verboten, $(2p_1 - 3D)$ und $(2p_2 - 3D)$ erlaubt, in Übereinstimmung mit dem beobachteten Emissionsspektrum des Quecksilbers.

W. Miller[1]) gibt als schwachen Zugleiter von $(2\gamma_3 - 3d_3)$ die Linie $(2\gamma_3 - 3D)$ an. Man hat hier also einen Fall der Durchbrechung der Auswahlregel (B).

Aus dem vollständigen Kombinationsschema des *Hg*-Spektrums (Fig. 2). der Metastabilität von p_1 und p_3 und der Resonanz von $\lambda = 2537$ konnte also auf Grund von (B) (B') die Zuordnung der Zahlen k zu den einzelnen Termen gewonnen bzw. nachträglich bestätigt werden. Nachdem aber diese Zuordnung k festgestellt ist, können daraus theoretische Angaben über die zu erwartenden Zeemantypen der einzelnen Linien gemacht werden, zunächst über die Anzahl der π- und σ-Komponenten nach (β) (β'), § 1. Die Einzelheiten der Aufspaltungsbilder hängen noch von den g-Werten der Terme ab. In Teil I Gl. (12') sind die g-Werte für die Triplettterme bereits analysiert; für die Einfachterme ist $g = 1$ zu nehmen. Daher kann man jetzt die Zeemantypen für die gemischten Einfach-Triplettkombinationen voraussagen nach der Methode des § 1 Schema (3'). Man erwartet danach theoretisch aus den rechts in Fig. 2 angeschriebenen Aufspaltungsfaktoren g der Terme folgende Typen (Tabelle 3):

Tabelle 3.

$$\begin{matrix} S \\ p_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} & 0 & \\ -\,^3/_2 & 0 & ^3/_2 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} P \\ s \end{matrix}\left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ -\,^2/_1 & \vdots\,0 & ^2/_1 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} D \\ p_3 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & 0 & & \end{matrix}\right\}$$

$$(Sp_2)\ \frac{(0)\ 3}{2} \qquad (sP)\ \frac{(1)\ 1,\ 2}{1} \qquad (p_3D)\ \frac{(0)\ 1}{1}$$

$$\begin{matrix} D \\ p_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & -\,^3/_2 & 0 & ^3/_2 & \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} P \\ d_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} & -1 & 0 & 1 & \\ -\,^{14}/_6 & -\,^7/_6 & 0 & ^7/_6 & ^{14}/_6 \end{matrix}\right\}$$

$$(p_2D)\ \frac{(0)\ (1)\ 1,\ 2,\ 3}{2} \qquad (d_2P)\ \frac{(0)\ (1)\ 6,\ 7,\ 8}{6}$$

$$\begin{matrix} D \\ p_1 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -\,^6/_2 & -\,^3/_2 & \vdots\,0 & ^3/_2 & ^6/_2 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} P \\ d_3 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ -\,^1/_2 & \vdots\,0 & ^1/_2 \end{matrix}\right\}$$

$$(p_1D)\ \frac{(1)\ (2)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4}{2} \qquad (d_3P)\ \frac{(1)\ 1,\ 2}{2}$$

1) W. Miller, Ann. d. Phys. **24**, 105, 1907.

Die Aufspaltungen von $(p_1 D)$, $(p_2 D)$, $(p_3 D)$ sind bestätigt durch W. Miller l. c., $(d_2 P)$ durch Lohmann l. c., (Sp_2) durch Paschen[1]); auch hinsichtlich der Intensitäten. Über die Zerlegungen von (sP) und $(d_3 P)$ scheint experimentell nichts bekannt zu sein.

Zusammenfassung: In § 1 werden die früheren Ergebnisse der quantentheoretischen Zeemantermanalyse als spektroskopische Kombinations-, Polarisations- und Intensitätsregeln zusammengestellt. In § 2 und § 3 wird das vollständige Seriensystem von *Ne* und *Hg* durch eine Auswahlregel geordnet, nach Art von Sommerfelds Auffassung der „vollständigen" Dubletts und Tripletts, und aus der erhaltenen Ordnung mit Hilfe der Regeln des § 1 für jede Serie ihr Zeemantyp erhalten. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung über Anzahl, Lage und Intensität der Zeemankomponenten bestätigt den Zusammenhang zwischen den magnetischen Aufspaltungstypen und den feldlosen Linienmultiplizitäten, der früher auf quantentheoretischer Grundlage entwickelt wurde.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **35**, 877, 1911.

Frankfurt a. M., Institut für theoret. Physik.

(Eingegangen 27. Juni 1921.)

Zur Erklärung der unipolaren Leitung.

Von G. Hoffmann.

I.

Schon F. Braun[1]) hat in seinen grundlegenden Arbeiten über die unipolare Leitung in Kristallen den Nachweis zu führen gesucht, daß es sich um eine Erscheinung handelt, die ihren Sitz in der Übergangsschicht zwischen der metallischen Zuleitung und der Kristallmasse hat, aber nicht auf bekannte Ursachen— Thermoelektrizität und galvanische Polarisation—quantitativ zurückgeführt werden kann. Beide Erscheinungsgruppen spielen mit hinein, ohne ausschlaggebend beteiligt zu sein. Schon in seiner ersten Publikation konstatierte Braun durch eine Wippenschaltung, die es ermöglichte, den Kristall mit seinen Zuleitungen aus dem Stromkreis, in dem er unipolare Leitung zeigte, herauszunehmen und möglichst rasch in einen Galvanometerkreis einzuschalten, das Nichtvorhandensein einer thermoelektrischen Erregung oder Polarisation, welche „auch nur entfernt imstande wäre, die Erscheinungen zu erklären". Schärfere Nachprüfung dieser Tatsache durch Stimmgabelschaltung durch Braun und andere Autoren gab das gleiche negative Resultat. Trotzdem ist die Thermoelektrizität zur Erklärung der Wirkung der Kristalldetektoren herangezogen worden. Erst durch die kürzlich erschienene Arbeit von Ettenreich[1]) ist der thermoelektrischen Theorie der Detektorwirkung wohl endgültig der Boden entzogen worden. Ettenreich konnte nachweisen, daß die Kontaktstelle in ihren die Stromrichtung bestimmenden Eigenschaften in Zeiträumen, die nach Milliontel Sekunden zählen, den Stromschwankungen zu folgen vermag. Das sind Frequenzen, die für Temperaturänderungen unmöglich sind.

Die galvanische Polarisation, die Braun ablehnte als zur quantitativen Erklärung seiner Versuche ungeeignet, wird von Huinzinga[1]) neuerdings zur Erklärung der Gleichrichterwirkung der Kristalldetektoren herangezogen. Er prüft verschiedene Kombinationen von Kristallen unter sich und mit Metallen in Schwingungskreisen auf ihren Detektoreffekt und nimmt dann die Gleichstromcharakteristik für diese Kombinationen auf. Er findet bei zwei Kombinationen, Platinspitze—Molybdänglanz und Platin—Eisenpyrit nach Hindurchleiten von einem Milliampere in Zimmerluft nach kurzer Zeit deutlich sichtbare Spuren von chemischer Zersetzung, schließt hieraus, daß es sich bei diesen beiden Kombinationen um chemische Umsetzungen und Polarisationen auch bei der Benutzung als Detektor handele und folgert aus der Ähnlichkeit der Gleichstromcharakteristiken der übrigen Detektorkombinationen mit diesen zwei Paaren und mit der Charakteristik der elektrolytischen Zelle, daß bei allen untersuchten Detektoren die Gleichrichterwirkung ihre Ursache in einer elektrolytischen Polarisation innerhalb einer adhärierenden Feuchtigkeits- und Gasschicht findet. Diese Schicht muß nach seinen Versuchen freilich sehr schwer zerstörbar sein, denn es gelingt ihm nicht weder durch Hineinbringen des Detektors in ein gutes Vakuum noch durch Einbetten in Paraffinöl die Gleichrichterwirkung zu beeinflusssen.

Zu diesen Versuchen ist zu bemerken, daß diese in gewissen Fällen auftretenden chemischen Umsetzungen nicht eine allgemeine

1) F. Braun, Pogg. Ann. **153**, 556, 1874; Wied. Ann. **1**, 95, 1877; Wied. Ann. **4**, 476, 1878; W. A. **19**, 340, 1883.

1) R. Ettenreich, diese Zeitschr. **21**, 208, 1920.
2) Huizinga, diese Zeitschr. **21**, 91, 1920.



Erklärung bieten. Denn in sehr vielen Fällen, wo Kristalle in metallische Zuleitungen eingespannt sind und eine starke Unipolarität der Stromleitung zeigen, können viele Ampereminuten hindurchgeleitet werden, ohne den geringsten — weder elektrisch noch chemisch, noch sonstwie nachweisbaren Effekt. So hat schon Braun argumentiert. Ebenso äußert sich auch Streintz[1]) der ebenfalls die elektrochemische Flüssigkeitshäutchentheorie ablehnend meint, ein Flüssigkeitshäutchen müßte bei solchen Dauerversuchen, wenn nicht sonst zerstört, zum mindesten durch die Stromwärme verdampft sein. Einer einfachen chemischen Polarisationstheorie der Gleichrichterwirkung widerspricht auch die Tatsache, daß keineswegs bei bestimmten Materialkombinationen die bevorzugte Stromrichtung stets die gleiche ist[2]). Ja, bei dem gleichen Kristall kann an nahe benachbarten Stellen die Vorzugsrichtung verschieden sein, ein Zeichen, daß feinste Oberflächenstrukturen wesentlich mitsprechen. Sehr lehrreich ist hierfür eine Beobachtung, die Braun[3]) aus der Fülle seiner Studien angibt. Schließlich ist noch zu sagen, sollten Polarisationserscheinungen als Folge chemischer Zersetzungen die Ursache der Gleichrichterwirkung sein, so müßte mit zunehmender Frequenz eine Abnahme der Detektorwirkung sich konstatieren lassen. Hiervon ist aber nach den Ettenreichschen Erfahrungen bisher nichts zu beobachten gewesen.

II.

In der zweiten Mitteilung (l. c.) spricht Braun von der Erklärungsmöglichkeit der anomalen Erscheinungen durch Luftschichten, welche den Stromübergang vermitteln. Er sieht aber Schwierigkeiten für diese Erklärung in folgenden Erfahrungen. 1. Metalle aufeinander gelegt, selbst bei Berührung mit sehr geringem Druck zeigen keine unipolare Leitung. 2. Manche Kristallproben zeigen gar keine Einseitigkeit. 3. Eingeschmolzene Elektroden in Bleiglanz und Selen zeigen Anomalie, wenn auch geringe. 4. Frische Splitter (Bleiglanz) zeigen sofort mit Nadel berührt Anomalie. 5. Wären Luftschichten der Grund, so müßten sie sich je nach dem Leitungsvermögen der Stoffe verschieden verhalten. Trotzdem heißt es im Schlußwort dieser zweiten Mitteilung: „Die Analogie der Erscheinungen mit denjenigen, welche Gase in ihrem Verhalten

1) F. Streintz u. A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42, 1920.
2) H. Meyer, Wied. Ann. **19**, 70, 1883.
3) F. Braun, Wied. Ann. **1**, 102, unten, 1877.

gegen den Strom bieten, ist so auffallend, daß es eines besonderen Hinweises nicht bedarf." Auch in der Arbeit aus dem Jahre 1878, wo Braun im Psilomelan zwischen Platinkontakten ein möglichst reproduzierbares Beobachtungsmaterial gefunden hat, heißt es: „Je mehr ich bis jetzt die Erscheinungen verfolgt habe, desto vollkommener hat sich auf Schritt und Tritt die Analogie zu dem Verhalten der Gase gezeigt." In letzter Zeit hat Streintz[1]) eingehende Studien über unipolare Leitung in Kristallen und damit verwandten Erscheinungen veröffentlicht. Auch er entwickelt die Anschauung, daß Gaskondensatoren von molekularen Dimensionen als wirksamer Bestandteil in den Übergangsschichten anzunehmen seien, ohne ein genaueres Bild des Mechanismus zu geben.

Vor einiger Zeit habe ich[2]) nun den sicheren Nachweis geführt, daß es einen Effekt gibt, den ich als Elektronenaustritt aus Metallen unter der Wirkung hoher Feldstärken bezeichnet habe. Bei Feldstärken, die nach meinen Messungen mehrere Millionen Volt pro cm betragen, werden Elektronen aus den Leitern herausgerissen und vermögen nichtleitende Schichten — Gase, Vakuum usw. — zu durchdringen. Die kritischen Austrittsspannungen hängen vom Material ab. Stehen sich zwei verschiedene, leitende Substanzen durch engen Zwischenraum getrennt, einander gegenüber, so ist die Möglichkeit unipolarer Leitung gegeben. Bei meinen Versuchen handelte es sich um sorgfältig polierte Metallflächen, die durch winzige exakt gemessene und konstant gehaltene Abstände getrennt waren. Das Verhältnis der Stromstärken in beiden Richtungen konnte unter Umständen bis zu 1 : 100 ansteigen.

Derartig starke Ventilwirkungen sind bei Detektoranorduungen ungewöhnlich. Da die beiden Körper zur Berührung gebracht werden, und zwar bei den technischen Detektoren mit gar nicht so geringen Drucken, so stellt der Stromdurchgang sich als ein kompliziert zusammengesetzter Summenvorgang dar. Es kann Stellen geben in der Berührungszone, wo ein unmittelbarer Kontakt eingetreten ist, die Elektrizität frei von einem Körper zum andern zirkuliert und jede Gleichrichterwirkung verschwunden ist. Erst wenn der hindurchgeleitete Strom verstärkt wird, reichen diese Übergangsstellen nicht aus, es werden mit steigender Potentialdifferenz Nachbarstellen zum

1) F. Streintz u. A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42, 316 u. 367, 1920; F. Streintz, diese Zeitschr. **22**, 263, 1921.
2) G. Hoffmann, Zeitschr. f. Phys. **4**, 463, 1921.

Stromübergang mit benutzt, nichtleitende Schichten durchschlagen, wobei, wenn die Körper verschieden sind, die notwendige Potentialdifferenz je nach der Stromrichtung differiert: Der Kontakt zeigt Gleichrichterwirkung. Diese Auffassung wird der Tatsache gerecht, daß bei jedem Kristallkontakt die Gleichrichterwirkung erst oberhalb einer gewissen Stromstärke eintritt.

Es haben nun meine Versuche weiter ergeben, daß die Feldstärke, die den Elektronenaustritt ermöglicht, nicht weit davon entfernt ist, wo auch materielle Veränderungen der obersten Leiterschicht auftreten. Es reißen sich feinste Teilchen los, bilden ein mikroskopisch feines Pulver, das sich unter dem Einfluß elektrostatischer Kräfte zu Brücken für den Strom durch die Übergangsschicht zusammenballt. Diese elektrisch-mechanischen Wirkungen erschweren die Messungen außerordentlich. Sie erklären die von allen Beobachtern von Detektoranordnungen geschilderte Launenhaftigkeit der Kontaktstelle (vgl. z. B. die Arbeiten von Streintz l. c.). Sie erklären auch, warum es bei einem losen Kontakt zwischen zwei verschiedenen Metallen keine Gleichrichterwirkung gibt, die Braun vergeblich suchte, weil Metallpulver eine zu gute Überleitung ohne Zwischenschicht bewirkt. Sorgt man für eine Trennungsschicht und beschränkt sich auf sehr kleine Elektrizitätsmengen, so zeigen auch die Metalle die Unipolarität. Ich habe in einem Falle beobachtet, daß eine Platin-Zinkstrecke für wenige Augenblicke sogar im Telephon hörbare Detektorwirkung ergab. Daß zahlreiche Kristallarten die Unipolarität selbst bei sehr fest anliegenden Kontakten zeigen, liegt entweder an geringer spezifischer Leitfähigkeit oder an besonders gearteter Oberflächenschicht. Bei sehr festem Druck und großer Berührungsfläche, daher kleiner Stromdichte hört stets die Unipolarität auf.

Die Deutung der Einseitigkeit der Stromleitung durch Elektronenaustritt läßt den Einfluß feinster Oberflächenstrukturen verständlich erscheinen. Offenbar ist die lokale Feldstärke maßgebend. So konnte ich (vgl. die oben zitierte Arbeit) beobachten, daß eine Trennstrecke zwischen glänzend poliertem und sehr fein mattiertem Metall Bevorzugung des Austritts negativer Elektrizätät aus der mattierten Fläche ergab. Ähnlich wirken feinste Kristallsplitter. Schließlich ist es, wenn sich in der Kontaktschicht erst einmal feinste Körnchen gebildet haben, nicht verwunderlich, wenn die Gleichrichterwirkung erlischt, oder der Sinn der Richtungsbevorzugung sich umkehrt.

In der Arbeit von Streintz und Wesely (l. c.) wird der Satz von der Konstanz der Leistungspolarität aufgestellt, der sich auch in späteren Arbeiten der Verfasser bewährt hat. Hierunter ist folgendes verstanden. Bezeichnet J_1 den Strom in der Vorzugsrichtung, J_2 den Strom in der entgegengesetzten Richtung so ist die Unipolarität

$$U = \frac{J_1 - J_2}{J_1}$$

eine positive Größe kleiner als eins. Das Produkt der Unipolarität (U) mit der gesamten elektromotorischen Kraft des Stromkreises (V) wird als Leistungspolarität bezeichnet und soll in gewissen Grenzen konstant sein. Würden wir im Sinne der vorgestellten Anschauung die Unterschiede der Stromstärke in beiden Richtungen dadurch erklären, daß zur Überwindung einer konstanten Zwischenschicht in den beiden Richtungen die Potentialdifferenzen ε_1 und ε_2 erforderlich sind, und bezeichnet W den Gesamtwiderstand, so wäre:

$$J_1 = \frac{V - \varepsilon_1}{W}, \qquad J_2 = \frac{V - \varepsilon_2}{W}.$$

Unipolarität:

$$U = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{V - \varepsilon_1}.$$

Leistungspolarität:

$$VU = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{V}}.$$

Soll die Leistungspolarität konstant sein, so müßte ε_1 klein gegen V sein. Da für V die untere Grenze von 2 Volt angegeben ist, so liegt das durchaus im Bereich des Möglichen. Aus der Differenz der ε-Werte und meinen Messungen über die Austrittsspannungen würde sich die Dicke der Zwischenschicht zu etwa 10^{-7} cm berechnen.

Die Möglichkeit der Veränderung der Strombasis läßt aber im allgemeinen für derartige Kontakte keine einfachen Beziehungen zwischen Strom und Spannung erwarten.

Sollte sich die Erscheinung des Elektronenaustrittes als Grundlage für die Betrachtung der unipolaren Leitung bewähren, so würde F. Braun mit seinem Hinweis auf die Analogie mit den Entladungserscheinungen in Gasen schon in seinen Arbeiten vor jetzt fast 50 Jahren einen sehr wesentlichen Fingerzeig gegeben haben. Für die Detektorwirkung würde sich praktisch Trägheitslosigkeit ergeben, was in Übereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen ist.

Königsberg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. Juni 1921.)

Steigerung der sekundären Energie beim Funkeninduktor.

Von F. Dessauer.

(Mit Tafel II.)

Auf einem verhältnismäßig einfachen Weg kann man die Leistungsfähigkeit von Funkeninduktoren unter Umständen auf ein mehrfaches erhöhen oder unter Beibehaltung ihrer Leistung ihren Stromverbrauch erheblich erniedrigen und damit, insbesondere im Dauerbetrieb, die Unterbrecherabnützung sehr klein machen und Gleichmäßigkeit der Arbeit erzielen. Diese Möglichkeit besteht nicht nur beim Bau neuer Induktoren, sondern man kann auch alte Induktoren von geringer Leistungsfähigkeit auf diese Weise nachträglich bedeutend verbessern. Eine solche Verbesserung ist wichtig für gleichmäßige Versuchsbedingungen bei röntgenphysikalischen Arbeiten, wo der Wechselstromtransformator wegen seiner höheren Leistungsfähigkeit und seiner konstanten Arbeitsweise den Funkeninduktor zu verdrängen beginnt.

Die äußere Maßnahme besteht darin, daß man die freien Enden des Eisenkerns, der eventuell verlängert werden muß, verstärkt, bei vorhandenen Induktoren etwa durch Endstücke, wie sie Fig. 1 zeigt.

Diese Endstücke müssen aus gut geeignetem, sorgfältig unterteiltem Eisen hergestellt werden. Am bequemsten reiht man, wie Fig. 2 es zeigt, Querscheiben mit steigenden Durchmessern auf einer Unterlage auf. Selbstverständlich müssen diese Eisenblechscheiben geschlitzt werden.

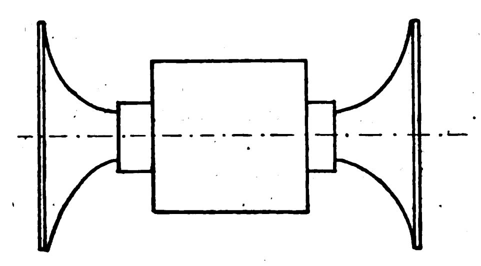


Fig. 1.

Die Wirkung der Maßnahme geht aus Tabelle I hervor. Die Tabelle selbst bedarf keines Kommentars.

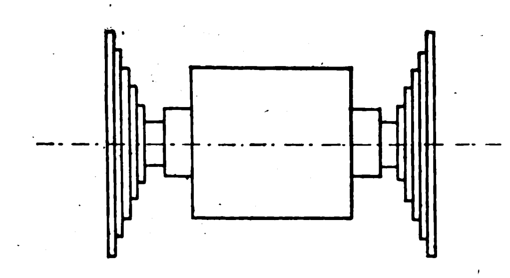


Fig. 2.

Tabelle I.

Induktor, betrieben mit Gasunterbrecher, über Vorschaltwiderstand an Gleichstromnetz angeschlossen.

Unterbrechungszahl konstant. Kontaktdauer immer dieselbe.
Belastung durch Funkenstrecke.
Zwei aufschiebbare Scheiben, bestehend aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Einstellung auf gleiche primäre Stromstärke.

Netzspannung	Primärstrom	Primärspannung hinter dem Vorschaltwiderstand		Funkenstrecke zw. Spitzen	Sekundäre Stromstärke		Zunahme in Proz.
		ohne Endscheiben	mit Endscheiben		ohne Endscheiben	mit Endscheiben	
110 Volt	2,65 Amp.	48 Volt	55 Volt	100 mm	0,45 Milliamp.	1 Milliamp.	122
"	3 "	52 "	60 "	"	1 "	2,3 "	130
"	3,8 "	56 "	65 "	"	2 "	4,5 "	125
"	4,3 "	58 "	66 "	"	3 "	5 "	66
"	5,5 "	64 "	67 "	"	5 "	8 "	60
110 Volt	3,2 Amp.	52 Volt	62 Volt	150 mm	0,5 Milliamp.	1,5 Milliamp.	200
"	3,6 "	54 "	64 "	"	1 "	2,0 "	100
"	4,5 "	61 "	71 "	"	2 "	3,8 "	90
"	5,3 "	64 "	78 "	"	3 "	5,7 "	90
"	6,8 "	73 "	80 "	"	5 "	8,5 "	70
220 Volt	3,2 Amp.	81 Volt	91 Volt	100 mm	0,4 Milliamp.	1,8 Milliamp.	350
"	5,5 "	92 "	98 "	"	3,2 "	4,5 "	41
220 Volt	3,2 Amp.	82 Volt	90 Volt	150 mm	0,4 Milliamp.	1 Milliamp.	150
"	5,3 "	93 "	102 "	"	2,5 "	3,3 "	33

Der Bau derartiger Funkeninduktoren ist inzwischen auch von den Fabriken aufgenommen worden.

Die Begründung der Wirksamkeit führt in die Theorie des Induktoriums, die trotz sehr zahlreicher Arbeiten nicht in allen Punkten geklärt und noch viel weniger allgemein bekannt ist, selbst hinein. Es sei zunächst mitgeteilt, auf welchem gedanklichen Wege die Konstruktion erzielt wurde.

Der Funkeninduktor überträgt elektrische Energie aus der Primärspule in die Sekundärspule unter zweifacher Voraussetzung. Die erste davon ist, daß im Augenblick der Unterbrechung — man denke daran, daß der Sekundärstromfluß einsetzt, wenn primär kein Strom mehr nachgeliefert wird — Energie in dem System aufgespeichert ist, die übertragen werden kann. Diese Bedingung besteht ganz im Gegensatz zum Wechselstromtransformator, wo keine Energie aufgespeichert wird, sondern, weil Sekundär- und Primärstrom gleichzeitig fließen, das magnetische Feld die Rolle spielt, den Nachschub der primären Energie in dem Maße freizugeben, als Sekundärstrom entnommen wird.

Die zweite Voraussetzung für das Arbeiten des Funkeninduktoriums, d. h. für den Übergang des Hauptteils der Energie in die Sekundärspule ist die, daß die Energie nicht in einem enger als die Sekundärspule mit der Primärspule gekoppelten System abfließen kann. Nur bei einer hinreichend guten Unterbrechung, welche den Abfluß im Primärkreis verhindert, und einer guten Unterteilung des Eisenkerns kann die aufgespeicherte Energie in die Sekundärspule ausreichend hinübergezwungen werden.

Die Form des übertragbaren Energievorrats im Augenblick der Unterbrechung ist

$$E_t = \frac{i^2}{2} \cdot L, \qquad (1)$$

wo E_t die aufgespeicherte Energie, i die momentane Stromstärke im Augenblick der Unterbrechung und L die gesamte Induktivität des primären Systems darstellt. L hat die Form:

$$L = 4\pi \frac{z^2}{R_m} \cdot 10^{-9} \text{ Henry}, \qquad (2)$$

wobei z die primäre Windungszahl und R_m den gesamten magnetischen Widerstand des magnetischen Kreises bedeutet.

Der magnetische Widerstand des Kreises setzt sich zusammen aus den Widerständen der beiden Wege, welche die Kraftlinien zurückzulegen haben. Bezeichnet man mit dem Index 1 den Eisenweg, mit dem Index 2 den Luftweg, so gilt für den Gesamtwiderstand

$$R_m = R_1 + R_2 = \sum\left(\frac{l_1}{q_1\mu_1} + \frac{l_1'}{q_1'\mu_1} + \frac{l_1''}{q_1''\mu_1} + \ldots\right) + \frac{l_2}{q_2\mu_2};$$

das erste Glied als Summe wegen der verschiedenen Querschnitte des Luftwegs. Unter ihnen sind alle q_1 sehr groß, bis auf die Stellen, wo die Kraftlinien aus dem Eisen in Luft übertreten. Man kann als erste Annäherung die gestrichenen Glieder weglassen und erhält:

$$R_m = R_1 + R_2 = \frac{l_1}{q_1\mu_1} + \frac{l_2}{q_2\mu_2}.$$

Setzt man statt R_m den reziproken Wert, die magnetische Leitfähigkeit λ, so ergibt sich

$$\Lambda = \frac{\mu_1\mu_2 q_1 q_2}{\mu_2 l_1 q_2 + \mu_1 l_2 q_2}.$$

Weil nun μ_2 sehr klein ist gegen μ_1, kann man als erste Annäherung das erste Glied des Nenners vernachlässigen und es ergibt sich dann

$$\Lambda = \frac{\mu_2 q_2}{l_2}, \text{ worin } \mu_2 = 1 \text{ ist.} \qquad (3)$$

Für die magnetische Leitfähigkeit des Kreises und daher für die Induktivität und die übertragbare Energie spielt also das Verhältnis von Querschnitt und Länge des Luftwegs eine entscheidende Rolle. Die Wirkung der aufgesetzten Endstücke ist nun die, daß dieser Übertrittsquerschnitt stark vergrößert wird und damit auch die Induktivität erhöht. Diese Überlegung führte zum Bau solcher Induktorien. Daß aber die Überlegung nicht streng gilt, sondern nur als Annäherung, zeigen Versuche der Tabelle II, aus denen zu ersehen ist, daß die mit Hilfe von Wechselstrom ermittelte Induktivitätserhöhung nicht immer ausreicht, um die Leistungssteigerung zu erklären.

Man kann bei diesem Ergebnis an die alten Arbeiten von Lord Rayleigh denken (Phil. Mag. **22**, S. 175, 1886). Er zeigt dort, warum ein Funkeninduktor mit geschlossenem Eisenkern keine Leistung in die Sekundärspule liefert.

Die Magnetisierung eines nicht geschlossenen Eisenkerns bis zur maximalen Magnetisierung M durch ein Feld $\mathfrak{H}$ geht nach seiner Darstellung vor sich unter Überwindung der Wirkung des Entmagnetisierungsfaktors P. Der gesamte Energieverbrauch ist:

$$\int_0^M \mathfrak{H}_0 \, dM \text{ pro cm}^3. \qquad (4)$$

Tabelle II.

Messung von Widerstand und Induktivität des Primärkreises.

1. Widerstandsmessung mit Gleichstrom: 3,5 Volt 4,04 Amp. ergibt 0,865 Ω.
2. Induktivitätsmessung mit Wechselstrom von 45,3 Perioden/sec.
2 Aufsatzscheiben aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Spannung an der Primärspule		Strom	Scheinwiderstand $\frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}$		Induktivität L	
ohne Endscheiben	mit Endscheiben		ohne Endscheiben	mit Endscheiben	ohne Endscheiben	mit Endscheiben
31 Volt	53 Volt	2,0 Amp.	15,5 Ω	26,5 Ω	0,0546	0,0933 Henry
52,5 „	85 „	3,22 „	16,3 „	26,4 „	0,0575	0,0930 „
70 „	111 „	4,33 „	16,2 „	25,7 „	0,0570	0,0905 „

Mittelwert: $L = 0{,}0564$ Henry ohne Endscheiben
$L = 0{,}0923$ „ mit „
Zunahme der Induktivität um 64 Proz.

Im Innern des Eisenkerns wirkt die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - M \cdot P.$$

Daraus ergibt sich, daß der Energieverbrauch pro Volumeneinheit sich zusammensetzt aus den beiden Gliedern:

$$\int_0^M \mathfrak{H} dM + \frac{1}{2} PM^2. \quad (5)$$

Von diesen beiden Gliedern ist das erste Glied Wärmeverlust, das zweite Glied, welches den Entmagnetisierungsfaktor enthält, kann allein wiedergewonnen werden. Dieser Entmagnetisierungsfaktor hängt aber ab von der Konfiguration des Eisenkörpers. Rayleigh hat ihn für den Fall eines langgestreckten Rotationsellipsoids berechnet. Dabei wächst er stark mit der Dicke und nimmt stark ab mit der Länge des Ellipsoids. Für einen geschlossenen Eisenkern wird der Entmagnetisierungsfaktor Null. Für einen Eisenkern, wie er hier verwendet wird, und den man vielleicht als Rotationskörper der Grenzflächen zwischen den Scheiteln zweier flacher Parabeln oder Hyperbeln bezeichnen kann, ist der Entmagnetisierungsfaktor vielleicht groß.

Um die Wirkung der Maßnahme zu übersehen, wurden Versuche durchgeführt mit verschiedenen aufgesetzten Endstücken — sowohl der Form wie der Größe nach — und mit verschiedenen Betriebsbedingungen des Induktoriums. Die Konstruktion eines wesentlich verbesserten Kathodenstrahlen-Oszillographen durch Herrn Dipl.-Ing. Brenzinger von meinem Institut, der in einer folgenden Arbeit beschrieben wird, ermöglichte die Wirkung sehr anschaulich an Oszillogrammen zu studieren und diese photographisch festzuhalten.

Die Erhöhung der Induktivität eines Induktoriums ändert das Verhältnis $\frac{R}{L}$ in dem Sinne, daß der Strom anstieg in der Primärspule, der nach der bekannten Helmholtzschen Gleichung

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (6)$$

mit wachsender Intensität immer langsamer erfolgt, sich immer mehr einer Geraden nähert. Würde R zu vernachlässigen sein, so würde der Anstieg statt exponentiell linear erfolgen. Läßt man die Kontaktdauer des Unterbrechers bei einem Induktorium bestehen, so wird bei einer geringeren primären Stromstärke unterbrochen, wenn die Endstücke aufgeschoben sind. Der verlangsamte Anstieg setzt dabei die elektromotorische Kraft der Schließungsinduktion stark herab. Die verringerte unterbrochene Stromstärke oder, wie man strenger dafür einsetzen müßte, der verringerte Endwert der Magnetisierung wird aber ausgeglichen, unter Umständen sogar weit mehr wie ausgeglichen durch den erhöhten Anteil an übertragbarer Energie. Die Kurven Fig. 3, 4 und 5 geben unter Beibehaltung der übrigen Verhältnisse den Anstieg mit und ohne die Endstücke wieder und zeigen das Gesagte deutlich. Die Kurven sind mit dem Braunschen Rohr nach der neuen Konstruktion, also einfach durch Photographieren der ruhig stehenden Kurve ohne rotierenden Spiegel gewonnen und beziehen sich auf ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit linearen Achsen.

Betreibt man das Induktorium mit vorgeschaltetem Regulierwiderstand, wie das allgemein üblich ist, so macht sich die Wirkung der Endstücke besonders deutlich folgender-

Tabelle III.

Induktor, betrieben mit Gasunterbrecher, ohne Vorschaltwiderstand an Akkumulatorenbatterie angeschlossen.

Unterbrechungszahl konstant. Kontaktdauer immer dieselbe.
Belastung durch Funkenstrecke.
Zwei aufschiebbare Scheiben, bestehend aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Einstellung auf gleiche primäre Stromstärke.

Primärstrom	Primärspannung		Funkenstrecke zw. Spitzen	Sekundäre Stromstärke		Zunahme in Proz.
	ohne Endscheiben	mit Endscheiben		ohne Endscheiben	mit Endscheiben	
1,8 Amp.	18,7 Volt	31 Volt	60 mm	0,7 Milliamp.	2,2 Milliamp.	215
2,1 „	24,4 „	32 „	„	1,8 „	2,4 „	33
2,9 „	33,5 „	33 „	„	5,2 „	5 „	∾ 0
9,6 „	47 „	47 „	„	17 „	17 „	∾ 0
1,75 Amp.	18,7 Volt	36 Volt	100 mm	0,3 Milliamp.	0,6 Milliamp.	100
2,1 „	24,4 „	37 „	„	0,7 „	1,3 „	86
2,9 „	34 „	46 „	„	2,3 „	2,6 „	13
6 „	47 „	49 „	„	7 „	9 „	27
1,7 Amp.	18,8 Volt	30 Volt	150 mm	∾ 0 Milliamp.	∾ 0 Milliamp.	
2,28 „	24,4 „	41 „	„	0,4 „	1,1 „	175
2,9 „	34 „	50 „	„	1,2 „	2,4 „	100
4,2 „	48 „	61 „	„	3,7 „	4,7 „	27

Vergleich der maximalen Funkenlänge.

Primäre Spannung		Primärstrom	Maximale Funkenstrecke	
ohne Endscheiben	mit Endscheiben		ohne Endscheiben	mit Endscheiben
18,8 Volt	30 Volt	1,7 Amp.	150 mm	180 mm
24,4 „	32 „	2,1 „	190 „	240 „
33,5 „	50 „	2,9 „	270 „	nicht mehr meßbar, da Überschläge am Induktor

maßen geltend: die primäre Endstromstärke geht nur wenig oder bei genügend langer Kontaktdauer gar nicht zurück (weil der Widerstand R gegenüber der Induktivität L groß bleibt), aber die sekundäre Leistung steigt bis auf das zwei- bis dreifache an. Wird das Induktorium ohne vorgeschalteten Widerstand einfach mit einer Batterie betrieben, so geht die primäre Stromstärke zurück, da in diesem Falle praktisch infolge der überwiegenden Induktivität des Stromkreises die dem Ohmschen Gesetz entsprechende Endstromstärke niemals erreicht wird. Man muß entweder die Kontaktdauer verlängern oder die primäre Spannung vergrößern, um dieselbe Endstromstärke und damit die erhöhte Leistung zu bekommen. Die Tabelle III gibt die zugehörigen Meßergebnisse.

Man sieht aus den letzten Werten der ersten Kolonne, daß bei sehr hohen sekundären Stromstärken keine Leistungssteigerung mehr auftrat. Das lag aber an der Versuchsanordnung, denn es ging dabei die Funkenentladung in das Lichtbogenstadium über. Dann aber genügt auch die kleinere elektromotorische Kraft der Schließung, um den Bogen aufrecht zu erhalten. Der Induktor arbeitet während des Stromanstiegs als Transformator, ein großer Teil der im Bogen sich entladenden Energie wird vom Primärkreis transformatorisch nachgeliefert. Die Tatsache, daß in diesem Stadium keine Steigerung der sekundären Energie auftritt, spricht demnach für die Richtigkeit der obigen Betrachtung.

Die Oszillogramme Fig. 6 zeigen den primären Stromverlauf für den Fall des sekundären Lichtbogens. Man sieht deutlich, wie der erste Teil des Stromanstiegs außerordentlich steil verläuft, ein Beweis, daß hier Schluß durch den Lichtbogen im Sekundärkreis be-

steht und Energie vom Primärkreis nachgeliefert wird. Läßt man diesen Lichtbogen nicht auftreten, so geht die Leistungssteigerung, bezogen auf gleiche primäre Stromstärke auch bei der maximalen Belastung des Induktors vor sich.

Endlich spielt bei der Verbesserung der Leistung auch die Erhöhung der Kopplung eine Rolle, die durch das Aufsetzen der Endscheiben bewirkt wird. Es steigt nicht nur der übertragbare Anteil der Energie, sondern auch der Wirkungsgrad wird etwas verbessert.

Sehr wichtig ist die Anwendung der Endstücke beim Einzelschlagverfahren. Man kann, wie der Verfasser gezeigt hat (diese Zeitschr. **13**, 1101, 1912), mit einem einzigen Induktionsschlag die Mehrzahl der menschlichen Aufnahmen machen, wobei die Expositionszeit von der Größenordnung $^1/_{300}$ Sekunde ist. Die gleichfalls vom Verfasser durchgeführte Kinematographie des menschlichen Herzens und anderer physiologischer Bewegungen gründet sich darauf. Aber die Anwendung des Verfahrens war stark beschränkt durch die großen stoßweisen Stromentnahmen, der nicht alle Netzanschlüsse gewachsen sind. Déguisne hat die elektrischen und magnetischen Verhältnisse beim Einzelschlag genauer untersucht (diese Zeitschr. **15**, 630, 1914). Es sind Versuche darüber im Gange, mit Hilfe der so geänderten Induktorien mit wesentlich verringerter Beanspruchung der Netze auszukommen.

Wir wiederholten die Versuche mit einem sehr großen, für Dauerbetrieb bestimmten Funkeninduktorium von Reiniger, Gebbert & Schall mit Gasunterbrecher mit dem gleichen Ergebnis.

Für den gewöhnlichen Betrieb ergibt sich eine Reduktion der elektromotorischen Kraft der Schließungsinduktion, eine erheblich geringere Beanspruchung von Netz, Unterbrecher und Induktor durch die primäre Stromstärke und bezogen auf gleiche Stromstärke, eine bedeutende Leistungssteigerung des Funkeninduktors bis auf das zwei- und dreifache.

Die Versuche mit dem neuen Induktorium sind überwiegend von meinem Mitarbeiter Herrn Dipl.-Ing. Brenzinger ausgeführt worden.

Frankfurt a. M., Institut für physikalische Grundlagen der Medizin.

(Eingegangen 23. Juni 1921.)

Die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum.

Von A. March.

In einem vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz[1]) hat der Verfasser den Umriß einer Theorie des Röntgenbremsspektrums entworfen und ist dabei zu einem Strahlungsgesetz gelangt, das, wie gezeigt werden konnte[2]), mit der Erfahrung annähernd im Einklang steht. Leider ist die Zahl der experimentellen Untersuchungen noch viel zu gering, um eine genauere Prüfung der Theorie zu ermöglichen. Es wäre, insbesondere im Hinblick auf die praktische Verwendung der Röntgenstrahlen in der Medizin, von größter Wichtigkeit, wenn die Intensitätsverteilung im Röntgenspektrum der Gegenstand möglichst zahlreicher und eingehender Untersuchungen würde. Alle Theorie bleibt notwendig unfruchtbar, wenn die Möglichkeit fehlt, sie mit der Erfahrung zu vergleichen. Wenn die folgende Arbeit auch nur geeignet sein sollte, den einen oder anderen Experimentator anzuregen, sich mit den hier behandelten Problemen zu befassen, so hätte sie schon einigen Nutzen. Was bisher an experimentellen Ergebnissen feststeht, ist im wesentlichen das folgende. Bedeutet $K_\lambda d\lambda$ die pro Sekunde im Wellenlängenbereich von λ bis $\lambda + d\lambda$ von der Röhre ausgestrahlte Energie, so gilt für den Fall, daß die Röhre mit einer konstanten Spannung V betrieben wird, daß

$$K_\lambda = C \cdot i \cdot f(\lambda, \lambda_0). \qquad (1)$$

Dabei bedeutet C eine vom Stoff der Antikathode abhängige Konstante, i die Röhrenstromstärke und $f(\lambda, \lambda_0)$ eine universelle Funktion von λ, in die ausschließlich die kürzeste Wellenlänge λ_0 als Parameter eingeht. λ_0 bestimmt sich aus der Spannung V nach der Einsteinschen Beziehung

$$h\frac{c}{\lambda_0} = e \cdot V. \qquad (2)$$

Über die Konstante C ist nur wenig bekannt; sie scheint annähernd proportional der Ordnungszahl Z des Antikathodenmetalles anzusteigen. Wesentlich ist die universelle Natur der Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$; diese Darstellbarkeit besagt, daß die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum eindeutig definiert wird durch die kürzeste in der Strahlung enthaltene Wellenlänge λ_0; das Metall der Antikathode sowie die Röhrenstromstärke i bestimmen lediglich den Betrag der ausgestrahlten Energie, ohne auf die spektrale Verteilung derselben irgend-

1) Diese Zeitschr. **22**, 209, 1921.
2) A. March, Ann. d. Phys. **65**, 449, 1921.

einen Einfluß zu nehmen. Diese aus den Untersuchungen von Ulrey, Wagner, Lilienfeld u. a. fließende Erkenntnis ist deshalb von wesentlicher Bedeutung, weil durch sie die praktische Ermittlung der Energieverteilung, wenn einmal die Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$ bekannt ist, auf die Bestimmung einer einzigen Größe, der Minimumwellenlänge λ_0, zurückgeführt wird. Um diese Größe auch in medizinischen Röntgeninstituten, wo es an Zeit und Übung für umständlichere Untersuchungen fehlt, bequem feststellen zu können, hat der Verfasser schon vor einiger Zeit zusammen mit Staunig und Fritz ein vereinfachtes Braggsches Spektrometer konstruiert, das λ_0 auf 0,01 Angströmeinheiten genau unmittelbar abzulesen gestattet und sich im praktischen Betrieb sehr bewährt hat.

Was das Maximum der Funktion K_λ sowie den Betrag der gesamten Intensität $\int K_\lambda d\lambda$ betrifft, so geht aus den von Ulrey[1]) an einer Coolidgeröhre vorgenommenen Messungen folgendes hervor. Die maximale Intensität gehört zu einer Wellenlänge λ_m, die sich mit der Spannung V wie $V^{-1/2}$ ändert; von Antikathode und Stromstärke ist λ_m, wie übrigens schon aus dem Ansatz (1) hervorgeht, weitgehend unabhängig. Die Gesamtintensität S fand Ulrey in Übereinstimmung mit älteren Untersuchungen annähernd proportional zu V^2. Beide Ergebnisse sind aber nur mit Vorsicht zu verwerten, weil die Messungen Ulreys sich auf eine durch das Glas der Röhre gefilterte Strahlung beziehen. Durch die Filterung wird aber sowohl die Lage des Maximums als auch der Betrag der gesamten Intensität in einem je nach der kürzesten Wellenlänge λ_0 verschiedenem Grade geändert. Das Maximum der Strahlungsintensität wird nach der Seite der kurzen Wellenlängen verlagert, und zwar ist die Verlagerung um so bedeutender, je langwelliger das Maximum ist[2]). Das an der gefilterten Strahlung festgestellte Gesetz $\lambda_m V^{1/2} = \text{const.}$ kann daher für die unmittelbar von der Antikathode ausgehende Strahlung nur in grober Annäherung gelten. Ebenso wie die Verlagerung des Maximums hängt auch die durch das Filter bewirkte relative Schwächung der Gesamtintensität S von der Größe λ_0 ab. Da nämlich das Filter die langen Wellen stärker als die kurzen absorbiert, so wird S um so mehr geschwächt, je weniger harte Komponenten in der Strahlung enthalten sind, d. h. aber, je größer λ_0 ist. Wenn daher Ulrey S proportional zu V^2 findet, so ist anzunehmen, daß für die ungefilterte Strahlung S langsamer als V^2 wächst.

1) C. T. Ulrey, Phys. Rev. 11, 401, 1918.
2) Vgl. A. March, Ann. d. Phys. 65, 449, 1921.

Die Wirkung einer periodisch veränderlichen Spannung auf die Intensitätsverteilung haben Hull und Behnken[1]) untersucht. Sie fanden an Coolidgeröhren, daß die Verteilung bei einer Scheitelspannung V_{max} sich nur unbeträchtlich vom Falle einer konstanten Spannung V_{max} unterschied. Dieses Ergebnis erklärt sich, wie der Verfasser gezeigt hat, daraus, daß die Intensität der Strahlung mit sinkender Spannung rasch abnimmt, sodaß die kleinen Spannungswerte gegenüber den großen nur wenig zur Geltung kommen. Immerhin ist vorauszusehen, daß bei Betrieb mit wechselnder Spannung eine etwas weichere Strahlung als im Falle einer konstanten Spannung zustande kommen muß. Außerdem versteht sich, daß der Gesamtbetrag der pro Sekunde ausgestrahlten Energie je nach der besonderen Art der Spannungskurve sehr verschieden sein kann.

Die theoretische Ermittlung der Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$ hat der Verfasser in den bereits erwähnten Arbeiten in Angriff genommen. Wenn wir die dort angestellten Betrachtungen im folgenden neuerdings aufnehmen, so geschieht dies deshalb, weil eine eingehendere Überlegung ergab, daß die früheren Rechnungen in mehrfacher Hinsicht der Verbesserung und Erweiterung bedürfen. Fürs erste waren im Ansatz für die Entropie des von einem Elektron getroffenen Atomsystems die Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit nicht korrekt gewählt. Sodann wurde λ_m nach Ulrey proportional zu $V^{-1/2}$ angenommen, was nach dem oben Gesagten nicht statthaft ist. Vor allem aber soll im folgenden jener, in den beiden ersten Arbeiten nicht berücksichtigten, von Wagner genauer untersuchten Erscheinung Rechnung getragen werden, die man allgemein als einen Dopplereffekt der Röntgenstrahlen aufzufassen pflegt und darin besteht, daß die mittlere Härte der Strahlung je nach dem Winkel zwischen Kathoden- und Röntgenstrahl verschieden ist. Die elementare Erklärung dieser von W. Wien aus rein kinematischen Betrachtungen abgeleiteten Erscheinung ist bekannt. Die Exzentrizität der vom Elektron während der Bremsung ausgehenden Wellenflächen soll bewirken, daß die Impulsbreite der Strahlung in der Richtung des Kathodenstrahles den kleinsten, in der entgegengesetzten den größten Wert hat. Es kann kein Zweifel sein, daß diese Erklärung nicht zutrifft. Stellt man sich auf den Boden der Quantentheorie, so kann die Auffassung, die man sich von der Entstehung der Röntgenstrahlen zu bilden hat, nur die folgende sein: setzt sich die Bewegungsenergie eines Elektrons

1) H. Behnken, Zeitschr. f. Phys. 3, 48, 1920.

in Strahlung um, so entsteht für ein Bezugssystem, von dem aus beurteilt die umgesetzte Energie den Betrag E hat, Licht von der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$. Darnach kann es zu einem Dopplereffekt nur dann kommen, wenn der Vorgang von verschieden bewegten Systemen aus beurteilt wird, weil von jedem dieser Systeme aus die umgesetzte Energie und damit auch die Schwingungszahl anders gemessen wird. Der in Rede stehenden Erscheinung kann also keineswegs ein Dopplereffekt zugrunde liegen und in der Tat hat Wagner[1]) gezeigt, daß die Minimumwellenlänge λ_0 von der Richtung des Strahles unabhängig ist; lediglich die Energieverteilung ist nach verschiedenen Richtungen verschieden, indem die Intensität der transversal zum Kathodenstrahl gerichteten Strahlung im kurzwelligen Teil des Spektrums größer ist als die der rückläufigen Strahlung, während sich in den großen Wellenlängen die Intensitäten nur wenig voneinander unterscheiden. Schon Wagner weist auf die richtige Erklärung dieser Erscheinung hin; sie ist, wie sich zeigen wird, im Satz von der Erhaltung des Impulses zu suchen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir nun daran, eine Theorie des Röntgenbremsspektrums zu entwickeln. Wir nehmen wie früher an, daß ein auf die Antikathode prallendes Elektron seine Energie $E_0 = eV$ in N Zusammenstößen verliert. Unter Zusammenstößen ist gemeint, daß das auftreffende Elektron so nahe an einem Elektron oder, was viel seltener eintreten wird, am Kern eines der Metallatome vorbeifliegt, daß es eine genügend starke elektrostatische Einwirkung erfährt, um auf das getroffene Elektron (von den getroffenen Atomkernen wollen wir absehen) eine gewisse Energie $\frac{mv^2}{2} \leqq E_0$ zu übertragen. Wir charakterisieren die übertragene Bewegung durch deren Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$ und schreiben die Zahl derjenigen Elektronen, deren Geschwindigkeitspunkt in das Element $d\dot{x}\,d\dot{y}\,d\dot{z}$ des Geschwindigkeitsraumes fällt, an zu $Nw\,d\dot{x}\,d\dot{y}\,d\dot{z}$. Die x-Achse denken wir uns dabei in die Richtung des Kathodenstrahles gelegt. Die Verteilungsdichte w ist als Funktion der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ sowie des Winkels Θ, den x-Achse und Geschwindigkeit miteinander einschließen, zu ermitteln. Da die Zahl der Elektronen mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ und einer Geschwindigkeitsrichtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ gegeben ist durch $2\pi v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv$, so gilt zunächst:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = 1. \tag{3}$$

Als obere Grenze für v wäre streng genommen die größtmögliche Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ einzusetzen; da aber w mit wachsendem v rasch abnimmt, so kann statt mit v_0 unbedenklich mit der Grenze unendlich gerechnet werden. Weiter ist, da die gesamte Energie der N getroffenen Elektronen aus der des auftreffenden Kathodenstrahlteilchens stammt:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi m\frac{v^2}{2} v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = \frac{E_0}{N}. \tag{4}$$

Schließlich fordert der Impulssatz, daß der Impuls $mv_0 = \sqrt{2E_0 m}$ des stoßenden Elektrons sich in der Bewegung der getroffenen Elektronen wiederfindet. Da der Impuls die Richtung der x-Achse hat, so muß also sein:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi mv \cos\Theta\, v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = \frac{\sqrt{2E_0 m}}{N}. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt, daß die Entropie S, die, von hier belanglosen Konstanten abgesehen, gegeben ist durch das Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\pi v^2 w \log w \sin\Theta\, d\Theta\, dv,$$

ein Maximum wird, wenn

$$\log w + \alpha v^2 + \beta v \cos\Theta + \gamma = 0$$

oder

$$w = a e^{-\alpha v^2 - \beta v \cos\Theta}. \tag{6}$$

Die Konstanten a, α und β bestimmen sich aus den Gleichungen (3), (4) und (5). Aus (3) folgt:

$$2\pi a \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi e^{-\beta v \cos\Theta} \sin\Theta\, d\Theta = 1.$$

Wir entwickeln hier $e^{-\beta v \cos\Theta}$ bis auf das Glied erster Ordnung. Der Fehler, den wir durch diese Entwicklung für große Werte von v machen, wird durch das Glied $e^{-\alpha v^2}$, das mit wachsendem v rasch auf Null sinkt, gedeckt. Wir erhalten

$$2\pi a \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1 - \beta v \cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= 4\pi a \frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}} = a\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} = 1. \tag{7}$$

1) E. Wagner, diese Zeitschr. 21, 921, 1920.

Weiter ergibt die Gleichung (4):

$$2\pi a \frac{m}{2}\int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1-\beta v \cos\Theta)\sin\Theta d\Theta$$
$$= am \frac{3\pi^{1/2}}{4\alpha^{5/2}} = \frac{E_0}{N}. \quad (8)$$

Schließlich folgt aus (5):

$$2\pi am \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1-\beta v\cos\Theta)\sin\Theta$$
$$\cos\Theta d\Theta = -2\pi am \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv \cdot \beta \cdot v \frac{2}{3} \quad (9)$$
$$= -\frac{1}{2} am\beta \frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{5/2}} = \frac{\sqrt{2E_0 m}}{N}.$$

Aus (7), (8) und (9) ergeben sich für die Konstanten a, α und β die Werte:

$$a = \left(\frac{3}{4}\frac{m}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2}, \quad \alpha = \frac{3}{4} m \frac{N}{E_0},$$
$$\beta = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2m}{E_0}}. \quad (10)$$

Damit wird die Verteilungsdichte w, wenn wir $\frac{mv^2}{2} = E$ setzen:

$$w = \text{const.} \left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{3NE}{2E_0}} \cdot e^{3\sqrt{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta}, \quad (11)$$

woraus für die Zahl der Elektronen, die eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ in einer Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ erhalten, der Ausdruck folgt:

$$2\pi \text{ const.} \left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2} \cdot N \cdot e^{-\frac{3NE}{2E_0}}$$
$$\cdot e^{3\sqrt{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta} v^2 \sin\Theta d\Theta dv$$

oder, wenn wir $\frac{mv^2}{2} = E$, $mvdv = dE$ einführen:

$$2\pi \text{ const.} \frac{N^{5/2}}{E_0^{3/2}} e^{-\frac{3NE}{2E_0}} e^{3\sqrt{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta}$$
$$\cdot \sqrt{E} \sin\Theta d\Theta dE. \quad (12)$$

Diesen Ausdruck benutzen wir nun, um die von den getroffenen Elektronen ausgesandte Strahlung zu berechnen. Die Annahmen, von denen wir dabei ausgehen wollen, sollen im wesentlichen dieselben sein, die bereits der ersten Mitteilung zugrunde gelegt wurden, nämlich: 1. ein Elektron strahlt, wenn es überhaupt die beim Zusammenstoß aufgenommene Energie E in Strahlung umsetzt (der Umsatz tritt, wie aus dem geringen Nutzeffekt der Röntgenstrahlenerzeugung hervorgeht, nur relativ selten ein), stets die ganze Energie E aus, und zwar monochromatisch in der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$. Diese Annahme steht in Einklang mit der Tatsache einer größten Schwingungszahl ν_0, die dann zustande kommt, wenn das Kathodenstrahlteilchen seine ganze Energie $E_0 = eV$ in einem winzigen Zusammenstoß verliert. 2. Die Wahrscheinlichkeit der Ausstrahlung soll vom Betrag der auszustrahlenden Energie E, also wegen $E = h\nu$ von der Schwingungszahl ν abhängen. Wir wollen die besondere Art der Abhängigkeit vorläufig unbestimmt lassen und nur annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ausstrahlung proportional zu ν^n sei, d. h. daß von Z Elektronen, die zur Schwingungszahl ν gehören, der Bruchteil $kZ\nu^n$ die Energie in Strahlung umsetzt, wobei k eine von ν unabhängige Konstante bedeutet. In der ersten Theorie wurde $n = 2$ gesetzt; diese spezielle Annahme lassen wir hier fallen, um den wahrscheinlichen Wert von n später aus dem Vergleich mit der Erfahrung abzuleiten.

Auf Grund der Annahmen 1 und 2 berechnet sich nun die von der Antikathode ausgehende Strahlung folgendermaßen. Ist i die Stromstärke, so erhalten durch die $\frac{i}{e}$ Elektronen, die in der Sekunde die Antikathode treffen, nach (12) eine Zahl von

$$Z = 2\pi \text{ const. } i \frac{N^{5/2}}{E_0^{3/2}} e^{-\frac{3NE}{2E_0}} \quad (13)$$
$$\cdot e^{3\sqrt{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta} \sqrt{E} \sin\Theta d\Theta dE$$

Metallelektronen eine Bewegung von einer Energie zwischen E und $E + dE$ und einer Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$. Die von diesen Z Elektronen ausgestrahlte Energie ist $kZ\nu^n E$ oder, wenn wir $E = h\nu$ setzen:

$$2\pi \text{ const. } i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} e^{3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}}\cos\Theta} \nu^{n+3/2} \sin\Theta d\Theta d\nu. \quad (14)$$

Dieser Ausdruck gibt die Strahlung an, die im Intervall von ν bis $\nu + d\nu$ von der Antikathode $\sec^{-1}$ ausgesandt wird und deren Impuls eine Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ hat. Daß wir hier auf den Impuls, den die Strahlung von den auftreffenden Elektronen übernimmt, Rücksicht nehmen, ist wesentlich, weil es gerade die Tatsache dieses Impulses ist, die den erwähnten Einfluß der Richtung auf die Härte der Röntgenstrahlung erklärt. Vor allem ist klar, daß die Energie (14), weil der entsprechende Strahlungsimpuls in der Richtung Θ liegt, nicht gleich-

mäßig nach allen Richtungen hin ausgestrahlt wird, sondern die Richtung Θ bevorzugen muß. Das Gesetz, nach welchem sich eine Strahlung von gegebenem Impuls über die einzelnen Richtungen verteilt, hat Sommerfeld angegeben. Wird die Strahlung durch ein gleichförmig verzögertes Elektron erregt, so ist die Energie $\mathfrak{S}$, die unter dem Winkel $\mathfrak{D}$ gegen die Kathodenstrahlrichtung emittiert wird, nach Sommerfeld gegeben durch

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2 \dot{v}}{16 \pi c^2} \frac{\sin^2 \mathfrak{D}}{\cos \mathfrak{D}} \left(\frac{1}{(1 - \beta \cos \mathfrak{D})^4} - 1 \right); \quad (15)$$

es bedeutet hier $\dot{v}$ die Verzögerung und β die durch c geteilte Anfangsgeschwindigkeit des gebremsten Elektrons. $\mathfrak{S}$ ist die Energie, welche durch die in der Emissionsrichtung $\mathfrak{D}$ gelegte Flächeneinheit der Einheitskugel hindurchtritt. Die gesamte ausgestrahlte Energie berechnet sich aus (15) zu

$$2\pi \int_0^\pi \mathfrak{S} \sin \mathfrak{D} d\mathfrak{D}$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}}{8 c^2} \int_0^\pi \sin^3 \mathfrak{D} \cdot \beta (4 + 10 \beta \cos \mathfrak{D}) \, d\mathfrak{D} = \frac{e^2 \dot{v}}{e^2} \frac{2\beta}{3}.$$

Setzen wir diese Energie gleich E, so erhalten wir für $\mathfrak{S}$ statt des Ausdrucks (15):

$$\mathfrak{S} = \frac{3E}{32 \pi \beta} \frac{\sin^2 \mathfrak{D}}{\cos \mathfrak{D}} \left(\frac{1}{(1 - \beta \cos \mathfrak{D})^4} - 1 \right)$$

$$= \frac{3E}{8\pi} \sin^2 \mathfrak{D} \left(1 + \frac{5}{2} \beta \cos \mathfrak{D} \right). \quad (16)$$

Diese Beziehung drückt das Gesetz aus, nach welchem ein in der Richtung $\mathfrak{D} = 0$ gebremstes Elektron die Gesamtenergie E in den Raum hinausstrahlt. Wir halten es nicht für bedenklich, die Gleichung (16), trotzdem sie auf den Voraussetzungen der klassischen Theorie beruht, auch dann anzuwenden, wenn die Ausstrahlung nach den Gesetzen der Quantentheorie vor sich geht, indem wir $E = h\nu$ setzen und für $\beta = \frac{v}{c}$ wegen $\frac{mv^2}{2} = h\nu$ den Wert $\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2h\nu}{m}}$ einführen. Es bezieht sich dann (16) auf den Fall eines Elektrons, das vor der Ausstrahlung eine Geschwindigkeit v in der Richtung $\mathfrak{D} = 0$ hat und seine kinetische Energie E in Strahlung von der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$ umsetzt. Führen wir für E den Ausdruck (14) ein, so erhalten wir die Strahlung $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$, die von den Z Elektronen der Gleichung (13) in der Richtung $\mathfrak{D}$ emittiert wird; es ergibt sich:

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}} = \text{const.}\, i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} e^{3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}} \cos\Theta} \cdot \nu^{n+3/2} \cdot 2\pi \sin\Theta \, d\Theta \, d\nu \sin^2 \mathfrak{D} \left(1 + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}} \cos \mathfrak{D} \right). \quad (17)$$

Darin bedeutet Θ den Winkel zwischen Kathodenstrahl und Impuls der strahlenden Elektronen, $\mathfrak{D}$ den zwischen Impuls und der betrachteten Emissionsrichtung. Lassen wir $\mathfrak{D}$ und Θ zusammenfallen, so erhalten wir die durch die Elektronen (13) in der Kathodenstrahlrichtung erzeugte Strahlung und durch Integration über Θ die gesamte in der genannten Richtung emittierte Strahlung des Intervalls von ν bis $\nu + d\nu$. Wir finden dafür:

$$\mathfrak{S}_{0^\circ} d\nu = \text{const.}\, i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \cdot \nu^{n+3/2} d\nu \, 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \Theta \, d\Theta \left(1 + 3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}} \cos\Theta \right) \left(1 + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}} \cos\Theta \right).$$

Die Ausführung des Integrals ergibt

$$\frac{4}{3} + 2\nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}},$$

sodaß

$$\mathfrak{S}_{0^\circ} d\nu = \text{const.}\, i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{n+3/2} d\nu \frac{8\pi}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}} \right) \quad (18a)$$

wird. Entsprechend finden wir für die entgegengesetzt zur Kathodenstrahlrichtung ausgestrahlte Energie, indem wir in (17) $\mathfrak{D} = 180 - \Theta$ setzen:

$$\mathfrak{S}_{180^\circ} d\nu = \text{const.}\, i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{n+3/2} d\nu \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}} \right). \quad (18b)$$

Schließlich berechnen wir noch die Strahlung, die senkrecht zur Kathodenstrahlrichtung emittiert wird. Führen wir dazu (vgl. Fig. 1) den Azimutalwinkel φ ein, so wird $\cos \mathfrak{D} = \sin\Theta \cos\varphi$, sodaß wir aus (17) erhalten:

$$\mathfrak{S}_{90^\circ}\, d\nu = \text{const.}\; i\, \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}}\, e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}}$$

$$\cdot\, \nu^{n+3/2}\, d\nu \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} d\varphi \sin\theta\, d\theta \left(1+3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}}\cos\theta\right)(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\left(1+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}}\sin\theta\cos\varphi\right)\cdot$$

Das Integral dieses Ausdruckes reduziert sich auf

$$\iint d\varphi\, d\theta \sin\theta\,(1-\pi\sin^2\theta)$$

$$= 4\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

sodaß wir für $\mathfrak{S}_{90^\circ}$ erhalten:

$$\mathfrak{S}_{90^\circ}\, d\nu = \text{const.}\; i\, \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}}\, e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}}\, \nu^{n+3/2}\, d\nu\, \frac{8\pi}{3}. \quad (18\text{c})$$

Da in den Messungen die Strahlungsintensität nicht auf die Schwingungszahl ν, sondern die Wellenlänge λ bezogen wird, so wollen wir in den Gleichungen (18) ν durch λ ersetzen. Wegen $\nu = \frac{c}{\lambda}$ und $d\nu = -\frac{c\,d\lambda}{\lambda^2}$ wird, wenn wir jetzt die Konstante mit C bezeichnen:

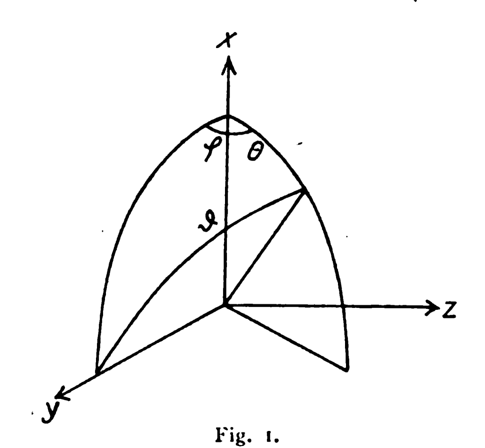


Fig. 1.

$$\mathfrak{S}_{0^\circ,\,180^\circ}\, d\lambda = C i N^{5/2} \lambda_0^{3/2}\, e^{-\frac{3N\lambda_0}{2\lambda}}\, \frac{1}{\lambda^{n+7/2}}\, d\lambda \left(1 \pm \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}\right)$$

$$\mathfrak{S}_{90^\circ}\, d\lambda = C i N^{5/2} \lambda_0^{3/2}\, e^{-\frac{3N\lambda_0}{2\lambda}}\, \frac{1}{\lambda^{n+7/2}}\, d\lambda. \quad (19)$$

Um daraus zunächst die Wellenlänge λ_m der maximalen Intensität zu berechnen, setzen wir zur Abkürzung $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2h\lambda^0}{mc}} = k$ und erhalten durch Differenzieren der Funktionen $\mathfrak{S}_{0^\circ}$ und $\mathfrak{S}_{180^\circ}$:

$$\frac{3N\lambda_0}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda^{n+7/2}} \pm \frac{k}{\lambda^{n+9/2}}\right) -$$

$$-\left(\frac{n+7/2}{\lambda^{n+9/2}} \pm \frac{k(n+9/2)}{\lambda^{n+11/2}}\right) = 0$$

oder

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{3/2\, N\lambda_0 \mp k(n+9/2)}{n+7/2} \pm \frac{3/2\, N\lambda_0 k}{n+7/2} = 0,$$

woraus für λ_m folgt:

$$\lambda_m = \frac{3/2\, N\lambda_0 \mp k(n+9/2)}{2n+7}$$

$$+\sqrt{\frac{[3/2\, N\lambda_0 + k(n+9/2)]^2 \pm 3N\lambda_0 k(2n+7)}{(2n+7)^2}}.$$

Wegen der Kleinheit von k können wir in der Wurzel das in k quadratische Glied vernachlässigen und erhalten, indem wir die Wurzel bis auf das Glied erster Ordnung entwickeln:

$$\lambda_m = \frac{1}{2n+7}\,(3/2\, N\lambda_0 \mp k(n+9/2) \quad (20)$$

$$+\, 3/2\, N\lambda_0 \pm k(n+5/2)) = \frac{1}{2n+7}\,(3N\lambda_0 \mp 2k).$$

Das obere Vorzeichen gilt für die Richtung $\Theta = 0^0$, das untere für $\Theta = 180^0$. Das zu einer transversalen Richtung $\Theta = 90^0$ gehörige λ_m berechnet sich aus der zweiten Gleichung (19) zu

$$\lambda_m = \frac{3N\lambda_0}{2n+7}. \quad (21)$$

Die Theorie ergibt also eine nach den verschiedenen Emissionsrichtungen verschiedene Lage des Intensitätsmaximums; das kurzwelligste Maximum gehört zur Richtung $\Theta = 0$, das langwelligste zu $\Theta = 180^0$. Der Abstand dieser beiden Maxima beträgt nach (20):

$$\Delta\lambda_m = \frac{4}{2n+7}\,k = \frac{6}{2n+7}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}$$

$$= \frac{1{,}318}{2n+7}\cdot 10^{-4}\sqrt{\lambda_0}\,. \quad (22)$$

Der Abstand nimmt mit zunehmender Spannung proportional zu $V^{-1/2}$ ab; für eine Strahlung von 50 kV ($\lambda_0 = 0{,}25$ Å) berechnet er sich aus (22), wenn wir für n den Wert 2 einsetzen zu 0,06 Å, bei einer Annahme von $n = 1$ zu 0,07 Å. Beobachtungen, mit denen diese Werte verglichen werden könnten, liegen leider noch nicht vor.

Außer auf die Lage des Maximums hat die Emissionsrichtung noch einen ausgeprägten Ein-

fluß auf die Intensität der Strahlung. Aus den Gleichungen (19) ergibt sich für das Verhältnis der Strahlungsintensitäten in den Richtungen 0° und 90° bzw. 180° und 90°:

$$\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_{90}} = 1 + \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}},$$
$$\frac{\mathfrak{S}_{180}}{\mathfrak{S}_{90}} = 1 - \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}. \qquad (23)$$

Der relative Unterschied der Intensitäten nimmt also mit wachsendem λ ab und ist um so bedeutender, je größer λ_0, d. h. je weicher die Strahlung ist. Dieses Ergebnis entspricht völlig den Beobachtungen von Wagner, der die Strahlung einer eigens konstruierten, mit einer Spannung von 10200 Volt ($\lambda_0 = 1{,}18$ Å) betriebenen Röntgenröhre in den Richtungen $\Theta = 90^0$ und $\Theta = 150^0$ untersuchte und feststellte, daß die Intensitäten in der Nähe der kurzwelligen Spektralgrenze annähernd im Verhältnis 1,7 stehen, während sie sich für große Wellenlängen nur wenig voneinander unterscheiden. Aus der zweiten Gleichung (23) berechnet sich für $\lambda_0 = 1{,}18$ Å, wenn wir für h den Wert $6{,}54 \cdot 10^{-27}$ und für m $0{,}903 \cdot 10^{-27}$ einsetzen, das Verhältnis $\frac{\mathfrak{S}_{180}}{\mathfrak{S}_{90}}$ für $\lambda = 1{,}2$ Å zu

$$1 - \frac{3}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-8}}\sqrt{\frac{13{,}1 \cdot 1{,}18 \cdot 10^{-8}}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{10}}}$$
$$= 1 - 0{,}30 = 0{,}70.$$

$\mathfrak{S}_{90}$ und $\mathfrak{S}_{180}$ würden darnach für $\lambda = 1{,}2$ Å im Verhältnis $1 : 0{,}7 = 1{,}43$ stehen, ein Wert, der kleiner ist als der von Wagner in der Richtung $\Theta = 150^0$ beobachtete (auffallend große) 1,7. Für $\lambda = 2{,}4$ Å berechnet sich das Verhältnis zu nicht ganz 1,2.

Wir werden weiter unten noch Gelegenheit nehmen, den Einfluß der Richtung auf Intensität und Intensitätsverteilung eingehender durch eine Figur zu erläutern und wenden uns jetzt der Betrachtung der transversalen Strahlung als derjenigen zu, auf die sich für gewöhnlich die Beobachtungen ausschließlich beziehen. Die zu lösende Aufgabe liegt, wie aus der Gleichung (19) hervorgeht, in der Ermittlung der Zahlen N und n. Die Berechnung dieser Zahlen aus den vorliegenden Messungen stößt deshalb auf große Schwierigkeiten, weil sich infolge ungenauer Angabe der Versuchsbedingungen nicht beurteilen läßt, inwieweit die gemessenen Intensitätskurven der von der Antikathode ausgehenden Strahlung entsprechen und nicht durch die Absorption in Glas, Gefäßwänden und Luft entstellt sind. Wenn es irgendwo auf präziseste Feststellung der Versuchsbedingungen ankommt, so ist es bei der Ausmessung eines Röntgenspektrums; denn nirgends ist die Zahl der Fehlerquellen so groß wie hier, besonders dann, wenn mit einer weichen Strahlung gearbeitet wird, da die Absorbierbarkeit der Strahlen mit zunehmender Wellenlänge außerordentlich rasch ansteigt. Was zunächst die Zahl N betrifft, so wird ihre Ermittlung durch die Gleichung (21) ermöglicht, der zufolge N gegeben ist durch

$$N = \frac{2n+7}{3}\frac{\lambda_m}{\lambda_0}. \qquad (24)$$

Aus den Ulreyschen Untersuchungen, nach denen λ_m sich mit V wie $V^{-1/4}$ ändert, würde darnach für N wegen (2) Proportionalität zu $V^{3/4}$ folgen. Diese Beziehung hat denn auch der Verfasser den beiden vorausgehenden Mitteilungen zugrunde gelegt, mußte sich aber inzwischen überzeugen, daß an ihr nicht festgehalten werden kann. In der nachstehenden Tabelle sind die von Ulrey bei den angegebenen Spannungen gemessenen Werte von λ_0 und λ_m zusammengestellt;

V in Kilovolt	λ_0	λ_m	λ_m' berechnet
50	0,250	0,470	0,562
40	0,310	0,500	0,616
35	0,355	0,520	0,655
30	0,405	0,555	0,760
25	0,490	0,620	0,883
20	0,615	0,710	1,150

daß die aus diesen Zahlen sich ergebende Beziehung $\lambda_m = \text{const.}\, V^{-1/4}$ keine allgemeine Gültigkeit haben kann, geht schon daraus hervor, daß sich für Spannungen unterhalb 14 Kilovolt Werte von λ_m ergeben würden, die kleiner sind als die von λ_0. Die Ursache dieser Unstimmigkeit kann nur darin liegen, daß die Ulreyschen Messungen sich auf eine durch Absorption in der Zusammensetzung geänderte Strahlung beziehen. Leider fehlen alle Anhaltspunkte, um den Einfluß, den das Glas der Röhre usw. auf die Strahlung genommen haben, abzuschätzen und so auf die Ausgangsstrahlung zurückzuschließen. Wäre die Dicke der von den Strahlen durchsetzten Wände genau bekannt, so könnten die wahren Werte von λ_m aus den gemessenen Zahlen mit Hilfe der Absorptionsgesetze ermittelt werden. Die durch einen absorbierenden Körper bewirkte Änderung von λ_m läßt sich am bequemsten berechnen, wenn man sich nach dem Vorgang des Verfassers des Begriffes der „Filterstärke" bedient. Die Herleitung dieses Begriffes ist die folgende: Bekanntlich wird durch einen Körper von der Dicke d eine Wellenlänge λ im Verhältnis $e^{-\alpha d}$ geschwächt, wenn α den Absorptionskoeffizienten für die betrachtete

Wellenlänge bedeutet. Nach Kossel und Siegbahn ist α für alle Stoffe annähernd proportional zu $\lambda^{2,8}$:

$$\alpha = \varkappa \lambda^{2,8},$$

wobei sich der Faktor $\varkappa$ aus der Dichte ϱ und der Ordnungszahl Z des absorbierenden Stoffes nach einer von Glocker angegebenen Formel berechnen läßt. Unter der Filterstärke f eines Stoffes ist nun das Produkt $\varkappa \cdot d$ verstanden, sodaß die Schwächung einer Wellenlänge λ gleich $e^{-f \cdot \lambda^{2,8}}$ wird. Die durch ein Filter von der Stärke f geschwächte Strahlung (19) ist daher in der Abhängigkeit von λ darstellbar durch den Ausdruck

$$e^{-\frac{3N\lambda_0}{2\lambda}} \frac{1}{\lambda^{n+7/2}} e^{-f \cdot \lambda^{2,8}}.$$

Für die Wellenlänge λ_m des Maximums ergibt sich daraus die Gleichung:

$$\frac{3N\lambda_0}{2\lambda^2} \frac{1}{\lambda^{n+7/2}} - \frac{n+7/2}{\lambda^{n+9/2}} - \frac{f \cdot 2{,}8\, \lambda^{1,8}}{\lambda^{n+7/2}} = 0$$

oder

$$^3/_2 N\lambda_0 = (n + {}^7/_2)\, \lambda_m + 2{,}8 \cdot f \cdot \lambda_m^{3,8}.$$

Da $\frac{3N\lambda_0}{2(n+{}^7/_2)}$ nach (21) die wahre Lage λ_m' des Maximums bestimmt, so ergibt sich für die durch die Absorption bewirkte Verlagerung $\lambda_m' - \lambda_m$ des Maximums:

$$\lambda_m' - \lambda_m = \frac{2{,}8 f}{n + {}^7/_2} \lambda_m^{3,8}, \qquad (25)$$

d. h. durch die Filterung wird das Maximum nach der Seite der kurzen Wellenlängen um einen Betrag verschoben, der proportional ist der Filterstärke f; bei gleicher Filterstärke ist die Verschiebung um so größer, je weicher die Strahlung, je größer also λ_m ist.

Der Satz (25) würde uns in den Stand setzen, aus den in der Tabelle angegebenen Werten von λ_m die wahren Lagen des Maximums zu berechnen, wenn die Filterstärke f der von den Strahlen durchsetzten Wände bekannt wäre. Nimmt man versuchsweise eine Filterung durch 0,5 mm Glas ($f = 2{,}6$) an — bei den gebräuchlichen Röhren hat das Glas in der Kugel durchschnittlich diese Dicke —, so ergeben sich für λ_m', wenn man für n den weiter unten wahrscheinlich gemachten Wert 1 einsetzt, die in der vierten Kolonne der Tabelle angegebenen Zahlen. Es zeigt sich, daß sich λ_m' mit V nicht, wie λ_m, proportional zu $V^{-1/2}$, sondern angenähert wie $V^{-5/8}$ ändert. Wenn auch dieses Ergebnis natürlich ganz unverläßlich ist, so kann doch als sicher gelten, daß in der Beziehung

$$\lambda_m' = \text{const.}\ V^{-p}$$

der Wert des Exponenten p größer sein muß als $^1/_2$ und vermutlich zwischen 1 und $^3/_4$ liegt. Eine von Wagner bei einer Spannung von 10,2 Kilovolt aufgenommene Intensitätskurve, die sich auf eine durch ein dünnes Aluminiumfenster austretende, also nahe ungefilterte Strahlung bezieht, erreicht ihr Maximum bei etwa $\lambda_m = 1{,}7$ Å; dieser Wert von λ_m für $\lambda_0 = 1{,}18$ Å würde sich recht gut in das Gesetz $p = {}^3/_4$ einordnen. Wir wollen vorläufig, ohne einer Entscheidung durch neue Versuche vorzugreifen, $p = {}^5/_8$ setzen und haben dann für N wegen (24) Proportionalität zu $V^{3/8}$ anzunehmen.

Um den Wert des Exponenten n zu bestimmen, berechnen wir die gesamte in der Richtung $\Theta = 90^0$ ausgestrahlte Energie S und vergleichen das Ergebnis mit dem von Ulrey gefundenen Gesetz, wonach S mit der Spannung V annähernd wie V^2 wächst. Wir bemerken aber, daß sich aus den Messungen diese Proportionalität nur für die kleinen Spannungswerte ergibt, während für die höheren Spannungen S merklich langsamer als V^2 ansteigt. Es erklärt sich dieses Verhalten zwanglos aus dem Einfluß der Absorption. Da nämlich die Absorption die langen Wellen viel stärker trifft als die kurzen, so bewirkt sie eine um so bedeutendere relative Schwächung der Gesamtintensität, je weicher die Strahlung ist; mit zunehmender Spannung nähert sich das Verhältnis der gefilterten zur ungefilterten Strahlung immer mehr dem Wert 1. An der Zunahme der Intensität mit wachsender Spannung sind daher zwei Faktoren beteiligt; der eine Faktor ist die Spannung als solche, der andere der mit wachsender Spannung sinkende Einfluß des Filters. Für hohe Spannungen tritt die Wirkung des zweiten Faktors immer weiter zurück, sodaß in demselben Maß die wahre Abhängigkeit der Intensität von der Spannung immer deutlicher zutage tritt. Wir müssen daher aus dem beobachteten Verhalten von S schließen, daß S etwas langsamer als V^2 ansteigt.

Zur Berechnung von S ziehen wir den Ausdruck (18c) heran und finden:

$$S = \text{const.}\ i \frac{N^{5/2}}{\lambda_0^{5/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{n+5/2}\, d\nu.$$

Als obere Grenze des Integrals wäre streng genommen ν_0 zu nehmen; da aber der Integrand für $\nu > \nu_0$ nahe Null ist, so können wir ν_0 mit unendlich vertauschen. Das Integral läßt eine $n + 1$ malige partielle Integration zu und führt auf den Ausdruck

$$\left(\frac{2\nu_0}{3N}\right)^{n+1} (n + {}^3/_2)(n + {}^1/_2) \ldots {}^3/_2 \int_0^\infty e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{1/2}\, d\nu.$$

Setzen wir hierin $\nu = x^2$, $d\nu = 2\,x\,dx$, so erhalten wir

$$\text{const.}\left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+1} \int_0^\infty e^{-\frac{3Nx^2}{2\nu_0}} x^2 dx = \text{const.}\left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+5/2}.$$

Somit wird S:

$$S = \text{const.}\, i \frac{N^{5/2}}{\nu_0^{3/2}} \left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+5/2} = \text{const.}\, i \frac{\nu_0^{n+1}}{N^n}. \quad (26)$$

Da ν_0 wie V, N wie $V^{3/8}$ wächst, so kommen wir der Erfahrung am nächsten, wenn wir $n = 1$ setzen; es wird dann S proportional zu $V^{13/8}$, was den Ulreyschen Versuchen am besten entsprechen dürfte.

Mit den Werten $p = 5/8$, $n = 1$ erhalten wir für die Funktion $\mathfrak{S}_\lambda$ aus (19), indem wir $3/2\, N \lambda_0 = \varkappa \lambda_0^{5/8}$ setzen:

$$\mathfrak{S}_\lambda = C \cdot i\, \lambda_0^{9/16}\, e^{-\frac{\varkappa \lambda_0^{5/8}}{\lambda}} \frac{1}{\lambda^{4,5}}. \quad (27)$$

$\varkappa$ bedeutet eine von den Versuchsbedingungen unabhängige Konstante, C einen Faktor, der von der Natur der Antikathode abhängt. Daß die Gleichung (27) auf Endgültigkeit keinen Anspruch erheben kann und will, mag ausdrücklich festgestellt werden. Mehr als eine qualitative Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen, kann vorläufig, solange nicht neue Untersuchungen eine schärfere Prüfung der Theorie ermöglichen, nicht angestrebt werden. Wie weit der Ansatz (27) den Beobachtungen entspricht, geht aus dem Vergleich der in Fig. 2

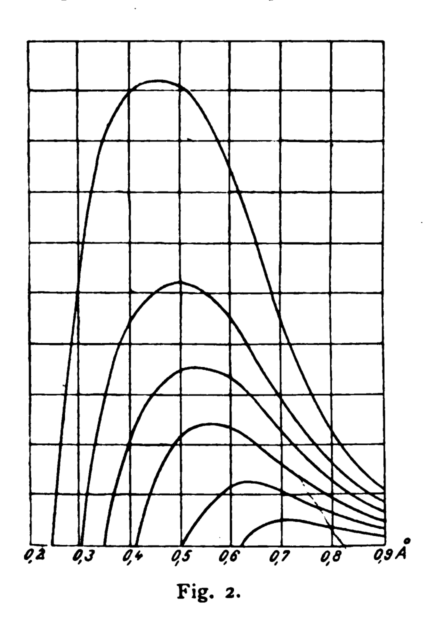


Fig. 2.

aus (27) berechneten mit den (Fig. 3) von Ulrey gemessenen Intensitätskurven hervor. Der Fig. 2

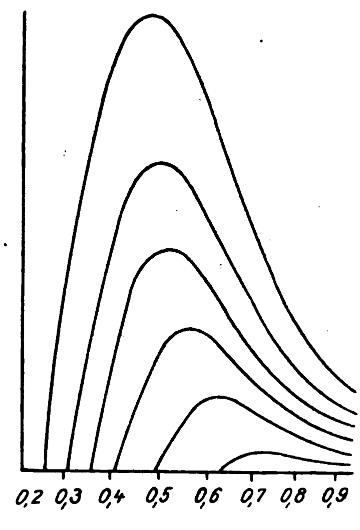


Fig. 3.

liegt für $\varkappa$ der Wert 5,75 zugrunde und es wurde eine Filtrierung von der Stärke $f = 2{,}6$ (0,5 mm Glas) angenommen. Die qualitative Übereinstimmung der Kurven ist befriedigend, nur nehmen die berechneten Intensitätsmaxima mit sinkender Spannung rascher ab als es den Beobachtungen entspricht.

Den aus den Gleichungen (19) berechneten Einfluß der Emissionsrichtung Θ auf die Intensitätsverteilung stellt Fig. 4 dar. Angenommen

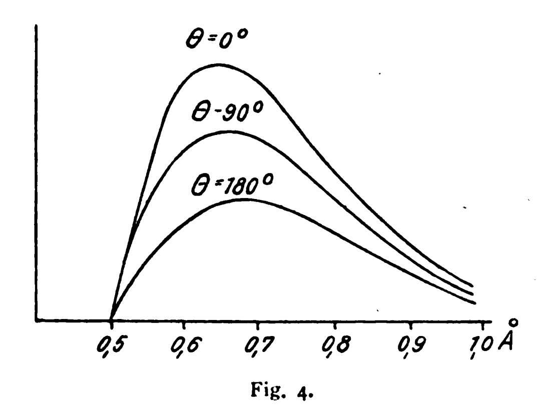


Fig. 4.

ist eine Strahlung von $\lambda_0 = 0{,}5$ Å. Die Intensität in der Richtung $\Theta = 0^0$ ist für alle Wellenlängen größer als für $\Theta = 90^0$, die für 90^0 wiederum durchwegs größer als für $\Theta = 180^0$. Die relativen Unterschiede nehmen im Spektrum mit abnehmender Wellenlänge zu; es folgt daraus, daß die transversale Strahlung im Gesamtcharakter härter ist als die rückläufige, dagegen weicher als die Strahlung, die in der Richtung $\Theta = 0^0$ entsandt wird. Dieser schon von

Friedrich beobachtete und bis auf Wagner[1]) als Dopplereffekt gedeutete Unterschied in der mittleren Härte erklärt sich hier als eine Folge des Impulsgesetzes.

Daß das für den Fall einer konstanten Spannung geltende Gesetz der spektralen Energieverteilung angenähert auch dann noch gilt, wenn die Strahlung durch eine periodisch wechselnde Spannung erregt wird, wurde bereits eingangs erwähnt. Diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Strahlungsintensität in jedem Augenblick nahe dem Quadrat der jeweiligen Spannung proportional ist. Es folgt daraus, daß die Strahlung zum überwiegenden Teil durch die in der Nähe des Maximums V_m liegenden Spannungswerte zustande kommt. V_m bestimmt daher auch den Gesamtcharakter der Strahlung, während die niedrigen Spannungen darauf nur einen untergeordneten Einfluß nehmen. Wir sehen also voraus, daß die spektrale Zusammensetzung der Strahlung von der besonderen Art der Spannungskurve in erster Annäherung unabhängig ist und im wesentlichen nur durch die Scheitelspannung V_m bestimmt wird. Eine periodisch wechselnde Spannung vom Scheitelwert V_m erzeugt, gleichgültig von welcher Art die Periodizität sein mag, eine Strahlung von annähernd derselben Beschaffenheit wie eine konstant wirkende Spannung vom Betrag V_m. Doch ist zu bemerken, daß nur die spektrale Zusammensetzung, nicht aber die auf gleiche Stromstärke bezogene Intensität der Strahlung von der Art der Spannungskurve unabhängig ist. Es ist leicht einzusehen, daß bei gleicher mittlerer Stromstärke und gleicher Scheitelspannung V_m die Strahlung um so intensiver sein muß, je mehr in der Spannungskurve die niederen Teile gegenüber den hohen zurücktreten.

Wenn wir die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung noch kurz zusammenfassen, so erscheint uns am wesentlichsten, daß die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum durch eine einzige Größe, die kürzeste Wellenlänge λ_0, eindeutig definiert ist. Auf diesem Ergebnis, das als experimentell und theoretisch gesichert gelten kann, bauen sich die Methoden der Radiographie (Staunig) sowie der Strahlentherapie (Fritz und Verf.), die am Innsbrucker Zentralröntgeninstitut ausgearbeitet wurden[2]). Die endgültige Form des Strahlungsgesetzes steht noch nicht fest, der Ansatz (27) ist nur als vorläufiger Versuch zu betrachten. Hoffen wir, daß es auf Grund neuer Untersuchungen bald möglich sein wird, die noch offenen Fragen zu entscheiden.

(Eingegangen 25. Juni 1921.)

1) Wagner hat schon auf der Naturforscher-Versammlung in Nauheim die hier vertretene Auffassung klar ausgesprochen. Vgl. diese Zeitschr. **21**, 621, 1920.
2) Demnächst erscheinende Aufsätze in den Fortschritten auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen.

Zur Präzision der Fall- und Steigversuche.

Von Erich Schmid.

1. Zweck der Arbeit.

Aus einer Serie von Fall- oder Steigzeiten über dieselbe Distanz l berechnet sich bekanntlich die mittlere Fall-, bzw. Steiggeschwindigkeit und die Konstante der Brownschen Bewegung — das mittlere, sekundliche Verschiebungsquadrat — nach den Formeln:

$$v = \frac{l}{\frac{1}{n}\Sigma t_i}; \qquad (I)$$

$$\overline{\lambda^2} = l^2\left[\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\frac{1}{n}\Sigma t_i}\right]. \qquad (II)$$

Für den mittleren Fehler der nach diesen Formeln bestimmten Größen gibt Schrödinger[1]) die Ausdrücke:

$$\frac{\mu(v)}{v} = \frac{\lambda}{\sqrt{lvn}}\sqrt{1+\frac{3\lambda^2}{lvn}}. \qquad (1)$$

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}. \qquad (2)$$

Wenn das Problem dadurch auch mathematisch erledigt ist, so scheint doch bei der Wichtigkeit, welche die Formeln (I) und (II) bei der Bestimmung des el. Elementarquantums nach der Ehrenhaft-Millikanschen Methode erlangt haben, eine experimentelle Bestimmung ihrer mittleren Fehler, also eine Überprüfung der Formeln (1) und (2), nicht überflüssig.

Der Zweck der vorliegenden Notiz ist es daher, diesen Vergleich zwischen Theorie und Experiment wirklich durchzuführen. Gleichzeitig soll auch die vom Verfasser[2]) für den mittleren Fehler des nach der Fletcherschen Methode berechneten $\overline{\lambda^2}$ fehlerhaft abgeleitete Formel verbessert und einem Vergleich mit der Erfahrung unterzogen werden.

2. Abschätzung des mittleren Fehlers der Fletcherschen Formel.

Nach einer von Fletcher[3]) angegebenen,

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 289, 1915.
2) E. Schmid, Wien. Ber. (IIa), **129**, 813, 1920.
3) H. Fletcher, Phys. Rev. **4**, 440, 1914.

von Smoluchowski[1]) korrigierten Methode gilt für das mittlere, sekundliche Verschiebungsquadrat, bzw. dessen halben Reziprokwert, auch die Formel:

$$a = \frac{1}{2\overline{\lambda^2}} = \frac{l}{\pi \tau^2 v^3}\left(1 - \frac{\pi - 2}{8\pi a l v}\right)^2, \qquad \text{(III)}$$

worin $\tau = \frac{t^+ - t^-}{2}$ ist, wobei wieder t^+ das Mittel jener Zeiten bedeutet, die größer sind als das Gesamtmittel und t^- analog für die kleineren Zeiten gilt. l und v bedeuten dieselben Größen wie oben.

Löst man die Gleichung (III) nur unter Berücksichtigung des 1. Gliedes nach $\overline{\lambda^2}$ auf, so erhält man:

$$\overline{\lambda^2} = \frac{\pi \tau^2 v^3}{2l}, \qquad \text{(III}_1\text{)}$$

für welche Form nun die Fehlerschätzung durchgeführt werden soll.

Unter der näherungsweise gültigen Annahme, daß die Anzahl der Zeiten, die größer sind als das Gesamtmittel und jener, welche kleiner als dieses sind, einander gleich und gleich $\frac{n}{2}$ sind,

$$n^+ = n^- = \frac{n}{2}$$

läßt sich τ auch in der Form $\tau = \frac{s^+ - s^-}{n}$ darstellen, worin s^+ und s^- leicht verständliche Symbole bedeuten. Daher ist, wegen:

$$v = \frac{l \cdot n}{s^+ + s^-},$$

$$\overline{\lambda^2} = \frac{n \pi l^2}{2} \frac{(s^+ - s^-)^2}{(s^+ + s^-)^3}$$

und

$$\mu^2(\overline{\lambda^2}) = \left(\frac{\partial \overline{\lambda^2}}{\partial s^+}\right)^2 \mu^2(s^+) + \left(\frac{\partial \overline{\lambda^2}}{\partial s^-}\right)^2 \mu^2(s^-).$$

Es ergibt sich weiter:

$$\mu^2(s^+) = \overline{(t_1 + t_2 + \ldots + t_{\frac{n}{2}} - s^+_w)^2}$$

$$= \frac{n}{2}\left[\overline{(t^2)^+} - (t^+)^2\right]$$

und

$$\mu^2(s^-) = \frac{n}{2}\left[\overline{(t^2)^-} - (t^-)^2\right].$$

Bildet man nun mit Hilfe der Zeitenverteilungsformel:

$$M(t)\,dt = l\sqrt{\frac{a}{\pi}}\, t^{-3/2} e^{-\frac{a(l - vt)^2}{t}}\, dt$$

die verlangten Mittelwerte, so erhält man:

$$\mu^2(s^+) = \mu^2(s^-) = \frac{nlb}{2\pi a v^3},$$

worin $b = \frac{\pi}{2} - 1$ bedeutet.

Für $\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{(\overline{\lambda^2})^2}$ findet man daher:

$$\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{(\overline{\lambda^2})^2} = \frac{4b}{n}\left(1 + \frac{9}{4\pi a l v}\right),$$

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{4b}{n}}\sqrt{1 + \frac{9}{4\pi a l v}}. \qquad (3)$$

Da der 2. Faktor nur sehr wenig von 1 verschieden ist, wird man praktisch:

$$\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = 1{,}07\sqrt{\frac{2}{n}}$$

setzen können.

Das heißt: Schon das erste Glied der Fletcherschen Formel gibt das Verschiebungsquadrat mit nahezu derselben Genauigkeit wie Formel (II).

3. Vergleich der theoretisch und experimentell gegebenen Präzision.

Zur experimentellen Bestimmung des mittleren Fehlers von v und $\overline{\lambda^2}$ müssen begreiflicherweise sehr lange Zeitenserien zur Verfügung stehen. Und da war ich auf jene Messungen angewiesen, welche ich selbst[1]) an Selen ausgeführt habe.

Im folgenden werden die Fallserien der Partikel I und XIII der betreffenden Abhandlung herangezogen, für welche das gesamte Beobachtungsmaterial veröffentlicht ist.

Die 1500 Fallzeiten von Partikel I wurden in Gruppen zu je 10, 20, 50, 100 und 150 Zeiten geteilt und unter der Annahme der aus sämtlichen Zeiten sich ergebenden Werte von Geschwindigkeit und Verschiebungsquadrat als wahre Werte der mittlere Fehler dieser Größen für 10, 20, 50, 100 und 150 Zeiten bestimmt. Fig. 1

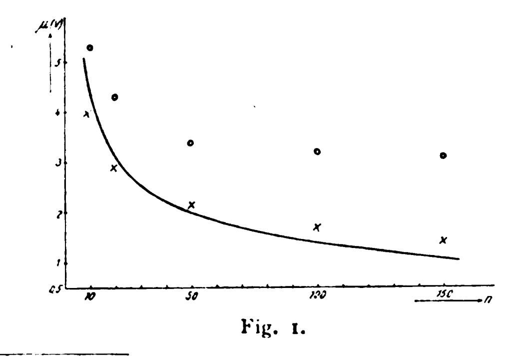


Fig. 1.

1) v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 16, 318, 1915.

1) E. Schmid, l. c.

enthält als Abszisse die Anzahl der Zeiten einer Serie und als Ordinate den dazu gehörigen mittleren Fehler der Geschwindigkeiten in Prozent.

Die Kurve gibt die nach (1) berechneten, die o die experimentell bestimmten Werte. Diese ergeben sich nicht unbeträchtlich größer, doch findet dies seine Erklärung in einer langsamen Änderung der Fallgeschwindigkeit des Teilchens, wie aus Tabelle I, welche die Mittelzeit aus je 100 Fallzeiten enthält, ersichtlich ist.

Tabelle I.

	$\overline{t}$		$\overline{t}$
1. Hund.	14,19	9. Hund.	12,88
2. „	14,06	10. „	13,21
3. „	13,69	11. „	12,87
4. „	13,68	12. „	13,08
5. „	13,32	13. „	13,22
6. „	13,52	14. „	13,02
7. „	13,33	15. „	12,56
8. „	13,37		

Die Zunahme der Fallgeschwindigkeit innerhalb der $10^1/_2$ Stunden dauernden Beobachtung deutet möglicherweise auf eine langsame Zunahme der Masse des Partikels hin. Bestimmt man nun aus den mittleren 500 Zeiten, während welcher die mittlere Fallgeschwindigkeit ziemlich konstant zu sein scheint, neuerlich den Fehler in der Geschwindigkeit, so kommt man zu den ⨯, welche sich mit der theoretischen Kurve in wesentlich besserer Übereinstimmung befinden.

Für Partikel XIII, welches, wie aus Tabelle II hervorgeht,

Tabelle II.

	$\overline{t}$		$\overline{t}$
1. Hund.	11,24	3. Hund.	12,06
2. „	10,54	4. „	11,46

durch 13 Stunden seine Masse beizubehalten scheint, ist in Fig. 2 in analoger Weise der Vergleich durchgeführt. Die Anzahl der gemessenen Fallzeiten beträgt hier 400.

Nach (II) wurde nun auch für jede der Gruppen, in welche die Serien geteilt wurden, $\overline{\lambda^2}$ und hierauf dessen mittlerer Fehler bestimmt. Der Vergleich mit dem hierfür von der Theorie geforderten Wert ist in Fig. 3 durchgeführt, welche wieder als Abszisse die Anzahl der Zeiten und als Ordinate den mittleren Fehler im $\overline{\lambda^2}$ in Prozenten enthält. Die glatte Kurve gibt den theoretischen Wert nach (2), die o und □ den experimentellen Wert aus Partikel I und XIII. Die Übereinstimmung ist hier eine durchaus befriedigende. Wird nun $\overline{\lambda^2}$ nach Formel (III_1) und dafür dann der mittlere Fehler bestimmt, so kommt man zu den ⨯ der Fig. 3. (Das zur Abszisse 20 Zeiten gehörige ⨯ wurde aus Partikel XIII berechnet.) Wie ersichtlich, ist der mittlere Fehler dieser Formel nur um weniges größer als der von Formel (II), wie dies auch theoretisch aus (3) hervorgeht.

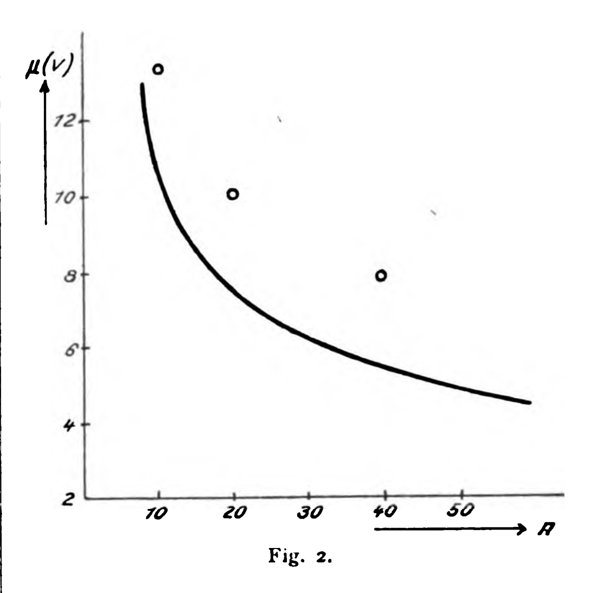


Fig. 2.

In Fig. 4 ist schließlich noch der theoretische und experimentelle mittlere Fehler im in horizontaler Richtung bestimmten $\overline{\lambda^2}$ aufgetragen. Der theoretische Wert ist hier, da $\overline{\lambda^2}_{hor}$ direkt als arithmetisches Mittel bestimmt wird, gleich $\sqrt{\frac{2}{n}}$[1]. Die Gesamtzahl der ebenfalls an Partikel XIII ausgeführten Bestimmungen beträgt

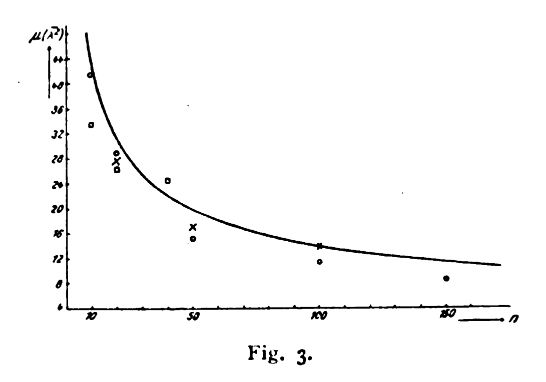


Fig. 3.

420 und ist in Gruppen zu je 10, 20 und 40 Beobachtungen geteilt.

Zusammenfassend kann betont werden, daß die für die Genauigkeit von Geschwindigkeit und mittlerem, sekundlichem Verschiebungsquadrat

1) Vgl. hierzu: E. Schmid, l. c.

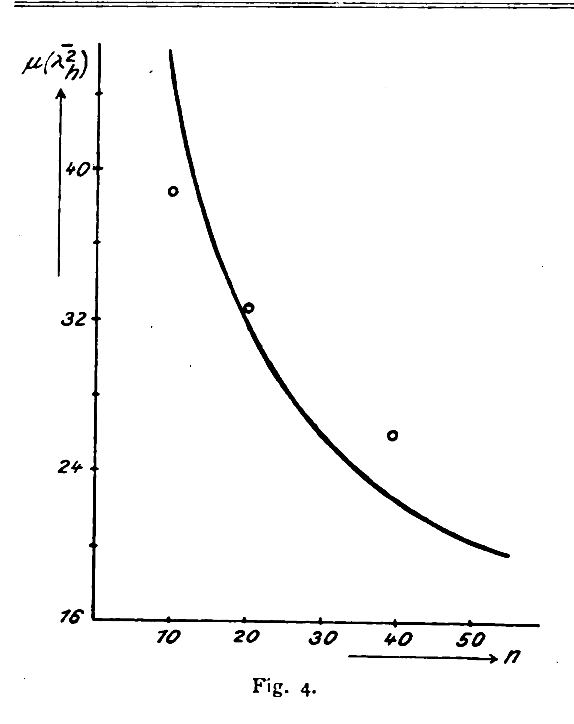


Fig. 4.

aufgestellten Formeln durch die Erfahrung gut bestätigt gefunden wurden. Der mittlere Fehler des nach der Fletcherschen Formel bestimmten Verschiebungsquadrates ergibt sich ca. 1,07 mal so groß als der eines nach der Weißschen Formel (II) bestimmten, so daß in Hinkunft wegen der ungleich geringeren Rechenarbeit vielleicht doch der ersteren der Vorzug zu geben wäre, um so mehr, als die Bestimmung der „oberen" und „unteren" Zeitensumme zur Kontrolle der Ungeordnetheit der Bewegung — wie in der wiederholt zitierten Arbeit des Verfassers dargetan — erforderlich ist.

Wien, II. phys. Lehrk. der Techn. Hochschule, 4. Juni 1921.

(Eingegangen 10. Juni 1921.)

Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie [1]).

(Bemerkung zum Aufsatz des Herrn W. Kramer.)

Von H. Simon.

Nachdem die Inspektion für Waffen und Gerät in Berlin (Dr. H. Kochan) schon im Heft 10 (**22**, 320, 1921) auf einige Literaturstellen aufmerksam gemacht hat, halte ich es für angebracht darauf hinzuweisen, daß ich bereits im Jahre 1907 die Materie eingehend behandelte. Meine Veröffentlichung „Über Spiegelbild-Photogrammetrie" geschah in der Zeitschrift „Photographische Chronik", welche seinerzeit als Beiblatt zu der Zeitschrift „Das Atelier des Photographen" bei Wilhelm Knapp, Halle, erschien. Die Arbeit beschäftigt sich mit der meßtechnischen Erfassung eines mit seinem Spiegelbild aufgenommenen Gegenstandes und enthält alle diesbezüglichen theoretischen Ableitungen. An Hand mehrerer Versuchsphotogramme ist die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens nachgewiesen.

1) Diese Zeitschr. **22**, 24, 1921.

(Eingegangen 25. Juni 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

Von J. Franck.

(Fortsetzung.)

Quecksilber.

Dem Quecksilber soll wie im letzten Bericht ein besonderer Abschnitt gewidmet werden, da es als das am bequemsten dem Elektronenstoßverfahren zugängliche Metall am besten durchforscht ist.

Wir bringen zuerst eine Tabelle der im Quecksilber bestimmten Anregungsspannungen; wie unter „Methoden" erwähnt, sind die Resultate nach dem lichtelektrischen Verfahren gewonnen, ein Beispiel der erhaltenen Kurven ist oben abgedruckt. In der Tabelle IV findet sich unter I eine Aufzählung der Anregungsspannungen in Volt, unter II und III sind die angeregten Serienlinien sowie die Serienbezeichnung nach Paschen und in der letzten Kolumne die theoretisch berechneten Voltwerte zum Vergleich mit den gemessenen aufgeführt.

Eine Durchsicht der Tabelle zeigt, daß die meisten Linien in das Serienschema hineinpassen. Ein Vergleich der Tabelle mit der abgedruckten Kurve ergibt, daß alle den nach dem Serienschema gedeuteten Quantenübergängen stärkere Knicke entsprechen. Einige schwache Knicke passen nicht in das Serienschema; sie sind in die Tabelle mit aufge-



Tabelle IV.

Voltwerte beobachtet	Serienbezeichnung	Wellenlängen	Voltwerte berechnet
4,68	$1,5S - 2p_3$	2655,5	4,66
4,9	$1,5S - 2p_2$	2537,48	4,86
5,32	—	2338 } Absorptions- 2313 } banden	5,28 } 5,34 }
5,47	$1,5S - 2p_1$	2270,6	5,43
5,76	$2p_3$	2150	5,73
6,04	—	(2043) } berechnet aus	—
6,30	—	(1958) } beob. Voltwerten	—
6,73	$1,5S - 2P$	1849,6	6,67
7,12	—	(1733 ber.)	—
7,46	—	(1655 ber.)	—
7,73	$1,5S - 1,5s$	1603,93	7,69
8,35	—	(1477 ber.)	—
8,64	$1,5S - 3p_2$	1435,61	8,58
8,86	{ $1,5S - 3P$ { $1,5S - 3d_i$	{ 1402,7 { 1400,0	{ 8,79 { 8,81
9,37	$1,5S - 2p_3$	2656,5	$2 \cdot 4,66 = 9,32$
9,60	{ $1,5S - 4p_1$ { $1,5S - 2p_3$ { $+ 1,5S - 2p_2$	{ 1307,8 { 2656,5 { + 2537	{ 9,44 { $4,66 + 6,68 = 9,52$
9,79	{ $1,5S - 2p_2$ { $+ 1,5S - 2p_2$ { $1,5S - 4P$	{ 2537 { + 2537 { 1268,9	{ $2 \cdot 4,86 = 9,72$ { 9,73
10,38	$1,5S$	1187,88	10,39

nommen wegen der Sicherheit, mit der auch sie immer wieder auftraten. Die bei hohen Spannungen gelegenen Knicke sind mehrdeutig, da sie sowohl der zweifachen Anregung der Anfangsglieder der Absorptionsserie entsprechen können wie der Anregung kurzwelliger Glieder derselben Serie. Wir möchten betonen, daß der quantenhaften Energieaufnahme nicht prinzipiell die Emission der aus der $h\nu$ Beziehung sich ergebenden Wellenlänge entspricht. Vielmehr kann die Reemission der Energie auch in Stufen vor sich gehen. In einigen Fällen entspricht dem in das Serienschema hineinpassenden Übergang überhaupt keine monochromatische Lichtemission. Diese Verhältnisse sind klarer ersichtlich aus einer schematischen Darstellung des Einfach- und Triplet-Liniensystems des Quecksilbers, in welches die durch Elektronenstoß bewirkten Quantenübergänge durch Pfeillinien eingetragen sind [1]).

Auf einer Abszissenachse sind die Wellenzahlen in willkürlichem Maßstabe aufgezeichnet. Oberhalb dieser Geraden sind die Termreihen des Einfachliniensystems, unterhalb der Abszisse die Termreihen des Tripletsystems eingezeichnet. Die Wellenzahl jedes Terms ist gleich dem senkrechten Abstand von der auf der linken Kante der Figur errichteten

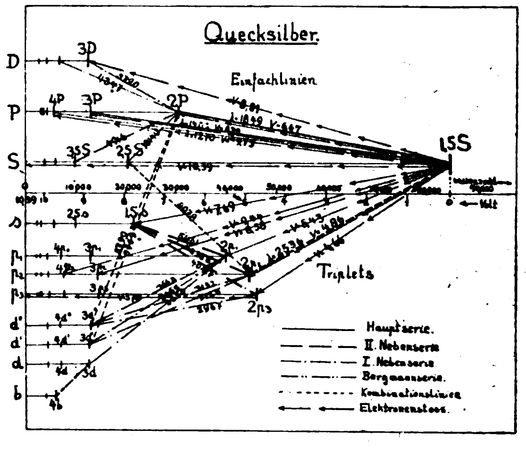


Fig. 14.

Senkrechten. Die jeder Termreihe entsprechenden Punkte befinden sich auf einer Geraden, die parallel zur Abszisse verläuft. Jeder Emissionslinie entspricht ein Übergang zwischen 2 Termen, bei denen sich das azimutale Quant um den Betrag ± 1 ändert. Die S-, P- und D-Termreihen unterscheiden sich nach Sommerfeld um diesen Betrag voneinander. Daher kommen die hauptsächlichsten ohne Durchbrechung des Auswahlprinzips auftretenden Serien zustande durch Übergänge, die in unserm Serienschema zwischen 2 benachbarten Termreihen stattfinden. Die bekanntesten Spektrallinien sind in dem Schema durch Zeichnung einer Verbindungslinie zwischen den Termen, zwischen denen der Übergang erfolgt, angedeutet. Sie gehorchen, wie

1) Diese Form der Spektrendarstellung ist hier nur flüchtig besprochen; näheres kann ersehen werden aus dem Bericht Bohrs über seinen Berliner Vortrag. Die erste Kenntnis dieser prägnanten Darstellungsweise und auch die Ausführung dieser Zeichnung verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn W. Grotrian.

man sieht, alle dem Auswahlprinzip. Für den Elektronenstoß besteht ein solches beschränkendes Prinzip nicht, und so sehen wir durch Pfeillinien angedeutet Übergänge wie 1,5 S — 1,5 s, bei denen sich das azimutale Quant gar nicht ändert und Übergänge wie 1,5 S — d_i, bei denen es sich um den Betrag 2 ändert. Darüber hinaus kommen aber, was besonders bemerkenswert erscheint, die Übergänge 1,5 S — 2 p_1 und 1,5 S — 2 p_3 vor, die durch monochromatische Lichtemission offenbar auch nicht bei Durchbrechung des gewöhnlichen Auswahlprinzips emittiert werden; sonst müßten sie in der Quecksilberlampe, bei der wegen der starken Ionisation sehr große Feldstärken (s. Debye und Holtsmark) sich ergeben, unbedingt beobachtet sein. Die 2 p_1- bzw. 2 p_3-Bahnen müssen also so beschaffen sein, daß ein freiwilliger Übergang zur 1,5 S-Bahn überhaupt nicht vorkommt. Ist durch einen Elektronenstoß ein Elektron auf die 2 p_1-Bahn gehoben, so könnte unter Einwirkung eines äußeren Feldes der Übergang 2 p_2 — 2 p_1 unter Emission einer ultraroten Linie stattfinden und von hier aus das Elektron unter Emission von 1,5 S — 2 p_2, also der Resonanzlinie 2536 Å. in den Normalzustand zurückkehren. Ist aber die Bahn 2 p_3 durch Elektronenstoß erreicht, so ist eine Rückkehr in den Normalzustand auch unter der Einwirkung äußerer Felder unmöglich, wenn der Übergang 1,5 S — 2 p_3 nicht stattfinden kann. In diesem Fall muß das angeregte Atom in diesem von uns so genannten metastabilen Zustand verharren, bis es z. B. durch einen weiteren Elektronenstoß in einen höheren Quantenzustand kommt, aus dem es unter Lichtemission in den Normalzustand zurückkehren kann. Man sieht, daß durch das Auftreten metastabiler Zustände die Wahrscheinlichkeit für eine Ionisation des Atoms durch mehrfach hintereinander folgende Stöße langsamerer Elektronen, als sie zur Ionisation in einem Zuge gebraucht werden, wesentlich steigt. Dieser Umstand mag auch für die Möglichkeit des Brennens eines Lichtbogens in dichtem Dampf bei kleinen Potentialgradienten eine wesentliche Bedeutung haben. Da die Behandlung dieses Problems vom Hauptthema fortführt, so mag die untenstehende Anmerkung genügen[1]). Auch auf den Einfluß, den man für die Untersuchungen über Absorption des Lichtes erwarten muß, wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern nur die zweite und vermutlich noch häufiger auftretende Möglichkeit des Zerfalls des metastabilen Zustandes besprechen. Sie besteht darin, daß durch Zusammenstöße von metastabilen mit normalen Quecksilberatomen Doppelmoleküle sich bilden, die ihrerseits bei Zusammenstößen mit andern Atomen unter Emission von Bandenstrahlung zerfallen. Über Bildung und Zerfall solcher Doppelmoleküle aus angeregten Atomen haben Franck und Grotrian[3]) a. a. O. berichtet. Es handelte sich dort um die Bildung eines Hg_2 aus einem Atom, das durch Absorption der Resonanzstrahlung angeregt ist, und einem Normalatom. Alles dort Gesagte läßt sich sinngemäß auf den Fall des metastabilen Quecksilbers übertragen. Die beiden geschilderten Wege des Zerfalls des metastabilen Zustandes ergeben kein Licht der Frequenz, die sich aus der $h\nu$-Beziehung bzw. dem Serienschema berechnet, und liefern trotzdem in Übereinstimmung mit dem Resultat bei den entsprechenden Elektronengeschwindigkeiten eine Lichtemission, die einen Photoeffekt hervorruft. Schließlich mag erwähnt werden, daß die nicht in das Serienschema passenden, durch schwache Knicke der lichtelektrischen Kurven nachgewiesenen Anregungsspannungen sehr wohl Quantensprünge der metastabilen Atome bzw. der gebildeten Moleküle sein können. Ein alle Einzelheiten berücksichtigendes Bild er-

1) Wie in der mehrfach zitierten Zusammenfassung von Franck u. Hertz näher ausgeführt wurde, hat van der Bijl darauf hingewiesen, daß die in Lichtbogen bei niederem Potentialgefälle und hohem Druck beobachtete Ionisation zustande kommen könne durch mehrere Elektronenstöße, die ein Atom so schnell hintereinander treffen, daß die von einem Stoß übertragene Energie noch nicht ausgestrahlt ist, ehe der nächste Stoß das Atom in einen noch höheren Quantenzustand wirft. So kommt dann die Ionisation zustande, obgleich kein Elektron die kinetische Energie besitzt, die gleich der Ionisierungsarbeit ist. Hiermit steht in Übereinstimmung, daß die niedrigste Zündspannung eines Lichtbogens zwischen einer Glühkathode und einer normalen Anode gleich der Resonanzspannung gefunden wurde. Compton[1]) hat unterdes die Wahrscheinlichkeit für solche Stoßhäufigkeiten ausgerechnet unter Benutzung des Wertes von 10^{-8} sec für die mittlere Lebensdauer des Anregungszustandes. Er findet sie zu klein, um die beobachteten Resultate zu erklären. Eine Deutung sieht er darin, daß die bei der Rückkehr in den Normalzustand ausgesandte Strahlung von Nachbaratomen durch Absorption wieder aufgenommen wird. Somit wandert die Anregung von einem zum andern Atom, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein angeregtes Atom von einem Elektron getroffen wird, wächst wesentlich. Zu diesem Einfluß, der sicher vorhanden sein wird, kommt die Wirkung der langen Lebensdauer einiger metastabiler Anregungszustände hinzu. Als ebenfalls hierher gehörig ist die äußerst interessante Theorie von Klein und Rosseland[2]) zu nennen, die den quantenhaften Zuwachs der Geschwindigkeit langsamer Elektronen beim Zusammenstoß mit angeregten Atomen behandelt. Dieser Vorgang ist die genaue Umkehrung des hier besprochenen Prozesses.

1) Compton, Phys. Review. **15** (2), 130 und 476, 1920.

2) Klein u. Rosseland, Zeitschr. f. Phys. **4**, 46, 1921.

3) J. Franck u. W. Grotrian, Zeitschr. f. Phys. **4**, 89, 1921.



gibt sich erst, wenn die lichtelektrische Methode durch parallele spektroskopische Beobachtungen ergänzt wird, wie das für die Resonanzlinien in weitgehendstem Maße geschehen ist. Die Schwierigkeit solcher Untersuchungen besteht in der großen Lichtschwäche der Spektrallinien bei ihrer Anregung durch solche Elektronen, die gerade eben die entsprechende Energie besitzen. Zu den im letzten Bericht besprochenen derartigen Untersuchungen sind einige neue hinzugekommen. Foote und Meggers[1]), denen wir viele der oben angeführten Experimente über Resonanzspannung verdanken, haben den Versuch unternommen, durch genaue Photometrierung die Grenzgeschwindigkeiten der Elektronen zu bestimmen, bei der die verschiedenen Linien des Cäsiums angeregt werden. In Übereinstimmung mit der Erwartung traten von einer nicht genau festlegbaren Elektronengeschwindigkeit an zuerst die Dupletlinien $1,5\ s - 2\ p_{1,2}$ mit weiterwachsender Spannung erscheinen $1,5\ s - 3\ p$, dann $2\ p_1 - 5\ d$, dann trat Ionisation ein und mit ihr das ganze Linienspektrum. Sobald die Ionisation eingetreten ist, haben alle Linien zueinander ein konstantes, von der Spannung unabhängiges Intensitätsverhältnis; mit abnehmender Spannung nimmt das Verhältnis der Stärke der Resonanzlinien zu den beiden oben erwähnten anderen Linien sehr schnell zu, bis schließlich nur die Resonanzlinien übrig bleiben. Wertvoll ist der Nachweis, daß das Auftreten des Einlinienspektrums reell ist und nicht durch die große Stärke der Resonanzlinien vorgetäuscht wird. Die weiteren Schlüsse der Autoren, daß es nur 2 Gruppen von unelastischen Stößen gäbe, diejenigen, die Resonanzlicht anregen, und diejenigen, welche ionisieren, scheinen uns nicht aus dem Beobachtungsmaterial der Verfasser hervorzugehen und stehen auch im Widerspruch zu den oben geschilderten experimentellen Befunden beim Quecksilber. Eine weitere Methode, die ebenfalls bisher nur qualitativ die Reihenfolge der Anregungspannung ergibt, ist die neuerdings von Seeliger[2]) angewandte, mit der er die Anregungsfunktion von Spektrallinien studiert. Beobachtet wird hier der Intensitätsanstieg von Spektrallinien im Glimmlichtsaum als Funktion des Abstandes der Emissionsstelle von der Kathode. Der kleinsten Anregungsspannung entspricht der größte Abstand von der Kathode. Im Quecksilberdampf erhält Seeliger folgende Reihenfolge der Anregungsspannungen, wenn man von großen zu kleinen Werten fortschreitet: Funkenlinien, erste Nebenserie der Einfachlinien, erste Tripletnebenserie, zweite Nebenserie der Einfachlinien, zweite Tripletnebenserie, 2536 Å., 2847. Bis auf die Linie 2847 stimmt dieses Resultat, dessen theoretische Deutung Seeliger sich für später vorbehalten hat, mit den oben erwähnten, aus den lichtelektrischen Kurven sich ergebenden Schlüssen und mit den Zusammenhängen, die sich nach Bohr aus dem Serienschema folgern lassen, vollkommen überein. Die Seeligersche Reihenfolge ist gerade die, die man aus dem Serienschema der Fig. 14 direkt ablesen kann. In diesem Zusammenhange mögen ferner die neuen Füchtbauerschen Resultate über Quecksilberfluoreszenz (diese Zeitschr. **21**, 635, 1920) erwähnt werden, da sie eine eindrucksvolle Bestätigung der Bohrschen Auffassung der Serienzusammenhänge ergeben. Füchtbauer zeigte z. B., daß Fluoreszenz des *Hg*-Dampfes im Lichte des Triplets $1,5\ s - 2\ p_{1,2,3}$ nur auftritt, wenn durch gleichzeitige Bestrahlung mit dem Licht der Wellenlänge $1,5\ S - 2\ p_2$ die Grundbahn $2\ p_2$ geschaffen wurde.

Edelgase.

Helium.

Das Helium mit seinen 2 Elektronen ist das einfachste Atom neben dem Wasserstoff. Daher sind viele Versuche, um zu einer genauen Kenntnis seiner Elektronenanordnung zu gelangen, ausgeführt. Ein Vergleich der theoretischen Schlüsse mit der Erfahrung läßt sich unter Benutzung der optischen Ergebnisse nur bis zu einem gewissen Grade ausführen, da die beiden Spektralsysteme, dasjenige des sogen. Parheliums und das des Orthoheliums, soweit sie optisch bekannt sind, beim Zurückfallen von Elektronen in höhere Quantenbahnen emittiert werden. Die eigentliche Absorptionsserie des Heliums liegt im optisch bis in die neueste Zeit nicht zugänglichen Ultraviolett, so daß durch die Elektronenstoßmethode eine notwendige Ergänzung vorgenommen werden mußte.

Der alte von Franck und Hertz ursprünglich für die Ionisierungsspannung gehaltene Wert von ca. 20,5 Volt hat sich, wie bei Abfassung des vorigen Berichtes vermutet, als erster unelastischer Stoß herausgestellt. Wir möchten diesen Wert im Gegensatz zu den meisten Beobachtern nicht Resonanzpotential, sondern Umwandlungsspannung des Heliums nennen. Die Begründung dieser Bezeichnung folgt weiter unten. Die von verschiedenen Be-

1) Foote u. Meggers, Phil. Mag. **40**, 1920.
2) Seeliger, siehe z. B. Zeitschr. f. Phys. **2**, 405, 1920.

obachtern für die Umwandlungsspannung erhaltenen Werte sowie die benutzten Methoden sind, soweit sie nicht schon im alten Referate aufgeführt sind, in folgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle.

20,4 Volt	Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. Soc., London (A) **95**, 408, 1920. Lichtelektrisches Verfahren.	
20,45 „	Franck u. Knipping, Diese Zeitschr. **20**, 481, 1919 u. Zeitschr. f. Phys. **1**, 320, 1920. Lichtelektrisches Verfahren.	
20,2 „	K. T. Compton, Phil. Mag., Nov. 1920. Lenardschaltung mit drehbarem Auffänger.	
20,8 „	Stead u. Gossling, Phil. Mag., Okt. 1920	Verstärkerrohr.
20,5 „	Found, Phys. Rev. (2) **15**, 132, 1920	

Die Übereinstimmung der Werte untereinander ist gut, desgleichen stimmen sie mit dem Quantensprung überein, den Kossel aus einer interessanten Extrapolation der $K\alpha$-Reihe der Röntgenserien für das Heliumatom ableitet. Die genauesten Werte sind wohl der von Frank Horton, Ann Davies und der von Franck und Knipping erhaltene. Ihre Genauigkeit wird auf $\pm$ 0,25 Volt geschätzt; wenn ein Fehler vorliegt, so dürfte der Wert eher etwas zu hoch als zu niedrig sein. Die von Found, Stead und Gossling mit dem Verstärkerrohr ausgeführten Bestimmungen sind von den Verfassern als Ionisierungsspannung angesprochen worden. Da aber unreines Helium verwandt wurde, so ist die Ionisation auf eine durch Strahlung verursachte Ionisation der Verunreinigungen zurückzuführen.

Die Ionisierungsspannung des Heliums ist von Frank Horton und seinen Mitarbeitern sowie von Franck und Knipping je zweimal bestimmt. Die erhaltenen Resultate sind:

25,3 Volt F. Horton u. A. Davies, loc. cit.
25 „ F. Horton u. Doris Bailey,
25,3 $\pm$ 0,25 Volt Franck u. Knipping, Phil. Mag. **40** (6) 440, 1920. loc. cit.

Weitere Bestimmungen der Ionisierungsspannung können übergangen werden, da sie innerhalb größerer Beobachtungsfehler dasselbe Resultat ergeben. Franck und Knipping zeigten, daß der Abstand der Umwandlungsspannung von der Ionisierungsspannung (4,8 Volt) gleich der Anregungsspannung der Grenzfrequenz der optisch festgestellten Hauptserie des Orthoheliums sei. Durch Zusammenstöße von 20,45 Volt-Strahlen mit Heliumatomen wird offenbar die Grundbahn für diese Serie geschaffen. Danach sollte bei 21,25 Volt die Grundbahn des optisch bekannten Parheliumspektrums liegen, da die Hauptserie des Parheliums eine Grenzfrequenz besitzt, zu deren Anregung 4 Volt gebraucht werden. Eine genaue Untersuchung des zwischen 20,45 Volt und der Ionisierungsspannung liegenden Teils der lichtelektrischen Kurve ergab folgende Resultate:

Tabelle V.

berechnet	gemessen	Serien-bezeichnung	berechnete Wellenlängen
aus 20,45 Volt	20,45 Volt	$0{,}5\,S - 1{,}5\,s$	Umwandlungs-spannung
21,25 „	21,25 „	$0{,}5\,S - 1{,}5\,S$	585 Å
21,85 „	21,9 „	$0{,}5\,S - 2\,P$	569 Å
23,7 „	23,6 „	$0{,}5\,S - 3\,P$	523 Å
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
25,23 „	25,3 „	$0{,}5\,S$	493 Å

Wie aus der Tabelle ersichtlich, werden außer der Umwandlungsspannung alle Anregungen als solche des Parheliums angesprochen. Die berechneten Werte ergeben sich aus dem Werte von 20,45 Volt durch Addition der Energiebeträge, die sich aus den Termen des optischen, von Paschen und Runge gefundenen Serienschemas ergeben. Die Übereinstimmung ist äußerst befriedigend, wenn auch der bei 23,6 Volt liegende Knick so schwach ist, daß diesem Wert keine allzu große Bedeutung zuzuschreiben ist. Die anderen Knicke sind jedoch sehr sicher zu erhalten; eine nochmalige Untersuchung unter Berücksichtigung der seitdem gemachten Erfahrungen würde wohl noch weitere Glieder der Absorptionsserie ergeben.

Der bei 20,45 Volt mit Umwandlungsspannung bezeichnete Wert zeigt experimentell ein besonderes Verhalten. Er tritt nur auf, wenn dem Helium minimale Verunreinigungen beigemengt werden. Daß er trotzdem dem Helium angehört, ergibt sich aus seiner großen Stärke bei dem Vorhandensein von so wenig verunreinigendem Gas, daß dessen charakteristische Quantensprünge und Ionisierungsspannungen sich nicht bemerkbar machen.

Dieses Verhalten unterscheidet die Umwandlungsspannung von den übrigen Anregungsspannungen; auch diese lassen sich durch ein wenig verunreinigendes Gas verstärken, da die Strahlung, wie erwähnt, die Verunreinigung ionisiert. Aber die Umwandlungsspannung verschwindet in ganz reinem Helium vollkommen, während der übrige Teil der lichtelektrischen Kurve mit seinen Knicken durchaus deutlich bleibt. Dieses Verhalten steht vollkommen in Übereinstimmung mit den theoretischen Schlüssen, die Franck und Reiche[1]), schon ehe dies Resultat vorlag, gezogen haben. Sie nahmen an, daß durch Stöße der 20,45 Volt-Strahlen das normale Helium in ein metastabiles zweiquantiges Orthohelium verwandelt würde, aus dem es nicht unter monochromatischer Lichtemission in den Normalzustand zurückkehren könne. Die Überlegung wird klarer, wenn wir unter Benutzung der erhaltenen Resultate uns ein Serienschema zeichnen, in das, wie beim Quecksilber, die durch Elektronenstoß angeregten Sprünge mit Pfeillinien eingezeichnet sind.

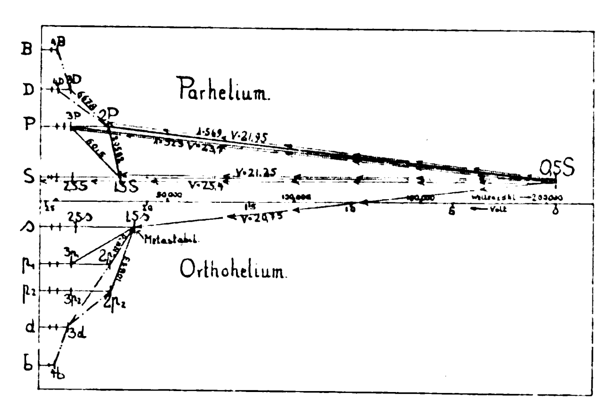


Fig. 15.

Oberhalb der Abszissenlinie ist das Serienspektrum des Parheliums, unterhalb desselben das des Orthoheliums eingezeichnet. Zwischen diesen Systemen gibt es keine einzige Kombinationslinie, auch nicht unter Bedingungen, unter denen das Auswahlprinzip durchbrochen wird; trotzdem müssen beide Spektralsysteme durch Anregung eines normalen Heliumatoms entstehen, wie aus der Tatsache des Auftretens einer einzigen Ionisierungsspannung folgt. Man muß sich entscheiden, ob man den Normalzustand dem Parhelium oder dem Orthohelium zuschreiben will. Nach Franck und Reiche gehört er dem Parhelium an. Landé[1]) hat das Spektrum des Orthoheliums einem Heliumatom zugeschrieben, das gekreuzte Elektronenbahnen hat, das des Parheliums einem Helium mit komplanaren Elektronenbahnen. Ist diese Auffassung richtig, so würde durch Elektronen, die die Umwandlungsspannung durchlaufen haben, das normale gekreuzte Helium in das zweiquantige komplanare verwandelt. Zu diesem Schluß kamen Franck und Reiche durch eine Beobachtung von Paschen[2]), der nachwies, daß die Grundlinie des optisch bekannten Orthoheliumspektrums = 1,08 μ im elektrisch angeregten, ganz reinem Helium das Verhalten einer Resonanzlinie zeigte. Die gesamte Strahlung dieser Wellenlänge, die von angeregtem Helium absorbiert wird, wird mit gleicher Wellenlänge reemittiert; das heißt aber (s. Fig. 15), daß ein Elektron von der $2\,p_{1,2}$-Bahn nur zur $1,5\,s$-Bahn und nicht zum Normalzustand $0,5\,S$ zurückkehren kann, obgleich dieser Weg nach dem Auswahlprinzip gestattet sein sollte, da sich dabei das azimutale Quant um den Betrag 1 ändert. Bei Vorhandensein von minimalen Verunreinigungen verliert die Linie 1,08 μ diese Eigenschaft als Resonanzlinie, so daß in diesem Falle eine Rückkehrmöglichkeit des Elektrons in den Normalzustand vorliegen muß. Ist das Gas aber rein, so bleibt ein einmal umgewandeltes Helium in dem Zustand, in dem das Elektron auf der $1,5\,s$-Bahn des Orthoheliums umläuft. Der Zustand ist also metastabil. Wie vorher beim Quecksilber ausgeführt, sind dann zwei Wege zur Zerstörung des metastabilen Zustandes möglich. Der eine führt über den Zustand der Ionisation, der durch weitere Elektronenstöße erreicht wird, der andere über eine Verbindung. Beim Helium sind nun Momentanverbindungen nicht möglich bei einem Zusammenstoß mit andern normalen Heliumatomen. Dagegen treten sie offenbar auf beim Zusammentreffen mit aktiven, den Verunreinigungen zugehörigen Molekülen. Diese zerfallen dann unter Aussendung eines weit im Ultravioletten liegenden Bandenspektrums. Eine Bildung von He_2 aus zwei angeregten Heliumatomen ist unter den Bedingungen, wie sie bei den Untersuchungen vorlagen, sehr unwahrscheinlich. Dagegen dürfte sie bei starken elektrischen Strömen im Entladungsrohr auftreten. Auf diesen Zusammenhang mit den Heliumbandenspektren (s. Lenz[3])) sowie auf verschiedene andere hiermit zusammenhängende Beobachtungen einzugehen, führt zu weit. Er-

1) J. Franck u. F. Reiche, Zeitschr. f. Phys. **1**, 154, 1920.

1) Landé, diese Zeitschr. **20**, 298, 1919.
2) Paschen, Ann. d. Phys. **45**, 625, 1914.
3) Lenz, Zeitschr. f. Phys. Verhdl. d. D. Phys. Ges. **21**, 632, 1919; diese Zeitschr. **21**, 691, 1920.

wähnt werden muß jedoch die Folgerung, daß es im normalen Helium keine Absorptionsserie des Orthoheliums, sondern nur die des Parheliums geben darf, was mit den obigen Resultaten der Elektronenstoßmethode im Einklang steht. Die geschilderte Auffassung hat neuerdings zwei wichtige Bestätigungen erfahren. Bohr ist in einer bisher noch nicht veröffentlichten Arbeit, deren Kenntnis ich einer freundlichen persönlichen Mitteilung verdanke, zu dem Resultat gekommen, daß in der Tat das Orthohelium im einquantigen Zustand nicht existieren kann, sondern nur vom zweiquantigen Zustand aufwärts vorhanden sein kann. Eine experimentelle Bestätigung können wir einer neuen optischen Untersuchung von Fricke und Lyman[1]) entnehmen, die uns allerdings bisher nur im Auszug zugänglich war. Diese beiden Autoren haben die Resonanzlinie des Heliums mit einem Vakuumgitterspektrographen gesucht und finden als einzige starke Linie in diesem Spektralgebiet die Linie $\lambda = 585$ Å in genauer Übereinstimmung mit obiger Tabelle. Wesentlich ist, daß bei 610 Å., einer Wellenlänge, die der Umwandlungsspannung entsprechen würde, sich keine Linie findet. Die genaue Übereinstimmung der Linie 585 Å. mit der durch das Elektronenstoßverfahren als $1,5\ S - 0,5\ S$ gedeuteten ist natürlich Zufall; aber sie spricht doch sehr dafür, daß die gezogenen Schlüsse richtig sind. Es darf nicht wundernehmen, daß nur die Linie 585 Å. bei Fricke und Lyman sich zeigt. Wie aus dem Serienschema ersichtlich, ist sie eine Linie, die nur bei Durchbrechung des Auswahlprinzips emittiert wird, denn das azimutale Quant ändert sich um den Betrag o. Im Entladungsrohr bei einer Stromstärke von 30 Milliampère ist die Durchbrechung des Auswahlprinzips zu erwarten und natürlich auch die Emission der übrigen Linien der Absorptionsserie. Da aber offenbar der ganze Vakuumspektrograph mit verdünntem Helium gefüllt war, so werden alle normalen Linien der Absorptionsserie von den normalen Heliumatomen, die außerhalb der Entladungsfelder liegen, wieder absorbiert bis auf die Linie 585. Dieser Schluß kann deshalb nur mit Vorbehalt gezogen werden, weil in der Fricke-Lymanschen Arbeit keine direkte Angabe sich findet, daß der Spektrograph mit Helium gefüllt sei[2]). Es scheint aber selbstverständlich, daß es so war. Die Autoren beobachten außer der von ihnen ebenfalls als Bestätigung der Franck-Knippingschen Versuche angesehenen Linie 585, noch zwei Linien bei 1640 Å. und 1215 Å., die sie als vermutlich dem Helium angehörig bezeichneten.

1) Fricke u. Lyman, Phys. Rev., März 1921.

2) Anmerkung bei der Korrektur: Die Arbeit von Fricke und Lyman ist unterdes im Phil. Mag. 1921 ausführlich erschienen. Wie erwartet, war der Vakuumspektrograph mit verdünntem Helium beschickt.

Nach den Resultaten des Elektronenstoßverfahrens ist für diese Linien im Spektrum des normalen Heliums kein Platz. Sie gehören vielmehr dem Funkenspektrum des Heliums, das streng wasserstoffähnlich ist, an, und sind auch von Fricke und Lyman als solche aufgefaßt worden. Die Autoren deuten sie als

$$\nu = 4N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \text{ und } \nu = 4n\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right).$$

Auch die Ionisierungsspannung dieses wasserstoffähnlichen $He+$, die theoretisch viermal so groß als die des Wasserstoffatoms ist, d. h. 54,4 Volt beträgt, ist experimentell durch Elektronenstoßmessungen bestätigt worden. Rau[1]) stellte fest, daß die erste Linie der Fowlerserie, die beim Übergang des Elektrons des Heliumions von einer vier- auf eine dreiquantige Bahn ausgesandt wird, durch Kathodenstrahlen von 75—80 Volt Geschwindigkeit in normalem Helium angeregt wird. Durch einen Stoß eines Elektrons dieser Geschwindigkeit muß also in einem Zuge die Ionisierungsarbeit des normalen Atoms und die Überführung des positiven Ions in den vierquantigen Zustand geleistet werden. Dieses Resultat wird durch eine neuere Arbeit von Compton[2]) bestätigt. Da die Ionisierungsspannung des normalen Atoms, wie aus den oben genannten Messungen hervorgeht, 25,3 Volt ist und die Arbeit, die am Heliumion zur Erreichung des vierquantigen Zustands zu leisten ist, 51,0 Volt beträgt, so ergibt sich theoretisch ein Wert von 76,3 Volt, der mit dem beobachteten in guter Übereinstimmung ist. Zur Leistung der Abtrennungsarbeit beider Elektronen des Heliums in einem Zuge ergibt sich auf die gleiche Weise ein Wert von $25,3 + 54,4 = 79,7$ Volt. Franck und Knipping sowie Frank Horton bestimmten in den obengenannten Arbeiten diese Ionisierungsstufe direkt zu $79,5 \pm 0,3$ bzw. 80 Volt. Dieses Resultat ist eine indirekte gute Bestätigung der Messung der Ionisierungsspannung des normalen Heliumatoms.

Argon und Neon.

Beim Argon und Neon sind ähnlich wie beim Helium optisch nur die höheren Serien der angeregten Atome beobachtet. Jedoch ist

1) Rau, Med. Ges., Würzburg 1914.

2) Compton, Phys. Rev. **15** (2), 131, 1920.

es bisher nur beim Neon (Paschen[1])) gelungen, das komplizierte Seriensystem der optisch beobachteten Spektren vollständig zu deuten. Beim Argon hat Nissen[2]) eine Reihe von Serien festgestellt, die zeigen, daß das Spektrum sehr kompliziert ist. Die eigentlichen Absorptionsserien sind bei beiden Gasen unbekannt. Die Ergänzung durch das Elektronenstoßverfahren ist noch nicht in dem Maße durchgeführt wie beim Helium. Die alten Werte der Anregungsspannung von Franck und Hertz (damals als Ionisierungsspannung gedeutet), bei Argon 12 Volt und bei Neon 16 Volt, sind in guter Übereinstimmung mit den Kosselschen Extrapolationen der Röntgenserien. Denn nach Kossel ist L_α für Neon 16 Volt und M_α für Argon 12 Volt. Die direkten neuen Bestimmungen scheinen uns fürs erste noch zweifelhaft zu sein. Wie oben unter „Methoden" erwähnt, haben wir Bedenken gegen die Deutung, die Frank Horton und Ann Davies ihren in Neon gewonnenen Kurven geben. Sie geben eine Lichtanregung bei 11,8 Volt an, die wir nach früheren Erfahrungen für eine Lichtanregung einer Verunreinigung halten. Daher ergibt sich bei 16—17 Volt, wo unseres Ermessens die ungefähre Grenze der Lichtanregung liegt, eine Ionisation der Verunreinigung. Eine weitere Ionisation, die die Verfasser aus dem Umkehrpunkte der abgedruckten Kurve entnehmen, halten wir für hervorgerufen durch sekundäre Ionisation. Wir nehmen deshalb in die Tabelle von den 3 Ionisierungsspannungen und den 2 Lichtanregungsspannungen nur diejenigen auf, die wir für reell halten, betonen jedoch, daß weitere Untersuchungen notwendig sind, um die Berechtigung unserer Schlußweise nachzuweisen und auch zur Kontrolle der Absolutwerte, die wir bei Frank Horton als zu hoch bestimmt ansehen.

Tabelle VI.

Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Beobachter u. Methode
16 Volt	—	Franck u. Hertz (siehe alter Bericht).
17,8 „	22,8 Volt	Franck, Horton u. A. Davies, loc. cit.
—	ca. 21 „	Rentschler, Phys. Rev. **14**, 503, 1920. Lichtelektr. Methode.

1) Paschen, Ann. d. Phys. **63**, 201, 1920.
2) Aage Nissen, diese Zeitschr. **21**, 25, 1920.

(Fortsetzung folgt.)

Tagesereignisse.

Preisausschreiben der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.

„Durch die elektrostatische Theorie der Kohäsionskräfte bei heteropolaren Kristallen lassen sich die wichtigsten elastischen, optischen, thermischen Eigenschaften dieser Körper darstellen. Es soll untersucht werden, ob auch die Zerreißfestigkeit der heteropolaren Kristalle, vor allem der vom Steinsalztypus, durch die elektrostatische Gitterenergie erklärt werden kann, oder ob dazu neue Annahmen über die Kohäsionskräfte erforderlich sind."

Bewerbungsschreiben sind bis zum 1. August 1922 an die Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen einzureichen auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen. Dem Bewerbungsschreiben ist ein versiegelter Brief beizufügen, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung, innen den Namen und Wohnort des Verfassers anzeigt.

Der Preis beträgt 2200 M.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Tübingen Dr. Peter Neber für Chemie, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Samson Breuer für höhere Mathematik, an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Gustav Doetsch für angewandte Mathematik, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. K. Reinhardt für Mathematik, an der Universität Leipzig Dr. Franz Hein für Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Heinrich Salvaterra für chemische Technologie organischer Stoffe, an der Universität Berlin Dr. Gabriel Szegon für Mathematik.

Ernannt: Der frühere ord. Professor an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer zum ord. Honorarprofessor für Physik an der Universität Frankfurt a. M., der Privatdozent an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Leo Finzi zum ord. Professor für Elektrotechnik ebenda, der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Rud. Seeliger zum ord. Professor der Physik ebenda, der ord. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Greifswald Dr. Peter Danckwortt zum ord. Professor für Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Hannover, der a. o. Professor an der Stanford University California William A. Manning zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst, der Dozent für Chemie an der Universität Manchester Dr. W. I. Jones zum ord. Professor für Chemie an der Universität von Süd-Wales in Cardiff.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für Physik an der Universität Rostock Dr. Adolf Heydweiller, der ord. Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Hannover Geh. Regierungsrat Dr. Karl Arnold

Gestorben: Der ord. Professor der organischen Chemie an der Universität Helsingfors und frühere finnische Gesandte in Berlin Eduard Hjelt, der frühere ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Marburg Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Schmidt, der frühere ord. Professor der Physik an der Universität Paris Dr. Gabriel Lippmann, der ord. Professor für Analysis an der Universität Nancy Dr. Gaston Floquet, der ord. Professor für Analysis an der Ecole Polytechnique in Paris Dr. G. Humbert, der ord. Professor der technischen Physik an der Universität Rom Dr. Moisè Ascoli.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

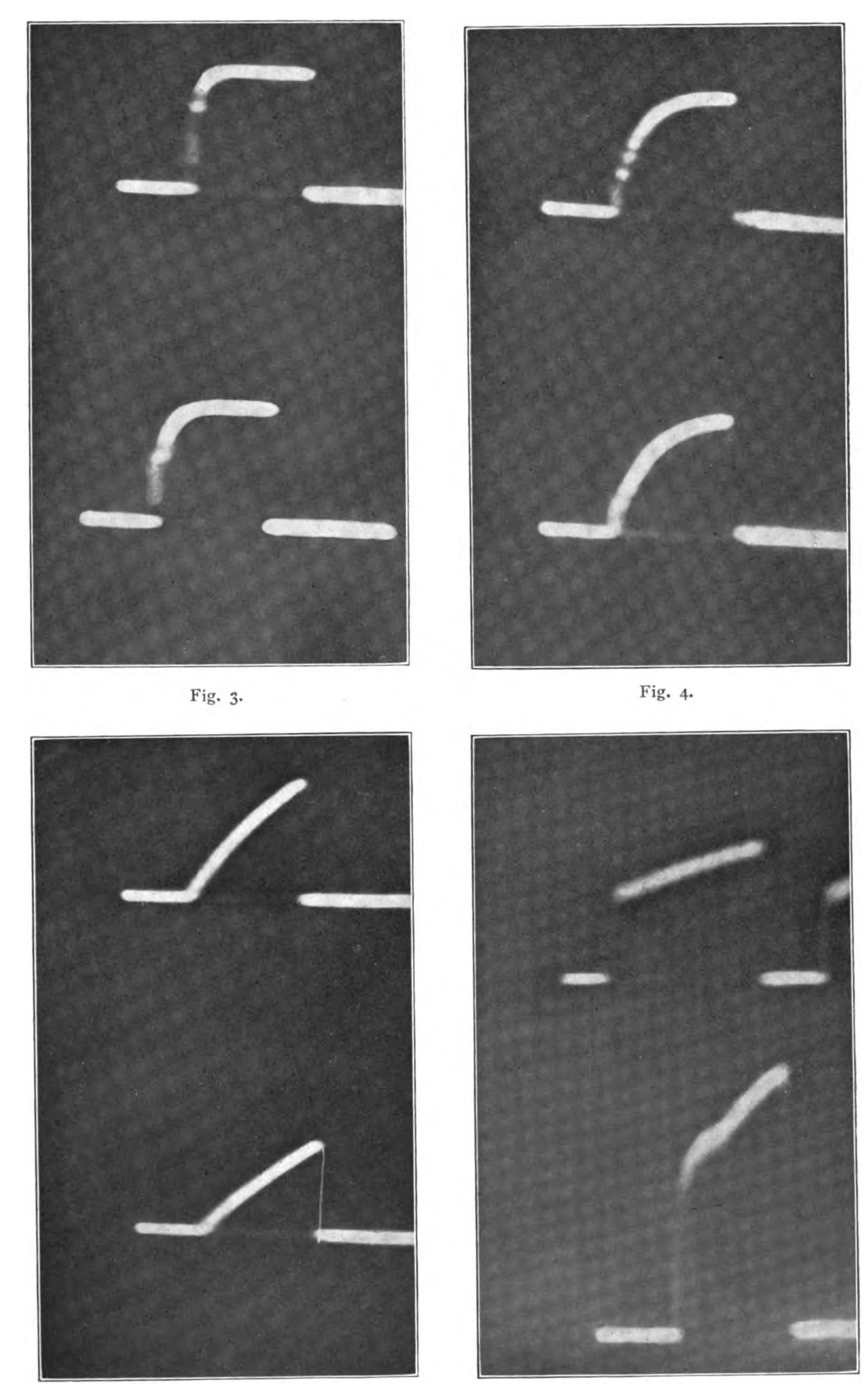


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

F. Dessauer, Steigerung der sekundären Energie beim Funkeninduktor.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. 15. August 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 18 am 22. August 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der zweite Virialkoeffizient von Edelgasen.

Von F. Zwicky.

Es soll im folgenden die Zustandsgleichung für Helium und Argon abgeleitet werden auf Grund der Debyeschen Theorie[1]) über die gegenseitige Anziehung polarisierbarer Moleküle. Dabei bietet die Durchführung der Rechnung mit Edelgasen ganz besondere Vorteile. Wie noch gezeigt wird, brauchen hier die Orientierungskräfte der festen elektrischen Molekülsysteme aufeinander nicht in Betracht gezogen zu werden. Wir benutzen daher ein Kraftgesetz, das nur von der Entfernung zweier Moleküle abhängt, nicht aber von ihrer sonstigen Orientierung. Dieser letztere, von Keesom[2]) auf den zweiten Virialkoeffizienten als hauptbestimmend angesehene Effekt, fällt ganz weg. Es ergibt sich damit die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den beiden von Debye[3]) und Keesom vertretenen Auffassungen. Debye, der für die van der Waalsschen Kohäsionskräfte bei Edelgasen nur die Anziehung der Moleküle durch gegenseitige Polarisation verantwortlich macht, hat bereits auf mehrere Tatsachen hingewiesen, welche seine Theorie qualitativ stützen. Hier soll der Beweis geleistet werden, daß dieselbe auch in quantitativer Hinsicht das vorliegende Erfahrungsmaterial sehr gut wiedergibt.

Die weitere Tatsache, daß bei den Edelgasen Quanteneffekte auch bei sehr tiefen Temperaturen keine wesentliche Rolle für die Zustandsgleichung spielen, trägt in Verbindung mit der schon erwähnten Kugelsymmetrie der Atome in erheblichem Maße dazu bei, die Rechnungen zu vereinfachen.

Die im obigen aufgestellten Behauptungen können wir durch einige Überlegungen stützen.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.
2) W. H. Keesom, Proceedings of Amst. Academy 1916; diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.
3) P. Debye, diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.

a) Die spezifische Wärme von Edelgasen bei konstantem Volumen ist in sehr großem Temperaturbereich bestimmt worden und hat sich zu $\frac{3}{2}R$ pro Mol ergeben. Die ganze Energie ist also rein translatorischer Natur (abgesehen von einer eventuellen Nullpunktsenergie). Deshalb darf die gegenseitige Orientierung der Atome keinen Einfluß haben auf die Wärmekapazität des Systems. In diesem Fall hätte die kinetische Energie einen nicht zu vernachlässigenden Rotationsanteil, und es würde $C_v > \frac{3}{2}R$. Inwiefern eine Einstellung des Atoms im elektrischen Kraftfeld eines andern doch vorhanden sein kann, wird später noch erwähnt werden.

b) Von S. Chapman[1]) ist die kinetische Theorie mäßig verdünnter Gase, bei Voraussetzung kugelsymmetrischer Atome, streng entwickelt worden. Durch Integration der bekannten Maxwellschen Integrodifferentialgleichung gelingt es ihm, genaue Formeln für die Wärmeleitfähigkeit ϑ und den Reibungskoeffizienten μ in Abhängigkeit vom molekularen Kraftgesetz abzuleiten. Es gilt unter anderem auch die Beziehung

$\vartheta = \varkappa \mu C_v$ (C_v = spez. Wärme bei konstantem Volumen).

Dabei ergibt sich $\varkappa$ als beinahe unabhängig von der speziellen Natur der Atome, und zwar ist $\varkappa = 2{,}5$. Diese Zahl stimmt nun ausgezeichnet mit den experimentellen Daten bei Edelgasen überein (Helium $\varkappa = 2{,}507$, Argon $\varkappa = 2{,}501$). Für mehratomige Gase besteht auch die obige Beziehung, wobei aber $\varkappa$ Werte von 1,5 bis 2 annimmt. Da die Zahl 2,5 nur von der Voraussetzung der Kugelsymmetrie herrührt, können wir also bei den Edelgasen auf diese Eigenschaft schließen.

c) Theoretisch ist zu a und b noch folgendes zu sagen. Bei hohen Temperaturen haben auch mehratomige Moleküle eine so große kinetische

1) S. Chapman, Phil. Transactions of Royal Society 1911, 1916, 1917.



Energie, daß die Orientierungskräfte nicht imstande sind, dieselben am Überschlagen zu hindern. Wir dürfen dann die Kraftwirkungen mit einer über eine Kugel gemittelten Feldstärke berechnen, wobei nur noch Anziehung durch Polarisation und eventuell zentrale Abstoßung übrig bleibt. Die Edelgase nehmen nun insofern eine Sonderstellung ein, als bei ihnen dieses Rechnungsverfahren schon bei tiefsten Temperaturen erlaubt sein muß, da wir nach a eine mit der Temperatur wachsende Kreiselenergie, in dem uns bekannten Bereich, nicht annehmen dürfen. Es muß also so sein, daß die Rotationsenergie entweder dauernd null ist oder einen bestimmten Nullpunktswert beibehält. Erstere Annahme bereitet erhebliche Schwierigkeiten für die Vorstellung des Zusammenstoßes. Man könnte nicht recht verstehen, wieso bei einem solchen die Achsen der Moleküle sich immer parallel bleiben sollten. Damit die zweite Auffassung zu Recht besteht, muß folgendes gelten.

Die Energie eines freien Kreisels auf der n-Quantenbahn ist

$$\frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J}.$$

Damit das Atom dauernd im ersten Quantenzustand bleibt, darf die Temperatur einen gewissen Wert T_1 nicht überschreiten, für welchen die Ungleichung besteht

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} < k T_1 J \text{ (Trägheitsmoment.)} \quad (k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ erg}). \tag{1}$$

Ist

$$T < \frac{h^2}{8\pi^2 k J},$$

so kommen in zu berücksichtigender Anzahl Zusammenstöße vor, welche den Kreisel auf die zweite und höhere Quantenbahnen werfen. Setzen wir für Edelgase $J = 10^{-43}$, so wird

$$T_1 < \frac{(6{,}55 \cdot 10^{-27})^2}{8\pi^2 \cdot 10^{43} \cdot 1{,}31 \cdot 10^{-16}} \sim 5000^0.$$

Daraus folgt, daß Helium, Neon, Argon usw. bis zu den höchsten bekannten Temperaturen die spezifische Wärme $\frac{3}{2}R$ haben müssen. Eine Vorstellung über das Verhalten beim Zusammenstoß kann man sich nach der Adiabatenhypothese machen. Die Kreiselenergie wird sich nämlich, bei konstant gehaltenen Quantenzahlen, innerhalb der Wirkungssphäre eines andern Moleküls, kontinuierlich ändern. Sobald aber der Kreisel frei ist, besitzt er wieder die Energie

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J}.$$

Die Änderung der Energien, und damit auch ihrer Differenzen in Kraftfeldern, bedingt wahrscheinlich bei nicht zu hohen Temperaturen die Breite der Bandenlinien. Auf die Wärmekapazität des Gases ist aber natürlich diese Änderung ohne Einfluß.

Damit die sphärische Symmetrie der Atome gewährleistet ist, muß die Rotationsenergie groß sein gegenüber der maximalen Differenz der potentialen $\Delta\Phi$, d. h.

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} >> \Delta\Phi. \tag{2}$$

$\Delta\Phi$ berechnet sich folgendermaßen. Das Molekül enthalte elektrische Ladungen $e_\varkappa$, welche in Punkten mit den Koordinaten $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$, $y_\varkappa$ liegen. In einem, im Abstand r vom Nullpunkt liegenden Aufpunkt $p(x, y, z)$ ist das Potential

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \frac{\sum e_\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}\sum e_\varkappa \xi_\varkappa + \frac{y}{r}\sum e_\varkappa \eta_\varkappa + \right. \\ \left. + \frac{z}{r}\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa\right] + \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \xi_\varkappa^2 + \right. \\ + \frac{1}{2}\left(3\frac{y^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \eta_\varkappa^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(3\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa^2 + \\ + \frac{3xy}{r^2}\sum e_\varkappa \xi_\varkappa y_\varkappa + \frac{3yz}{r^2}\sum e_\varkappa y_\varkappa \zeta_\varkappa + \\ \left. + \frac{3zx}{r^2}\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa \xi_\varkappa\right] + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für ungeladene Moleküle verschwindet das erste Glied. Das zweite Glied ist ungleich Null, wenn ein fester Dipol da ist. Das ist aber bei den Edelgasen nicht der Fall, da sie keine Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten zeigen. Wir haben also mit den dritten Gliedern zu rechnen. Das Molekül verhält sich wie ein elektrischer Quadrupol. Nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems (Hauptachsentransformation) kann dieser charakterisiert werden durch die drei Größen

$$\Theta_1 = \sum e_\varkappa \xi_\varkappa^2, \quad \Theta_2 = \sum e_\varkappa y_\varkappa^2, \quad \Theta_3 = \sum e_\varkappa \zeta_\varkappa^2. \tag{4}$$

Man erhält nun leicht nach dem Coulombschen Gesetz die gegenseitige potentielle Energie Φ von zwei solchen elektrischen Systemen. Ermittelt man dann die maximale Differenz der Φ-Werte bei konstant gehaltenem r, so findet man

$$[\Delta\Phi]_{\text{maximal}} \leqq 9\frac{\tau^2}{r^3}.$$

Variiert man noch r, so erhält man den größten Wert, wenn die Atome sich berühren, also $r = d$ dem Durchmesser derselben ist.

Wir benutzen z. B. die unten aus unserer Rechnung folgenden Daten für Helium, nämlich:

$\tau = 1{,}31 \cdot 10^{-26}$, $d = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$, $J \sim 10^{-43}$.

Es wird

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} = \frac{6{,}5^2 \cdot 10^{-54}}{8 \cdot \pi^2 \cdot 10^{43}} \backsim 4{,}9 \cdot 10^{-12}.$$

$$\Delta \Phi = 9 \cdot \frac{1{,}69 \cdot 10^{-52}}{2{,}7^5 \cdot 10^{-40}} \sim \frac{10^{-12}}{144}.$$

Also

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} \sim 750\, \Delta \Phi.$$

Wir können also die Kraftwirkung zweier Atome im Abstande r ruhig mit Hilfe einer, über die Kugel vom Radius r gemittelten elektrischen Feldstärke berechnen.

Zum Vergleich wollen wir noch die obige Überschlagsrechnung auf ein zweiatomiges Gas, z. B. Wasserstoff anwenden. Mit $J = 5 \cdot 10^{-40}$, $d = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ und $\tau = 3 \cdot 10^{-26}$ erhalten wir für T_1 die Ungleichung

$$T_1 << \frac{h^2}{8\pi^2 k J} \sim \frac{300^0}{\pi} \sim 100^0.$$

In der Tat verhält sich Wasserstoff bis zu 60^0 abs. in kalorischer Hinsicht wie ein einatomiges Gas. Dann füllen sich auch die andern Quantenzustände $n = 2, 3, \ldots$ auf, d. h. die spezifische Wärme wird größer als $\frac{3}{2} R$, bis sie bei ungefähr 300^0 abs. den vollen Wert $\frac{5}{2} R$ erreicht.

Die Gleichung (2) liefert hier

$$\Delta \Phi = 9 \frac{\tau^2}{d^5} = \frac{81 \cdot 10^{-52}}{41 \cdot 10^{-40}} \sim 2 \cdot 10^{-12},$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} = \frac{10^{-54}}{\pi^2 \cdot 10^{-40}} = \sim 10^{-15},$$

so daß

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} << \Delta \Phi.$$

Hier darf man also die Orientierungskräfte nicht vernachlässigen, da die Moleküle in der gegenseitigen Wirkungsphäre pendeln. Dadurch kompliziert sich die Rechnung erheblich. Über diesen Fall soll erst in einer spätern Arbeit berichtet werden.

§ 1. Zustandsgleichung von Argon.

Nach Kamerlingh Onnes schreibt man die Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{p\mathfrak{v}}{RT} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{v}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{v}^2} + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{v}^4} + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{v}^6} + \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{v}^8} \quad (\mathfrak{v} = \text{Molvolumen}), \tag{5}$$

wobei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$, die sogenannten Virialkoeffizienten, Funktionen der Temperatur sind. $\mathfrak{A} = RT$ ist der erste, $\mathfrak{B}$ der zweite Virialkoeffizient. Diesen wollen wir bestimmen. Um $\mathfrak{C}$ genau zu bekommen, müßte man, wie schon Boltzmann gezeigt hat, die Wahrscheinlichkeit der Zusammenstöße von drei Molekülen zugleich berücksichtigen.

Die Atome setzen wir als starre Kugeln voraus, auf denen polarisierbare elektrische Quadrupole sitzen. Die auf Hauptachsen bezogenen elektrischen Momente seien

$$\Theta_1 = \sum e_\varkappa \xi_\varkappa^2, \quad \Theta_2 = \sum e_\varkappa \eta_\varkappa^2, \quad \Theta_3 = \sum e_\varkappa y_\varkappa^2.$$

Zwei Atome im Abstand r voneinander besitzen dann eine mittlere potentielle Energie

$$u = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8}[1], \tag{6}$$

wobei

$$\tau = (\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) - (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1)$$

und $\mathfrak{m} = \alpha\mathfrak{E}$ das Moment des im Feld $\mathfrak{E}$ entstandenen Dipols ist.

Die Aufstellung der Zustandsgleichung erfolgt nun nach einem ganz allgemeinen Satze der statistischen Mechanik (Gibbs). Ist U die Gesamtenergie des Gases in Funktion der Lage- und Impulskoordination, so hat man das sogenannte Zustandsintegral[2]

$$z = \int\limits_{\text{alle Phasen}} e^{-\frac{U}{kT}} dS\, d\Sigma. \tag{7}$$

$dS\, d\Sigma$ ist ein Differential im $2u$ dimensionalen Phasenraum. dS ist das Produkt der Lagendifferentiale, $d\Sigma$ dasjenige der Impulsdifferentiale.

Nach dem Theorem von Gibbs gilt dann für die freie Energie F des Systems die Beziehung

$$F = -kT \log z. \tag{8}$$

Ist einmal die freie Energie bekannt, so folgen die thermische sowie die kalorische Zustandsgleichung durch bloße Differentiation. Wir gehen nun zur Berechnung von F über. Als Volumen $\mathfrak{v}$ nehmen wir dasjenige eines Mols. ω sei das Volumen des Atoms. Dann ist, wenn $dS_i = dx_i dy_i dz_i$ für das $i$te Atom mit den Koordinaten $(x_i y_i z_i)$

$$Z = \int\limits_{\text{alle Phasen}} e^{-\frac{U_p + L}{kT}} dS\, d\Sigma,$$

wobei U_p die potentielle Energie des Gases und

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\}$$

die kinetische Energie desselben bedeutet. ($N = 6{,}31 \cdot 10^{23}$ Loschmidtsche Zahl.)

Die Integration über die Impulsdifferentiale ergibt in bekannter Weise

$$Z = \Theta^{3N} \int\limits_{\text{(alle Lagen)}} e^{-\frac{U_p}{kT}} dS$$

$$\Theta = \sqrt{2\pi m k T}.$$

Das noch verbleibende Integral berechnet sich folgendermaßen:

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

2) Gibbs, Elemente der statistischen Mechanik; L. S. Ornstein, Dissert. Leiden 1908.

$$\int\limits_{\text{(alle Lagen)}} e^{-\frac{U_p}{kT}} dS = \int\limits_{\text{alle Lagen}} \ldots \int e^{-\frac{1}{kT} U(x_1 \ldots x_n,\, y \ldots y_n,\, z_1 \ldots z_n)} dS_1 \ldots dS_n,$$

$$= \int \ldots \int \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{U_p}{kT}}\right)\right] dS_1 \ldots dS_n =$$

$$= \mathfrak{v}\left[\mathfrak{v} - \omega - \int \left(1 - e^{-\frac{u(x,y,z)}{kT}}\right) dV\right]\left[\mathfrak{v} - 2\omega - 2\int\left(1 - e^{-\frac{u}{kT}}\right) dV\right] \ldots$$

$$\ldots \left[\mathfrak{v} - (N-1)\omega - (N-1)\int\left(1 - e^{-\frac{u}{kT}}\right) dV\right].$$

Dabei sind die entsprechenden Integrale über das ganze Volumen $\mathfrak{v}$ zu erstrecken. Klein u ist die gegenseitige potentielle Energie zweier Atome. Die obige Ausführung der Integration bedeutet folgendes: Man setzt zuerst ein Atom ins Volumen $\mathfrak{v}$ und führt es überall herum. Das ist die Integration über dS_1. Da noch kein Kraftfeld vorhanden ist, liefert das einfach den Faktor $\mathfrak{v}$. Für das zweite Teilchen muß man schon dem vom ersten eingenommenen Raum ω aus dem Integrationsgebiet ausschließen und das Auftreten einer potentiellen Energie berücksichtigen. Das liefert den Faktor $[\mathfrak{v} - \omega - J]$, wenn wir abkürzen

$$J = \int\left(1 - e^{-\frac{u}{kT}}\right) dN.$$

Die Bestandteile des Integrals für das dritte und die weitern Atome berechnen wir so, als ob die vorhergehenden nur einzeln da wären und addieren dann die Einzeleffekte zueinander. Physikalisch bedeutet das, daß wir eine gewisse Verdünnung des Gases voraussetzen, d. h. es müssen die Abmessungen der zu berücksichtigenden Wirkungssphäre der Atome klein sein gegenüber der freien Weglänge.

Die freie Energie wird nun

$$F = -kT \log z = -NkT \log \Theta - NkT \log \mathfrak{v} + \\ + \frac{N-1}{2} NkT(\omega + J).$$

Daraus folgt durch Differentiation der Druck p

$$p = -\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{v}} = + \frac{NkT}{\mathfrak{v}} - \frac{NkT}{\mathfrak{v}^2} N \frac{\omega + J}{2} + \ldots$$

$$\frac{p\mathfrak{v}}{RT} = 1 - \frac{N}{2}(\omega + J)\frac{1}{\mathfrak{v}} + \ldots$$

Der Vergleich mit (5) führt zu der Formel

$$\mathfrak{B} = -\frac{N}{2}(\omega + J). \qquad (9)$$

Wir haben nun noch das Integral J auszurechnen.

Statt daß wir das Volumen $\mathfrak{v}$ als dessen Grenzen benutzen, setzen wir ein fest liegendes Atom in den Nullpunkt des Koordinatensystems und führen das bewegliche von der Berührung mit dem ersten bis ins Unendliche. Der dabei fälschlich zum Integral hinzukommende Betrag ist verschwindend klein, da die Energie mit der achten Potenz der Entfernung abnimmt. Wir setzen also

$$J = -4\pi \int\limits_{r=d}^{\infty} \left[e^{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8} - 1\right] r^2 dr.$$

Dabei ist d der Atomdurchmesser und

$$\varrho^8 = \frac{3\alpha\tau^2}{kT}.$$

Substituieren wir

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 = \xi, \quad 4r^2 dr = -\frac{\varrho^3}{2}\xi^{-\frac{11}{8}} d\xi,$$

so ist

$$J = -\frac{\pi}{4}\varrho^3 \int\limits_0^{x} \left[e^{\xi} - 1\right] \xi^{-\frac{11}{8}} d\xi,$$

$$x = \frac{T_0}{T}, \quad T_0 = \frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa d^8}.$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion in eine Reihe und integriert gliedweise, so bekommt man

$$-\frac{J}{4\pi} = x^{3/8} \sum_1^{\infty} \frac{1}{u!} \frac{x^{u - \frac{3}{8}}}{u - \frac{3}{8}}$$

und damit die Gleichung (9)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\Big[1 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{26}x^2 - \frac{3}{126}x^3 - \\ - \frac{3}{696}x^4 - \frac{1}{5!}\frac{3}{37}x^5 - \frac{1}{6!}\frac{3}{45}x^6 - \\ - \frac{1}{7!}\frac{3}{53}x^7 - \ldots\Big] = \frac{\Omega}{2}y. \\ \Omega = \frac{4\pi}{3} d^3 N. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die Reihenentwicklung ist gut zur numerischen Berechnung von $\mathfrak{B}$ für kleine Werte von x, d. h. bei hohen Temperaturen. Für große x konvergiert folgendes Verfahren rascher. Man integriert zuerst das obige Integral partiell

$$-\frac{J}{4\pi} = \left[(e^{\xi} - 1)\frac{\xi^{-\frac{3}{8}}}{-\frac{3}{8}}\right]_0^x - \int\limits_0^x \frac{\xi^{-\frac{3}{8}}}{-\frac{3}{8}} e^{\xi} d\xi.$$

Nun wird substituiert $\xi = x - \eta$ und integriert, so daß man erhält

$$-\frac{J}{4\pi} = \frac{e^x}{x^{3/2}}\left[\left\{\frac{1}{x} - e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{11}{8}\frac{1}{2!}\left\{\frac{2}{x^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right\} + \ldots\right]$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\Big[1 - \frac{3}{8}e\Big\{x - e^{-x}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\Big\} + \\ + \frac{11}{8}\frac{1}{2!}\Big\{\frac{2}{x^2} - e^{-x}\Big(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\Big)\Big\} \\ \frac{11}{8}\cdot\frac{19}{8}\cdot\frac{1}{3!}\Big\{\frac{6}{x^3} - e^{-x}\Big(1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \\ + \frac{6}{x^3}\Big)\Big\} + \ldots\Big] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

In dem für Argon bekannten Temperaturbereich genügt aber schon die Formel (10). Berechnen wir x_{B3}, für welches $\mathfrak{B} = 0$ (Boylepunkt), so finden wir

$$x_B = \frac{T_0}{T_B} = 1{,}260.$$

Weiter gilt für den Umkehrpunkt des differentiellen Thomsoneffektes nach der Thermodynamik

$$\mathfrak{B} - T_i\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dT}\right)_i = 0.$$

Es wird

$$\frac{T_0}{T_i} = 0{,}6735.$$

Wenn Boyle- und Inversionspunkt bestimmt wären, könnte man sofort T_0 berechnen und hätte außerdem eine scharfe Prüfung der Theorie infolge der Beziehung

$$\frac{T_B}{T_i} = 0{,}535.$$

Leider sind T_B und T_i noch nicht gemessen, so daß man die theoretische Kurve für $\mathfrak{B}$ durch Variieren von T_0 an die experimentelle näherungsweise anschmiegen muß. Bilden wir für verschiedene Temperaturen $\frac{\mathfrak{B}}{[..]}$, so muß dieser Ausdruck immer gleich $\frac{\Omega}{2}$, also gleich einer Konstanten sein.

Für $T_0 = 540$ erhält man die Werte der folgenden Tabelle.

T	x	y	$\mathfrak{B}$ (cm³)[1]	$\mathfrak{B}\,y$
153,9	3,510	— 4,86	— 80,7	16,6
163,2	3,304	— 4,08	— 72,3	17,7
170,6	3,162	— 3,60	— 65,1	18,1
186,0	2,900	— 2,82	— 53,9	19,1
215,4	2,506	— 1,87	— 37,2	19,9
273,1	1,977	— 0,916	— 16,6	18,1
293,5	1,840	— 0,712	— 12,6	17,1

1) H. Kamerlingh Onnes, Comm. of Leiden Laboratory Nr. 102, 1907.

Als mittleren Wert nehmen wir $\overline{\mathfrak{B}} = 18{,}2 \cdot y(x)$.

Daraus berechnet sich der Atomdurchmesser zu $d = 2{,}43 \cdot 10^{-8}$ cm.

Aus $T_0 = \frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa d^8}$ wird $\tau = 1{,}05 \cdot 10^{-26}$. Dabei ist zur Bestimmung von d die Molekularrefraktion $P_0 = 4{,}17$ benutzt worden.

$$P_0 = \frac{4\pi}{3}N\alpha.$$

Wie aus obiger Tabelle ersichtlich, ist die Übereinstimmung mit dem Experiment quantitativ noch keine sehr gute, da Differenzen bis zu 20 Proz. auftreten. Das kann daran liegen, daß den abstoßenden Kräften der Atome durch Zugrundelegung starrer Moleküle nicht richtig Rechnung getragen wird. Dieser Punkt soll im letzten Teil der Arbeit für Helium ausgearbeitet werden. Ein zweiter Fehler könnte darin seinen Ursprung haben, daß wir das Atom als elektrisches System nicht durch einen Quadrupol charakterisieren können. Einen Anhaltspunkt in dieser Richtung geben die Messungen von Cabannes und Strutt über die Polarisation seitlich zerstreuten Lichtes. Wenn die Elektronen eines Moleküls nicht nach allen Richtungen gleich gebunden sind, so haben wir für das im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ entstehende Moment $\mathfrak{m}$ die Gleichungen

$$\mathfrak{m}_x = \alpha_{11}E_x + d_{12}E_y + \alpha_{13}E_z.$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

Durch Transformation auf Hauptachsen können wir die obigen neun Konstanten auf drei reduzieren, durch welche das Molekül in optischer Hinsicht charakterisiert wird. Es läßt sich nun theoretisch zeigen, daß unter 90° nach der Seite zerstreutes Licht nur dann vollständig polarisiert ist, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Dieser Fall ist nach Cabannes und Strutt bei Argon realisiert.

Man kann nun vermuten, daß wenn die Elektronen gegenüber äußeren elektrischen Kräften nach allen Seiten gleich reagieren, auch ihre räumliche Lagerung eine möglichst symmetrische sei. Ist diese Überlegung richtig, so müßte sich das Argon am besten durch einen Oktupol charakterisieren lassen, d. h. es dürften in der Potentialentwicklung in einem Aufpunkt (siehe Gleichung 3).

$$\varphi = \frac{\sum e}{r} + \ldots$$

erst die Glieder $\frac{\sum e_x \xi_x^4}{r^5}$ usw. auftreten. Das einfachste Modell eines Oktupols ist ein Würfel, in dessen Ecken je eine negative und in dessen Zentrum acht positive Ladungen e sitzen. Damit

wollen wir die Zustandsgleichung von Argon noch einmal berechnen.

Legen wir ein Koordinatensystem parallel den Würfelkanten des Oktupols, mit dem Nullpunkt im Zentrum desselben, so ist das Potential in einem Aufpunkt (xyz)

$$\varphi(x,y,z) = \frac{8e}{r} - \sum_{i=1}^{8} \frac{e}{r_i}$$

(r_i ist der Abstand des Aufpunktes von der $i$ten Würfelecke).

Setzt man r_i in Koordinaten ein, so wird

$$\varphi = \frac{3\mu}{8r^5} - \\ - \frac{35}{8}\frac{\mu}{r^5}\left\{x^4+y^4+z^4+6x^2y^2+6y^2z^2+6z^2x^2\right\}. \tag{12}$$

Wenn mit μ bezeichnet ist, die den Oktupol charakterisierende Größe

$$\mu = \sum e_x \xi_x^4 = \sum e_x y_x^4 = \sum e_x \zeta_x^4 = -8a^4 e$$
a = halbe Kantenlänge des Würfels.

Daraus berechnen wir durch Differentiation die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Abstand r vom Atomzentrum. Darauf bilden wir $\mathfrak{E}^2$ und mitteln dieses über die Kugel r. Dann ist die mittlere potentielle Energie des durch Polarisation entstandenen Dipoles

$$u = -\frac{\alpha}{2}\mathfrak{E}^2.$$

Für den obigen Fall erhält man

$$u = -\frac{63405}{8}\frac{\mu^2\alpha}{r^{12}} = -c\frac{\mu^2\alpha}{r^{12}}.$$

Es gilt für B wieder

$$B = RT\frac{N\omega}{2} + RT\frac{NJ}{2},$$

wobei

$$-\frac{J}{4\pi} = \int_d^\infty \left\{ e^{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{12}} - 1 \right\} r^2 dr$$

und

$$\varrho^{12} = c\frac{\alpha\mu^2}{kT}.$$

Es wird

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{RT} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{T_0}{T} - \frac{1}{14}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 - \\ - \frac{1}{66}\left(\ \right)^3 - \frac{1}{360}\left(\ \right)^4 - \frac{1}{2280}\left(\ \right)^5 - \\ - \frac{1}{16560}\left(\ \right)^6 - \ldots\right] = \frac{\Omega}{2}y. \tag{11}$$

Für die Temperatur T_B des Boylepunktes ($B = 0$) besteht dann die Gleichung

$$\frac{T_0}{T_B} = 1{,}847, \quad T_0 = C\frac{\alpha\mu^2}{xd^{12}}$$

und eine analoge für die Temperatur T_i des Inversionspunktes

$$\frac{T_0}{T_i} = 1{,}030$$

und daraus

$$\frac{T_B}{T_i} = 0{,}558.$$

Leider sind auch diese Beziehungen aus dem früher genannten Grunde nicht zu verwerten. Für hohe Temperaturen ist wieder dieselbe Entwicklung wie im frühern Falle brauchbar.

Die Anpassung der theoretischen Kurve für $\mathfrak{B}$ an die experimentelle wurde nun versucht mit den Werten $T_0 = 820, 800, 780, 760$. Es ergab sich relativ die beste Übereinstimmung für $T_0 = 780$. Die Zahlen sind für diesen Fall in der Tabelle wiedergegeben.

T	x	y	$\mathfrak{B}$	$\frac{\Omega}{2}$
153,9	5,06	— 10,15	— 80,7	7,95
163,2	4,91	— 8,92	— 72,3	8,10
170,6	4,57	— 6,69	— 65,1	9,73
186,0	4,19	— 4,82	— 53,9	11,2
215,4	3,62	— 2,81	— 37,2	13,2
273,1	2,86	— 1,21	— 16,6	13,7
293,5	2,66	— 0,91	— 12,6	13,8

$\mathfrak{B} = 11{,}1 \cdot y.$

Daraus wird

$$\mu = 2{,}05 \cdot 10^{-43}, \quad d = 2{,}06 \cdot 10^{-8}$$

und die halbe Kantenlänge

$$a = 0{,}507 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Die Würfeldiagonale hat die Länge

$$a\sqrt{3} = 0{,}92 \cdot 10^{-8} \text{ cm,}$$

also beinahe die Größe des Atomdurchmessers.

Wie sich aus der Tabelle ergibt, ist die Übereinstimmung für Oktupole mit der Erfahrung viel schlechter, als wenn wir mit Quadrupolen rechnen. Wir kämen also zu dem merkwürdigen Resultat, daß Argon in optischer Hinsicht vollständig kugelsymmetrisch ist, trotzdem es einen unsymmetrischen Bau aufweist. Völlig zwingend ist dieser Schluß aber nicht. Leider können wir die im folgenden für Helium entwickelte genauere Theorie auf Argon noch nicht anwenden, da für dieses keine Fixpunkte der B-Kurve (Boyle-, Inversionspunkt) vorliegen. Ohne Kenntnis dieser Punkte hat aber eine Prüfung der Theorie an Argon keinen Sinn, weil wir mit den drei auftretenden Konstanten immer imstande wären, das kurze Kurvenstück, das bei Argon bekannt ist, schon sehr genau zu approximieren. Theoretisch ergibt sich:

Boylepunkt liegt für Hypothese 1) bei 437°
„ „ „ „ 2) „ 426° abs.

Er liegt also bei einer Temperatur, die wahrscheinlich experimentell relativ leicht bestimmt werden könnte.

§ 2. Zustandsgleichung von Helium.

Der Virialkoeffizient $\mathfrak{B}$ hat hier insofern einen besonderen Temperaturverlauf als er oberhalb des Boylepunktes ein Maximum aufweist. Wenn wir nun an der Starrheit der Moleküle festhalten, so bekommen wir für $\mathfrak{B}$ immer einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - \int_d^\infty \left(1 - e^{-\frac{u(r)}{\varkappa T}}\right) r^2 dr\right],$$

oder nach Entwicklung der Exponentialfunktion und Integration

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - P\left(\frac{T_0}{T}\right)\right] \qquad T_0 = \text{const.}$$

Wie man leicht sieht, ist P eine Potenzreihe vom Argument $\frac{T_0}{T}$ mit lauter positiven Koeffizienten. - Dabei ist noch angenommen, daß zwei Moleküle sich nach einem beliebigen kugelsymmetrischen Kraftgesetz anziehen. $u(r)$ ist die daraus resultierende potentielle Energie. Die obige Funktion $\mathfrak{B}$ nimmt nun aber mit wachsender Temperatur monoton zu. Wir erzielen daher auf Grund der genannten Voraussetzungen bei Helium nicht einmal einen qualitativen Anschluß an die Erfahrung. Um diesen zu erreichen, müssen wir die Starrheit der Atome aufgeben und an deren Stelle ein abstoßendes Kraftfeld einführen. Physikalisch bedeutet das, daß bei einem starken Stoß zweier Atome die Zentren derselben sich einander mehr nähern als bei einem schwachen. Wir definieren als mittleren Durchmesser d_m bei der Temperatur T etwa folgende Größe. Ein Atom mit der kinetischen Energie $\varkappa T$ ($\varkappa = 1{,}3 \cdot 10^{-16}$ erg) stoße zentral auf ein zweites ruhendes. Der kleinste erreichte Abstand der Atommittelpunkte, welcher bei diesem Vorgang erreicht wird, ist d_m. Es ist aus dem vorigen klar, daß d_m eine abnehmende Funktion der Temperatur ist. Eine Abnahme des Durchmessers bedeutet aber auch eine Verkleinerung des Virialkoeffizienten. Wir haben also die Möglichkeit, dem $\mathfrak{B}$ auf diese Art ein Maximum zu erteilen.

Die genannten abstoßenden Kräfte sollten sich natürlich aus der elektrischen Konstitution der Moleküle erklären lassen. Ein erster prinzipieller Schritt in dieser Richtung ist von Debye[1]) getan worden, indem er zeigte, daß elektrische Ladungen in zeitlich veränderlichen und inhomogenen elektrischen Feldern abstoßende Kräfte erfahren.

Bei Helium ist die Sachlage für die Erforschung der abstoßenden Kräfte außerordentlich günstig infolge der tiefen kritischen Temperatur, d. h. der kleinen anziehenden Energie. Es würde sich hier darum handeln, die Debyeschen Überlegungen, welche ganz allgemein gelten, auf unsern Fall treffend zu spezialisieren. Da dies aber bis jetzt nicht geschehen ist, müssen wir uns damit begnügen, für die potentielle Energie u_3 der Abstoßung zweier He-Atome einen phänomenologischen Ansatz zu machen. Wir setzen

$$u_2 = \frac{A}{r^p},$$

wobei A und p unbekannte, aus den Messungen zu ermittelnde Konstanten sind.

Dieser Ansatz entspricht dem Vorgehen Borns beim Aufbau der Kristallgitter. Rechnen wir wieder mit elektrischen Quadrupolen, so ist die Anziehungsenergie nach wie vor

$$u_1 = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8}.$$

Die Gesamtenergie U wird also

$$U = u_1 + u_2 = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8} + \frac{A}{r^p}. \qquad (14)$$

Wir bilden wieder wie früher das Zustandsintegral

$$Z = \Theta^N \int_{\text{alle Lagen}} e^{-\frac{u_1+u_2}{\varkappa T}} dS, \qquad \Theta = \Theta\sqrt{2\pi m k T}$$

wobei

$$dS = \prod_{i=1}^{N} dx_i\, dy_i\, dz_i$$

gesetzt ist und $x_i y_i z_i$ die Lagekoordinaten (rechtwinklige cartesische) sind. Unter Voraussetzung mäßiger Verdünnung bekommen wir wie früher

$$Z = \Theta^N [\mathfrak{v} - J][\mathfrak{v} - 2J][\ldots\quad][\mathfrak{v} - (N-1)J],$$

$$J = 4\pi \int_0^\infty \left[1 - e^{\left(\frac{3\alpha\tau^2}{r^8} - \frac{A}{r^p}\right)\frac{1}{\varkappa T}}\right] r^2 dr.$$

Die freie Energie wird

$$F = -\varkappa T \log Z = -\varkappa T N \log \Theta - \varkappa T N \log \mathfrak{v} + $$
$$+ kT \frac{N-1}{2} N \frac{J}{\mathfrak{v}} + \ldots$$

$$\frac{p\mathfrak{v}}{N\varkappa T} = \frac{p\mathfrak{v}}{RT} = 1 + \frac{N}{2} J \frac{1}{\mathfrak{v}} + \ldots$$

und daraus der zweite Virialkoeffizient aus Vergleich mit der empirischen Gleichung (5)

$$\mathfrak{B} = \frac{N}{2} J = \frac{N}{2} 4\pi \int_0^\infty \left[1 - e^{-\frac{u_1+u_2}{\varkappa T}}\right] r^2 dr.$$

1) P. Debye, diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.

Zur Auswertung spalten wir dieses Integral in zwei Teile

$$\int_0^{d_0}[\ldots]\, r^2\, dr \quad \text{und} \quad \int_{d_0}^{\infty}[\ldots]\, r^2\, dr.$$

d_0 ist der Durchmesser der Atome beim absoluten Nullpunkt. Er berechnet sich durch Gleichsetzung der Anziehungs- und Abstoßungsenergie

$$\frac{3\alpha\tau^2}{d_0^8} = \frac{A}{d_0^p}.$$

Führen wir noch die Substitution $r = d_0\eta$ ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{B} = 2\pi N d_0^3 \left\{\frac{1}{3} - J_1 + J_2\right\} \qquad \frac{4\pi}{3} d_0^3 N = \Omega.$$

$$J_1 = \int_0^1 e^{\frac{3\alpha\tau^2}{d_0^8 \varkappa T}\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^p}\right)}\, \eta^2\, d\eta \tag{15}$$

$$J_2 = \int_1^{\infty} \left[1 - e^{\frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa T d_0^8}\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^p}\right)}\right] \eta^2\, d\eta.$$

Zur weitern numerischen Ausrechnung muß man nun für p irgendeine Annahme treffen. Es wurde probiert mit $p = 9$, 10, 12. Von ganzen Zahlen ergab sich, daß $p = 9$ am besten mit der Erfahrung übereinstimmt. Setzen wir $p = 9$ und bezeichnen mit x die Größe

$$\frac{T_0}{T} = \frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa d_0^8}\,\frac{1}{T} = x.$$

Das Integral y_2 ist leicht auszuwerten durch Reihenentwicklung der Erponentialfunktion und nachherige Integration. Man findet

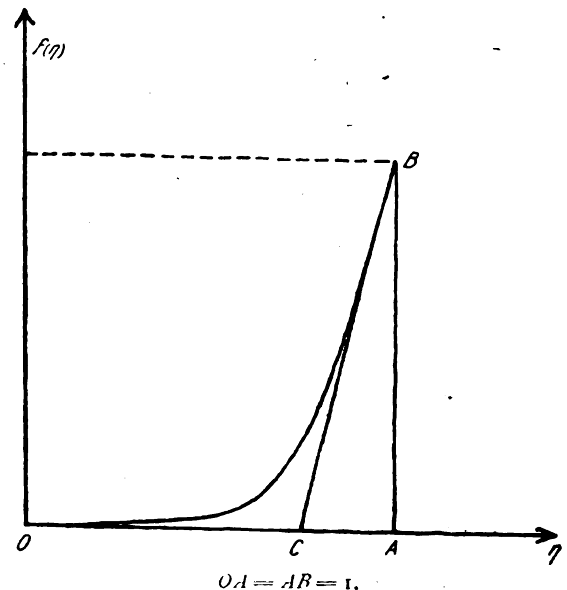
$$J_2 = -[0{,}0334\, x + 0{,}002 \ldots x^2 + \\ + 0{,}003 \ldots x^3 + \ldots]$$

J_1 können wir nicht auf diese Weise behandeln, da die Grenze $\eta = 0$ Schwierigkeiten bereitet. Hingegen können wir dasselbe leicht graphisch lösen. Der Integrand

$$f(\eta) = e^{x\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^9}\right)}\, \eta^2$$

wird gleich eins für $\eta = 1$ und fällt gegen $\eta = 0$ sehr rasch gegen Null ab. Die graphische Aufzeichnung ergibt, daß folgende Näherung bei der von uns benötigten Genauigkeit hinreichend ist. Man zieht im Punkt $\eta = 1$ die Tangente an die Kurve und schneidet sie mit der η-Achse bei C. Das Dreieck ABC gibt für die bei He bekannten numerischen Werte die Fläche OAB mit etwa 1 Proz. Genauigkeit wieder. Wir setzen also

$$J_1 \sim \triangle(ABC) = \frac{1}{2 f'(1)}.$$



$OA = AB = 1.$

Es ist

$$f'(\eta) = \left[-x\left(\frac{8}{\eta^9} - \frac{9}{\eta^{10}}\right)\eta^2 + 2\eta\right] e^{x\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^9}\right)},$$

$$f'(1) = x + 2.$$

Also

$$J_1 \sim \frac{1}{2(x+2)}.$$

Wir berechnen nun x_B, für welches $\mathfrak{B} = 0$ wird. Es folgt dann $T_0 = x_B \cdot T_B$. Nach Kamerlingh Onnes[1]) ist $\mathfrak{B}$ bei 20° abs. schon ein wenig negativ. Ich probierte daher mit Boylepunkten bei $T_B = 23°$, 25° und 28°. Die besten Resultate wurden erzielt für $T_B = 25°$. Die zugehörigen Zahlen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

T	x	$\mathfrak{B}$ cm³	$\frac{3\Omega}{2}$
56,5	3,85	10,4	86
90,3	2,41	11,9	84,5
169,5	1,34	12,15	89
273,1	0,80	11,48	89
293,1	0,74	11,16	85,7
373,4	0,58	11,0	89,5

$x_B = 0{,}865$
$T_0 = 217{,}5$

Es folgt für den Durchmesser beim absoluten Nullpunkt

$$d_0 = 2{,}78 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Für die Kombination τ der elektrischen Trägheitsmomente gilt die Formel

$$\tau^2 = \frac{T_0 \varkappa d_0^8}{3\alpha} = \frac{T_0 \varkappa d_0^8}{3} \cdot \frac{4\pi N}{3 P_0}.$$

1) H. Kamerlingh Onnes, Communications of Leiden Laboratory, Nr. 102, 1907.

Mit P_0 ist die Molekularrefraktion $P_0 = 0{,}52$ bezeichnet. Ausgerechnet gibt das

$$\tau = 1{,}32 \cdot 10^{-26}\, \mathrm{g}^{1/2}\, \mathrm{cm}^{7/2}\, \mathrm{sec}^{-1}.$$

Die Theorie fordert, daß Ω eine Konstante sei. Die Tabelle zeigt, daß der Vergleich mit den experimentellen Resultaten nur ganz kleine Abweichungen gibt, so daß die Übereinstimmung als eine sehr gute bezeichnet werden kann. Die geringen Unstimmigkeiten könnten vielleicht ihren Grund im folgenden haben. Wir haben nur probiert mit ganzen Zahlen für p. Es wäre aber ganz gut möglich, daß der beste Wert für p entweder zwischen 8 und 9, oder zwischen 9 und 10 liegt. Weiter haben wir noch eine Vernachlässigung prinzipieller Natur dadurch begangen, daß wir angenommen haben, daß *He*-Atom sei durch einen Quadrupol in elektrischer Hinsicht hinreichend dargestellt. Das braucht aber durchaus nicht der Fall zu sein. Gerade in dem wichtigen Fall, wo zwei Atome sehr nahe beieinander sind, werden auch die höhern Glieder in der Entwicklung (3) für das Potential φ in Betracht kommen. Aus diesen Gründen ist eine noch bessere Übereinstimmung mit dem Experiment gar nicht zu erwarten.

Um noch die Veränderlichkeit des Durchmessers mit der Temperatur zu demonstrieren, kann man denselben z. B. für die Temperatur $T = 293^0$ oder 20^0 C berechnen. Man erhält

$$d_{293} = 0{,}81\, d_0.$$

Die vorliegende Arbeit ist aus Besprechungen mit Herrn Prof. Debye hervorgegangen.

Zürich, Physik. Institut der Eidg. Techn. Hochschule, 1. Juli 1921.

(Eingegangen 5. Juli 1921.)

Raum-Zeit-Symmetrie [1]).

Von N. H. Kolkmeijer.

§ 1. Einleitung. Sobald in einem geometrisch-symmetrischen Gebilde Bewegungen der das Gebilde zusammenstellenden Teile in Betracht gezogen werden, kann man auf den Gedanken kommen, den dreidimensionalen Begriff der Raum-Symmetrie zu dem vierdimensionalen einer Raum-Zeit-Symmetrie zu verallgemeinern.

In einer Arbeit[1]) über die Existenz der „Verbindungsringe" im Diamant wurde ich veranlaßt, bestimmte Voraussetzungen über die Bewegungen der Elektronen in diesen Ringen zu machen. Dieselben verleihen dem *C*-Atom im Diamant eine bestimmte R.-Z.-Symmetrie. Wenn nun auch das Ergebnis der Prüfung dieser besonderen Voraussetzungen denselben nicht günstig ist, so befürworten noch immer die Arbeiten von Landé und Madelung[2]) die Vorstellung eines R.-Z.-symmetrischen Baus der Kern-Elektronen-Konfiguration des Atoms im allgemeinen. Auch der Erfolg des Sommerfeldschen Ellipsenvereins[3]) war schon ein Beispiel für die Nützlichkeit R.-Z.-symmetrischer Betrachtungen über die Atomstruktur.

Es dürfte vielleicht auch für die Kristallstrukturlehre empfehlenswert sein, die R.-Z.-Symmetrielehre einmal ebenso systematisch aufzubauen, wie es für die R.-Symmetrielehre Bravais[4]), Sohncke[5]) und Schoenflies[6]) gemacht haben. In der vorliegenden Arbeit habe ich dieses Problem teilweise zu lösen gesucht.

I. Die R.-Z.-Deckoperationen.

§ 2. Die Eigenschaften der R.-Z.-Deckoperationen. Im Folgenden werden wir eine Deckoperation angeben mit Δ, eine zusammengesetzte Δ[7]) mit $\Delta\Delta$, die Identität mit 1, eine Spiegelung an einer Symmetrieebene mit $\mathfrak{S}$, eine Inversion mit $\mathfrak{J}$, eine Drehung von $\frac{2\pi}{n}$ Rad. um eine Achse mit $\mathfrak{A}_n$, eine Drehspiegelung mit $\overline{\mathfrak{A}}_n$, eine Translation mit $\mathfrak{T}$, eine Gleitspiegelung mit $\overline{\mathfrak{T}}$, eine Schraubenbewegung mit $\mathfrak{T}_n$, die zugehörigen Symmetrieelemente, soweit angängig mit den kleinen Buchstaben.

Das sind die Δ, welche Schönflies betrachtet. Sie haben die folgenden Eigenschaften gemeinsam:

1. Die diesen Δ entsprechenden Substitutionen sind linear-orthogonal-dreidimensional (x^1, x^2, x^3).

2. Man kann die Δ alle (natürlich mit Ausnahme der $\mathfrak{S}$ selbst) betrachten als $\Delta\Delta$ von $\mathfrak{S}$

1) Diese Arbeit ist eine Zusammenfassung und Erweiterung der Betrachtungen (jedoch nicht unwesentlich abgeändert) in einigen Arbeiten, welche als Comm. No. 7 from the Lab. of Ph. and Ph. Chem. of the Vet. Coll. at Utrecht in den Proc. Amst. **24**, 1921 erschienen sind.

1) N. H. Kolkmeijer, Comm. No. 4 from the Lab. of Ph. and Ph. Chem. of the Vet. Coll. at Utrecht, Proc. Amst. **23**, 120, 1920.

2) A. Landé, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 101, 1919; Verhandl. d. D. Phys. Ges. **21**, 2, 644, 653, 1919; Zeitschr. f. Phys. **2**, 83, 1920; E. Madelung u. A. Landé, Zeitschr. f. Phys. **2**, 230, 1920.

3) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **19**, 297, 1918.

4) A. Bravais, Etudes cristallographiques. Paris 1866.

5) L. Sohncke, Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

6) A. Schoenflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891.

7) Das heißt eine $\Delta\Delta$, wie z. B. eine Drehspiegelung.

an einigen 𝔖. Das haben schon Schoenflies[1]), Viola[2]) und Wulff[3]) benutzt. Den Fall der 𝔍 ausgenommen, ergeben die verschiedenen Reihenfolgen der 𝔖 auch verschiedene Δ.

1. und 2. bringen mit sich, daß aus einer Figur, wenn man darauf diese Δ anwendet, nur eine kongruente oder symmetrische Figur entsteht.

3. Die verschiedenen Potenzen einer Δ ergeben bei ihrer Anwendung auf einen Ausgangspunkt A nie unendlich viele Punkte in einem endlichen Raum, den unbedeutenden Fall $n = \infty$ ausgenommen.

Wenn man nun die Zeit t oder $ict = x^4$ als vierte Koordinate einführt, so liegt es auf der Hand, den R.-Z.-Δ als Eigenschaften die vierdimensionalen Analoga der vorangehenden Eigenschaften beizulegen. Wir werden diese Analoga in den folgenden Paragraphen näher erörtern.

§ 3. Einführung der R.-Z.-Spiegelung. Als Analogon der 𝔖 in 2. wird man dann wählen eine „R.-Z.-Spiegelung" (Symbol ℜ, Name und Symbol des betreffenden Symmetrieelements „Symmetrieraum"[4]) und 𝔯).

Ein Punktsystem in R_4 besitzt als Δ eine ℜ, wenn ein dazu gehöriges Punktereignis $A_1 (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$ mit sich bringt das Punktereignis $A_2 (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4)$, welches man erhält, wenn man A_1 an einem dreidimensionalen Raum 𝔯 spiegelt.

Die zugehörige Substitution ist, wenn man für n 1, 2, 3 und 4 stellt:

$$\left. \begin{aligned} x_2^n = x_1^n + 2\varphi_1^n (l_1 - \varphi_1^1 x_1^1 - \varphi_1^2 x_1^2 - \\ - \varphi_1^3 x_1^3 - \varphi_1^4 x_1^4). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei ist l_1 die Länge des Lots aus dem Anfangspunkt des R_4 auf 𝔯 gefällt und sind $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \varphi_1^4$ die Richtungscosinus dieses Lots, also:

$$\varphi_1^{1^2} + \varphi_1^{2^2} + \varphi_1^{3^2} + \varphi_1^{4^2} = 1. \quad (2)$$

Wenn man in einem dreidimensionalen System Punkte $A_1' (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ und $A_2' (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ wählt, deren Koordinaten den betreffenden von A_1 und A_2 im vorangehenden gleich sind, und eine Ebene V durch den Anfangspunkt dieses Systems legt, deren Normal Richtungscosinus hat, welche $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3$ proportional sind, so liegen A_1' und A_2' auf demselben Lot auf V, denn für $n = 1$, 2 und 3 bzw. ist $x_2^n - x_1^n$ proportional φ_1^n.

Nennt man den Abstand des Punktes A' von V — y, so ist für $n = 1$ und 2 bzw.

$$y_m = \frac{\varphi_1^1 x_m^1 + \varphi_1^2 x_m^2 + \varphi_1^3 x_m^3}{\sqrt{1 - \varphi_1^{4^2}}}. \quad (3)$$

und also:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2\sqrt{1 - \varphi_1^{4^2}} (l_1 - \sqrt{1 - \varphi_1^{4^2}}\, y_1 - \varphi_1^4 x_1^4), \\ x_2^4 &= x_1^4 + 2 \qquad \varphi_1^4 (l_1 - \sqrt{1 - \varphi_1^{4^2}}\, y_1 - \varphi_1^4 x_1^4). \end{aligned} \quad (4)$$

Das heißt: Wenn man jetzt in einem zweidimensionalen System (x^4, y) den Punkt A_1'' (x_1^4, y_1) zeichnet, eine Gerade so zieht, daß das Lot aus dem Koordinatenanfang darauf gefällt, die Länge l_1 hat und mit der x_4-Achse einen Winkel einschließt, dessen Cosinus φ_1^4 gleich ist und schließlich A_1'' an dieser Geraden nach A_2'' spiegelt, so geben die Koordinaten von A_2'' die neuen Werte der Zeit und des Abstandes des Punktes A_2' von V im dreidimensionalen System und dann also auch die Stelle des Punktes A_2 im vierdimensionalen System.

Es ist einleuchtend, daß man alle denkbaren R.-Z.-Δ kennen lernt, wenn man alle verschiedenartigen $\Delta\Delta$ aufsucht, welche aus einigen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ usw. zusammengesetzt sind.

§ 4. Allgemeine Substitutionsformel für die R.-Z.-$\Delta\Delta$. Es sei hier ohne Ableitung die Substitutionsformel für eine R.-Z.-$\Delta\Delta$, welche (in einer bestimmten Reihenfolge) zusammengesetzt ist aus $\mathfrak{R}_1$ $(l_1, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \varphi_1^4)$, $\mathfrak{R}_2$ $(l_2, \varphi_2^1, \varphi_2^2, \varphi_2^3, \varphi_2^4)$ usw. angegeben.

$$\left. \begin{aligned} x_m^n = x_0^n + 2 \sum_{k=1}^{k=m} \Big[(l_k - \varphi_k^1 x_0^1 - \varphi_k^2 x_0^2 - \varphi_k^3 x_0^3 - \varphi_k^4 x_0^4) \Big\{ \varphi_k^n + \\ + \sum_{l=k+1}^{l=m} \Big(\varphi_l^n \big[(l,k) + \Sigma (l,p)\,(p,k) + \Sigma (l,p)\,(p,q)\,(q,k) + \ldots \big] \Big) \Big\} \Big]. \end{aligned} \right| \quad (5)$$

wo (p, q) ein Zeichen ist für:

$$-2 (\varphi_p^1 \varphi_q^1 + \varphi_p^2 \varphi_q^2 + \varphi_p^3 \varphi_q^3 + \varphi_p^4 \varphi_q^4)$$

und $l > p > q > k$ usw. zu wählen ist.

§ 5. Das Analogon zu 3. in § 2. Eine neue Eigenschaft der R.-Z.-Δ. Man kann den Wortlaut von 3. hier unverändert beibehalten, und nur unter Raum jetzt verstehen vierdimensionalen Raum. Das kann man auch so sagen: Im gleichen Moment sollen nicht unendlich viele der erhaltenen Punkte in einem endlichen Raum kommen und an derselben Stelle sollen dieselben im allgemeinen auch nicht vorkommen in unendlich benachbarten Zeitpunkten. Dabei ist der hier uninteressante Fall der Ruhe der Punkte ausgenommen.

Wir wollen jetzt den R.-Z.-Δ noch eine Eigen-

1) A. Schoenflies, l. c.
2) C. Viola, Zeitschr. f. Kristallographie **27**, 1, 1896.
3) G. Wulff, Zeitschr. f. Krist. u. Min. **27**, 566, 1896.
4) Diesen Namen hat schon P. H. Schoute, Verh. Kon. Ak. Amst, eerste Sectie II 7, S. 16, 1894 benutzt.

schaft beilegen, deren Analogon in der Raumsymmetrielehre nicht besteht. Wenn nämlich in der Formel (5) die Koeffizienten der x_1^4 in den Ausdrücken für x_2^1, x_2^2 und x_2^3 nicht verschwinden, so entfernt sich allmählich der einem Punkte A_1' nach der betrachteten R.-Z.-Δ entsprechende Punkt A_2' (beide im dreidimensionalen Raum) immer mehr ins Unendliche, wenn auch A_1' in Ruhe verharrt. Diese Eigenschaft der R.-Z.-Δ wäre wohl eine unerwünschte. Bei einer willkürlichen einfachen $\mathfrak{R}$ ist sie nicht zu vermeiden, wohl aber bei einer aus einigen $\mathfrak{R}$ zusammengesetzten $\Delta\Delta$. Wir werden also festsetzen:

4. Wenn die Weltlinie eines Punktes A_1 der x^4-Achse parallel läuft, so soll auch die Weltlinie des aus A_1 durch Anwendung einer R.-Z.-Δ entstehenden Punktes A_2 der x^4-Achse parallel laufen.

§ 6. Die Folge der Beschränkung 4. Die lineare orthogonale Substitution (5) habe das Koeffizientenschema:

$$\begin{matrix} {}_1a_1 & {}_1a_2 & {}_1a_3 & {}_1a_4 & {}_1a_5, \\ {}_2a_1 & {}_2a_2 & {}_2a_3 & {}_2a_4 & {}_2a_5, \\ {}_3a_1 & {}_3a_2 & {}_3a_3 & {}_3a_4 & {}_3a_5, \\ {}_4a_1 & {}_4a_2 & {}_4a_3 & {}_4a_4 & {}_4a_5. \end{matrix}$$

Zwischen diesen Koeffizienten bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_1a_1^2 + {}_2a_1^2 + {}_3a_1^2 + {}_4a_1^2 &= 1, \\ {}_1a_2^2 + {}_2a_2^2 + {}_3a_2^2 + {}_4a_2^2 &= 1, \\ {}_1a_3^2 + {}_2a_3^2 + {}_3a_3^2 + {}_4a_3^2 &= 1, \\ {}_1a_4^2 + {}_2a_4^2 + {}_3a_4^2 + {}_4a_4^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und

$$\left.\begin{aligned} {}_1a_1\,{}_1a_2 + {}_2a_1\,{}_2a_2 + {}_3a_1\,{}_3a_2 + {}_4a_1\,{}_4a_2 &= 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_3 + {}_2a_1\,{}_2a_3 + {}_3a_1\,{}_3a_3 + {}_4a_1\,{}_4a_3 &= 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_4 + {}_2a_1\,{}_2a_4 + {}_3a_1\,{}_3a_4 + {}_4a_1\,{}_4a_4 &= 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_3 + {}_2a_2\,{}_2a_3 + {}_3a_2\,{}_3a_3 + {}_4a_2\,{}_4a_3 &= 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_4 + {}_2a_2\,{}_2a_4 + {}_3a_2\,{}_3a_4 + {}_4a_2\,{}_4a_4 &= 0, \\ {}_1a_3\,{}_1a_4 + {}_2a_3\,{}_2a_4 + {}_3a_3\,{}_3a_4 + {}_4a_3\,{}_4a_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Zufolge der Beschränkung 4. verschwinden ${}_1a_4$, ${}_2a_4$ und ${}_3a_4$. Substituiert man das in (6) und (7), so findet man

$${}_4a_4^2 = 1 \quad {}_4a_1 = 0 \quad {}_4a_2 = 0 \quad {}_4a_3 = 0, \quad (8)$$

indem von (6) und (7) nur übrig bleibt:

$$\left.\begin{aligned} {}_1a_1^2 + {}_2a_1^2 + {}_3a_1^2 &= 1, \\ {}_1a_2^2 + {}_2a_2^2 + {}_3a_2^2 &= 1, \\ {}_1a_3^2 + {}_2a_3^2 + {}_3a_3^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und

$$\left.\begin{aligned} {}_1a_1\,{}_1a_2 + {}_2a_1\,{}_2a_2 + {}_3a_1\,{}_3a_2 &= 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_3 + {}_2a_1\,{}_2a_3 + {}_3a_1\,{}_3a_3 &= 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_3 + {}_2a_2\,{}_2a_3 + {}_3a_2\,{}_3a_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Das heißt, wenn aus dem Punktereignisse A_1 durch Anwendung der R.-Z.-Δ das Punktereignis A_2 entsteht, so hängen die Raumkoordinaten und die Zeit von A_2 nur ab von den Raumkoordinaten bzw. der Zeit von A_1; die Raumkoordinatentransformation ist überdies linear orthogonal.

Bei der Ableitung aller R.-Z.-Δ braucht man also nur reine Raum-Δ zusammenzusetzen mit reinen Zeit-Δ. Formel (5) wird man dann auch nur anwenden für φ_m^4-Werte $= 0$ (reine Raumtransformation) und φ_m^4-Werte $= 1$ (reine Zeittransformation).

§ 7. Bedeutung der Fälle $\varphi_m^4 = 0$ und $\varphi_m^4 = 1$. Einführung der Retroduktion. Eine $\mathfrak{R}$ mit $\varphi_m^4 = 0$ ist natürlich eine $\mathfrak{S}$.

Eine $\mathfrak{R}$ mit $\varphi_m^4 = 1$ werden wir eine „Retroduktion" (Symbol $\mathfrak{M}$), das betreffende Symmetrieelement ein „Symmetriemoment" (Symbol $\mathfrak{m}$) nennen. Wenn allgemein die folgende Beziehung gilt: wenn in P zur Zeit t ein Teilchen A ist und es gibt dann auch in P ein Teilchen B zur Zeit $2\mathfrak{m} - t$, so sagen wir, das bewegliche System der Teilchen A habe als Δ eine Retroduktion mit $\mathfrak{m}$ als Symmetriemoment.

Wenn dann A zur Zeit $t + \Delta t$ in Q ist, so soll zur Zeit $2\mathfrak{m} - t - \Delta t$ in Q auch ein Teilchen sein. Zufolge der Beschränkung 3. schließen wir, daß letzteres Teilchen B sein soll. Also sind die Geschwindigkeiten der Teilchen A und B in P einander gleich und in entgegengesetzter Richtung.

Zur Zeit $\mathfrak{m}$ müssen sich dann an derselben Stelle zwei Teilchen befinden mit entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten. Nehmen wir an, die Teilchen seien undurchdringlich, so müssen die Teilchen A und B identisch sein. Dann sind also alle Teilchen zur Zeit $\mathfrak{m}$ in Ruhe gelangt und laufen nachher in den Bahnen zurück.

Wenn man daran geht, die reinen Raum-Δ mit reinen Zeit-Δ zusammenzusetzen und z. B. eine $\Delta\Delta$ aus einer $\mathfrak{M}$ und einer $\mathfrak{S}$ betrachtet, so soll man im Vorangehenden den Ausdruck „an derselben Stelle" ändern in „an der an der $\mathfrak{s}$ gespiegelten Stelle". Dann würde das Bedenken wegen der entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten verschwinden, wenn wenigstens nur nicht die Teilchen zur Zeit $\mathfrak{m}$ gerade in der $\mathfrak{s}$ lägen. Wäre dies jedoch der Fall, so würde auch dann noch das Bedenken verschwinden, wenn man die beiden Teilchen als identisch betrachtete. Dann durchsetzt das Teilchen die $\mathfrak{s}$ und die Bahnen vor und nach dem Zeitpunkte $\mathfrak{m}$ sind zur $\mathfrak{s}$ symmetrisch. Ist dann überdies noch die Geschwindigkeit zur Zeit $\mathfrak{m}$ zur $\mathfrak{s}$ senkrecht, so gibt es gar keine Diskontinuität in der Bewegung.

Man kann auf diese Weise auch andere $\Delta\Delta$ untersuchen.

§ 8. Einführung der Dilation. Wenn man die reinen Zeit-Δ betrachtet als spezielle Fälle der $\mathfrak{R}$, kann man aus den Erörterungen des § 3 ersehen, daß man die ersteren alle auffinden muß, wenn man nur alle $\Delta\Delta$ aus $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ usw. aufsucht.

Wir werden die Operation $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ „Dilation“ (Symbol $\mathfrak{P}$) nennen (Name und Symbol des zugehörigen Symmetrieelements „Periode“ und $\mathfrak{p}$). Ein aus Teilchen bestehendes System besitzt als Δ eine $\mathfrak{P}$, wenn allgemein die Beziehung gilt, daß wenn in P ein Teilchen A_1 ist zur Zeit t, es in P auch ein Teilchen A_2 gibt zur Zeit $\mathfrak{p}+t$, $\mathfrak{p}=2(\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_1)$. Dann kommen an P jedesmal nach Ablauf einer Zeit $\mathfrak{p}$ Teilchen vorüber. Ist die Anzahl der Teilchen nicht unendlich groß, so kommt also einmal wieder Teilchen A in P an und hat daselbst dieselbe Geschwindigkeit als es das erste Mal hatte und als alle an P vorübergehenden Teilchen hatten. Man sieht das sogleich, wenn man den Zustand zur Zeit $t+\Delta t$ in Betracht zieht. Alle Teilchen sind also in verschiedenen Anzahlen verteilt über verschiedentlich geformte geschlossene Bahnen, in denen sie mit für alle Bahnen gleichen und in jeder Bahn auch unter sich gleichen Phasenunterschieden umlaufen. Die Umlaufzeiten in zwei Bahnen sind den Anzahlen der darin laufenden Teilchen proportional.

Setzt man eine $\mathfrak{P}$ mit einer Raum-Δ, z. B. einer Drehung von $\frac{2\pi}{n}$ um eine Achse $\mathfrak{a}_n$ zu einer $\Delta\Delta$ zusammen, so sind die n-Bahnen, welche durch $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n^2$ usw. aus einer derselben hervorgehen alle geschlossene; in jeder derselben laufen gleich viele Teilchen, welche $\frac{2\pi}{n}$ Phasenunterschied mit denen der nächstvorangehenden Bahn haben.

Hierbei tritt ein Unterschied ein, welcher dem Unterschiede zwischen links und rechts gewundenen Schrauben analog ist, je nachdem dem positiven Drehungssinne eine positive oder eine negative Dilation zugeordnet wird.

§ 9. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ sind die einzigen Zeit-Δ-Arten[1]). Wenn nämlich $\ldots\ldots\mathfrak{M}_4\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1$ eine Δ eines Systems ist, so soll, wenn im Punkte P zur Zeit t ein Teilchen ist, daselbst auch ein Teilchen sein zur Zeit

$$2\mathfrak{m}_1-2\mathfrak{m}_2+2\mathfrak{m}_3-2\mathfrak{m}_4+\ldots\ldots\pm t.$$

Dabei gilt das Pluszeichen wenn die Anzahl der $\mathfrak{M}$ gerade ist und dann ist die $\Delta\Delta$ einer $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{p}=2\mathfrak{m}_1-2\mathfrak{m}_2+\ldots$ äquivalent; ist diese Anzahl ungerade, so gilt das Minuszeichen und ist die $\Delta\Delta$ einer $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2+\ldots$ äquivalent.

Man findet also alle R.-Z.-Δ, wenn man die in § 2 genannten R.-Δ entweder mit einer $\mathfrak{M}$ oder mit einer $\mathfrak{P}$ multipliziert.

§ 10. Namen und Symbole der R.-Z.-Δ. Es ist wohl im Interesse der Kürze erwünscht, sich über Namen und Symbole für die R.-Z.-Δ zu vereinbaren. Als ein vorläufiges möchte ich das nachfolgende Schema in Erwägung geben:

Ohne Zeit-Δ.		Mit $\mathfrak{M}$		Mit $\mathfrak{P}$	
Identität	1	Retroduktion	$\mathfrak{M}$	Dilation	$\mathfrak{P}$
Spiegelung	$\mathfrak{S}$	Kehrspiegelung	$\mathfrak{M}\mathfrak{S}$	Zeitspiegelung	$\mathfrak{P}\mathfrak{S}$
Inversion	$\mathfrak{J}$	Kehrinversion	$\mathfrak{M}\mathfrak{J}$	Zeitinversion	$\mathfrak{P}\mathfrak{J}$
Drehung	$\mathfrak{A}_n$	Kehrdrehung	$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_n$	Zeitdrehung	$\mathfrak{P}\mathfrak{A}_n$
Drehspiegelung	$\overline{\mathfrak{A}}_n$	Kehrdrehspiegelung	$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{A}}_n$	Zeitdrehspiegelung	$\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{A}}_n$
Translation	$\mathfrak{T}$	Kehrtranslation	$\mathfrak{M}\mathfrak{T}$	Zeittranslation	$\mathfrak{P}\mathfrak{T}$
Gleitspiegelung	$\overline{\mathfrak{T}}$	Kehrgleitspiegelung	$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}$	Zeitgleitspiegelung	$\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{T}}$
Schraubenbewegung	$\mathfrak{X}_n$	Kehrschraubenbewegung	$\mathfrak{M}\mathfrak{X}_n$	Zeitschraubenbewegung	$\mathfrak{P}\mathfrak{X}_n$

Die gleichen Präfixe fügt man den Namen der Symmetrieelemente, die gleichen aber kleinen Buchstaben den Symbolen derselben zu. Man kürzt dann noch zu: Kehrebene, Kehrachse, Kehrspiegelachse usw.

II. Die Gruppen der reinen Z.-Δ.

§ 11. Die Gruppe ohne $\mathfrak{P}$. Sobald zu der Gruppe zwei $\mathfrak{M}$ gehören, ist schon eine $\mathfrak{P}$ vorhanden. Es kann also nur eine $\mathfrak{M}$ in dieser Gruppe geben. Sie besteht aus Potenzen dieser $\mathfrak{M}$. Weil nun alle geraden Potenzen der Identität die ungeraden der $\mathfrak{M}$ selbst äquivalent sind, sind die nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe nur:

$$\{1 \text{ und } \mathfrak{M}.$$

Die Bewegungen der Teilchen sind schon oben angegeben.

§ 12. Die Gruppe ohne $\mathfrak{M}$. Außer im Falle der Ruhe der Teilchen ist eine $\mathfrak{P}$ mit unendlich kleiner $\mathfrak{p}$ der Eigenschaft 3. zuwider. Wenn nun zu der Gruppe zwei $\mathfrak{P}$ gehören,

1) Hier liegt ein Unterschied vor zwischen den Betrachtungen in Comm. Nr. 7 l. c. und den gegenwärtigen. Es schien mir jetzt besser, die damals eingeführte Kehrdilation bei den später zu behandelnden Gruppen reiner Z.-Δ unterzubringen.



deren $\mathfrak{p}$ als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit haben, so ruhen die Teilchen. Die Gruppe enthält dann nur die Identität.

Haben die $\mathfrak{p}$ jedoch einen anderen größten gemeinschaftlichen Teiler, so ist der letztere eine neue $\mathfrak{p}$ und die ursprünglichen $\mathfrak{P}$ sind Potenzen der zu dieser $\mathfrak{p}$ gehörigen $\mathfrak{P}$ äquivalent. Also kann es nur eine Gruppe der $\mathfrak{P}$ geben:

$$\{\ldots\ldots\mathfrak{P}^{-3}\,\mathfrak{P}^{-2}\,\mathfrak{P}^{-1}\,1\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}^{2}\,\mathfrak{P}^{3}\ldots\ldots$$

Die Gruppe ist eine unendliche wie diejenige der Translationen. Die Bewegungen der Teilchen sind schon oben angegeben.

§ 13. Die Gruppe der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$. Wenn eine Gruppe sowohl eine $\mathfrak{M}$ als eine $\mathfrak{P}$ enthält, so enthält sie auch die Operation $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^n$ und ebenso $\mathfrak{P}^n$. Die nicht-äquivalenten Operationen sind:

$$\left\{\begin{array}{l}\ldots\;\mathfrak{P}^{-3}\quad\mathfrak{P}^{-2}\quad\mathfrak{P}^{-1}\quad 1\quad\mathfrak{P}\quad\mathfrak{P}^{2}\quad\mathfrak{P}^{3}\ldots\\ \ldots\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-3}\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-2}\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-1}\;\mathfrak{M}\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{2}\;\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{3}\ldots\end{array}\right.$$

Fügt man der Gruppe eine $\mathfrak{M}_1$ zu, so entsteht eine neue $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$. In diesem Falle, wie wenn man der Gruppe gleich eine neue $\mathfrak{P}_1$ zugefügt hätte, kann entweder die neue $\mathfrak{p}_1$ mit derjenigen der $\mathfrak{P}$ als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit haben (und dann wird die Gruppe 1 $\mathfrak{M}$) oder der größte gemeinschaftliche Teiler ist $\mathfrak{p}_2$ und dann kann man die zugehörige $\mathfrak{P}_2$ statt $\mathfrak{P}$ in obenstehender Aufzählung der Operationen stellen. Daraus geht hervor, daß es keine weiteren Gruppen reiner Zeit-Δ geben kann[1]). Jedes Teilchen durchläuft eine anders geformte Bahn in schwingender Bewegung. Nur die Momente der Rückkehr sind für alle Teilchen die gleichen. In jeder Bahn läuft natürlich nur ein Teilchen.

§ 14. Die erzeugenden Operationen der Gruppen. Man kann immer jede der Operationen einer Gruppe betrachten als das Äquivalent eines fortlaufenden Produktes einiger ausgewählten derselben. Und zwar kann man die Wahl der „erzeugenden Operationen", wie Schoenflies dieselben nennt, auf verschiedene Weise treffen. Wir werden im Folgenden jede Gruppe mit einem Symbol andeuten, das man erhält, indem man zwischen $\{\}$ die Symbole der erzeugenden Operationen, von Kommas getrennt, stellt. Dann kann man die drei Gruppen reiner Zeit-Δ andeuten mit: $\{\mathfrak{M}\}$, $\{\mathfrak{P}\}$ und $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$.

III. Die Gruppen der R.-Z.-Δ, welche keine mit $\mathfrak{T}$ zusammengesetzten Δ enthalten.

§ 15. Der Zusammenhang dieser Gruppen mit den Schoenfliesschen Punktgruppen. Man betrachte einmal die Gesamtfigur der $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}_n$ usw, welche zum Teil den reinen R.-Δ, zum Teil den R.-Z.-Δ zugehören. Wendet man auf diese Figur eine der R.-Z.-Δ, welche aus der R.-Δ $\mathfrak{A}$ und der Z.-Δ $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt ist, an, so ergibt das zwar eine mit der ursprünglichen kongruenten oder symmetrischen Figur an einem anderen Zeitpunkte; da jedoch die Figur ihrer Natur nach eine ruhende ist, gilt das ebenso für den unveränderten Zeitpunkt. Dann ist aber die R.-Δ $\mathfrak{A}$ allein eine Δ dieser Figur und kann dieselbe nur eine der zu den Punktgruppen gehörigen sein.

Daraus geht hervor: man findet alle denkbaren Gruppen der R.-Z.-Δ mit Ausschluß der Translationen, indem man nur bei jeder der Punktgruppen jede der nicht äquivalenten Operationen mit einer Zeit-Δ (einschließlich der Identität) in allen möglichen Kombinationen multipliziert und zu den so erhaltenen Gruppen noch jede der Gruppen reiner Z.-Δ fügt.

§ 16. Benutzung der erzeugenden Operationen. Man macht sich die Arbeit aber leichter, indem man die erzeugenden Operationen (§ 14) benutzt.

Man geht z. B. aus von der Punktgruppe $G=\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$. Multipliziert man deren erzeugende Operationen mit Z.-Δ, z. B. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, so entsteht eine Gruppe $\Gamma_1=\{\mathfrak{G}\mathfrak{A}, \mathfrak{H}\mathfrak{B}, \mathfrak{K}\mathfrak{C}\}$. Betrachtet man alle möglichen Variationen der Operationen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, so erhält man die „Γ_1-Gruppen". Fügt man der Gruppe Γ_1 die Gruppe reiner Z.-Δ $\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}$ zu, so entsteht die Gruppe $\Gamma_2=\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G}\mathfrak{A}, \mathfrak{H}\mathfrak{B}, \mathfrak{K}\mathfrak{C}\}$. Durch Variation der Gruppe reiner Z.-Δ entstehen die „Γ_2-Gruppen".

Wenn man nun auf die in dem voranstehenden Paragraphen angegebenen Weise aus der Punktgruppe G eine Gruppe Γ abgeleitet hat, so hat Γ mit einer der Γ_1-Gruppen, z. B, Γ'_1 die Operationen $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{C}$ gemein. Wenn es nun eine andere der nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe G gibt, welche in Γ mit der Z.-Operation $\mathfrak{L}$, in Γ_1' dagegen mit der Z.-Operation $\mathfrak{N}$ multipliziert ist, so füge man der Gruppe Γ'_1 als erzeugende Operation die Z.-Operation $\mathfrak{Q}$ zu (wodurch man eine der Γ_2-Gruppen, z. B. Γ'_2 erhält), so gewählt, daß $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}=\mathfrak{L}$. Dann fällt der angegebene Unterschied zwischen Γ und Γ'_1 in Γ und Γ'_2 fort. In derselben Weise sind auch die anderen Unterschiede zwischen Γ und Γ'_1 zu beseitigen. Ein Konflikt zwischen den zugefügten Z.-Δ ist nicht zu befürchten, weil der Fall der Ruhe der Teilchen neben den R.-Δ der Gruppe jede Z.-Δ umfassen kann. Die Γ_2-Gruppen enthalten also alle möglichen Gruppen der R.-Z.-Δ.

---

1) Will man in obenstehender Gruppe prüfen, ob die Multiplikation einer der Operationen mit einer zweiten das Äquivalent einer dritten liefert, so soll man bedenken, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{k}\cdot\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{l}=\mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-k}\mathfrak{P}^{l}=\mathfrak{P}^{l-k}$.

Man multipliziert also jede der erzeugenden Operationen einer Punktgruppe entweder mit 1, oder mit $\mathfrak{M}$, oder mit $\mathfrak{P}$ und multipliziert die so erhaltene Gruppe entweder mit $\{1\}$, oder mit $\{\mathfrak{M}\}$, oder mit $\{\mathfrak{P}\}$, oder mit $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$.

Man kann auf diese Weise zwar keine der gesuchten Gruppen übergehen, man wird jedoch eine gewisse Gruppe mehrere Male erhalten, ohne daß die Äquivalenz sogleich vor Augen liegt. Bevor wir diese Äquivalenz näher untersuchen, werden wir eine Wahl treffen für die erzeugenden Operationen der Punktgruppen.

§ 17. **Wahl der erzeugenden Operationen der Punktgruppen.** Für unsern Zweck wählt man am besten die nachfolgenden Bezeichnungen, welche die 32 Schoenfliesschen Punktgruppen mit umfassen:

$\{\mathfrak{A}_n\}$	
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}'_2) = \frac{\pi}{n}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}'_3) = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$	$(\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}'_4) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$	$(\mathfrak{a}_5\,\mathfrak{a}'_5) = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\{\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	
$\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$	$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}') = \frac{\pi}{n}$
$\{\mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_h\}$	$(\mathfrak{a}_n\,\mathfrak{s}_h) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$	$(\mathfrak{s}_v\,\mathfrak{s}'_v) = \frac{\pi}{n}$, $(\mathfrak{s}_v\,\mathfrak{s}_h) = (\mathfrak{s}'_v\,\mathfrak{s}_h) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$	$(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{s}_d) = \frac{\pi}{2n}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{s}_h) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{s}_d) = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$	$(\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{s}) = \frac{\pi}{4}$
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$	$(\mathfrak{a}_5\,\mathfrak{s}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Es sind immer möglichst wenige erzeugende Operationen gewählt worden und darunter möglichst viele äquivalenten. Das letztere hat den Vorteil, daß man z. B. von den beiden Gruppen $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3\}$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{A}'_3\}$ nur eine zu betrachten hat. Weiter sind dann noch die Operationen so gewählt worden, daß schon eine möglichst niedrige Potenz derselben der Identität äquivalent ist.

§ 18. **Die Standardbezeichnung der erhaltenen Gruppen.** Man überwindet die Schwierigkeit, daß man mehrere Bezeichnungen für äquivalente Gruppen erhält am besten durch die Umwandlung aller Bezeichnungen in eine Standardform. Als solche werden wir diejenige betrachten, in welcher 1. alle in den Gruppen enthaltenen, mitunter zuerst verborgenen, reinen Z.-Operationen als erzeugende Operationen den anderen Operationen vorangestellt und insgesamt in eine der Formen $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ übergeführt worden sind, 2. die Z.-Operationen der erzeugenden R.-Z.-Δ wenn möglich in $\mathfrak{M}$ oder sogar in die Identität übergeführt worden sind.

Man muß also zuerst die reinen Z.-Operationen ausfindig machen. Dazu kann man bedenken, daß es verschiedene fortlaufende Produkte der erzeugenden Operationen der ursprünglichen Punktgruppe G gibt, die der Identität äquivalent sind. Die damit übereinstimmenden Produkte bei der untersuchten R.-Z.-Gruppe ergeben alle eine reine Z.-Operation derselben. In den meisten Fällen sieht man solche fortlaufenden Produkte der Gruppe G leicht genug. Kann man mit Hilfe der gewonnenen Z.-Operationen die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ der erzeugenden R.-Z.-Δ überführen in $\mathfrak{M}$ oder sogar die Identität, so macht man das gleich. Beispiel: $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3\}$. Da $(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3)^3 = \mathfrak{M}$, ist $\mathfrak{M}$ eine Operation der Gruppe. Macht man dann $\mathfrak{M}$ zu einer erzeugenden Operation, so kann man $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3$ umsetzen in $\mathfrak{A}_3$. Man schreibt jetzt für $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$. Dadurch kann man als erzeugende Operation jetzt $\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3$ statt $\mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3$ wählen. Dann ist wiederum $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3)^3 = \mathfrak{M}_1$ eine Operation der Gruppe und sind die gesamten Z.-Operationen schon in der verlangten Form $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ vorhanden. Man setzt dann noch $\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3$ in $\mathfrak{A}'_3$ um und erhält so die Gruppe in der Standardbezeichnung $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$.

Behufs Auffindung der Z.-Operationen schreibt man oft am besten die nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe G als fortlaufende Produkte der erzeugenden Operationen auf und findet dann leicht die oben erwähnten, der Identität äquivalenten Produkte dieser letzteren. So sieht man bei der Bearbeitung der Gruppe $\{\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}_2\mathfrak{A}'_3\}$ gleich, daß $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}'_3\mathfrak{A}'_3$ und daß man also neben den Z.-Operationen $\mathfrak{P}_1^3$ und $\mathfrak{P}_2^3$ auch $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{A}'^2_3)^2 = \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^4$ findet. Statt dieser letzteren betrachtet man natürlich $\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2$. Jetzt sind die erhaltenen Z.-Operationen nicht zusammen in einer der verlangten Formen. Haben nun die Perioden der drei Dilationen als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit, so ruhen die Teilchen und ist die Gruppe einfach $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$. Ist jedoch der gr. gem. T. $\mathfrak{p}$, die zugehörige Dilation $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}_1^3 = \mathfrak{P}^k$, $\mathfrak{P}_2^3 = \mathfrak{P}^l$ und $\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^m$ (k, l und m ganze Zahlen). Dann ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^{k/3}$, $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^{l/3}$ und also $2k + l = 3m$ oder $l - k = 3p$. Die Bezeichnung der Gruppe wird $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{k/3}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^{k/3+p}\mathfrak{A}'_3\}$. Man darf in den Exponenten der Potenzen von $\mathfrak{P}$ ganze Zahlen streichen. Für k kommen also

nur die Werte 1 und —1 in Betracht. Dabei ist $\mathfrak{P}^{-1|3}\mathfrak{A}_3$ weiter nichts als die Zeitdrehung mit einer derjenigen von $\mathfrak{P}^{1|3}\mathfrak{A}_3$ entgegengesetzten $\mathfrak{p}$. Man bezeichnet die Gruppe, indem man noch zur Vermeidung von Brüchen statt $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}^3$ setzt, als $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}'_3\}_{++}$. $++$ deutet an, daß man nur gleiche Zeichen kombinieren darf.

Man bearbeitet zuerst die Gruppen, denen noch keine Gruppe reiner Z.-Operationen zugefügt worden ist. Mit Hilfe der für denselben erhaltenen Bezeichnungen ist dann die Behandlung der übrigen Gruppen leichter. Fügt man einer der behandelten Gruppen, z. B. Γ_1 dann eine erzeugende Z.-Operation, z. B. $\mathfrak{G}$, zu, so zieht man bei der Bearbeitung dieser Gruppe auch die schon behandelte Gruppe in Betracht, die man erhält durch Multiplikation der erzeugenden Operationen der Gruppe Γ_1 mit $\mathfrak{G}$. Beispiel: Man hat schon die Gruppe $\{\mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_h\}$ in die Standardbezeichnung $\{(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2, \mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_h\}$ übergeführt und es soll nun $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_h\}$ untersucht werden. Erstens ist natürlich wiederum $(\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3)^2$ eine Operation der Gruppe. Weil auch $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_v$ eine Operation der Gruppe ist, ist das auch $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2$ und ebenso $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3)^2$. Weiter handelt man mit diesen drei Dilationen als im vorangehenden Beispiel und erhält dann $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{k|2}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{l|2}\mathfrak{S}_h\}$, in dem man k und l nur 1 oder 0 zu nehmen hat. Für k und $l = 1$ z. B. würde man zur Vermeidung von Brüchen $\mathfrak{P}^2$ statt $\mathfrak{P}$ setzen. Dann sind die gesamten Z.-Operationen noch nicht in einer der verlangten Formen. Dazu wählt man als erzeugende Operation dann $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^2$ und erhält so $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$. In der nachfolgenden Aufzählung der Gruppen ist jedoch der Kürze halber diese $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h$ immer fortgelassen worden.

Ist eine Gruppe wie $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}_2\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}_3\mathfrak{S}_h\}$ zu behandeln, so setzt man $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_3$ und sieht dann gleich, daß die Gruppe der Gruppe $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_h\}$ äquivalent ist. Von diesen beiden Gruppen hat man also nur eine zu betrachten.

Als letztes Beispiel werden wir noch $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{2n}\}$ betrachten. Sowohl $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{2n}$ als $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}_{2n}$ ist eine Operation der Gruppe. Also auch $\mathfrak{A}_{2n}^{-1}\mathfrak{M}_1^{-1}\mathfrak{M}_2^{-1} = \mathfrak{A}_{2n}^{-1}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und ebenso $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{2n}\mathfrak{A}_{2n}^{-1}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2 = \mathfrak{P}^2$. Dann ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{P}$. Die Gruppe ist also: $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}\}$ oder $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}\}$.

Es ist öfters gut mit der Figur zu kontrollieren, ob man alle Z.-Operationen gefunden hat.

In der nachfolgenden Tabelle sind die erhaltenen Gruppen aufgeführt worden. Die Anzahl derselben ist 168, wobei man zu bedenken hat, daß eine Gruppe wie $\{\mathfrak{A}_n\}$ mehrere Gruppen umfaßt. Nur die 125 Gruppen der beiden letzten Kolumnen ergeben periodische Atommodelle. Die anderen sind Quasi-Atommodelle genannt worden[1]). Es ist angegeben worden, zu welchen Gruppen die Atommodelle von Sommerfeld, Landé und Madelung gehören.

§ 19. Schlußbemerkungen. Die Ebene-Zeit- und die Gerade-Zeit-Symmetrielehre ohne Translationen sind als spezielle Fälle im Vorangehenden enthalten.

Die Anzahl der Teilchen ist in der R.-Z.-Symmetrielehre wie in der R.-Symmetrielehre derjenigen der Operationen der Gruppe gleich. Nur bei besonderer Wahl der Lagen der Teilchen oder der Werte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ kann die Anzahl der Teilchen auf die Hälfte, ein Drittel usw. reduziert werden.

Die R.-Z.-Symmetrie eines Modells wird von der Kraftwirkung nicht zerstört. Um das einzusehen, zeichnet man in einer Figur die relativen Lagen der Teilchen zur Zeit t, die Bahnen der Teilchen und die von den Teilchen zu den Zeiten $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$ usw. auf diesen Bahnen eingenommenen Lagen. Wendet man nun auf diese Figur eine der R.-Z.-Δ der Gruppe an, so können vier Fälle eintreten: 1. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen kongruent, die Zeit wird transformiert nach der Formel $t' = C + t$. Die mittransformierten Bahnen geben für die neuen Teilchen die Bewegungen richtig an, die R.-Z.-Symmetrie bleibt also fortwährend erhalten. 2. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen symmetrisch, für die Zeit gilt das in 1. Gesagte. Auch die Bahnen sind bei der Transformation in die symmetrischen übergegangen. Sie geben auch jetzt die richtigen Bewegungen der Teilchen an, die Symmetrie bleibt erhalten. 3. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen kongruent, die Zeit wird transformiert nach $t' = C - t$. Die Bewegungen der neuen Teilchen sind diejenige, welche man erhalten hätte, wenn man vor der Transformation zur Zeit $\frac{1}{2}C$ die Geschwindigkeiten der ursprünglichen Teilchen alle umgekehrt hätte. Diese Bewegungen der neuen Teilchen sind natürlich mit der Kraftwirkung verträglich und auch hier bleibt die Symmetrie erhalten.

1 Wenn doch die Konfiguration der Elektronen eines Atoms periodisch wiederkehrt (wie bei den Modellen, welche mit Gruppen der beiden letzten Kolumnen in Beziehung stehen, der Fall ist), so wird man einsehen können, daß man das Atom (in statistischem Sinne wenigstens) an den Eigenschaften, welche mit dieser Konfiguration zusammenhängen, wiedererkennen kann. Diese Erwägung ist zugleich eine Stütze für die Auffassung, daß die Individualität eines Atoms zum Teil wenigstens seiner R.-Z.-Symmetrie zuzuschreiben ist.

Tabelle der Gruppen der Raum-Zeit-Deckoperationen ohne Translationen.

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
$\{\mathfrak{A}_n\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_n\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{P}^k\mathfrak{A}_n\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_n\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}\}$
$\{\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{M}\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}, \bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{P}^k\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{A}}_{2n}\}$
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_2\}$
wenn $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'_2)^{2n} = 1$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$		$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}'_3\}$ ++	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{A}'_4\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}'_4\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_4\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_4\}$
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$
$\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{M}\mathfrak{S}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{S}'\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'\}$
wenn $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}')^{2n} = 1$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$		$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$
$\{\mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{A}_n, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{P}^k\mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{P}^k\mathfrak{A}_n, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{P}^k\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{P}^n\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^{4n+2}, \mathfrak{P}^{2k}\mathfrak{A}_{2n+1}, \mathfrak{P}^{2n+1}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$
$\{\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ [1] $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$
wenn $(\mathfrak{S}_v\mathfrak{S}'_v)^{2n} = 1$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$		$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$

1) Das ist für $k = 0$ die Symmetrie des Sommerfeldschen Ellipsenvereins. Dieselbe gehört als diejenige einer ebenen Figur auch anderen Gruppen an.

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
		$\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}^n\mathfrak{S}_h\}$ [1]	
wenn $(\mathfrak{S}_v\mathfrak{S}'_v)^{2n+1} = 1$		$\{\mathfrak{P}^{4n+2}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{2k}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}^{2n+1}\mathfrak{S}_h\}$	
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{S}_d\}$ [2] $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^6, \mathfrak{P}^{\pm 2}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^3\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ [3] $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ [4] $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ [5]	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ [6] $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ [7] $\{\mathfrak{P}^6, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{S}\}$ [8]	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$

1) Die Symmetrie des Landéschen doppeltpyramidalen Modells:
für $k = 0$, wenn die Anzahl der Bahnen gerade ist; für $k = n$, wenn n durch 4 teilbar ist und jedes zweite Elektron $1/2$ Phasenunterschied gegen die anderen hat; für $k = 0$, wenn n gerade ist und in jeder Bahn q Elektronen (q ungerade) laufen.

2) Die Symmetrie des Landéschen doppeltpyramidalen Modells:
für $k = n$, wenn die Anzahl der Bahnen ungerade ist; ebenso wenn dann die beiden Elektronen in zwei aufeinanderfolgenden Bahnen $1/n$ Phasenunterschied haben; wenn in jeder Bahn q Elektronen laufen, soll $k = 0$ sein, wenn q gerade ist und $k = n$, wenn q ungerade ist.
Die Landéschen rhomboedrischen Modelle sind spezielle Fälle dieser doppeltpyramidalen Modelle für $n = 3$.

3) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 24 Elektronen.

4) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 12 Elektronen.

5) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 4 und des Madelung-Landéschen Modells mit 8 Elektronen; beim ersteren ist das m der $\mathfrak{M}$ dem Zeitpunkte der Überschreitung einer der $\mathfrak{S}$ gleich, beim zweiten nicht.

6) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 48 Elektronen.

7) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 24 Elektronen.

8) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 8 Elektronen für $k = +1$ oder ± 2.

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
		$\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$	
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$

4. Dieser Fall braucht wohl nicht mehr besprochen zu werden.

Die Bewegungsgleichungen haben die R.-Z.-Symmetrie der Gruppe. Daher war es Landé möglich, das n-Körperproblem durch geschickte Wahl der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ auf ein 1-Körper-Problem zurückzuführen[1]). Es wäre jedoch möglich, daß man eine R.-Z.-Symmetrie der Atommodelle nur in statistischem Sinne auffassen sollte. Man könnte die in dieser Mitteilung gegebenen Betrachtungen als einen Teil der Atomkinematik der Atomdynamik Landés gegenüberstellen. Dadurch wird der mechanische Charakter der R.-Z.-Symmetrielehre dem mathematischen Charakter der R.-Symmetrielehre gegenübergestellt.

1) Doch ist hierzu diese Wahl nicht notwendig. Das Problem ist immer ein 1-Körper-Problem. Nur kommen in den Differentialgleichungen des einzigen Körpers die Koordinaten der Lagen des Körpers in der Vergangenheit oder der Zukunft vor.

Utrecht, Lab. f. Physik u. Phys. Chemie der Tierärztlichen Hochschule.

(Eingegangen 11. Juli 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

Von J. Franck.

(Fortsetzung und Schluß.)

Bei Argon ist außer einigen mit Verstärkerröhren ausgeführten, mehr orientierenden Messungen wiederum eine neue Arbeit von Frank Horton und Ann Davies zu nennen. Auch hier haben wir Bedenken über die Richtigkeit der Deutung der Resultate. Die folgende Tabelle zeigt, daß eine weitere Durchmessung des Argons ebenfalls noch dringend notwendig ist (sie ist zurzeit in Ausführung begriffen).

Tabelle VII.

Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Beobachter u. Methode
12 Volt	—	Franck u. Hertz (siehe alter Bericht.
11,5 „	(15,1 18,1 Volt	Frank Horton und A. Davies, Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 97, 1, 1920. Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
—	ca. 15,6 „	Found, Phys. Rev. 16, 41, 1920. Verstärkerrohr.
ca. 12 „	—	Stead u. Gossling, loc cit. Verstärkerrohr. (Die Anregungsspannung wird für die Ionisierungsspannung gehalten.)

Mehratomige Gase.

Wie unter „Methoden" schon erwähnt, sind die Untersuchungen in mehratomigen Gasen komplizierter sowohl in experimenteller wie in theoretischer Hinsicht. Wegen der Elektronenaffinität dieser Gase hat man auch bei Geschwindigkeiten der Elektronen, die nicht genügen, um eine Lichtanregung des getroffenen Moleküls anzuregen, mit den unelastischen Stößen zu rechnen, bei denen z. B. ein Elektron eingefangen und ein negatives Ion gebildet wird. Diese negativen Ionen wandern an die Elektroden, bilden dort Doppelschichten, die in elektronegativen Gasen einen Betrag von mehreren Volt haben können. Ferner ist in vielen Fällen mit einer Zersetzung der Substanz durch die Elektronenstöße und durch



die Berührung mit dem Glühdraht zu rechnen. Alle diese Gründe bewirken, daß es schwerer ist, in mehratomigen Gasen eindeutige Resultate zu erhalten als in einatomigen. Als Meßmethoden kommen diejenigen in Betracht, bei denen die Elektronen ihre Geschwindigkeit auf einem Wege erhalten, auf dem sie keine Zusammenstöße erleiden, vor allem also die lichtelektrische Methode und die modifizierte Methode des unelastischen Stoßes. Fehler bei der Geschwindigkeitsbestimmung der Elektronen, die hier naturgemäß besonders leicht auftreten, beseitigt man, wie erwähnt, am besten durch Zumischung von Helium als Eichgas. Wie Foote und Mohler zeigten, kann man auch den Abstand zweier Maxima beim Verfahren des unelastischen Stoßes zur Anbringung der Korrektur verwenden. Die Deutung dieses Abstandes als Resonanzspannung müssen wir jedoch, wie oben erwähnt, ablehnen. Trotzdem die in mehratomigen Gasen gewonnenen Resultate zum Teil nur als vorläufige anzusehen sind, da es nicht immer möglich war, alle Fehlerquellen genügend zu berücksichtigen, kann man aus ihnen einige Folgerungen ziehen, die wir für prinzipiell gesichert ansehen möchten. Zu ihrer Darstellung sind einige Vorbemerkungen notwendig.

Die Bohrsche Theorie schreibt die Emission der Bandenspektren den Molekülen zu. Die Theorie der Bandenstrahlung, die von Schwarzschild, Heurlinger und insbesondere Lenz entwickelt ist, berücksichtigt beim Übergange eines Quantenzustandes des Moleküls in einen andern außer der Änderung des Drehimpulses eines Elektrons auch die Änderungen der Rotations- und Schwingungsquanten der Atome des Moleküls. Die gesamte Änderung der Energie zwischen Anfangs- und Endzustand ergibt die Frequenz des ausgestrahlten oder absorbierten Lichtes nach der $h\nu$-Beziehung. Benutzt man auf diese Weise die $h\nu$-Gleichung als reine Energiebilanzgleichung, so kann man, ohne von der Art des Übergangs eines Quantenzustands in den andern etwas zu wissen, die Bandenabsorption bzw. -emission wiedergeben. Führt man dem Molekül die Energie durch ein stoßendes Elektron zu, das dabei seine ganze kinetische Energie an das Molekül abgeben soll, so darf man nicht ohne weiteres die Gültigkeit der Energiebilanzgleichung annehmen, ohne zu überlegen, ob es für diesen Prozeß einen Weg gibt, der mit dem Impulssatz nicht im Widerspruch steht. Wir möchten das mit einem Beispiel belegen. Der Impulssatz wird verletzt, wenn man annimmt, daß durch den Stoß eines Elektrons, dessen kinetische Energie gerade den für den Energieumsatz verbrauchten Wert besitzt, durch direkte Energieabgabe an die Atome des Moleküls das Rotationsquantum geändert würde; vielmehr kann ein solcher Prozeß nur vor sich gehen, wenn das stoßende Elektron seine Energie an ein Elektron des Moleküls abgibt und die Umlagerung der aufgenommenen Energie innerhalb des Moleküls in einem weiteren Akte erfolgt. Es mag fürs erste müßig sein, den verschiedenen Möglichkeiten, wie eine solche Umlagerung innerhalb des Moleküls stattfinden kann, nachzugehen. Es hat sich aber gezeigt, daß man durch formale Anwendung der $h\nu$-Beziehung zu Fehlschlüssen kommen kann. Hierhin gehört die Vermutung, daß H_2 durch Elektronenstöße von 3—4 Volt dissoziiert werden könne, ohne daß das Molekül eine Absorptionslinie besitzt, die diesem Energiequant entspricht. Die thermische Dissoziation, die durch Molekülstöße erfolgt, ist nicht analog der durch Elektronenstöße erfolgenden zu behandeln. Man kann nicht einmal mit Bestimmtheit behaupten, daß jeder Absorptionslinie eines Bandenspektrums ein unelastischer Elektronenstoß entspricht. Wegen der großen Häufung der Bandenlinien ist auch eine experimentelle Lösung dieser Frage wohl kaum ausführbar. Von Interesse ist jedoch in diesem Zusammenhang die unter „Methoden" abgedruckte Kurve des Stickstoffs aus der Dissertation von Brandt. Hier treten im lichtelektrischen Teil Knicke im Abstand von einigen Hundertstel Volt auf, woraus sich (auf A.E. umgerechnet) entnehmen läßt, daß Quantensprünge in einem Frequenzenabstand, wie er den Schwingungsquanten der Stickstoffatome entspricht, angeregt werden können. Eine Identifizierung dieser Knicke mit einem bestimmten Teil des Stickstoffbandenspektrums ist aus experimentellen Gründen nicht möglich, da man nur kleine Gebiete in Sprüngen von $^1/_{100}$ Volt durchmessen und somit die Absolutwerte der Spannungen nicht genau fixieren kann.

Die oben angeschnittene Frage des Zusammenhangs der Dissoziation des Moleküls mit der Anregung des Moleküls durch Elektronenstoß ist jedoch unseres Ermessens aus dem Verhalten der spektralen Emission in Entladungsröhren mit Sicherheit zu beantworten. Betrachten wir als Beispiel den Wasserstoff. Er ist in molekularer Form durchsichtig bis zum Wellenlängengebiet von ca. 1200 A., wo die bandenartige Absorption einsetzt. Das optisch erforschte langwelligere Viellinienspektrum entspricht also einer höheren Anregungsstufe des Moleküls. Dieser Schluß ist in bester Übereinstimmung mit direkten Messungen der

Anregungsspannung des Viellinienspektrums, die Werte von 17—18 Volt ergeben, während sich aus der Absorptionsgrenze von 1200 A. ein Wert von nur ca. 10 Volt ergibt. Da die thermisch bestimmte Dissoziationsarbeit von 80—100 Kilokalorien pro Mol (entsprechend der Energie eines 3,5—4-Voltstrahles) viel kleiner ist als die genannten Energiebeträge, so sieht man, daß man einem Molekül durch Lichtabsorption oder durch Elektronenstoß eine viel größere Energie, als zu seiner Dissoziation notwendig ist, zuführen kann, ohne daß es seinen Molekülcharakter verliert. Andrerseits zeigt ebenfalls direkte optische Beobachtung, bei Spannungen etwas oberhalb 18 Volt das Auftreten der dem Atom zugehörigen Balmerlinien in einer Stärke, die es als ganz unmöglich scheinen läßt, daß nur die wenigen beim Entladungsprozeß gebildeten H-Atome im freien Zustande von den 18-Volt-Strahlen getroffen und zum Leuchten angeregt werden. Derselbe scheinbare Widerspruch tritt auf bei Beobachtung des Viellinien- und Serienspektrums des Wasserstoffs im Entladungsrohr. Z. B. beobachtet Merton beide Spektra nebeneinander in einem Gemisch von viel Helium (ca. 40 ccm) mit sehr wenig Wasserstoff. Bemerkenswert ist, daß dabei die Balmerserie bis zum 13. Gliede beobachtet wird. Da im Helium unter diesen Bedingungen die Geschwindigkeit der Elektronen nur bis zu einer Geschwindigkeit von 20-Volt-Strahlen ansteigt, so müssen offenbar Strahlen dieser Geschwindigkeit die zur Dissoziation des Moleküls nötige Energie vermehrt, um die zur Anregung der Balmerlinien am Atom verbrauchte in einem Zuge dem Molekül zuführen. Der hierzu notwendige Energiebetrag läßt sich berechnen. Er beträgt für die Dissoziationsarbeit 3,5—4 Volt und für die ganze Balmerserie 13,6 Volt, so daß als Summe sich ein Wert von 17—18 Volt in ungefährer Übereinstimmung mit den direkten optischen Methoden ergibt. Dieses Nebeneinanderauftreten der beiden Spektren klärt sich auf, wenn man annimmt, daß das Molekül eine viel höhere Energie, als zur Dissoziation notwendig ist, aufnehmen kann, ohne daß es in seine Bestandteile zerfallen muß. Vielmehr kann es, wenn keine Störung vorliegt, die aufgenommene Energie als Bandenstrahlung reemittieren und in seinen Normalzustand zurückkehren. Tritt aber, nachdem die Anregung des Moleküls stattgefunden hat, vor der Reemission der Energie eine Störung durch einen Zusammenstoß mit einem Atom oder Molekül ein, so wird die aufgenommene Energie zur Dissoziation in Atome und zur Anregung eines der Atome verwandt. Diese Auffassung ist vollkommen identisch mit der von Stern und Volmer für photochemische Zerfallsreaktionen vertretenen; auch hier führt die aufgenommene Energie $h\nu$ nur dann zu dem vom Einsteinschen Äquivalenzgesetz geforderten Molekülzerfall, wenn das angeregte Molekül durch einen Zusammenstoß eine Störung erfährt. Bei dem vorliegenden Problem läßt sich aus dem starken Auftreten der ganzen Balmerserie unter den oben beschriebenen Bedingungen die Folgerung ziehen, daß die Summe: Dissoziationsarbeit + Ionisierungsarbeit eines Atoms kleiner ist als die Ionisierungsarbeit des H_2-Moleküls, die den Übergang von H_2 zum H_2^+-Ion bewerkstelligt. Als Gleichung geschrieben heißt diese Behauptung $D + J_H < J_{H_2}$. Wäre nämlich $J_{H_2} < D + J_H$, so würde bei dieser kleineren Spannung dem Molekül ein Elektron völlig entrissen, und es wäre die Umlagerung des erregten Moleküls in den Zustand eines normalen Atoms und eines, das bis zur Grenze der Ionisation erregt ist, nicht möglich[1]). Eine Bildung von H_2^+, also Ionisation ohne Zerfall des Moleküls, sollte bei größeren Elektronengeschwindigkeiten auftreten, da dann dem H_2-Molekül das Elektron durch den Stoß so schnell entrissen wird, daß keine Umlagerung stattfinden kann. Dieser Schluß bestätigt sich durch Resultate von Dempster; er wies nach, daß in Kanalstrahlenröhren, bei denen die Ionen durch Elektronenstrahlen von einigen Hundert Volt Geschwindigkeit hervorgerufen waren, nur H_2^+ im Kanalstrahlenbündel auftrat. Ließ er jedoch die einmal gebildeten Kanalstrahlen mit Molekülen zusammenstoßen, so trat sekundär die Bildung von H^+ und H_3^+ ein. Nach diesen Überlegungen können wir direkt hinschreiben, welche Resultate man von Elektronenstoßuntersuchungen erwarten sollte. Die erste Lichtanregung sollte, berechnet aus der beginnenden Undurchsichtigkeit des H_2-Gases bei ca. 1200 bis 1300 A. durch Elektronenstöße von 10 bis 11 Volt, verursacht werden. Ferner sollte sich in der lichtelektrischen Kurve der Wert der Dissoziationsarbeit + Anregungsspannung des ersten Gliedes der Lymanserie markieren. Setzen wir für die Dissoziationsarbeit den Langmuirschen Wert $D = 84000$ kal entsprechend 3,6 Volt ein, so ergibt das einen

1) Das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs, das Stark gefunden hat, und das nach ihm und anderen bei etwas kleineren Anregungsspannungen als das Viellinienspektrum emittiert wird, ist in dieser Diskussion nicht erwähnt, da die obigen Schlüsse dadurch nicht berührt werden, und da eine Untersuchung, die seine Einreihung in die quantentheoretischen Überlegungen als möglich erscheinen läßt, zurzeit im Gange ist.

Knick der Kurve bei $3,6 + 10,2 = 13,8$ Volt. Dissoziation + Ionisation eines Atoms sollte die erste Ionisationsstufe bei

$$D + J_H = 3,6 + 13,6 = 17,2 \text{ Volt}$$

ergeben. Ferner sollte eine weitere Ionisationsstufe für $J_{H_2}+$ auftreten, deren Lage sich nicht im voraus genau angeben läßt. Die folgende Tabelle ermöglicht einen Vergleich dieser Überlegungen mit den in H_2 gefundenen neueren Resultaten.

Tabelle VIII.

Anregungsspannungen		Starke Ionisation	Schwache Ionisation		Beobachter und Methode
10,8 Volt	13,4 Volt	15,8 Volt	—		Davies u. Goucher nach ihrem Verfahren.
11 „	—	15,7 „	—		Bishop, Lenardschaltung.
11 „	13,6 „	17,1 „	11 Volt	30,45 Volt	Franck, Knipping u. Krüger, Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
10,6 „	—	16,4 „	13,1 Volt		Mohler u. Foote, Lichtelektr. Verfahren, Methode Davies u. Goucher und unel. Stoß II.
10,5 „	13,9 „	16,9 „	14,4 „		Horton u. Davies, Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
—	—	15,8 „	—		Found, Verstärkerrohr.
10,8 „	13,4 „	15,8 „	11 „		Compton u. Olmstead, Lenardschaltung mit drehbarem Auffänger.

Eine Kritik dieser Resultate scheint aus rein experimentellen Gründen notwendig. So möchten wir der Vermutung Ausdruck geben, daß die unter „schwache Ionisation" aufgezählten Werte bis auf den bei 30,45 Volt beobachteten alle vorgetäuscht sind durch die mehrfach erwähnten Einflüsse der sekundären Ionisation. Die 11-Volt-Werte liegen überdies so nahe bei dem Wert der Ionisierungsspannung für Quecksilberdampf, daß es trotz der Anwendung aller Vorsichtsmaßregeln möglich ist, daß minimale Mengen von Quecksilberdampf, die sehr schwer zu vermeiden sind, die bei dieser Spannung beobachtete Ionisation verursacht haben. Vermutlich kommt eine schwache Amalgamierung der Platinelektroden zustande während der Zeiten, in denen keine flüssige Luft am Rohrsystem liegt. Der Ionisationswert bei 30,45 Volt, der nach der lichtelektrischen Schaltung gemessen ist, scheint uns als solcher Vertrauen zu verdienen, jedoch möchten wir die Deutung, die wir selber dieser Ionisierungsstufe gegeben haben, nämlich den Zerfall eines H_2-Moleküls in 2 positive Atomionen und 2 Elektronen, nunmehr als theoretisch unmöglich verwerfen. Diese Deutung wurde durch eine Zahlenübereinstimmung nahegelegt. Ob man diese Ionisierungsstufe als Ionisierungsarbeit, die zum Übergang von H_2 in H_2+ verbraucht wird, ansehen darf, wird erst nach Berechnung eines guten Molekülmodells des Wasserstoffs entschieden werden können; auffällig hoch ist jedenfalls dieser Wert, so daß man höchstens an eine Bildung von stark angeregtem H_2+ denken könnte. Für seine Realität sprechen ältere Beobachtungen von Neubert, der Schichtpotentialdifferenzen im Wasserstoff von ca. 31 Volt gefunden hat und diese als Ionisierungsarbeit zur Bildung von H_2+ gedeutet hat. Jedoch wird man die Unsicherheit der Theorie der Schichtenbildung in Betracht ziehen müssen. Die unter „Strahlung" vermerkten Werte der Tabelle stimmen mit den theoretischen Schlüssen innerhalb der Beobachtungsfehler überein. Bei der Hauptionisationsstufe ist eine solche Übereinstimmung nur bei den Krügerschen Messungen vorhanden. Wir halten diese Messung für die genaueste, da sie unter Benutzung von Helium als Eichgas durchgeführt wurde. Die übrigen Werte liegen z. T. merkwürdig tief, vielleicht ist dieses Resultat zu erklären durch unsern obigen Hinweis, daß man zu kleine Werte für die Ionisierungsspannung erhält, wenn man auf das erste Anzeichen von Ionisation anstatt auf den starken Knick in der Stromspannungskurve achtet (s. Quecksilberkurve). Als Gesamtresultat muß man angeben, daß weitere Untersuchungen[1]) im Wasserstoff noch nötig sind, daß jedoch die Resultate zum mindesten für die prinzipielle Möglichkeit sprechen, durch Elektronenstoßmessungen zu sauberen Werten für die Dissoziationsarbeit der Moleküle zu gelangen.

Den sicheren Nachweis hierfür erbrachte neuerdings eine Arbeit von Smyth und Compton[2]) über die Ionisation des Joddampfes. Diese Autoren fanden in Joddampf bei normaler Temperatur eine schwache Ionisationsstufe bei 8 Volt und eine starke bei 9,4 Volt. Da unter der Einwirkung des Glüh-

1) Vielleicht ist auch der Zerfall von H_2 in $H+$ und $H-$ in Erwägung zu ziehen, der wegen der Elektronenaffinität des H-Atoms von ca. 1,5 Volt bis ca. 15,6 Volt zu erwarten wäre, worauf mich freundlichst Herr Haber gesprächsweise aufmerksam machte.

2) Smyth u. Compton, Phys. Rev. 1921.

Tabelle IX.

Aus der V. Gruppe des periodischen Systems.

Gas	Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Autor und Methode
Stickstoff	7,5 Volt	—	Franck u. Hertz (alter Bericht), Lenardschaltung.
	11,8 „	—	F. Maier (alter Bericht), Lenardschaltung.
	7,7 „	—	Hughes u. Dixon (alter Bericht), Lenardschaltung.
	7,5 „	—	Bishop (alter Bericht), Lenardschaltung).
	7,4 und 9 Volt.	ca. 18 Volt	Davies u. Goucher, Phys. Rev. **13**, 1, 1919. Lenardmethode.
	7,4 Volt	—	Smyth, Phys. Rev. **14**, 409, 1919. Lenardmethode.
	8,18 „	16,9 ± 0,5 Volt	Mohler u. Foote, Journ. Opt. Soc. Amer., Vol. II (2), 1920. Lichtelektr. Schaltung und unel. Stoß II.
	7,2 und 8,5 Volt	17,75 ± 0,3 Volt 25,4 · 30,7 Volt schwächer	E. Brandt, Berliner Dissertation. Lichtelektr. Schaltung und Stoß II usw.
	—	ca. 16 Volt	Found, loc. cit. Verstärkerrohr.
Phosphor	5,8 ± 0,1 Volt	13,3 ± 0,5 Volt	Mohler u. Foote, wie bei N_2.
Arsen	4,7 Volt	11,5 Volt	Foote, Roguley u. Mohler, Phys. Rev. **13**, 59, 1919. Unel. Stoß, Charakteristik.

Aus der VI. Gruppe des periodischen Systems.

Gas	Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Autor und Methode
Sauerstoff	9 Volt	—	Franck u. Hertz, wie bei N_2.
	9,5 „	—	Mayer, wie bei N_2.
	9,2 „	—	Hughes u. Dixon, wie bei N_2.
	9,0 „	—	Bishop, wie bei N_2.
	7,91 „	15,5 Volt	Mohler u. Foote, wie bei N_2.
Schwefel	4,0 Volt 7,8 + 0,2 Volt	12,2 ± 0,5 Volt	Mohler u. Foote, Phys. Rev. **15**, 321, 1920. Unel. Stoß II, lichtelektr. Schaltung.

Aus der VII. Gruppe des periodischen Systems.

Jod siehe oben im Text.

Einige andere Elemente ohne Unterscheidung zwischen Lichtanregung und Ionisation siehe alter Bericht.

Aus der VIII. Gruppe des periodischen Systems.

Edelgase siehe oben im Text.

Gasförmige Verbindungen.

Einige Gase wie bei der Gruppe VII, siehe alter Bericht, neu sind:

Gas	Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Autor und Methode
Kohlenoxyd	—	14,5 Volt	Stead u. Gossling, wie bei N_2.
	—	15 „	Found, wie bei N_2.
	6,4 Volt 12,1 13,6 19,1 21,9 24,6	10,1 und 14,3 Volt	Foote u. Mohler, Phys. Rev., März 1921, wie bei N_2.
Zinkäthyl	ca. 7 Volt	12 Volt	„ „
Zinkchlorid	—	12,9 „	„ „
Mercurichlorid	—	12,1 „	„ „

drahtes eine schwache Dissoziation des Jods wahrscheinlich war, so untersuchten sie den Joddampf bei so hohen Temperaturen, daß die Hauptmenge dissoziiert war. Es ergab sich, daß die 8-Volt-Stufe in ihrer Stärke proportional mit dem Dissoziationsgrad anwuchs, während die 9,4-Voltstufe entsprechend schwächer wurde. Die Autoren schreiben daher die Ionisation bei 8 Volt einer Bildung von Jodatomionen zu, während sie die 9,4-Voltstufe als Bildungsarbeit eines Jodatomions und eines Jodatoms, also als $D + J_J$ bezeichnen. Die Differenz beider Stufen 1,4 Volt ließ sich genau ermitteln, unabhängig von möglichen Fehlern der Absolutwerte der Spannung. Sie stimmt genau mit der thermisch bestimmten Disso-

ziierungsarbeit des J_2-Moleküls überein. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß Smyth und Compton, angeregt durch eine frühere Arbeit von Franck und Westphal[1]), den Versuch gemacht haben, die Ionisierungsarbeit von fluoreszierendem Joddampf festzustellen. Sie finden in der Tat eine Herabsetzung dieser Arbeit durch die Fluoreszenz. Wir haben jedoch wiederum wegen der sekundären Ionisation Bedenken, daß das Resultat richtig gedeutet sei, besonders da es sehr unwahrscheinlich scheint, daß genügend viel Moleküle sich gleichzeitig im Anregungszustand befinden, um eine merkliche Ionisierungsstufe dieser Molekülgruppe zu ergeben. Joddampf ist außerdem von Mohler und Foote[2]) untersucht worden; sie erhalten Ionisation bei $10{,}1 \pm 0{,}5$ Volt. Ferner liegt ein unelastischer Stoß bei $2{,}34 \pm 0{,}2$ Volt, der von ihnen als Resonanzspannung bezeichnet ist, unseres Ermessens jedoch nur eine Festlegung eines Absorptionsgebietes des Joddampfes nach der $h\nu$-Beziehung ergibt.

Weitere Angaben über die Resultate, die in mehratomigen Gasen erhalten sind, sollen in Form von Tabellen folgen. (Vgl. Tab. IX.)

Aus den Tabellen geht hervor, daß ein Teil der Resultate, kenntlich durch die Übereinstimmung der Mehrfachbestimmungen, recht zuverlässig erscheint, besonders halten wir den Wert für die Ionisierungsspannung des Stickstoffs von E. Brandt, da Helium als Eichgas verwandt wurde, für gut. Ein andrer Teil der Resultate hat wohl nur informatorische Bedeutung. Deutungen dieser Resultate, die verschiedentlich vorgeschlagen sind, wollen wir hier wegen ihrer Unsicherheit nicht bringen.

1) Franck u. Westphal, Verh. d. D. phys. Ges. 1912, S. 159.
2) Mohler u. Foote, Phys. Rev. **15**, 321, 1920.

Zusammenfassung.

Als wesentliche Fortschritte auf dem Elektronenstoßgebiete seit dem Erscheinen des letzten Referats in dieser Zeitschrift betrachten wir:

1. Die große Zahl der Bestimmungen von Anregungs- und Resonanzspannungen in einatomigen Gasen, die eine so gute Übereinstimmung mit der Bohrschen Deutung der Seriengesetze ergeben haben, daß sie in ihrer Gesamtheit eine gute Methode zur Bestimmung des Wertes von h darstellen.

2. Die Ergänzung und Kontrolle optischer Methoden zur Festlegung von Serienbeziehungen und das Auffinden von neuen Seriengliedern in den Spektralgebieten, die den optischen Methoden schwer oder gar nicht zugänglich sind.

3. Die Möglichkeit der direkten Prüfung der Richtigkeit von Atommodellen.

4. Die Feststellung metastabiler angeregter Atome.

5. Den Nachweis von Zusammenhängen von Dissoziation und Ionisation von mehratomigen Gasen.

Göttingen, April 1921.

(Eingegangen 6. Mai 1921.)

Druckfehlerberichtigung.

Seite 446, 2. Spalte sind in der 1. und 3. Zeile die Worte Parhelium und Orthohelium zu vertauschen.

Der Satz heißt also: Landé hat das Spektrum des Parheliums einem Heliumatom zugeschrieben, das gekreuzte Elektronenbahnen hat, das des Orthoheliums einem Helium mit komplanaren Elektronenbahnen.

BESPRECHUNGEN.

E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. In zwei Bänden. Erster Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik und Optik. Vierte vermehrte und verbesserte Auflage. Herausgegeben von W. Hillers unter Mitarbeit von H. Starke. gr. 8°. XVI u. 1011 S. Mit 1049 Figuren im Text, 10 Figuren auf 2 farbigen Tafeln u. 1 Titelbild. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1920. Geh. M. 16.50, geb. M. 18.60 u. Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen[1]).

Das rühmlichst bekannte Buch von Grimsehl ist in vierter Auflage erschienen. Ursprünglich hervorgegangen aus dem Unterricht an der Oberrealschule und deren Zwecken dienend, hat das Buch eine eigenartige Entwickelung durchgemacht, veranlaßt dadurch, daß es hauptsächlich von Studenten und Lehrern benutzt wurde. Immer mehr hat es sich den Bedürfnissen seines Leserkreises angepaßt und ist dadurch jetzt zu einem Lehrbuch geworden, das nur noch für das Hochschulstudium in Betracht kommt. Besonders fällt einem dieser Entwicklungsgang bei der vorliegenden Ausgabe auf. Da die neueren physikalischen Anschauungen und Lehren aufgenommen, aber der Umfang des Buches nicht wesentlich vermehrt werden sollte, so mußten Kürzungen eintreten. So sind z. B. die Kapitel fortgefallen, in denen die Elemente der Differential- und Integralrechnung behandelt wurden. Da ferner in den neu hinzugekommenen Abschnitten sowie in den Neubearbeitungen mit geringerer Zurückhaltung von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht wird, so ist jetzt diese Rechnungsmethode als mehr oder weniger bekannt vorausgesetzt.

1) Dritte Auflage: s. diese Zeitschr. **18**, 18, 1917.

Sehr viel tiefer gegenüber früher wird die Wärmelehre dargestellt. Aus der Feder Starkes stammen die sehr guten Kapitel: Kreisprozesse, Verallgemeinerung des Carnotschen Prinzips, der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie, Entropie und Wahrscheinlichkeit sowie das le Chateliersche Prinzip. Ferner ist die Darstellung der kinetischen Wärmetheorie eine ausgezeichnete. Um das jetzige Niveau des Buches zu charakterisieren, seien einige der hier ausführlicher behandelten Fragen genannt: Satz der gleichmäßigen Energieverteilung im thermodynamischen Gleichgewicht, Maxwellsches Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, Theorie der Energiequanten. Man sieht: der alte „Grimsehl" ist viel gelehrter geworden.

Auch sonst ist eine große Zahl Verbesserungen und Erweiterungen eingetreten, wobei aber der Umfang des Buches doch nur um etwa zwei Druckbogen gestiegen ist.

Eine Bemerkung sei aber gemacht. In der Vorrede wird gesagt, daß die Relativitätstheorie (die im zweiten Bande gebracht werden soll?) eine geänderte formalere Auffassung des Kraft- und Massebegriffes verlangt. „Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß die Begriffe der Masse und Trägheit eine Herausarbeitung mehr im Sinne dieser Theorie erfahren". Das scheint mir, wenigstens bei der Masse, nicht geglückt zu sein. Wenn in einem Buche, wie in dem von Grimsehl, jetzt zu lesen ist: „Die Masse bildet ein Maß für die Menge der Materie", so geht das einfach nicht. Allein die Definition der Masse als dem Proportionalitätsfaktor in der Newtonschen Bewegungsgleichung dürfte zulässig sein. Der Massebegriff, wie er in § 8 dargestellt wird, gibt nur die schwere Masse, von der trägen Masse wird nirgendwo gesprochen (auch nicht bei Behandlung der Bewegungsgleichung). Da die Fliehkräfte bei der Erdumdrehung eingehender behandelt werden, so wäre hier der gegebene Ort gewesen, um auf die grundlegenden Versuche von Eötvös über die Gleichheit von träger und schwerer Masse einzugehen, diese Versuche, die eine so fundamentale Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie spielen.

Im allgemeinen hat die Gleichartigkeit des Buches gelitten. Es besteht nicht mehr so ganz die harmonische gegenseitige Durchdringung der experimentellen Ergebnisse, abgeleitet aus durchsichtigen Versuchen, mit der Theorie. Die neuen, mehr theoretischen Abschnitte sind noch nicht vollständig in den ursprünglichen Organismus des Buches aufgenommen, sie wirken noch etwas als Fremdkörper, wenn man sie mit der alten Grimsehlschen Darstellung vergleicht.

Aber trotzdem: das Buch ist ausgezeichnet. Es gibt kein ähnliches oder besseres, das in diesem Umfange „höhere" Experimentalphysik bietet; es kann allen Studierenden, die sich nur etwas eingehender mit der Physik befassen wollen, auf das beste empfohlen werden. Ebenso wird auch der Lehrende aus dem Werke viel Anregung schöpfen können.

Edgar Meyer.

N. Bohr, Abhandlungen über Atombau aus den Jahren 1913—16. Autorisierte deutsche Übersetzung mit einem Geleitwort von N. Bohr. gr. 8°. XIX., 155 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1921. M. 20.—.

Im Verlage von Friedr. Vieweg & Sohn ist eine Zusammenfassung von Abhandlungen von N. Bohr erschienen, die sich im Phil. Mag. und in der Nature in den Jahren 1913—16 finden. Einem jeden, der sich mit der modernen Atomtheorie beschäftigt, wird dieses Buch außerordentlich willkommen sein, zumal der Übersetzer, Herr Dr. Stintzing, den Wortlaut und Gedankeninhalt des englischen Originals überaus geschickt und treu wiedergegeben hat. Einen ganz besonderen Wert aber bekommen die Abhandlungen dadurch, daß N. Bohr ihnen ein treffliches Geleitwort vorausgeschickt hat. In ihm erklärt er uns, weshalb er sich entschlossen hat, die Abhandlungen nochmals hinausgehen zu lassen, daß sich seine Ansichten über diese und jene Einzelheit geändert haben; vor allem erkennt man daraus den Werdegang der Bohrschen Ideen über den Atombau. Von großem Werte ist die Abhandlung X: „Die Anwendung der Quantentheorie auf das periodische System". Diese sollte im Aprilheft 1916 im Phil. Mag. erscheinen, blieb aber unveröffentlicht, da der Verfasser Kenntnis von Sommerfelds Abhandlungen in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie (1915) damals erhielt, seine Abhandlung daraufhin umarbeiten wollte, dann aber durch eine Folge von bedeutsamen Arbeiten veranlaßt wurde, die geklärte Darstellung seiner Anschauungen über die verschiedenen für die Frage des Atombaues in Betracht kommenden Anwendungen der Quantentheorie in zwei größeren Abhandlungen der Kopenhagener Akademie (1918) erscheinen zu lassen. Die genannte Schlußabhandlung X enthält die Fundamente der letzten Arbeiten — Eine Fülle von Anregungen und Gedanken bieten die gesammelten Abhandlungen von N. Bohr aus den Jahren 1913—16; und deshalb sind sie jedem Physiker zu empfehlen. — Zu begrüßen wäre sicherlich, wenn sich N. Bohr entschließen könnte, seine schon projektierte Einführung in seine Atomtheorie für Chemiker erscheinen zu lassen. K. Bergwitz.

Tagesereignisse.

Die staatliche Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin W 35, Potsdamer Straße 120, wird in der Zeit vom **4. bis 15. Oktober 1921 einen mathematisch-naturwissenschaftlichen Ferienkursus** abhalten zu Berlin für Lehrer höherer Schulen. Sie versendet ein ausführliches Programm der in Aussicht genommenen Kurse.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Adolf Smekal für das Gesamtgebiet der Physik, der Studienrat am Johannesgymnasium in Breslau Professor Dr. Ferencz Jüttner an der Universität Breslau für Theoretische Physik, an der Universität Berlin Dr. Gerhard Hettner für Physik.

Ernannt: Der Wirkl. Admiralitätsrat Professor Dr. Ernst Kohlschütter in Berlin zum ord. Professor der Geodäsie an der Universität Berlin, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br. Dr. Emil Fromm zum ord. Professor der Chemie an der Universität Wien.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Physik an der Universität Würzburg Dr. Johannes Stark.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. | 1. September 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 19 am 24. August 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie.

Von H. Weyl.

1. Nach der „erweiterten Relativitätstheorie"[1]) drückt sich das metrische Feld in zwei Fundamentalformen aus, einer quadratischen und einer linearen

$$g_{ik}dx_i dx_k, \quad \varphi_i dx_i,$$

welche durch die „Eichinvarianz" miteinander verkoppelt sind. Die Metrik ist eine Struktur des kontinuierlichen Feldes; darum haben die zu ihrer Beschreibung dienenden Begriffe des „Vektors" und der „Strecke" an sich nichts mit materiellen Maßstäben zu tun, wenn sich natürlich auch die metrische Struktur des Äthers an dem Verhalten der materiellen Körper nach Maßgabe der Naturgesetze kundgeben wird. — Wir gehen aus von der folgenden, durch unsere physikalischen und astronomischen Erfahrungen mit großer Wahrscheinlichkeit sichergestellten Tatsache: Ein Wasserstoff- und ein Sauerstoffatom etwa mögen jetzt, wo sie sich nebeneinander an der gleichen Feldstelle P befinden, ein bestimmtes Massenverhältnis 1,008 : 16,000 besitzen; sie bewegen sich getrennt voneinander während langer Zeit in der Welt und treffen in einem viel späteren Weltpunkt P' von neuem zusammen; wir finden daselbst genau das gleiche Massenverhältnis wie in P. Wie kann man diese Tatsache verstehen? Mir scheint, die einzig mögliche Antwort ist die, welche sich dem Unvoreingenommenen ohne weiteres aufdrängt: da die beiden Atome während ihrer Geschichte offenbar nicht dauernd merklich aufeinander einwirken, so muß die Wiederkehr des gleichen Massenverhältnisses darauf beruhen, daß jede Atommasse für sich zu einer gewissen Feldgröße von der Dimension einer Länge (= Masse) ein bestimmtes Verhältnis hat, auf das sie sich in jedem Augenblick neu einstellt[1]). Die der Einsteinschen Theorie zugrunde liegenden Annahmen: daß die Streckeneinheit an einer Feldstelle P zwar willkürlich ist, eine in P gewählte Strecke aber an sich und unmittelbar in die Ferne eine ihr „gleiche" an jeder andern Feldstelle P' bestimmt und daß die Massen und materiellen Längen dieser Fernbestimmung folgen, scheinen mir kein physikalisch mögliches Bild von dem Mechanismus der Übertragung zu bieten, weil hier eine Feldgröße fehlt, auf die sich die Atommasse einstellen könnte. Das wird auch nicht besser durch die modifizierte „infinitesimale" Fassung, zu welcher das Prinzip von der Relativität der Größe zwingt und welche besagt: daß eine Strecke in P durch kongruente Verpflanzung nach einem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' in eine bestimmte Strecke in P' übergeht und daß durch ein besonderes Naturgesetz, das Gesetz der verschwindenden Streckenkrümmung $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$, die Integrabilität der Streckenübertragung (Unabhängigkeit vom Wege) garantiert ist.

Welches aber ist die Feldgröße, auf welche sich die Masse in einem konstanten Verhältnis einstellt? Darauf gestattet schon die Einsteinsche Theorie in ihrer letzten kosmologischen Fassung die Antwort zu geben: der Krümmungsradius des Feldes. Es sei kein elektromagnetisches Feld vorhanden. R_{ik} seien die Komponenten des Krümmungstensors zweiter Stufe, $R_i^i = R$ die skalare Krümmung, g die

1) Siehe die Darstellung in §§ 35, 36 meines Buches „Raum, Zeit, Materie" (4. Aufl., Springer 1921; im folgenden als RZM zitiert).

1) Darüber, daß die Masse ihrem Wesen nach eine Länge ist, vgl. den gleichzeitig mit dieser Note in den Ann. d. Phys. erscheinenden Aufsatz des Verf. über „Feld und Materie" (im folgenden mit FM zitiert); die dort auseinandergesetzte „Agenstheorie" der Materie wird hier zugrunde gelegt. Am gleichen Ort habe ich genauer begründet, warum die Erhaltung der Masse auf Einstellung und nicht auf Beharrung beruhen muß.



negative Determinante der g_{ik}. Verwandlung eines lateinischen in den entsprechenden deutschen Buchstaben bedeutet Multiplikation mit $\sqrt{g}$, dx das Integrationselement $dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3$. Die Einsteinsche Wirkungsdichte des Gravitationsfeldes drückt sich mit Hilfe der Christoffelschen Dreiindizes-Symbole so aus:

$$\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} i r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k s \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r s \\ s \end{Bmatrix}\right).$$

Die Gravitationsgesetze aber lauten, als Variationsprinzipe und als Differentialgleichungen formuliert:

I. $\delta\int\mathfrak{G}\,dx = 0$ — $R_{ik} = 0$.

II. $\delta\int(\mathfrak{G} + \tfrac{1}{2}\lambda\sqrt{g})\,dx = 0$ — $R_{ik} = \lambda g_{ik}$.

III. $\delta\int\mathfrak{G}\,dx = 0$ bei der Nebenbedingung $\delta\int\sqrt{g}\,dx = 0$ — R_{ik} proportional zu g_{ik}, $R = \text{const.}$

I. ist die ursprüngliche Fassung; in II. ist das eine universelle Konstante λ enthaltende kosmologische Glied hinzugetreten. Um der Schwierigkeit zu entgehen, daß zwischen λ und der in der Welt vorhandenen Gesamtmasse eine gewisse prästabilierte Harmonie bestehen muß, wenn das kosmologische Glied wirklich das in der Welt im Großen herrschende Massengleichgewicht erklären soll, griff Einstein drittens zu der Annahme[1]), daß der Wert von λ durch die Naturgesetze nicht vorgeschrieben sei; dem entspricht die Formulierung III. δ bedeutet überall eine Variation des metrischen Feldes, die außerhalb eines endlichen Bereichs verschwindet. Die Gleichung $R = \text{const.}$ unter III. rechtfertigt unsere Behauptung.

2. Auch in dem metrischen Felde der erweiterten Relativitätstheorie mit ihrer infinitesimalen, im allgemeinen nicht integrablen Streckenübertragung gibt es eine skalare Krümmung

$$\lambda = R - \frac{3}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} - \frac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i).$$

Sie ist ein Skalar vom Eichgewicht -1, hat also die Dimension l^{-2} (l = Länge). Nehmen wir als Wirkungsgröße das natürliche, d. h. mittels des Krümmungsradius als Längeneinheit gemessene Volumen an: $\int\lambda^2\sqrt{g}\,dx$, so ergeben sich genau die Einsteinschen Gesetze in ihrer letzten Fassung. Wir setzen voraus, daß λ negativ ist und normieren den Absolutwert der g_{ik} durch die Gleichung $\lambda = -1$; wir messen mit andern Worten ds am Krümmungsradius. Das Wirkungsprinzip geht dann über in ein solches mit dem Integranden[1])

$$\mathfrak{G} + \tfrac{1}{4}\sqrt{g}\,\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\};$$

die g_{ik} und φ_i dürfen dabei frei variiert werden (ohne bei der Variation an die Nebenbedingung $\lambda = -1$ gebunden zu sein). Die Variation liefert daher in der Tat die Beziehungen:

R_{ik} proportional zu g_{ik}, $R = \text{const.}$, $\varphi_i = 0$.

Die beiden letzten Gleichungen gehören zusammen; ihre invariante Form ist

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} - \lambda\varphi_i = 0.$$

Sie drücken aus, daß die Übertragung einer Strecke durch kongruente Verpflanzung genau so vor sich geht wie durch Einstellung auf den Krümmungsradius; das zieht die Integrabilität der kongruenten Verpflanzung nach sich. Während so die Gesetze mit den Einsteinschen genau übereinstimmen, sieht man doch hier, wie die durch die Einsteinsche Auffassung auf den Kopf gestellten Begriffe in ihrer natürlichen Ordnung sich rangieren. Einstein sagt: Die Maßstablängen und die Frequenzen der Atomuhren folgen einer kongruenten Verpflanzung; mit ihrer Hilfe wird der Absolutwert des ds normiert (was nur möglich ist wegen der stillschweigend vorausgesetzten oder aus dem Verhalten der materiellen Körper abgelesenen Integrabilität der Streckenübertragung); bei solcher Normierung stellt sich der Krümmungsradius als konstant heraus. Ich sage: Maßstablängen und die Perioden der Atomuhren bestimmen sich durch Einstellung auf den Krümmungsradius; mit Hilfe des Krümmungsradius als Längeneinheit wird das ds normiert (diese Normierung ist stets möglich); als eine Folge der geltenden Naturgesetze kommt dann heraus, daß die kongruente Verpflanzung sich ebenso vollzieht, wie es die Einstellung bedingt und daher integrabel ist. Außerdem führt diese Theorie auf einheitlichere Weise und zwingend zu dem kosmologischen Glied, das bei Einstein nur eine ad hoc gemachte Annahme war, und zwar sogleich in solcher Form, daß nicht eine prästabilierte Harmonie zwischen Weltkrümmung und Masse angenommen zu werden braucht, sondern die letzte die erste determiniert. — Daraus, daß sich Längen, Frequenzen u. dgl. durch Einstellung bestimmen, während die Weltrichtung eines sich bewegenden Körpers durch eine Beharrungstendenz von Punkt zu Punkt übertragen wird, erklären sich die Tatsachen, welche Herr

1) Sitzungsber. d. Berl. Akademie 1919, S. 349.

1) RZM, S. 268.

Byk kürzlich dahin deutete[1]), daß „zwar die Bewegung relativ, die Größe als solche aber absolut ist".

3. Von verschiedenen Seiten[2]) ist gegen meine Theorie eingewendet worden, daß in ihr aus reiner Spekulation Dinge a priori demonstriert würden, über welche nur die Erfahrung entscheiden kann. Das ist ein Mißverständnis. Aus dem erkenntnistheoretischen Prinzip von der Relativität der Größe folgt natürlich nicht, daß die Streckenübertragung durch kongruente Verpflanzung nicht integrabel ist; es folgt aus ihm überkaupt keine Tatsache. Es lehrt nur, daß Integrabilität an sich nicht zu bestehen braucht, sondern, wenn sie stattfindet, als Ausfluß eines Naturgesetzes verstanden werden muß. Das wird durch den eben dargelegten Sachverhalt aufs schönste bestätigt. Genau die gleiche Situation haben wir in der Einsteinschen Theorie hinsichtlich des Prinzips von der Relativität der Bewegung; Einstein selber hat gelegentlich darauf hingewiesen[3]), daß das allgemeine Relativitätsprinzip die universelle Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie nicht schlechthin ausschließt; wennschon die infinitesimale Parallelverschiebung der Vektoren an sich nicht integrabel zu sein braucht, so könnte dies doch durch ein Naturgesetz garantiert werden des Inhalts, daß der Riemannsche Krümmungstensor vierter Stufe überall verschwindet.

4. Der nächste Schritt: Ist das natürlich gemessene Volumen nicht die vollständige Wirkungsgröße, so muß man darauf gefaßt sein, daß sich die Streckenübertragung als nicht integrabel erweist, da sie nicht mehr mit der Einstellung auf den Krümmungsradius parallel gehen wird. Die am einfachsten gebaute Integralinvariante des metrischen Feldes in der vierdimensionalen Welt ist aber das Integral der aus der Streckenkrümmung

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

gewonnenen skalaren Dichte

$$\mathfrak{l} = f_{ik}\mathfrak{f}^{ik}.$$

Nimmt man an, daß sie als Wirkungsgröße neben das Volumen tritt, so ergibt sich das überraschende Resultat, daß aus dem metrischen Felde nicht nur die Gravitations-, sondern auch die elektromagnetischen Kräfte entspringen; dabei treten die φ_i als Komponenten des elektromagnetischen Potentials, die f_{ik} daher als Komponenten der elektromagnetischen Feldstärke auf. Das werde zunächst kurz bewiesen. Die Wirkungsdichte sei die Kombination

$$-\lambda^2\sqrt{g} + \alpha\mathfrak{l}$$

(α eine numerische Konstante). Indem wir wiederum die natürliche Eichung $\lambda = -1$ benutzen, erhalten wir daraus leicht das Wirkungsprinzip

$$\delta\int\mathfrak{W}dx = 0 \text{ mit } \mathfrak{W} = (\mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l}) + {}^1/_4\sqrt{g}\,\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\}.$$

Unsere Normierung bedeutet, daß wir mit kosmischen Maßstäben messen. Wählen wir auch die Koordinaten x_i so, daß Weltstellen, deren Koordinaten sich um Beträge von der Größenordnung 1 unterscheiden, kosmische Entfernung haben, so werden wir annehmen dürfen, daß die g_{ik} und φ_i von der Größenordnung 1 werden. Durch die Substitution $x_i = \varepsilon x_i'$ führen wir Koordinaten der gewöhnlich benutzten Größenordnung ein (Größenordnung des menschlichen Körpers); ε ist eine sehr kleine Konstante. Die g_{ik} ändern sich bei dieser Transformation nicht, wenn wir gleichzeitig diejenige Umeichung vornehmen, welche ds^2 mit $\frac{1}{\varepsilon^2}$ multipliziert. Im neuen Bezugssystem ist dann

$$g'_{ik} = g_{ik}, \quad \varphi'_i = \varepsilon\varphi_i, \quad \lambda' = -\varepsilon^2.$$

$\frac{1}{\varepsilon}$ ist demnach, in menschlichem Maße, der Krümmungsradius der Welt. Behalten g_{ik}, φ_i ihre alte Bedeutung, verstehen wir aber jetzt unter x_i die bisher mit x_i' bezeichneten Koordinaten und sind Γ^r_{ik} die diesen Koordinaten entsprechenden Komponenten des affinen Zusammenhangs der Welt, so wird

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{G} + \alpha\mathfrak{l}) + \frac{\varepsilon^2}{4}\sqrt{g}\,\{1 - 3(\varphi_i\varphi^i)\}; \quad (1)$$

$$\Gamma^r_{ik} = \left\{ {ik \atop r} \right\} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\delta^r_i\varphi_k + \delta^r_k\varphi_i - g_{ik}\varphi^r\right). \quad (2)$$

Unter Vernachlässigung der winzigen kosmologischen Terme von der Größenordnung ε^2 erhalten wir hier also nach (1) genau die klassische Maxwell-Einsteinsche Theorie der Elektrizität und Gravitation. Und mit der gleichen Vernachlässigung bekommen wir auf dem in FM. geschilderten Wege die mechanischen Gleichungen, aus denen die ponderomotorische Wirkung des elektromagnetischen Feldes in Einklang mit der Erfahrung hervorgeht; endlich auch noch die Tatsache, daß sich Maßstablängen und die Frequenzen der Atomuhren bei Zugrundelegung der natürlichen Eichung erhalten, sich also in der Tat durch

---

1) Diese Zeitschr. **22**, 20, 1921.

2) E. Freundlich, Die Naturwissenschaften **8**, 234, 1920; H. Reichenbach, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori (Springer 1920), S. 73.

3) Ann. d. Phys. **55**, 241, 1918.

Einstellung auf den Krümmungsradius bestimmen[1]). Bei Herleitung der mechanischen Gleichungen ist die Vernachlässigung der kosmologischen Terme nicht bloß wegen ihrer Kleinheit statthaft, sondern sie ist geradezu geboten, weil (nach FM.) die Masse eines Körpers überhaupt nur mit derjenigen Genauigkeit definiert ist, mit der man das ihn umgebende Feld als ein Euklidisches ansehen kann. Es ist danach sicher, daß die „Körpergeometrie", welche in der geläufigen Weise das Maßverhalten der materiellen Körper und ihre Bewegung festlegt, nicht die „Äthergeometrie" ist, sondern diejenige Riemannsche Geometrie, in welche sie sich verwandelt, wenn man die kongruente Verpflanzung durch die Einstellung auf den Krümmungsradius ersetzt. In diesem Sinne hat Einstein vollständig recht. Daß die den Naturgesetzen gemäß verlaufende Bewegung eines Körpers und die Übertragung der Uhrperioden nicht dem affinen Zusammenhang des Äthers folgt, geht übrigens schon rein formal aus den Gleichungen (1), (2) hervor; denn nach den Feldgesetzen (1) hat eine Verwandlung von φ in $-\varphi$ keinen Einfluß, während nach (2) dadurch die geodätischen Linien im Äther geändert werden.

5. Was die zunächst sehr grotesk anmutende Deutung der φ_i als elektromagnetischer Potentiale betrifft, so vermag ich darin gar keine neue Annahme zu erblicken; sondern die Durchführung eines einfachen, mit dem Grundsatz der Eichinvarianz verträglichen Wirkungsprinzips zeigt das Auftreten solcher ponderomotorischer Wirkungen, wie sie uns als elektromagnetische Kräfte bekannt sind; auch wirken diese Kräfte nicht bloß auf die Materie, sondern entspringen aus ihr genau in der Weise, wie es unsere elektromagnetischen Erfahrungen fordern. Gerade darin, daß die durch das Prinzip der Eichinvarianz erzwungene Erweiterung der Weltgeometrie, bei Zugrundelegung eines in einfacher rationaler Weise aus den Zustandsgrößen des metrischen Feldes aufgebauten Wirkungsprinzips, zu Folgerungen führt, die mit der Erfahrung in Einklang stehen und ein bis dahin neben der Metrik angenommenes physikalisches Zustandsfeld wie das elektromagnetische überflüssig macht, gerade darin, sage ich, liegt ja die einzig mögliche, aber auch völlig zureichende physikalische Bewährung jenes durch die Relativität der Größe geforderten Prinzips. Genau so steht es mit dem Einsteinschen Prinzip der allgemeinen Koordinateninvarianz, zu dessen Annahme die Relativität der Bewegung drängt. Seine physikalische Bewährung liegt einzig und allein darin, daß ein einfaches koordinateninvariantes Wirkungsprinzip für einen freien, keinen Kräftewirkungen unterliegenden Massenpunkt diejenige Bewegung ergibt, welche uns die Erfahrung an den Planeten zeigt, ohne ein besonderes Gravitationsfeld neben dem metrischen zu benötigen.

Dennoch bleibt hier ein Unbehagen zurück. Bei Einstein läßt sich der Zusammenhang zwischen der Richtung erhaltenden Trägheit und der Gravitation an der Gleichheit von schwerer und träger Masse oder dem „Äquivalenzprinzip" ohne weiteres anschaulich demonstrieren; wo ist eine entsprechende anschauliche Basis für den hier behaupteten Zusammenhang zwischen kongruenter Verpflanzung und elektromagnetischem Feld? Antwort: 1. Sehen wir von der geometrischen Einkleidung ab, so bleibt als der eigentliche Kern unserer Theorie dies: daß durch den physikalischen Zustand der Welt das Gravitationspotential $ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ und das elektromagnetische $d\varphi = \varphi_i\,dx_i$ nicht festgelegt sind, sondern durch $\mu \cdot ds^2$, $d\varphi - \frac{d\mu}{\mu}$ (μ eine willkürliche positive Ortsfunktion) ersetzt werden können. Aus den Feldgrößen f_{ik} fällt dieses willkürliche μ aber glatt heraus, so daß die vom elektromagnetischen Feld auf einen geladenen Körper ausgeübte ponderomotorische Wirkung gar nicht mit der Eichung gekoppelt ist. Daß eine solche Feldkraft auftritt, ist natürlich dadurch bedingt, daß in unser Wirkungsprinzip die nicht wegzutransformierenden Krümmungsgrößen f_{ik} in wesentlicher Weise eingehen. Würde man in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine Wirkungsgröße annehmen, welche nicht bloß die ersten Ableitungen der g_{ik}, sondern auch die Krümmung wesentlich enthält (z. B. $\int R_{ik}\mathfrak{R}^{ik}\,dx$), so erhielte man auch dort neben der Gravitation nicht-massenproportionale Kräfte, deren Zusammenhang mit dem Führungsfeld durch kein Äquivalenzprinzip sich plausibel machen ließe. 2. Bei der Normierung $\lambda = -1$ kennzeichnen die Potentiale φ_i — sie genügen infolge der Eichnormierung der Lorentzschen Gleichung $\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} = 0$ — die Abweichung, welche zwischen kongruenter Verpflanzung und Einstellung auf den Krümmungsradius, zwischen Äther- und Körper-

1) Das war bisher nur eine vorläufige Annahme; jetzt ist sie aus der physikalischen Theorie heraus begründet. Damit ist, wie mir scheint, einem von Einstein auf der Naturforscher-Versammlung in Nauheim ausgesprochenen Postulat (siehe diese Zeitschr. 21, 651, 1920, und die auf S. 662 wiedergegebenen Diskussionsbemerkungen von Hamel und Einstein) Genüge geschehen.

geometrie besteht. Auf das Maßverhalten der Körper und ihre Bewegung sind sie also von keinem Einfluß, oder vielmehr: es besteht nur jener verborgene Einfluß, der dadurch zustande kommt, daß die elektromagnetischen Potentiale an der Bestimmung des Normalmaßes λ mitbeteiligt sind.

6. So erkennen wir: nur daran, wie das in der Wirkungsdichte neben dem Einsteinschen neu auftretende kosmologische Glied

$$-\frac{3\varepsilon^2}{4}(\varphi_i\varphi^i)\sqrt{g}$$

den Feldverlauf modifiziert, wird die Theorie zu prüfen sein[1]). Welches sind seine Konsequenzen? Da die numerische Konstante α wahrscheinlich einen sehr kleinen Wert hat, wäre es möglich, daß die Maxwellschen Gleichungen eine die Grenze der Wahrnehmbarkeit erreichende Modifikation erfahren; sie besteht darin, daß in der Wellengleichung für die vier elektromagnetischen Potentiale

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 0$$

auf der linken Seite das Glied $+\frac{1}{a^2}\varphi$ hinzutritt, wo a eine feste Länge ist (Krümmungsradius der Welt mal $\sqrt{\alpha}$). Die einer ebenen Welle entsprechende Lösung hat dann die Form

$$e^{i\left(\nu t - \frac{x}{c}\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}\right)} \quad \left(\nu_0 = \frac{c}{a}\right).$$

Doch glaube ich, daß aus den Experimenten nur dies zu entnehmen sein wird, daß a sicher oberhalb einer gewissen Grenze liegt.

Eine wichtige Rolle spielt der neue kosmologische Term für das Problem der Materie. Es steht durch die Erfahrung mit großer Sicherheit fest, daß die physikalische Feldwirkung eines ruhenden Körpers durch zwei dem Körper eigentümliche Konstante bestimmt wird. Die eine ist die Ladung, die andere die Masse oder besser jenes konstante Verhältnis, in welchem sich die Masse zum Krümmungsradius der Welt einstellt; das sind (im Einklang mit der Forderung Herrn Byks) in unserer Theorie reine Zahlen. Man wird deshalb von einer Feldtheorie verlangen müssen, daß ∞^2 inäquivalente statische kugelsymmetrische Lösungen existieren, die außerhalb einer Kugel um das Zentrum regulär sind. Da die Einsteinsche Theorie das elektromagnetische Feld nicht mit umfaßt, bleibt dort nur die Masse übrig. In der ursprünglichen Fassung I der Feldgesetze ist unsere Forderung nicht erfüllt, wenn wir zwei Lösungen als äquivalent betrachten, falls sie durch beliebige Transformation der Koordinaten und Multiplikation des ds^2 mit einer willkürlichen Konstanten auseinander hervorgehen. In diesem Sinne existiert überhaupt nur eine einzige kugelsymmetrische Lösung; die Masse hat hier keine absolute Bedeutung, nur vom Massenverhältnis zweier Teilchen kann die Rede sein. Damit die Forderung zu Recht besteht, muß man annehmen: im Unendlichen soll

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

werden; es sind nur solche Transformationen zulässig, welche dort in die Identität übergehen. Das Feld ist also nicht bloß durch das materielle Teilchen, sondern ebensosehr durch ein über den zweiten, unendlich fernen Feldsaum herüberwirkendes „Agens" determiniert. Um dies zu vermeiden, führte Einstein das kosmologische Glied ein. Die Gesetze II oder III besitzen nun aber überhaupt keine statischen kugelsymmetrischen Lösungen; vielmehr tritt auch hier neben dem sich gegen das Teilchen erstreckenden Feldsaum ein zweiter Saum auf (den man z. B. als einen Massenhorizont von der Mächtigkeit der ganzen Weltmasse deuten kann). Anders bei uns: da existieren wirklich, wie ich RZM, S. 272 zeigte, reguläre kugelsymmetrische Lösungen; für sie ist λ notwendig negativ und ihr Verlauf ist in qualitativer Hinsicht (Vorzeichen der Zustandsgrößen und ihrer Ableitungen) der aus der Erfahrung bekannte[1]). Legen wir die Normierung $\lambda = -1$ zugrunde, so gelten solche Lösungen als äquivalent, die durch Koordinatentransformation auseinander hervorgehen. Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Konstanten ist jedoch nur $= 1$, solange man mit einem vorgegebenen Wert von α zu rechnen hat. Es ist aber auch in formaler Hinsicht unsympathisch, daß unsere Wirkungsgröße aus zwei additiv miteinander verbundenen Invarianten ganz verschiedenen Charakters zusammengesetzt ist, zumal die verbindende dimensionslose Konstante α wahrscheinlich keineswegs von der Größenordnung 1 ist. Die eine, das natürlich gemessene Volumen, wird man als geometrische, die andere als physikalische Wirkungsgröße bezeichnen

1) Seine Deutung als eines Mieschen Ätherdrucks in der 3. Aufl. von RZM beruhte auf einem Vorzeichenfehler.

1) Besonderen Wert lege ich darauf, daß φ^2, das Quadrat des elektrostatischen Potentials, eine abnehmende Funktion der Entfernung r vom Zentrum ist. Indem man nämlich die Differentialgleichung für φ mit φ multipliziert und zwischen zwei beliebigen Grenzen integriert, ergibt sich, daß $\frac{r^2}{\sqrt{g}}\cdot\frac{d\varphi^2}{dr}$ mit r zunimmt; da es für den Maximalwert von r, auf dem Äquator, verschwindet, ist es also beständig < 0.

dürfen. So ist die Einsteinsche Rotverschiebung der Spektrallinien ein „geometrischer", ihre Aufspaltung im Magnetfeld ein „physikalischer" Effekt; im Gesetz der Bewegung stehen sich beide Teile als Führungsfeld und Kraft gegenüber. Indem wir den Einsteinschen Gedanken eines Variationsprinzips mit Nebenbedingung aufnehmen, werden wir daher lieber unsere Feldgesetze so formulieren: Die Maxwellsche Wirkungsgröße $\int l\, dx$ ist ein Extremum bei konstantem natürlichen Volumen $\int \lambda^2 \sqrt{g}\, dx$. Dies Gesetz befriedigt durch seine Einfachheit. Seine statischen kugelsymmetrischen Lösungen hängen wirklich, wie wir verlangten, von zwei Konstanten ab. Ein für sich allein vorhandenes Korpuskel rundet sich seine eigene Welt. Sobald aber zwei Korpuskeln vorhanden sind, treten sie vermöge ihrer sich durchdringenden Feldsphären in Kampf; von einer zureichenden Lösung dieses Zwei-Körper-Problems sind wir noch weit entfernt. Der für die ganze Welt gültige Wert von a wird wohl irgendwie durch die Gesamtzahl der in der Welt vorhandenen Korpuskeln bedingt sein.

7. Wenn die in den letzten Jahren festgestellte Tatsache, daß die Spiralnebel systematisch eine starke Rotverschiebung zeigen, die als Dopplereffekt ausgedrückt im Mittel gegen 700 km/sec beträgt[1]), kosmologisch gedeutet werden darf, so würde sie dafür sprechen, daß zwar die Welt räumlich geschlossen ist (und nicht eine de Sittersche Hyperbelwelt), aber die Massen in ihr nicht gleichförmig verteilt sind, wie Einstein annahm, sondern einzelne Inseln wie das Milchstraßensystem im leeren Raume schwimmen. Die masseleere Welt läßt sich nach de Sitter[2]) betrachten als ein „Kegelschnitt" $\Omega(x) = a^2$ im fünfdimensionalen Euklidischen Raum mit dem Linienelement $ds^2 = -\Omega(dx)$;

$$\Omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2.$$

Durch die Substitution

$$x_4 = z \cdot \mathfrak{Cof}\, t, \quad x_5 = z \cdot \mathfrak{Sin}\, t$$

kann man den keilförmigen Ausschnitt

$$x_4^2 - x_5^2 > 0$$

auf „statische Koordinaten" t, $x_1 x_2 x_3$ beziehen:

$$-ds^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dz^2) - z^2 dt^2$$
$$\text{mit } z^2 = a^2 - r^2, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

1) Eine vollständige Zusammenstellung der Messungen bei H. u. M. B. Shapley, Astrophysical Journal **50**, 1919, Tabelle V auf S. 125; vgl. die kosmologischen Bemerkungen daselbst auf S. 131—135.

2) Monthly Notices of the R. Astronom. Society, November 1917: On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences III. — RZM, S. 256.

Die Abnahme von z mit wachsendem Radius r ergibt für einen im Zentrum O befindlichen Beobachter eine Rotverschiebung der Spektrallinien für Sterne S, deren Entfernung $r = OS$ dem Weltradius a vergleichbar ist; vorausgesetzt, daß das vom Stern ausgesandte Licht im ganzen Raum dieselbe in der „statischen" Zeit t zu messende Frequenz besitzt. Umgekehrt würde dann ein Beobachter auf S an einem Stern in O Violettverschiebung konstatieren. Diese Asymmetrie zwischen O und S beruht darauf, daß die Frequenzannahme eine solche Lösung der Maxwellschen Gleichungen als maßgebend für die Lichtausbreitung statuiert, welche nicht auf dem ganzen Kegelschnitt, sondern nur auf dem zu O gehörigen Keil $x_4^2 - x_5^2 > 0$ regulär ist; das ist natürlich nur berechtigt, wenn die Welt aus diesem Keil allein besteht, wenn sie also durch die statischen Koordinaten vollständig dargestellt wird. Eine solche geschlossene Welt wird aber zufolge der Einsteinschen Gesetze erst möglich durch einen am Äquator lagernden mächtigen Massenhorizont, und die Rotverschiebung ist dann als Wirkung der Annäherung an diesen Massenhorizont aufzufassen[1]). Wenn jedoch die Masse im geschlossenen Raum gleichförmig mit der Einsteinschen Gleichgewichtsdichte verteilt ist, wird die Lichtgeschwindigkeit f konstant, und es tritt überhaupt keine Verschiebung der Spektrallinien auf. Die Rolle, welche bei Einstein der Massenhorizont spielt, nämlich die Frequenzübertragung in der Lichtwelle zu bestimmen, kann nach unserer Theorie das als Zentrum aufzufassende Milchstraßensystem selber übernehmen — für denjenigen Teil des leeren Raumes, der ihm näher liegt als andern Masseninseln von ähnlicher Mächtigkeit. Für die Deutung der besprochenen astronomischen Erscheinung ist also unser kosmologisches Glied unter Umständen von Wichtigkeit.

8. Bisher haben wir nur die zwei einfachsten Integralinvarianten des metrischen Feldes, die Maxwellsche Wirkungsgröße und das natürlich gemessene Volumen, in Betracht gezogen. Alle Integralinvarianten von zweiter Ordnung, d. h. alle, welche die Ableitungen der g_{ik} bis zur zweiten, der φ_i bis zur ersten Ordnung enthalten, sind von R. Weitzenböck[2])

1) Natürlich bleibt es sehr aufklärungsbedürftig, wie es kommt, daß der Zusammenschluß der Welt im großen die Lichtwelle von Anfang an beeinflußt, wo man doch meinen sollte, sie könne darauf erst reagieren, wenn sie die ganze Weltkugel durchlaufen hat. Mit der Hertzschen Vorstellung von der Entstehung einer Lichtwelle ist das ganz unverträglich; der Bohrschen hingegen scheint es mir nicht zu widersprechen.

2) Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Abt. IIa, **129**, 1920, Sitzung vom 21. und 28. Okt. 1920; **130**, 1921, 10. Februar.

bestimmt worden. Es ergaben sich deren sechs, von denen zwei allerdings in ihrem Vorzeichen abhängen von einem in der Welt anzunehmenden Schraubungssinn. R. Bach hat gezeigt[1]), daß die Variation dieser beiden identisch verschwindet; dasselbe gilt nach seinen Rechnungen auch für eine gewisse numerische Kombination der übrigen vier. Demnach kommt neben den bisher benutzten Invarianten im Wirkungsprinzip nur noch eine weitere in Frage. Entgegen früher geäußerter Meinung glaube ich jetzt, nachdem die Konsequenzen der Theorie sich etwas geklärt haben, dessen ziemlich sicher zu sein, daß sie in der Natur keine Rolle spielt. Denn wenn wir sie mit heranziehen, kommen wir auf Feldgesetze vierter Ordnung; die statische kugelsymmetrische Lösung derselben enthält — wenn wir annehmen, daß kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist und von den kosmologischen Termen absehen, dafür aber eine bestimmte Maßeinheit der Länge zugrunde legen — nach einer Untersuchung von Pauli[2]) nicht nur eine willkürliche Konstante, die Masse, sondern deren zwei[3]). Vor allem aber scheint es ganz unmöglich, von einem solchen Wirkungsprinzip aus zu den mechanischen Gleichungen zu gelangen, deren Herleitung aus den differentiellen Erhaltungssätzen aufs allerengste an die besonderen Eigentümlichkeiten der beiden anderen Invarianten gebunden ist (vgl. darüber FM). Stichhaltige Gründe dafür, warum die Natur die Benutzung der dritten Invariante verschmäht hat, weiß ich nicht anzugeben; aber schon die Beschränkung der Differentiationsordnung auf 2 ist offenbar ein viel zu formaler Gesichtspunkt, als daß man darin den entscheidenden inneren Zwang für die Auswahl der Wirkungsgröße erblicken dürfte.

9. Ein wie hohes Maß von Harmonie und innerer Notwendigkeit dem Aufbau der reinen Infinitesimalgeometrie innewohnt, welche die Grundlage der erweiterten Relativitätstheorie bildet, glaube ich durch die gruppentheoretische Formulierung des Raumproblems, RZM § 18, aufgedeckt zu haben. Insbesondere wird dadurch aus den tiefsten der mathematischen Analyse zugänglichen Gründen verständlich, warum die Metrik gerade die auf einer nicht ausgearteten quadratischen Differentialform beruhende Pythagoreische Maßbestimmung ist. Für die Vermutung, daß sie die einzige ist, welche den dort aufgestellten natürlichen Forderungen genügt, habe ich inzwischen den mathematischen Nachweis erbringen können[1]); in der Gültigkeit dieses Satzes erblicke ich eine sehr entschiedene Bestätigung der Richtigkeit meiner Gedankeneinstellung zum Raumproblem. Es zeigt sich dabei, daß der Pythagoreischen Maßbestimmung ihr einzigartiger Charakter nur zukommt im Hinblick auf den metrischen Zusammenhang, die Möglichkeit der kongruenten Verpflanzung des Vektorkörpers im beliebigen Punkte O nach allen zu O unendlich benachbarten. Wenn die an den materiellen Körpern erfahrene „Körpergeometrie", wie es die Überlegungen zu Beginn der Note evident gemacht haben, nicht ohne weiteres als verbindlich erachtet werden kann für die dem Äther zuzuschreibende Struktur, so könnten unsere Annahmen über diese „Äthergeometrie" zunächst als recht willkürlich erscheinen; die erwähnte gruppentheoretische Untersuchung aber zeigt, daß dem nicht so ist. Immerhin liegt der Gedanke nahe, ob man nicht, unter Verzicht auf den metrischen Zusammenhang und natürlich auch unter Verzicht auf die Erklärung des Elektromagnetismus, allein mit der konformen Beschaffenheit der Welt, ihrem „Wirkungszusammenhang" auskommen kann, der durch die Gleichung $g_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$ vollständig beschrieben wird. Diese Möglichkeit ist neuerdings von R. Bach[2]) und von Einstein[3]) erwogen worden; namentlich hat Herr Bach die Konsequenzen des dann allein möglichen Wirkungsprinzips rechnerisch entwickelt. Man gewinnt dadurch aber keinen Anschluß an die Erfahrung: da man die Bachsche Wirkungsgröße mit der oben erwähnten dritten Integralinvariante identifizieren kann, hängt das Gravitationsfeld eines Körpers hier statt von einer von zwei Konstanten ab; und es ist gar nicht abzusehen, wie man von diesem Wirkungsprinzip aus zu den mechanischen Gleichungen gelangen könnte. Auch rein theoretisch ist dieser Ansatz viel weniger befriedigend als der unsere, weil nach einer eben gemachten Bemerkung die mit einer Pythagoreischen Maßbestimmung verknüpfte konforme Beschaffenheit ein nicht auf sich selber ruhendes Bruchstück der ganzen Metrik ist, dessen Vorhandensein nur im Hinblick auf den metrischen Zusammen-

---

1) Math. Zeitschr. **9**, 110—135, 1921, insbesondere S. 125 u. 128.

2) Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **21**, 742, 1919.

3) Diese zweite Konstante würde in der gleichen Weise der aus dem metrischen Felde entspringenden nicht massenproportionalen Kraft entsprechen, von welcher auf S. 476 die Rede war, wie die elektrische Ladung der ponderomotorischen Kraft des elektromagnetischen Feldes; von einer solchen Kraft wissen wir aus der Erfahrung nichts.

1) Erscheint in der Math. Zeitschrift.

2) l. c., S. 128—135.

3) Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, S. 261—264.

hang verständlich wird. Aus beiden Gründen halte ich daher diesen Versuch für aussichtslos.

Eine abweichende Idee hat jüngst Eddington[1]) verfolgt; er möchte den affinen Zusammenhang als die ursprüngliche Struktur des Weltäthers zugrunde legen. Er spaltet den Krümmungstensor zweiter Stufe — dessen Existenz nur an den affinen Zusammenhang gebunden ist und dessen Ausdruck an einer Stelle O, an welcher wir ein geodätisches Koordinatensystem verwenden, so lautet:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k}$$

($\gamma_i = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}$, Γ die in O selber verschwindenden Komponenten des affinen Zusammenhangs) — in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}\right) \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}$$

und identifiziert den symmetrischen mit dem Einsteinschen Maßtensor g_{ik}, den schiefsymmetrischen aber mit dem elektromagnetischen Feldtensor. Er zieht dann aber nur solche Konsequenzen, welche sich allein daraus ergeben, daß in der Welt eine quadratische Grundform, das Einsteinsche ds^2, und eine lineare, die aus den elektromagnetischen Potentialen gebildete Form $d\varphi = \varphi_i dx_i$ besteht; darin sind sich aber alle Theorien einig. Das Spezifische meiner Auffassung liegt darin, daß diese beiden Formen, ohne eine Änderung des physikalischen Feldzustandes herbeizuführen, in $\mu \cdot ds^2$, $d\varphi - \frac{d\mu}{\mu}$ verwandelt werden können; die Konsequenzen dieser besonderen These machten sich vor allem in der Auswahl der Wirkungsgröße geltend. Analog hätte Eddington die Aufgabe, die Konsequenzen seiner Annahme zu verfolgen, daß jene beiden Formen in der geschilderten Weise aus einem affinen Zusammenhang Γ entspringen. Enthält das überhaupt eine Einschränkung, da doch die Γ in viel größerer Anzahl (40) vorhanden sind als die 14 Koeffizienten g_{ik}, φ_i? Die Γ sind bei Eddington die unabhängigen Zustandsgrößen, und es müssen deshalb auch 40 Feldgleichungen auftreten. Eddington verzichtet aber einstweilen überhaupt noch auf die Aufstellung der Feldgesetze. Die Einführung von 40 Unabhängigen scheint mir bedenklich, da die Erfahrung gar keinen Hinweis darauf enthält; Eddington hat wohl auch nur den Mut zu einem so verwegenen Ansatz, weil er hier eine Möglichkeit wittert, den „unbekannten Elektronenkräften" auf die Spur zu kommen; an diese Kräfte, nach denen auf anderem Wege schon Mie gesucht hatte, vermag ich aber nicht mehr zu glauben. Ebenso muß ich Eddingtons Begründung der Bewegungsgleichungen ablehnen, schon darum, weil sie keine Rechenschaft gibt von der fundamentalen Tatsache der Gleichheit von träger und gravitationsfeld-erzeugender Masse.

Der den Spekulationen mißtrauende Physiker wird wahrscheinlich finden, daß die ganze Frage einer erweiterten Relativitätstheorie, welche in organischer Weise die elektromagnetischen Erscheinungen mit umfaßt, im Augenblick noch nicht spruchreif ist, da keine Erfahrungen zu ihrer Entscheidung herbeigezogen werden können, solange Einflüsse von kosmologischer Kleinheit der Beobachtung sich entziehen. Man darf aber nicht vergessen, daß in aller Wirklichkeitserkenntnis neben dem Sammeln typischer Erfahrungstatsachen das apriorische Element, die Bildung von angemessenen Anschauungen und Begriffen, mit Hilfe deren die Tatsachen zu deuten sind, eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt. Ich habe versucht, in diesem und in dem parallel laufenden Artikel über „Feld und Materie" das Bild, das mir vorschwebt, so deutlich zu zeichnen, wie es mir möglich ist.

Zürich.

(Eingegangen 8. Juli 1921.)

[1]) Proceedings of the Royal Society, A, **99**, 104 bis 122, 1921.

Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt. II.

Von Friedrich Kottler.

In einer Arbeit gleichen Titels habe ich kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) das „Trägheitsfeld", das in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem herrscht, untersucht. Für die zugehörige Maßbestimmung war hierbei ein Ausdruck gefunden worden, dessen Raummessung euklidisch ist. Vorausgesetzt war erstens, daß das System in einer Minkowskischen Welt rotiere, also relativ zu sehr entfernten Massen, deren Schwerefeld ebenso vernachlässigt werden könne wie das eigene Schwerefeld des Systems, zweitens daß im unendlich kleinen raumzeitlichen Bereiche die Rotation des Systems durch eine gleichförmige Translation ersetzt werden dürfe, auf welch letztere die spezielle Relativitätstheorie angewendet werden könne. Aus diesen beiden Voraussetzungen folgt sofort, daß die lokalen Maßstäbe

[1]) **22**, 274—280, 1921.

und Uhren, die innerhalb eines solchen unendlich kleinen Bereichs im rotierenden System Geltung haben, bekannt sind. Ich habe diese lokalen Maßstäbe und Uhren die natürlichen genannt. Ein rotierender Beobachter kann sich dieselben überall in bekannter Weise mit Hilfe der Eigenschaften des Lichts konstruieren. (Diese Methode verdient den Vorzug vor der der starren Körper, weil bekanntlich die Teile des rotierenden Systems deformierbar angenommen werden müssen.) Die natürlichen lokalen Maßstäbe sind es, die auf das Einsteinsche Paradoxon betreffend die Nichteuklidizität der Geometrie auf einer rotierenden Kreisscheibe führen.

In der genannten Arbeit war sodann die Frage diskutiert worden, ob sich mit Hilfe der natürlichen lokalen Maßstäbe und Uhren eine einheitliche Raumzeitmessung im ganzen rotierenden System ermöglichen lasse. Dies ist, wie gezeigt wurde, unmöglich, deshalb, weil die natürliche Zeitmessung keine einheitliche Synchronisierung gestattet. Dafür ist eine andere künstliche Raumzeitmessung im ganzen System einheitlich möglich, d. h. eine solche, bei welcher die natürlichen lokalen Maßstäbe und Uhren durch andere künstliche ersetzt werden müssen. Diese Messung besitzt die eingangs erwähnte Eigenschaft der Euklidizität ihrer Geometrie.

Die Frage, wie sich die im rotierenden System befindlichen Beobachter die angegebene künstliche Raumzeitmessung verschaffen können, war dahin beantwortet worden, daß sie dieselbe mit Hilfe eines (fingierten) ruhenden Beobachters errechnen müssen, sofern man sich auf den Standpunkt der üblichen messenden Physik stellt, daß einer Messung nicht unendlich viele Versuche vorausgehen dürfen. Die Zuhilfenahme eines fingierten ruhenden Beobachters hat nichts Befremdendes, wie hier betont werden möge; seit Kopernikus pflegen wir ja unsere geozentrischen Beobachtungen auf diese Weise aus den heliozentrischen Koordinaten zu berechnen.

Gleichwohl wird man diesen Umweg über den ruhenden Beobachter zu vermeiden wünschen und fragen, ob die rotierenden Beobachter imstande sind, ganz von selbst auf die angegebene Raumzeitmessung zu kommen. Das ist, wie im folgenden gezeigt werden wird, in der Tat möglich, wofern man sich nur von dem Vorurteil frei macht, daß einer Messung nicht unendlich viele Versuche vorangehen dürfen. Wenn wir in der praktischen Physik mit einer endlichen Anzahl unser Auslangen finden, so geschieht dies, weil die Maßbestimmung unserer Welt bereits vorgegeben ist oder es uns zu sein scheint; wenn wir z. B. ohne weiteres die geradlinige Entfernung zweier entfernter Punkte ausmessen können, so können wir dies darum, weil wir in den Lichtstrahlen das Modell der geraden Linie vorgegeben haben. Wenn uns dieses fehlen würde, so müßten wir zwecks Ausmessung einer Entfernung sicherlich sehr viele, ja sogar, um genau zu sein, unendlich viele Versuche anstellen, um die kürzeste von allen möglichen Entfernungen der zwei Punkte zu ermitteln. Man sieht daher ohne weiteres, daß man, um in einer unbekannten Welt eine Maßbestimmung zu begründen, unendlich viele Versuche wird machen müssen, sofern man größte Genauigkeit erreichen will, oder daß, wie es Hamel[1]) ausgedrückt hat, „das Messen erst an den Schluß einer Wissenschaft gehört".

1. Ich beginne mit der Zeitmessung in irgendeinem beschleunigten System. Wenn zwei voneinander entfernte Beobachter A, B in einem solchen System ihre lokalen Uhren vergleichen wollen, so müssen sie dies mittels Lichtsignalen tun; sie können dies aber nicht so tun wie im gleichförmig bewegten System, indem ein Signal direkt von A nach B oder von B nach A entsendet wird. Denn der Lichtweg und die zugehörige Lichtzeit, deren Kenntnis für die Einstellung der Uhren erforderlich ist, sind ja noch gänzlich unbekannt, solange noch keine einheitliche Maßbestimmung vorhanden ist, die über lokale Bereiche hinaus gilt. Sie können also die Zeitvergleichung nur schrittweise und indirekt durchführen, indem sie zwischen ihren Standpunkten A und B genügend viele Relais $R_1, R_2 \ldots R_N$ einschalten, die einander so nahe sind, daß von einem zum andern die Methode der speziellen Relativitätstheorie, und zwar die betreffende lokale Raumzeitmessung, angewendet werden darf. Auf diese und nur auf diese Weise kann vor Ermittlung einer einheitlichen Maßbestimmung im beschleunigten System zu einer Zeit von A die „gleiche" Zeit von B gefunden werden: Zuerst gibt A seine Zeit nach R_1, welche nach Ankunft in R_1 um die in der lokalen Maßbestimmung von A ermittelte Lichtzeit für AR_1 korrigiert werden muß; hierauf gibt R_1 seine Zeit an R_2, welche nach Ankunft in R_2 um die in der lokalen Maßbestimmung von R_1 gemessene Lichtzeit für R_1R_2 korrigiert werden muß; usw. bis zu B.

Verfolgen wir den Vorgang geometrisch am

1) G. Hamel, Grundbegriffe der Mechanik, S. 108. Leipzig, B. G. Teubner 1921.

Bilde des Weltlinienbündels des beschleunigten Systems in der Minkowskischen Welt (Fig. 1).

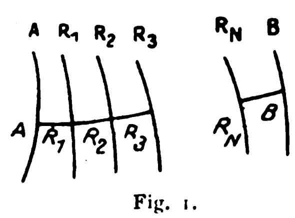


Fig. 1.

Sei A eine Lage von A auf seiner Weltlinie, zu der die „gleichzeitige" Lage B von B zu suchen ist. Man bestimme nach der obigen Methode die zu A „gleichzeitige" Lage R_1 der benachbarten Relaisstation R_1; sie ist offenbar der Durchschnitt der Weltlinie von R_1 mit dem Normalraum von A. Zu R_1 ist gleichzeitig die Lage R_2 von R_2, d. i. der Durchschnittspunkt der Weltlinie von R_2 mit dem Normalraum von R_1 usf.

Wir fragen jetzt: Führt diese Methode wirklich zu einer widerspruchslosen Zeitvergleichung der lokalen Uhren im beschleunigten System? Die Antwort lautet: Im allgemeinen nicht! Im allgemeinen ist nämlich bei beliebig beschleunigten Systemen eine Synchronisierung der natürlichen lokalen Uhren gar nicht möglich!

Denn wenn es eine überall mittels der natürlichen lokalen Uhren gemessene Zeit t' im beschleunigten System gäbe, so würden alle Weltpunkte, die zur „gleichen" Zeit $t' = \text{const}$ gehören, eine stetige dreidimensionale raumartige Mannigfaltigkeit erfüllen, die die Weltlinie des Bündels überall senkrecht schnitte. Die oben verwendeten Normalräume von A, R_1 usw. wären nichts anderes als die Tangentialräume dieser Mannigfaltigkeit in ihren Punkten A, R_1 usw. Das Weltlinienbündel des beschleunigten Systems müßte also so beschaffen sein, daß es orthogonal schneidende Mannigfaltigkeiten zuließe. Aus der Lehre von den Kurvenbündeln ist bekannt, daß dies ein allgemeines Bündel nicht tut. Daher ist eine Synchronisierung der natürlichen lokalen Uhren nur bei speziellen beschleunigten Systemen möglich.

Was würde bei einem beschleunigten System, das diese spezielle Eigenschaft nicht hat, geschehen, wenn wir die obige Methode der Relais anwenden? Die Antwort lautet: B wird verschiedene Zeiten von A erhalten, wenn wir verschiedene Zwischenwege für die Aufstellung der Relais wählen. Um dies geometrisch leicht einzusehen, beschränken wir unsere Betrachtungen auf eine dreidimensionale Welt (XYT-Raum) und untersuchen also die beschleunigte Bewegung in einer Ebene. Ihr entspricht ein Bündel von ∞^2 Weltlinien. Wenn die einheitliche natürliche Zeitmessung widerspruchslos möglich sein soll, so müssen offenbar zwei Weltpunkte, die mit einem dritten „gleichzeitig" sind, es auch untereinander sein. Betrachten wir aber die beiden Punkte A und R (Fig. 2). Alle Punkte, die mit A gleichzeitig sind, liegen in der zu A gehörigen Normalebene α, ebenso alle mit R gleichzeitigen Punkte in der zu R gehörigen Normalebene ϱ. Alle Punkte, welche sowohl zu A als auch zu

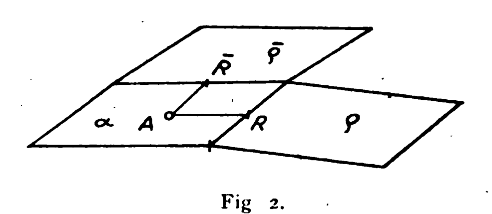


Fig 2.

R gleichzeitig sind, liegen mithin auf der Schnittlinie der beiden Ebenen α und ϱ. Wenn R genügend nahe an A rückt, so geht diese Schnittgerade durch A. Sei $A\bar{R}$ die betreffende Grenzlage dieser Geraden. Wir nennen $A\bar{R}$ die zu AR konjugierte Richtung. Wenn die natürliche Zeitmessung einen Sinn haben soll, so muß $\bar{R}$ auch gleichzeitig sein mit A und R, da $\bar{R}$ gleichzeitig war mit A und R. D. h. AR muß wieder die konjugierte Richtung sein zu $A\bar{R}$, oder die Normalebene $\bar{\alpha}$ von $\bar{R}$ schneidet α parallel zur Richtung AR. Dies tritt dann, aber auch nur dann ein, wenn die Ebenen α, bez. ϱ, bez. $\bar{\varrho}$ Tangentialebenen einer Fläche in den Punkten A, bez. R, bez. $\bar{R}$ sind, d. h. wenn die Weltlinien eine orthogonale Fläche zulassen. Dann und nur dann sind also zwei unendlich nahe Punkte des Systems, die mit einem dritten gleichzeitig sind, auch untereinander gleichzeitig, und a fortiori gilt dies für voneinander entfernte Punkte. Dann und nur dann wird aber eine einheitliche Zeitmessung im beschleunigten System mittels der natürlichen lokalen Uhren widerspruchslos möglich sein, da dann das Resultat der Zeitvergleichung zwischen A und B nicht vom Wege abhängt, auf welchem diese Zeitvergleichung durchgeführt wird.

2. Es gilt nun, die Nutzanwendung auf das rotierende System zu machen. Das zugehörige Weltlinienbündel ist das Bündel koachsialer gemeiner Schraubenlinien auf Zylindern um die icT-Achse. Dieses Bündel besitzt keine orthogonalen Mannigfaltigkeiten.

Darum ist eine Synchronisierung der natürlichen lokalen Uhren unmöglich. (Um hier eine verbreitete irrtümliche Auffassung zu berichtigen, sei bemerkt, daß diese Unmöglichkeit der Synchronisierung nichts zu tun hat mit der verschiedenen Ganggeschwindigkeit der natürlichen lokalen Uhren, (wie sie einem ruhenden Beobachter erscheint.) Denn das ließe sich einfach korrigieren, indem die verschiedenen lokalen Uhren künstlich auf gleiche Ganggeschwindigkeit einreguliert werden. Diese Korrektur kann und muß z. B. bei der Hyperbelbewegung eines „gleichförmig" fallenden Bezugssystems vorgenommen werden. Die Unmöglichkeit der Synchronisierung geht vielmehr auf ein qualitatives anstatt auf ein quantitatives Problem zurück, nämlich auf die Abhängigkeit der Uhrenvergleichung vom Wege der Übermittlung eines Zeitsignals.

Die natürliche Zeitmessung mißlingt also im rotierenden System. Denn wenn A über C nach B meldet: „Ich habe Mittag", so kommt z. B. gleichzeitig auch von A über D nach B: „Ich habe 1 Uhr". Wie soll da eine Uhrenvergleichung überhaupt möglich werden, zumal wenn außer A noch andere Sendestationen berücksichtigt werden?

Folgendermaßen kommt man zu einer widerspruchslosen Uhrenvergleichung im rotierenden System: Es muß erstens irgendeine Station A als Uhrenzentrale ausgezeichnet werden, welche die Zeiten gibt. Dann können andere Stationen nicht stören, da ihre Zeiten nicht empfangen werden. Zweitens muß der Weg festgelegt werden, längs welches die Zeit von A nach jeder einzelnen Station B zu transitieren ist. Man wird offenbar den kürzesten Weg wählen, der von A nach B führt. Als Weglänge hat dabei die Summe der natürlichen lokalen Längen $AR_1 + R_1R_2 + \ldots + R_NB$ der einzelnen Relaisstrecken zu gelten. D. h. der Weg AB muß ein kürzester Weg in natürlicher Raummessung sein. Die Ermittlung eines solchen erfordert selbstredend unendlich viele Versuche. (Es wäre prinzipiell falsch, wenn man eine lange Leine zwischen A und B auslegen wollte, um sie dann zu spannen, so daß sie den kürzesten Weg AB ohne weiteres angeben würde. Denn es kann vom Standpunkte des Relativitätsprinzips keinen ganz unausdehnbaren Körper geben.)

Auf die angegebene Weise lassen sich jedenfalls alle Uhren nach der Zentrale widerspruchslos richten. Es fragt sich nur, ob diese Zeitvergleichung auch von Dauer ist; d. h. wenn später einmal eine Kontrolle vorgenommen wird, ob die Uhren noch gerichtet sind? In einem beliebigen beschleunigten System wäre diese Zeitvergleichung in der Tat nicht von Dauer; denn die natürlichen Entfernungen AB schwanken fortwährend, wenn die Beschleunigung des Systems variiert. Im rotierenden System hingegen bleiben die Entfernungen AB stationär, da die Beschleunigung stationär bleibt. Darum ist die einmal durchgeführte Zeitvergleichung von Dauer. Freilich muß man noch dem Umstande Rechnung tragen, daß die Ganggeschwindigkeiten der natürlichen lokalen Uhren in den einzelnen Stationen B und die der Zentrale A im allgemeinen verschieden sind. Dazu muß man die natürliche lokale Uhr in B durch eine künstliche Uhr ersetzen, welche die gleiche Ganggeschwindigkeit hat wie die der Zentrale A. Dies gelingt leicht, wenn nur eine Zeitvergleichung einmal durchgeführt ist, mit Hilfe einer regelmäßigen Folge von Signalen, die von der Zentrale A ausgehen. Die Einführung dieser künstlichen lokalen Uhren ist also das dritte Erfordernis einer widerspruchslosen einheitlichen Zeitmessung im rotierenden System neben der Auszeichnung einer Zentrale und der Wahl der kürzesten Wege für die Übermittlung der Zeitsignale.

3. Diese so ermittelte einheitliche Zeitmessung ist die in der früheren Arbeit verwendete künstliche Zeitmessung. Zu ihr gehört die dortige künstliche Raummessung und die angegebene verallgemeinerte Lorentztransformation. Dies erkennt man leicht am geometrischen Bilde:

Durch unsere Festsetzungen haben wir nämlich allen Punkten B des rotierenden Systems die Eigenzeit der Zentrale A aufgezwungen. In der Tat: der Weg von A nach B ist ein kürzester in der natürlichen Raummessung; daher wird er von allen Weltlinien des Systems, die ihn treffen, senkrecht geschnitten. Nun ist aus der Geometrie der Schrauben bekannt, daß die zu einem Punkte A einer Schraubenlinie A des Bündels gehörigen Normalen auch von allen anderen Schraubenlinien des Bündels, die sie treffen, normal geschnitten werden. Der kürzeste Weg von A nach B ist also diejenige Normale in irgendeiner Lage A zur Weltlinie von A, welche die Weltlinie von B (etwa in B) trifft. D. h. aber, die zu A nach der eingeführten Zeitmessung „gleichzeitige" Lage B von B ist der Schnittpunkt der Weltlinie von B mit der Normalebene (Normalraum) von A. Mithin erfüllt die Gesamtheit der mit irgendeiner Lage A von A „gleichzeitigen" Lagen der anderen des

rotierenden Systems die ganze Normalebene (Normalraum) von *A*. Die Mannigfaltigkeiten t' = const unserer verallgemeinerten Zeitmessung sind also die sukzessiven Normalebenen der verschiedenen Lagen von A, d. h. die künstliche Zeit t' ist die Eigenzeit der Zentrale A.

Nun ist zur künstlichen Raummessung nur mehr ein Schritt. Als künstliche lokale Maßstäbe müssen jetzt überall die Eigenmaßstäbe der Zentrale *A* eingeführt werden. Dies besorgen die lokalen Beobachter in B usw. automatisch. Denn wenn sie einmal die Eigenzeit von A übernommen haben, und wenn sie nunmehr mit Hilfe der Eigenschaften des Lichts und der künstlichen lokalen Uhren die räumlichen Maßstäbe neu bestimmen, so müssen sie die Eigenmaßstäbe der Zentrale A finden. Damit ist also die ganze künstliche Raumzeitbestimmung, wie wir sie in der früheren Arbeit auf Grund der verallgemeinerten Lorentztransformation errechnet hatten, diesmal auf Grund einfacher Festsetzungen von den rotierenden Beobachtern ohne äußere Hilfe wiedergefunden.

Die ermittelten künstlichen Maßstäbe in irgendeiner Station B stimmen, wie schon in der vorigen Arbeit erwähnt, in gewissen Richtungen nicht mit den natürlichen lokalen Maßstäben überein, da sie ja vom ruhenden Beobachter aus gleich lang mit den Maßstäben der Zentrale A gleicher Richtung erscheinen müssen trotz verschiedener Größe der Lorentzkontraktionen in A und B. Eben deshalb mußten wir den Transport der künstlichen lokalen Maßstäbe über ihren Geltungsbereich hinaus verbieten. Dieses Verbot des Transportes gilt eigentlich schon für die natürlichen lokalen Maßstäbe, da diese ja dabei beschleunigt, also deformiert werden müssen. (Denn sie sind keineswegs starr, sondern nur quasistarr, solange sie an ihrem Ort verbleiben, d. h. solange ihre Beschleunigung stationär ist.) Wenn man von dieser Deformierbarkeit absieht, würde der Transport der natürlichen lokalen Maßstäbe weiter auf kein Hindernis stoßen, wohl aber der der künstlichen lokalen Maßstäbe, da diese, auf eine andere Station gebracht, keinesfalls mit den dortigen lokalen Maßstäben übereinstimmen können. Wenn jemanden dieses Verbot des Transports der Maßstäbe anfänglich befremden sollte, so möge er bedenken, daß auch die spezielle Relativitätstheorie seinerzeit ein ähnliches Verbot, nämlich das des Transports von Uhren (Chronometern) behufs Übertragung der Zeit aussprechen mußte und statt dessen die Zeit durch Lichtsignale übermitteln ließ. Man käme nämlich offensichtlich zu einer andern Gleichzeitigkeit, wenn man mit transportablen Chronometern arbeiten würde, selbstredend unter der Annahme, daß der Transport die Ganggeschwindigkeit nicht beeinflußt. (Diese Gleichzeitigkeit hätte allerdings die Preisgabe der Kovarianz der Maxwellschen Gleichungen zur Folge.) Die Gleichzeitigkeit und alles Messen überhaupt ruht eben im Grunde auf irgendwelchen Konventionen. Und wenn diese Konventionen mit gewissen Denkgewohnheiten im Widerspruch stehen, sind sie deshalb noch nicht falsch; ebensowenig bedeuten natürlich irgendwelche neue Konventionen neue Erkenntnisse über Raum und Zeit.

(Eingegangen 7. Juli 1921.)

Ein neuer Sichtmesser.

Von Albert Wigand.

Vor einiger Zeit habe ich eine Methode angegeben[1]), nach der man die Sicht, anstatt sie wie bisher als Sichtweite zu schätzen, mit einem einfachen Gerät, dem „Sichtmesser", quantitativ messen kann. Das Prinzip dieser Methode ist folgendes: Zu der jeweils vorhandenen, in der Güte der Sicht zum Ausdruck kommenden Trübung der Luft wird eine künstliche Trübung in dem Maße hinzugefügt, daß ein ins Auge gefaßtes Ziel gerade eben nicht mehr erkannt werden kann. Die „künstliche Trübung" wird von Lichtfiltern, die geeignet beschaffene, abgestufte trübe Schichten tragen, erzeugt.

Bei dem Interesse, das man zur Zeit den physikalischen Bedingungen der Sicht entgegenbringt, und der großen praktischen Bedeutung des Sichtproblems für Luftfahrt und Seefahrt erscheint mir eine Weiterbildung der Meßmethode angebracht, nachdem sich ihr Prinzip bewährt hat.

Beim bisherigen Sichtmesser ist die Filtertrübung unstetig in 15 Stufen variierbar. Die Größe einer Stufe ist so gewählt, daß ihre Trübung gleich ist etwa dem Doppelten des Schwellenwertes der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für das Erkennen von Gegenständen, die im Dunst oder Nebel gerade eben verschwinden; man kann auf halbe Stufenwerte noch sicher interpolieren.

Das Filter „1" hat also ein willkürlich fest-

1) A. Wigand, diese Zeitschr. **20**, 151, 1919; Meteorol. Zeitschr. **36**, 342, 1919; Ann. d. Hydr. u. marit. Met. **47**, 134, 1919.



gesetztes und für alle Exemplare des Stufensichtmessers genau gleiches Trübungsmaß, das durch leichtes Mattschleifen einer Glasoberfläche hergestellt wird. Das Filter „2“ ist stärker mattiert, und zwar um so viel, daß es beim Hindurchsehen den gleichen Trübungsgrad wie zwei aufeinander gelegte Filter „1“ hat. Die höheren geradzahlig numerierten Filter bestehen aus aufeinandergelegten Filtern vom Trübungsgrad des Filters „2“, also Filter „4“ aus 2 und Filter „14“ aus 7 Filtern „2“. Die für beste Sicht einzuschaltende größte Filterzahl ist eine durch die willkürliche Wahl der Filtertrübung „1“ gegebene Apparatkonstante und hat den Wert 14,3.

Ich habe den mit a bezeichneten „optischen Trübungsgrad“ der Mattfilter proportional gesetzt der Anzahl der aufeinandergelegten, gleichgetrübten Einzelfilter. Damit wird aber nicht behauptet, daß in dieser a-Skala die Trübung sich linear mit der Filterzahl ändere; sie könnte vielmehr auch logarithmisch oder nach einem anderen Gesetze variieren, was in einer bald folgenden Untersuchung über die Theorie des Mattglas-Sichtmessers näher behandelt werden wird[1]). Jedenfalls steckt aber in der bei der Sichtmessung mit diesem Instrument zugrunde gelegten Beziehung zwischen Sicht S, Lufttrübung $(14{,}3 - a)$ und Entfernung l des Ziels: $S = \frac{l}{14{,}3 - a}$ die stillschweigende Annahme, daß auch die Lufttrübung mit Zunahme der Entfernung des Ziels nach demselben Gesetze zunimmt wie die Filtertrübung bei Zunahme der Filteranzahl. Man mißt daher hier die Lufttrübung mit einem ihr adäquaten Maßstab.

Wenn auch die Meßgenauigkeit des Stufensichtmessers durchaus genügt und sogar größer ist, als es die geringe örtlich-zeitliche Konstanz der Sicht in der Regel erfordert, so ist doch eine kontinuierliche Veränderlichkeit der Filtertrübung nicht unerwünscht, besonders wenn das Instrument dadurch konstruktiv einfacher und billiger werden könnte. Schon anfangs hatte ich diesen Gedanken, führte ihn aber nicht aus, weil sich eine Filterplatte mit stetig zunehmender und für Sichtmessungen geeigneter Trübung, ein Filterkeil, schwierig herstellen läßt und das Instrument unverhältnismäßig verteuert hätte. Bei der Suche nach einer Filtersubstanz, die in Struktur und Farbe der natürlichen Lufttrübung möglichst gut angepaßt ist, schied ich eine anfangs verwendete, aus belichteten photographischen Platten hergestellte Grauskala als zu schwärzlich im Ton, sowie auch Milchglasschichten als zu gelblichrötlich gefärbt aus; erst bei an der Oberfläche mattiertem Glas, das sich zu jeder gewünschten Dichte der Trübung mattschleifen läßt, fand ich die gesuchte weißliche, schwach bläulich-graue Tönung bei Durchsicht. Während man einen photographischen Graukeil oder einen in der Masse getrübten, geschliffenen Mattglaskeil[1]) leicht herstellen kann, ist eine gleichmäßig an Trübung zunehmende Mattierung einer Glasoberfläche nur äußerst schwierig zu erzielen.

Man kann aber, wie ich inzwischen gefunden habe, auf außerordentlich einfache Weise den Trübungsgrad einer einzelnen, gleichförmig getrübten Mattscheibe kontinuierlich meßbar ändern, indem man ihre Beleuchtung und damit die in ihr stattfindende Lichtzerstreuung in bestimmter Weise ändert. Die überwiegend auf Lichtzerstreuung beruhende Trübung eines Oberflächenelements des Mattglases, durch das man hindurchschaut, wächst nämlich mit dem räumlichen Winkel ω des Lichtkegels, der das in Durchsicht betrachtete Oberflächenelement der Mattscheibe mit seiner Spitze trifft (Fig. 1). Ist dieser Winkel klein,

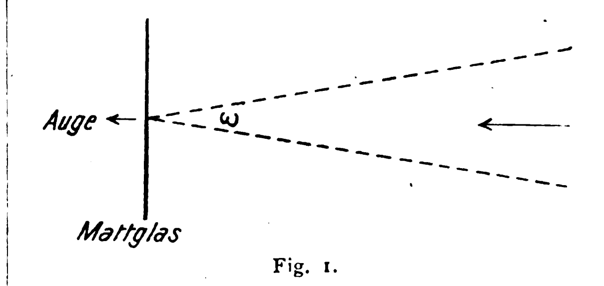


Fig. 1.

so kann die optische Wirkung der Trübung auch eines dicht mattierten Glases sehr gering werden. Legt man ein solches (z. B. die Mattscheibe einer photographischen Kamera) etwa auf Druckschrift, so kann man die Buchstaben deutlich erkennen, während beim Hindurchblicken durch dieses freigehaltene Mattglas kein Gegenstand erkennbar sein wird.

Will man diese Erscheinung zur Konstruktion eines stetig variierbaren Sichtmessers benutzen, so hat man ein Mattglas von geeigneter Dichte (etwa Stufe 14,3 bis 15 des Stufensichtmessers), durch das beim freien Durchblick kein Gegenstand erkennbar ist, am Ende eines Rohres anzubringen und das andere Rohrende

1) Über das von den photometrischen Gesetzen stark abweichende Verhalten diffus durchlässiger Substanzen verschiedener Art vgl. E. Liebenthal, Praktische Photometrie, Braunschweig 1907, S. 88.

1) Einen solchen, zur Sichtmessung nach dem Prinzip meines Sichtmessers eingerichteten Milchglaskeil zeigte Herr F. Linke am 6. Oktober 1920 bei der Leipziger Tagung der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft.

mit einer Blende zu versehen. Den Öffnungswinkel des Lichtkegels, der die Mattscheibe durch die Blende und das Rohr trifft, kann man nun auf zwei Arten meßbar variieren: entweder man ändert die Rohrlänge durch einen ausziehbaren Tubus oder man verwendet eine Irisblende. Diese letztere Art ist die bequemere, da zur Erzielung der erforderlichen Trübungsgrade nur durch Variierung der Rohrlänge bei konstanter Blendenöffnung ein ungeschickt langes Rohr nötig wäre.

An Stelle des Stufensichtmessers würde also der Blendensichtmesser treten, dessen Trübungsgrad kontinuierlich durch Verstellen der Irisblende geändert und mit dem über einer Skala spielenden Verstellhebel der Blende abgelesen werden kann. Bei ganz offener Blende ist die Trübung des Mattglases am größten. Je kleiner man die Blende stellt, desto geringer wird die Trübung, so daß man ein durch das Instrument mit der Mattscheibe am Auge betrachtetes, bei großer Blendenöffnung nicht erkennbares Ziel von einer bestimmten Blendenöffnung an bei Verkleinerung der Blende immer deutlicher sieht.

Zur Sichtmessung stellt man, wie beim Stufensichtmesser, zunächst so ein, daß das Ziel bei kleiner Blende noch sichtbar ist, und vergrößert dann die Blende bis zum Verschwinden des Ziels.

Die Skala der Irisblende wird durch Vergleichung mit einem Stufensichtmesser nach dem Trübungsgrad der für diesen als willkürliche Einheit eingeführten Stufengröße geeicht, so daß man direkt die a-Werte an der Skala ablesen und dann die Sicht nach der bisher benutzten Formel berechnen kann.

Ein Nachteil des Blendensichtmessers besteht darin, daß naturgemäß die Helligkeit und Größe des Gesichtsfeldes für die niedrigen Filtergrade infolge der kleineren Blende geringer ist als für die höheren Filtergrade. Jedoch treten dadurch im praktischen Gebrauch des Instruments für die mittleren und stärkeren Filtertrübungen keine Schwierigkeiten auf; bei den kleinsten Filtergraden, die man aber nur sehr selten braucht, reicht die Helligkeit und Gesichtsfeldgröße nicht mehr aus für zuverlässige Messungen.

Ein Probeinstrument (Fig. 2) wurde so eingerichtet, daß der Abstand Blende—Mattscheibe durch ein zwischengestecktes Rohrstück von 36,3 auf 116,8 mm verändert werden kann; mit dem kürzeren Rohr sind die Filtertrübungsgrade von 9,8 bis 14,3, mit dem längeren von 5,5 bis 12,5 einstellbar. Die lichte Rohrweite beträgt 30 mm, der größte und kleinste Blendendurchmesser 18 und 2 mm, der Durchmesser der

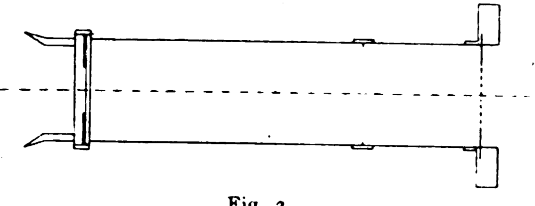


Fig. 2.

nach der Blende zu gerichteten und mit einem Schutzglas abgedeckten Mattglasfläche 14 mm, der Abstand Mattscheibe—Auge etwa 10 mm, der äußere Durchmesser der Rohrerweiterung am Auge 35 mm.

Die Eichung der Blendenöffnung durch Vergleichung mit der Filterskala des Normal-Stufensichtmessers wurde bei Sichtmessungen im Gelände ausgeführt und ergab für die Abhängigkeit des Trübungsgrades a vom offenen Blendendurchmesser d die in der Kurventafel (Fig. 3)

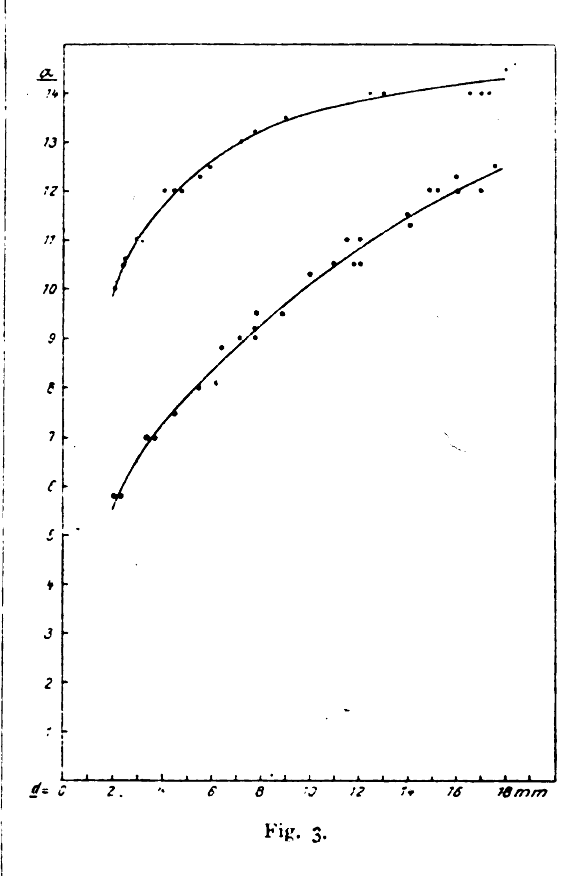


Fig. 3.

enthaltenen Werte; jeder Punkt stellt das Mittel aus mehreren (meist 3) Einzelbeobachtungen dar. Die Eichkurven sind graphisch ausgeglichen.

In einer anschließenden, bald folgenden Abhandlung wird auf die Verwertung dieser

Kurven für die Theorie der Mattglastrübung näher einzugehen sein.

Eine von dem beschriebenen Probeinstrument nur wenig abweichende Ausführung des Blendensichtmessers ist (wie auch der Stufensichtmesser) von der Firma B. Halle Nachf., Steglitz-Berlin, Hubertusstraße 11, zu beziehen. Diese Instrumente sind durch von mir ausgeführte Eichung an den Normal-Stufensichtmesser angeschlossen.

Halle a. S., Physikalisches Institut der Universität, im Juli 1921.

(Eingegangen 15. Juli 1921.)

Über die Wirkungsweise des Siliziumkarbiddetektors.

Von F. Luchsinger.

In einer Arbeit von M. J. Huizinga über die Gleichrichterwirkung von Kristalldetektoren[1]) wird die Vermutung ausgesprochen, daß die Gleichrichterwirkung eines Systems, bestehend aus einem Siliziumkarbidkristall und einer aufgepreßten Stahlspitze, durch eine Gegenspannung elektrolytischer Natur hervorgerufen wird. Da nun die hexagonalen Kristalle des Siliziumkarbids gegen äußere thermische, wie auch chemische Einflüsse sehr widerstandsfähig sind, und sich auch auf diesen Kristallen sehr leicht Punkte finden lassen, die sich durch vollkommene Gleichrichterwirkung auszeichnen, so ist es möglich, die von M. J. Huizinga ausgesprochene Vermutung zu prüfen und ein Kristall bezüglich der Unipolarität unter verschiedenen äußeren Einflüssen zu untersuchen. Damit wird es vielleicht auch ermöglicht, sich ein Bild über die Wirkungsweise anderer Detektoren zu machen.

§ 1. Die Gleichstromcharakteristik.

Das Material, das für die vorliegenden Versuche zur Verwendung gelangte, wurde mir in dankenswerter Weise von den Gotthardwerken in Bodio, Tessin, zur Verfügung gestellt, wo es für industrielle Zwecke nach dem chemischen Vorgang:

$$SiO_2 + 3C = SiC + 2CO$$

im elektrischen Widerstandsofen hergestellt wird. Zur Untersuchung wurde ein möglichst normales Kristallstück (das keine Durchwachsungen zeigte) zwischen Messingbacken eingeklemmt und auf die spiegelnde Oberfläche unter leichtem Druck eine Stahlspitze (Nähnadel) aufgepreßt. Durch Verschieben derselben auf der Kristalloberfläche lassen sich leicht Punkte teilweiser oder auch totaler Gleichrichterwirkung auffinden. Der so hergestellte Detektor war in einem Stromkreis mit einem Zeigergalvanometer ($1^0 = 4{,}10^{-6}$ Amp.) eingeschaltet. Ein Stromwender gestattete die Richtung des Stromes umzukehren, und durch eine Potentiometerschaltung konnte die an den Kristall angelegte Spannung reguliert werden. Alle Siliziumkarbidkristalle, welche auf diese Weise teils mit einer Stahlspitze oder auch mit einer Platinspitze auf die Detektorwirkung hin untersucht wurden, zeigen dem Stromdurchgang in der Richtung Kristall—Spitze einen geringeren Widerstand wie in umgekehrter Richtung. Sehr selten kann man die Beobachtung machen, daß in der andern Richtung der geringere Widerstand vorherrscht, doch dauert dieser Zustand nur kurze Zeit und hat dann meistens das Versagen dieses Kristallpunktes als Detektor zur Folge.

Austin[1]) findet in einer Arbeit über die Gleichrichterwirkung von Stahl auf Silizium (rein) in der Stromrichtung Stahl—Silizium den geringeren Widerstand, hingegen in einer unreinen Probe Siliziums das umgekehrte Verhalten, so daß es den Anschein hat, daß in unserem Falle der Kohlenstoff im Siliziumkarbid die Rolle einer Verunreinigung spielt.

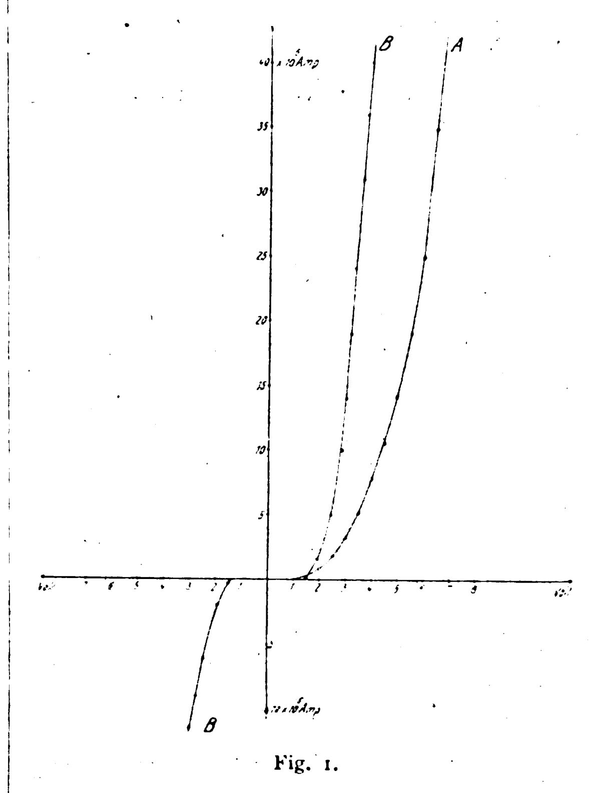


Fig. 1.

1) J. M. Huizinga, diese Zeitschr. 21, 91, 1920.

1) L. W. Austin, diese Zeitschr. 9, 253, 1908.

Bei zu groß angelegter Spannung konnten Erscheinungen beobachtet werden, wie sie von Frl. Székely de Doba[1]) in ihrer Arbeit als „Zusammenbruch" der Charakteristik genannt werden.

Die in Fig. 1 unter (*A*) abgebildete Charakteristik zeigt einen ähnlichen wie von J. M. Huizinga angegebenen Verlauf, d. h. eine starke Abweichung von dem Ohmschen Gesetze. Eine teilweise Zersetzung der Kristallberührungsstelle bei großen Stromstärken (100 Milliamp.) konnte auch mit mikroskopischer Beobachtung nicht nachgewiesen werden, was auch um so einleuchtender erscheint, indem sich die Bildungsreaktion des Siliziumkarbids erst bei Lichtbogentemperatur umkehrt.

Für den in Fig. 1[2]) (*A*) angegebenen Fall haben wir im dritten Quadranten der E—J-Ebene überhaupt vollständige Abdrosselung des Stromes, was einer vollkommenen Gleichrichtung entspricht. Die Charakteristik verläuft bis Abszisse 6 Volt gebogen, um sich dann nachher einer Geraden zu nähern. Wenn wir nach den Überlegungen von J. M. Huizinga die Gegenspannung graphisch ermitteln, d. h. den geradlinigen Teil bis zum Schnittpunkte mit der E-Achse verlängern, so erhalten wir als wirksame Maximalgegenspannung ca. 4,7 Volt gegenüber 2,5 Volt, wie aus den Versuchen des erwähnten Verfassers hervorgeht.

§ 2. Das Verhalten des Gleichrichtereffektes bei hoher Temperatur.

Wie aus der bisherigen Literatur hervorgeht, werden bis jetzt vorzugsweise 2 verschiedene Erklärungsarten für die Gleichrichterwirkung von Kontaktdetektoren herangezogen.

Einmal eine elektrochemische Theorie, nach deren Überlegungen sich die Eigentümlichkeiten der Gleichstromcharakteristiken durch eine elektrolytische Polarisation innerhalb einer Feuchtigkeitsschicht erklären lassen[1]). Zweitens, die thermoelektrische Theorie, deren Anwendbarkeit aber von Ettenreich[3]) sehr in Frage gestellt wird. Wir wenden uns zunächst der elektrolytischen Deutung des Problems zu und untersuchen, inwiefern sich diese Erklärungsweise für den Fall des Siliziumkarbiddetektors anwenden läßt. Wenn die auf der Kristalloberfläche durch Adsorption festgehaltene Feuchtigkeitsschicht für das Zustandekommen der unipolaren Leitung notwendig ist, so sollte eine Entfernung derselben den Gleichrichtereffekt zerstören.

Wie Bunsen[1]) gezeigt hat, ist es aber äußerst schwierig, solche Oberflächenschichten von Körpern zu entfernen, und das einzige Hilfsmittel, welches wir für diesen Fall haben, besteht außer der Druckverminderung der umgebenden Atmosphäre in einer starken, bis zu 500° C reichenden Temperatursteigerung des betreffenden Körpers. Infolge der eingangs erwähnten stabilen chemischen Konstitution des Siliziumkarbids steht nun nichts im Wege, den Kristall bis zum Glühen zu erhitzen, ohne befürchten zu müssen, daß irgendwelche sekundäre chemische Prozesse auf das elektrische Verhalten des Kristalls einwirken könnten. Zur Ausführung dieser Glühversuche wurde folgende

§ 3. Versuchsanordnung

getroffen (Fig. 2). Der Kristall K befindet sich zwischen Messinghaltern in einem dreifach tubulierten Glasballon federnd eingeklemmt. Das Glühen desselben geschieht durch Wechselstrom aus dem städtischen Netz, der den beiden Messinghaltern, die sich im unteren Schliff befinden, zugeführt wird. Die Zuleitungen sind mittelst Platindrähten luftdicht an den Einführungsstellen verschmolzen. In einem zweiten seitlichen Schliff befindet sich ein Gefäß mit Phosphorpentoxyd zur

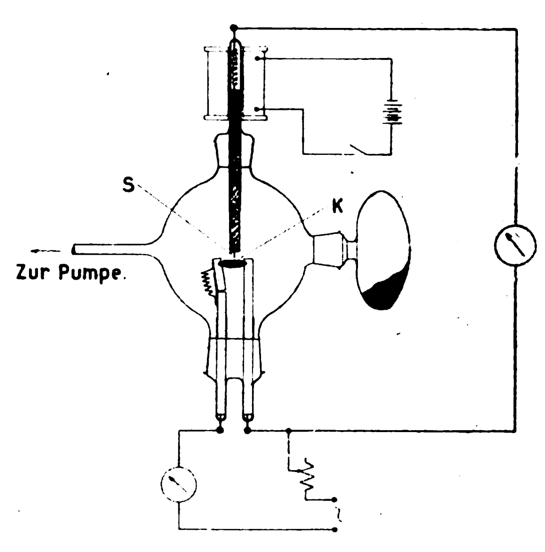


Fig. 2.

1) A. Székely de Doba, Wien. Ber. IIa. **127**, 719, 1918.

2) Fig. 1. (B) zeigt eine Charakteristik mit teilweiser Gleichrichtung.

3) Ettenreich, diese Zeitschr. **21**, 208, 1920.

1) R. Bunsen, Wied. Ann. **22**, 149, 1884.

Trocknung des Gefäßinhaltes. Um nun nach Belieben unmittelbar nach dem Glühprozeß oder auch während desselben den Detektor auf die Gleichrichterwirkung untersuchen zu können, befindet sich eine Platinspitze S am Ende eines Messingstabes eingesetzt, der in die rohrartige Verlängerung des oberen Schliffes genau eingepaßt ist. Das Ende des Messingzylinders geht in ein Stück Eisen über und ist mittelst eines Platindrahtes, der als Stromzuführung dient, in das Ende des Glasrohres luftdicht eingeschmolzen. Durch Überschieben eines stromdurchflossenen Solenoids über den Eisenkern gelingt es leicht, denselben mit der Platinspitze zu heben und wieder in möglichster Nähe der gleichen Kristallstelle zu orientieren. Damit wird ermöglicht, ein und dieselbe Stelle vor und nach dem Glühen auf die Charakteristik hin zu untersuchen.

Während des Glühens mußte der ganze Glasballon und namentlich die unteren Zuführungsstellen durch fließendes Wasser gekühlt werden.

§ 4. Versuchsresultate.

Nach der Einführung eines passenden Kristallstückes zwischen die Messinghalter wurde das Glasgefäß ausgepumpt. Dann die Platinspitze sorgfältig auf die Kristalloberfläche gesetzt und der Kristall durch Drehen des unteren Schliffes in eine solche Lage gebracht, daß eine Stelle unipolarer Leitfähigkeit konstatiert werden konnte, deren Charakteristik aufgenommen wurde. Nachdem die Spitze mit dem Magneten ca. 1—2 mm von der Oberfläche entfernt worden war, leitete man durch Einschalten des Wechselstromes das Glühen ein. Durch langsames Steigern der Stromstärke bis ca. 9—10 Amp. konnte die Temperatur bis zur Weißglut getrieben werden.

Damit etwelche Gase, die während dem 2stündigen Erhitzungsprozeß aus dem Kristall austreten, entfernt werden, so blieb die Pumpe dauernd im Betrieb.

Folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Strom- und Spannungswerte vor und nach dem Glühen an der gleichen Kontaktstelle.

Tabelle I.

Versuch Nr.	Vor dem Glühen		Nach dem Glühen	
	E	J	E	J
I.	2,0 Volt	$0,8 \cdot 10^{-6}$ Amp.	2,0 Volt	$1,2 \cdot 10^{-6}$ Amp.
	2,4	3,2	2,4	2,8
	2,8	7,6	2,8	8,0
	3,0	8,8	3,0	8,8
	3,4	16,4	3,4	17,2
	3,8	24,8	3,8	24,4
	4,0	30,0	4,0	30,8
	4,6	42,0	4,6	41,2
	5,0	52,0	5,0	51,2
II.	3,2	4,0	3,2	3,6
	3,4	4,4	3,4	4,8
	3,6	7,6	3,6	7,6
	3,8	8,4	3,8	8,8
	4,0	12,4	4,0	12,0
	4,2	16,0	4,2	16,0
	4,4	19,6	4,4	19,2
	4,6	24,0	4,6	24,8
	4 8	30,0	4,8	30,0
	5,0	40,0	5,0	40,4

Bemerkungen: Versuch I. Bei diesem Versuch war die Gleichrichterwirkung eine vollständige bis $E = 5,2$ Volt. Von dieser Spannung an wurde auch Strom in entgegengesetzter Richtung durchgelassen. Durch das Glühen wurde obige Spannungsgrenze verschoben auf 5,5 Volt.

Versuch II. Gleichrichterwirkung vollständig bis $E = 7,5$ Volt. Durch das Glühen verändert zu $E = 7,3$ Volt.

Aus diesen Messungen geht hervor, daß durch das Glühen des Kristalls die Gleichrichterwirkung praktisch nicht verändert wird, indem die Charakteristiken ein und desselben Punktes vor und nach dem Glühprozesse sich nur um kleine Beträge im positiven oder negativen Sinne geändert haben. Diese Abweichungen können aber sehr wohl durch eine teilweise, durch das Glühen hervorgerufene Veränderung des Kristallkontaktes in den Messinghaltern erklärt werden, da an diesen Stellen bei starker Stromdurchleitung fortwährend kleine Lichtbogen zu bemerken waren. Als berechtigte Schlußfolgerung dieser Beobachtungen, die sich über 8 Versuche an verschiedenen Kristallstücken erstreckten, ergibt sich die Tatsache, daß eine elektrolytische Deutung der unipolaren Leitung eines SiC-Detektors, wie sie von anderen Autoren [1,2]) herangezogen wird, in diesem Falle nicht angewendet werden kann. Eine durch Adsorption festgehaltene Feuchtigkeitsschicht verliert bei den hohen Temperaturen ihre Beständigkeit.

Um zu entscheiden, ob der Kristall auch im Glühzustande unipolares Leitvermögen zeigt, wurde die Platinspitze von der Oberfläche nicht entfernt und nach Fig. 2 über ein Gleichstrommeßinstrument mit der einen der beiden Glühstromzuführungsstellen verbunden. Versuche ergeben, daß dann in diesem Stromkreise eine der Glühstromintensität entsprechende Gleichstromkomponente fließt. Doch läßt sich mit dieser Anordnung noch nicht mit Sicherheit feststellen, ob nicht die Gleichrichtung des Wechselstromes durch Thermokräfte hervorgerufen

1) J. M. Huizinga, diese Zeitschr. **21**, 91, 1920.
2) A. Székely de Doba, Wien. Ber. IIa, **127**, 719, 1918.

wird, die sich infolge ungleicher Temperatur der Kristallhalter ausbilden können.

Von diesen Thermokräften kann man sich unabhängig machen, wenn man auf der Rückseite des Kristalls eine zweite Elektrode in Form eines dünnen Platinbleches aufpreßt. Da dasselbe infolge seiner geringen Wärmekapazität die gleiche Temperatur wie der Kristall und die darauf ruhende Spitze annimmt, so verhalten sich die beiden Kontaktstellen wie ein Thermoelement Platin—SiC—Platin bei derselben Temperatur, wir haben also keine thermoelektrische Kraft zu erwarten. Eine diesbezügliche Prüfung ergab dann auch ein negatives Resultat, doch war es wiederum möglich, die Gleichrichterwirkung zu konstatieren. Eine weitere Prüfung um thermoelektrische Kräfte an der zuerst erwähnten Versuchsanordnung zu konstatieren, in der Weise, daß nach dem Ausschalten des Glühstromes auch der Gleichstrom sofort verschwindet, zeigt wiederum, daß keine Thermoströme im Spiele sind, die sich ja sonst an dem noch heißen Kristall ausbilden müßten. Um quantitative Resultate über die Veränderung der Charakteristik bei hohen Temperaturen zu erhalten, wurde ein Detektor in einen elektrischen Ofen eingebaut, der Temperatursteigerungen bis 900° C erlaubte. Die Temperaturen konnten durch ein Platin-Platinrhodiumthermoelement gemessen werden, das unmittelbar neben der Kontaktstelle des Detektors orientiert war. Die

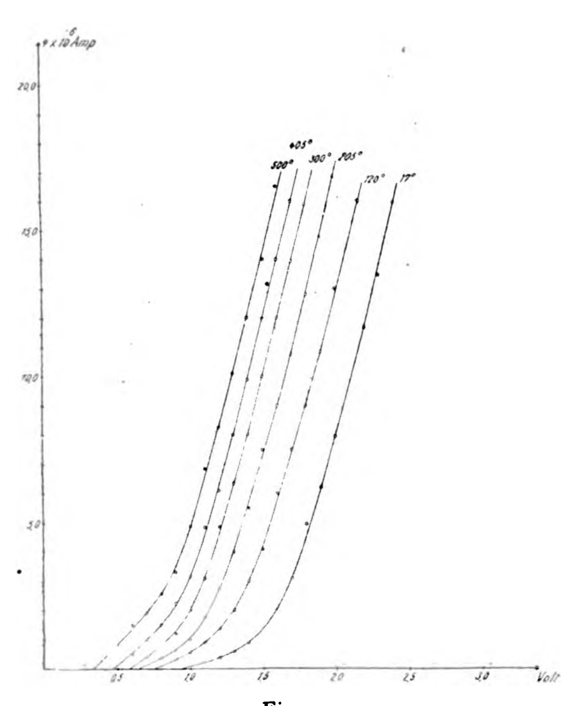


Fig. 3.

Kurven der Fig. 3 zeigen den Verlauf der Charakteristiken ein und desselben Punktes bei einem Temperaturintervall von 17—500° C. Dabei ist zu beachten, daß bei dieser Meßreihe in keinem Falle Strom in der umgekehrten Richtung durchging. Bei höheren Temperaturen wie 500° C gestaltete sich die Aufnahme der Charakteristik äußerst schwierig, da ohne äußere Ursache Schwankungen in den Stromwerten auftraten und ein genaues Ablesen verhinderten[1]). Tab. II repräsentiert die Werte einer Messung bei 17° C und 870° C (Glühtemperatur), die indessen aus obigem Grunde keine große Genauigkeit beanspruchen können.

Tabelle II[2]).

$T = 17^0$ C		$T = 870^0$ C	
E	J	E	J
1,5 Volt	$0{,}4 \cdot 10^{-6}$ Amp.	0,02 Volt	$15{,}2 \cdot 10^{-6}$ Amp.
1,7	3,2	0,04	20,8
2,0	4,0	0,06	27,6
2,2	4,8	0,08	35,2
2,4	7,2	0,10	40,0
2,7	8,8	0,12	48,0
2,9	11,3	0,14	52,8
3,3	14,4	0,16	59,2

Weitere Versuche bei hohen Temperaturen entsprechend den Versuchen von Frl. A. Székely de Doba wurden in einem Paraffinbad ausgeführt mit dem Erfolge, daß auch in diesem Falle keine Abnahme der Unipolarität zu konstatieren war, wohl aber wie in allen besprochenen Versuchen Widerstandsverringerung.

§ 5. Versuche in flüssiger Luft.

Das Verhalten eines SiC-Detektors bei der tiefen Temperatur der flüssigen Luft (— 180° C) änderte sich nur in der Weise, daß eine ca. 10fache Widerstandszunahme zu konstatieren war, jedoch keine Abnahme des Gleichrichtereffektes.

Fig. 4 zeigt die Charakteristiken eines Detektors im Temperaturintervall — 180—200° C, die gewonnen wurden durch abwechselndes Eintauchen des Kristalls in die flüssige Luft und in das erhitzte Paraffin.

§ 6. In Fig. 5 sind die aus Fig. 3 entnommenen Stromwerte bei konstanter Spannung in Funktion der Temperatur aufgetragen. Ferner sind in derselben Figur die aus Fig. 3 für den Strom $J = 0$ extrapolierten Minimalspannungen dargestellt. Währenddem sich für

1) A. Székely de Doba, Wien. Ber. IIa, **127**, 719, 1918.

2) In umgekehrter Stromrichtung war bei beiden Temperaturen vollständige Abdrosselung.

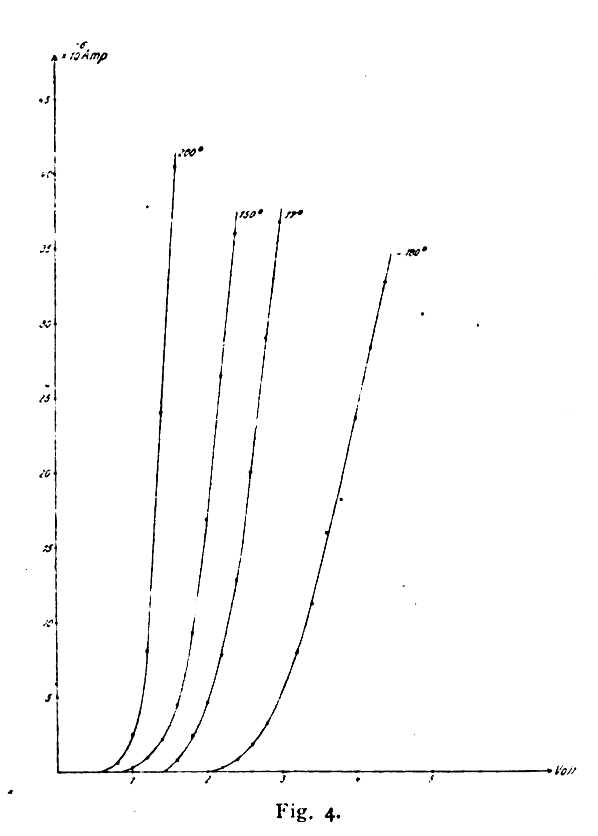


Fig. 4.

diesen Fall ein angenähert lineares Verhalten zeigt, ist der funktionelle Zusammenhang für den ersten Fall nicht ohne weiteres ersichtlich (möglicherweise linear). Es wird die Aufgabe der Theorie sein, diesen experimentellen Befund zu erklären. Immerhin scheint es nicht ausgeschlossen, einer elektronentheoretischen Deutung des Detektorproblems Raum zu geben, indem wahrscheinlich nur auf diese Weise die Wirksamkeit eines Detektors bei hohen Temperaturen erklärt werden kann.

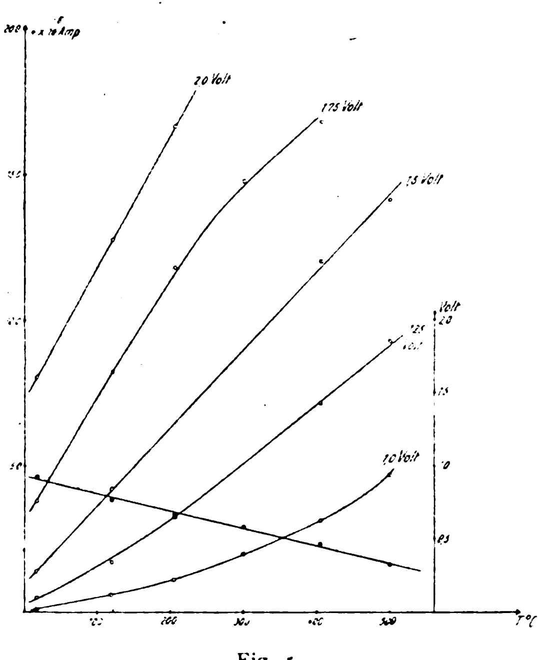


Fig. 5.

Zusammenfassung.

Zusammenfassend wurden durch die Untersuchung eines Siliziumkarbiddetektors folgende Tatsachen festgestellt:

1. Es kann an der Berührungsstelle keine elektrolytische Zersetzung beobachtet werden.
2. Die Gleichrichterwirkung des Detektors vermindert sich nicht bei tiefer und bei hoher Temperatur, bleibt sogar im Glühzustande des Kristalls unverändert.

Damit ist erwiesen, daß auf diesen Fall eines Kristalldetektors die elektrolytische Erklärungsweise, basierend auf der Anwesenheit einer oberflächlichen Feuchtigkeitsschicht, nicht angewendet werden darf.

Herrn Prof. Dr. Edgar Meyer bin ich für das fördernde Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, zu großem Danke verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 30. Juni 1921.)

Ein praktisch brauchbarer Kathodenstrahl-Oszillograph.

Von M. Brenzinger.

(Mit Tafel III.)

Die Aufnahme von Strom- und Spannungskurven mit dem gewöhnlichen Oszillographen macht keine Schwierigkeiten, so lange es sich nicht um sehr hohe Frequenzen handelt. Sobald jedoch in der aufzunehmenden Kurve Schwingungen auftreten, deren Dauer von der Größenordnung der Eigenschwingungsdauer der Meßschleife ist, wird das aufgezeichnete Bild völlig falsch. In noch viel höherem Maße gilt das natürlich von Hochfrequenzschwingungen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie üblich sind und von rasch verlaufenden Vorgängen, wie z. B. Ein- und Ausschaltkurven. In solchen Fällen ist auch bisher schon vielfach das Kathodenstrahlrohr von Braun und seine Modifikationen verwendet worden. Seiner allgemeineren Anwendung lagen jedoch zwei Dinge hindernd im Wege: die bisher allgemein übliche Erzeugung der für den Betrieb der Röhre notwendigen Gleichstromhochspannung durch die



Influenz-Elektrisiermaschine, ferner die Notwendigkeit der Aufstellung eines Drehspiegels, um die aufzunehmende Kurve dem Auge in ihrer wirklichen Gestalt sichtbar zu machen.

Es sind zwar in neuerer Zeit Fortschritte im Bau der Influenz-Elektrisiermaschine gemacht worden. Trotzdem hat die Benutzung dieser Maschine große Nachteile. Sie ist nicht unabhängig vom Feuchtigkeitsgehalt der Luft, sie polt sich unter Umständen während des Betriebes um und gibt nicht immer die gleiche Spannung und die gleiche Leistung ab. Die Folge davon ist ein unruhiger Fleck in der Röhre, ungleichmäßige Helligkeit, Hart- oder auch Weichwerden der Röhre im Betrieb und Ähnliches. Das alles läßt sich vermeiden, wenn man für die Erzeugung der Hochspannung eine Apparatur verwendet, wie sie Fig. 1 zeigt.

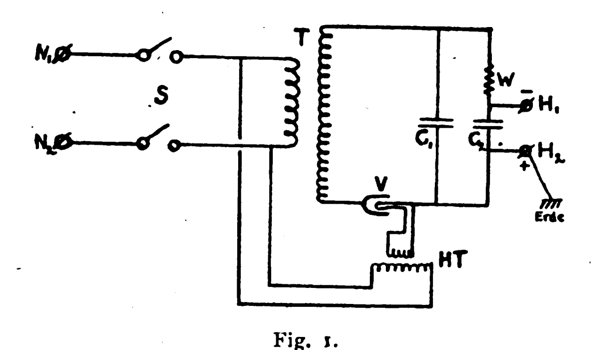


Fig. 1.

Die an den Klemmen N_1, N_2 liegende Wechselspannung eines normalen Netzes wird bei geschlossenem Hauptschalter S durch den kleinen Hochspannungstransformator T herauftransformiert. Mittels dieser Hochspannung wird der Kondensator C_1 durch das Glühventilrohr V aufgeladen. Da die Entladung von C_1 vom Ventil verhindert wird, muß er die Scheitelspannung beibehalten. Um schließlich eine völlige Gleichförmigkeit der Spannung an der Röhre zu gewährleisten, ist noch der zweite Kondensator C_2 durch den hochohmigen Widerstand W mit C_1 verbunden. Man erhält so an den Hochspannungsklemmen $H_1 H_2$ eine praktisch völlig konstante Gleichspannung. Da die Stromaufnahme der Braunschen Röhre außerordentlich gering ist, genügen sehr kleine Kapazitäten. Der positive Pol H_2 der Hochspannungsseite und damit die Anode der Röhre wird zweckmäßig geerdet. Der Heiztransformator HT speist den Glühfaden der Ventilröhre; da seine Sekundärseite an der Erde liegt, die Primärseite am Netz, braucht er keinerlei besonders sorgfältige Isolierung und kann deshalb sehr klein werden. Diese Schaltanordnung hat den großen Vorzug, daß sie jederzeit betriebsbereit ist, durch einen einzigen Schalter eingeschaltet werden kann und unter allen Umständen immer dieselbe Spannung liefert, von kleinen Differenzen durch Schwankungen der Netzspannung abgesehen. Sie kann an jedes Lichtnetz wegen ihres außerordentlich geringen Energieverbrauchs durch einen einfachen Steckkontakt angeschlossen werden. Die Gleichmäßigkeit der erzeugten Spannung ist so groß, daß man irgendwelche periodische Schwankungen, herrührend von der Pulsation des primären Wechselstroms, mit den üblichen Hilfsmitteln nicht feststellen kann. Sie läßt sich auch ohne weiteres durch Vergrößerung der beiden Kondensatoren C_1 und C_2 bis zu einem beliebigen Grad steigern. Der hochohmige Widerstand W verhindert in wirksamer Weise gleichzeitig, daß ein zu hoher Strom durch die Röhre fließen kann. Aus diesem Grunde kann die Röhre sehr lange Zeit in unveränderter Weise betrieben werden. Sie ist z. B. in der Versuchsanordnung des Verfassers seit mehreren Monaten fast täglich, oft stundenlang im Betrieb, ohne daß sie Neigung gezeigt hätte, sich irgendwie zu verändern.

Die photographische Wiedergabe der mit der Oszillographenröhre erhaltenen Kurve ist schon von verschiedener Seite versucht und auch ausgeführt worden. Es gibt dazu mehrere Wege. Man kann z. B. den Drehspiegel synchron mit der Frequenz der aufzunehmenden Kurve antreiben und das Spiegelbild photographieren. Diese Methode hat den Nachteil sehr großen Lichtverlustes, außerdem läßt sich die Synchronisierung des Spiegels nicht immer bequem ausführen. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, daß man das Bild des auf dem Leuchtschirm der Röhre hin- und herschwingenden Kathodenstrahlflecks durch ein photographisches Objektiv auf einen rotierenden Film wirft. Auch diese Methode verlangt natürlich eine Synchronisierung der umlaufenden Filmtrommel, da die Helligkeit zu gering ist, um eine Aufnahme bei einer Umdrehung zu gestatten. Eine dritte Methode besteht darin, daß man dem Kathodenstrahl selbst in der Röhre neben der Beeinflussung durch den aufzunehmenden Vorgang eine zweite Ablenkung erteilt, deren Ebene senkrecht oder auch in einem beliebigen Winkel zur Ebene der Ablenkung durch die aufzunehmende Kurve steht. Man kann dazu ein sinusförmig verlaufendes magnetisches oder auch elektrisches Feld verwenden und bekommt dann je nach Größe und Phase dieses zweiten Feldes gegenüber dem des aufzunehmenden Vorgangs auf dem Fluoreszenzschirm Figuren, die nur durch umständliche, zeitraubende Umzeichnung und Auswertung

für den praktischen Gebrauch, d. h. für die Analyse der Kurve verwendbar sind. Das läßt sich vermeiden, wenn man dem Kathodenstrahlbündel statt der sinusförmigen eine zeitproportional verlaufende Ablenkung erteilt durch ein elektrisches oder magnetisches Hilfsfeld, dessen ablenkende Kraft auch hier wieder in irgendeinem Winkel, zweckmäßig in einem rechten Winkel zur Ablenkungsrichtung des aufzunehmenden Vorgangs steht. Es wird dann die Kurve ebenso wie durch die Rotation des Drehspiegels zeitlich auseinandergezogen und man erhält das Bild in rechtwinkeligen oder auch schiefwinkeligen Koordinaten. Dieses Verfahren hat z. B. vor kurzem Rogowski (Archiv f. Elektrotechnik **9**, 115, 1920) angewandt, indem er eine dreieckförmige Spannungskurve an zwei Hilfsplattenelektroden der Röhre anlegte. Er braucht aber zu seinem Verfahren einen Wechselstrom von der halben Frequenz der aufzunehmenden Schwingung. Das bedeutet immerhin eine Komplikation. Es ist auch bereits versucht worden, einen linear ansteigenden Strom zu erzeugen und diesen mittels Ablenkungsspule auf das Kathodenstrahlenbündel einwirken zu lassen. Das wurde von Zenneck in der Weise ausgeführt, daß durch einen Schaltapparat in einem Hilfsstromkreis ein Ohmscher Widerstand möglichst kontinuierlich verkleinert wurde.

Es gibt aber eine andere Möglichkeit, einen linearen Stromanstieg automatisch dadurch zu erhalten, daß man eine Gleichspannung an einem Stromkreis anlegt, dessen Konstante so gewählt sind, daß der Stromanstieg linear erfolgt. So steigt z. B. der Strom in einem Stromkreis, der Selbstinduktion und Widerstand enthält, nach der bekannten Helmholtzschen Gleichung an:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (1)$$

worin E die angelegte Spannung, R der Ohmsche Widerstand und L die Induktivität des Kreises. Dies ist die bekannte Exponentialkurve, wie sie durch die Fig. 2 dargestellt wird. Der Strom wächst zunächst fast geradlinig, dann immer langsamer, um sich schließlich dem Grenzwert zu nähern, der gegeben ist durch das Ohmsche Gesetz. Macht man nun den Widerstand immer kleiner, so wird der geradlinige Teil der Kurve immer länger und für den idealen Fall, daß der Stromkreis nur noch Induktivität enthält, erfolgt der Anstieg des Stromes nach der Gleichung:

$$i = \frac{E}{L}t. \qquad (2)$$

Dieser ideale Fall des völlig linearen Stromanstiegs ist natürlich nicht realisierbar. Man

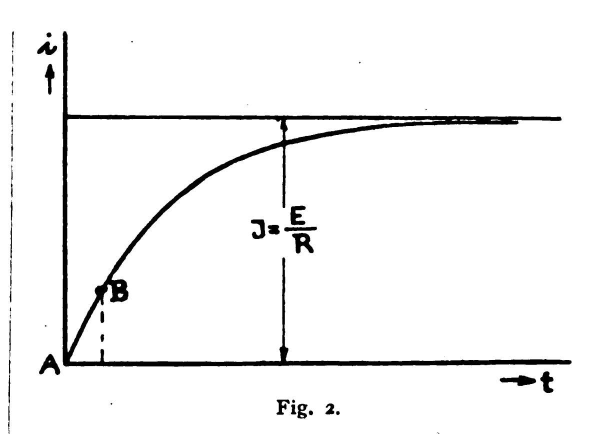


Fig. 2.

kann aber wohl erreichen, daß die Induktivität sehr stark überwiegt gegenüber dem Widerstand. Dann steigt der Strom über eine genügend lange Zeit nahezu linear an und nähert sich einem sehr großen Endwert. Man muß dann nur dafür sorgen, daß lediglich der erste zeitproportionale Teil des Anstiegs benutzt wird, also z. B. in der Kurve Fig. 2 der Teil AB. Durch einen rotierenden Kontaktgeber wird der Stromkreis während einer bestimmten Zeit, z. B. während einer oder mehrerer Perioden des aufzunehmenden Kurvenverlaufs, geschlossen und dann während einer ganz kurzen Zeit unterbrochen. So erhält man eine Kurvenform des Hilfsstromes, die den Zacken eines Sägeblattes ähnelt, wie sie Fig. 3 darstellt.

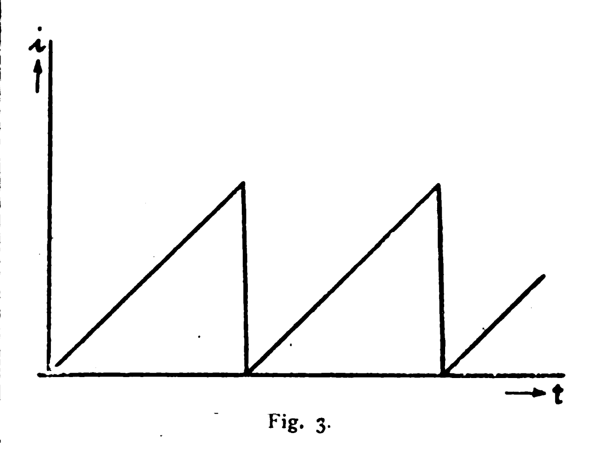


Fig. 3.

Der Hilfsstromkreis, dessen Schaltung in Fig. 4 schematisch dargestellt wird, enthält eine große

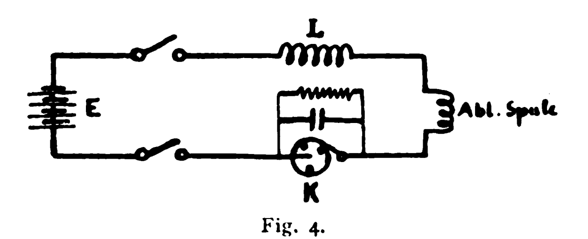


Fig. 4.

Induktivität L, den Kontaktgeber K, die Stromquelle E und die Ablenkspule. Damit die Unterbrechung am Kontaktgeber völlig störungsfrei verläuft, wird parallel ein Kondensator und ein großer Ohmscher Widerstand zur Schwingungsdämpfung gelegt. Die Rotationsgeschwindigkeit des Kontaktgebers kann an und für sich beliebig gewählt werden. Setzt man ihn auf einen kleinen Gleichstrommotor auf, so kann man, genau wie beim Oszillographen gewöhnlicher Bauart für beliebige aufzunehmende Schwingungen die Tourenzahl so einregulieren, daß die Kurve auf dem Schirm der Röhre ganz langsam vorbeiwandert oder auch nahezu stillsteht. Dieses Verfahren ist für die Betrachtung mit dem Auge oft recht bequem, eignet sich aber für die photograpische Aufnahme vor der Hand nicht, da infolge der geringen Lichtstärke des Flecks eine längere Exposition erforderlich ist. Immerhin werden die Kurven auf dem Schirm so hell, daß sie im verdunkelten Raum bei einer Röhre mit großem Leuchtschirm einem großen Zuhörerkreis bequem vorgeführt werden können. Bei Untersuchungen an Wechselstrommaschinen setzt man den Kontaktgeber, der sehr klein und handlich sein kann, zweckmäßig auf die Welle der Maschine selbst auf und erhält dann stillstehende Kurven, die ohne weiteres photographisch festgehalten werden können. Dasselbe läßt sich natürlich für ein Wechselstromnetz mit einem Synchronmotor erreichen, der ebenfalls sehr klein sein kann. Durch die Wahl der Größe der Induktivität L kann die aufzunehmende Kurve in weiten Grenzen auseinandergezogen oder zusammengedrängt werden. Für das Auge sichtbar ist natürlich aber immer nur der Teil, der auf den Schirm fällt. Durch Verdrehen der Bürsten am Kontaktgeber kann man jede beliebige Phase der aufzunehmenden Schwingung auch bei stillstehender Kurve auf dem Leuchtschirm erscheinen lassen. Wie weit die Genauigkeit im geradlinigen Anstieg des Stromes sich treiben läßt, geht aus dem folgenden Beispiel hervor: Es sei die Zeitkonstante des Hilfsstromkreises

$$T = \frac{L}{R} = \frac{1}{5} \text{ sec.}$$

Während einer einzigen Periode eines aufzunehmenden Wechselstroms von 50 Perioden, also während $^1/_{50}$ Sekunde steigt der Strom nach der folgenden Tabelle an:

$t =$ 0	0,005	0,01	0,015	0,02 sec	
0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1 Wellenlänge	
$i =$ 0	0,0247	0,0484	0,0722	0,0952	$\frac{E}{R}$ Amp.
Abweichung von der Geraden 0	2,1	2,78	3,8 Proz.		

Der dabei auftretende größte Fehler von 3,8 Proz. dürfte innerhalb der Meßgenauigkeit liegen. Es ist natürlich auch hier zu beachten, daß die Kathodenstrahlröhre kein Präzisionsmeßinstrument darstellt, daß man deshalb bei der Auswertung der Oszillogramme immerhin einige Vorsicht anwenden muß.

Bei dem hier geschilderten Verfahren gibt es eine prinzipielle Möglichkeit, Momentaufnahmen von rasch wechselnden oder auch nur einmal verlaufenden Vorgängen zu machen. Ersetzt man den Kontaktgeber K der Fig. 4 durch einen einfachen einpoligen Schalter oder besser noch durch einen Druckknopf, so kann man durch einmaliges Schließen des Stromkreises die aufzunehmende Kurve einmal in rechtwinkeligen Koordinaten über den Leuchtschirm der Röhre hinwegwandern lassen. Man kann das zur Aufnahme von Ein- und Ausschaltvorgängen benutzen, deren Verlauf sich bei dieser Methode, wenn er nicht zu schnell erfolgt, infolge des Nachleuchtens der Fluoreszenzmasse auch mit dem Auge verfolgen läßt. Die photographische Aufnahme solcher einmalig verlaufender Vorgänge ist natürlich eine Frage der Helligkeit des Kurvenbildes und der Empfindlichkeit der photographischen Schicht. Es sind Versuche im Gange, Momentaufnahmen möglich zu machen.

Die Fig. 5, 6, 7, 8 und 9 stellen photographische Aufnahmen solcher stillstehender Kurven dar. Fig. 5 zeigt die sinusförmige Spannung des Frankfurter städtischen Netzes (45,3 Perioden/sec), Fig. 6 die Stromkurve in einem Stromkreis, bei dem Induktivität und Kapazität in Reihe geschaltet und gerade so abgestimmt sind, daß für die dritte Oberwelle Resonanz eintritt. Die beiden Fig. 7 und 8 stellen die Stromkurve im Falle großer eingeschalteter Kapazität dar. Es treten hier die Nutenschwingungen des Generators sehr stark hervor. Fig. 8 unterscheidet sich von Fig. 7 dadurch, daß infolge Verdrehung der Bürsten des Kontaktgebers ein anderer Teil der Kurve sichtbar wird. Fig. 9 schließlich gibt die Spannung an den Primärklemmen eines Induktoriums wieder, wenn die Sekundärklemmen über eine Leydener Flasche geschlossen sind. Diese letztere Kurve wurde dadurch erhalten, daß man den Kontaktgeber auf die Welle des Gasunterbrechers aufsetzte und so ebenfalls ein völlig stillstehendes Kurvenbild erhielt.

Die für die Versuche verwendete vorzüglich arbeitende Braunsche Röhre mit sehr großem

Leuchtschirm wurde uns von der Firma Emil Gundelach in Gehlberg (Thüringen) in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt, wofür ihr wie auch der Firma Conradty in Nürnberg, die die sehr kleinen Ocelit-Widerstände für den Aufbau des Hochspannungsapparates lieferte, auch hier unser verbindlichster Dank ausgesprochen wird.

Institut für Physikalische Grundlagen der Medizin.

(Eingegangen 22. Juli 1921.)

Beitrag zu der Arbeit von H. Schüler[1] über Potentialgefälle an Elektroden in Gasentladungsröhren.

Von Hans Kost.

(Mit Tafel IV.)

Das Folgende bringt drei Photogramme aus einer früheren Arbeit[2] zur Illustration der von Schüler angegebenen Entladungsformen A, B und E einer Hohlkathode. Diese befand sich in einer großen Glaskugel, an die das eigentliche Entladungsrohr angeschlossen war, das Wasserstoff enthielt, der auf das sorgfältigste gereinigt war. Auf der linken Seite ist das Ende der geschichteten positiven Säule sichtbar. Bei hohen Drucken, etwa 3 mm Hg, umgibt das negative Glimmlicht die Kathode halbkugelförmig wie ein Wattebausch, die Röhrenspannung betrug 2400 Volt, die Stromstärke 5,4 MA in Fig. 1. Verkleinert man den Druck, so umgibt das Glimmlicht die Kathode fester und bei noch weiterer Verminderung wandern Schichten aus der Kathode heraus, von denen eine in Fig. 2 sichtbar ist, $p = 2$ mm, $i = 13$ MA, $V = 2000$. Es handelt sich um einen stabilen Vorgang; durch Veränderung von Druck oder Stromstärke konnte man die Schichten aus der Hohlkathode herauswandern und wieder verschwinden lassen. Als Höchstfall bilden sich drei Schichten, die offenbar zum negativen Glimmlicht gehören. Bei weiterem Auspumpen verschwinden die Schichten wieder und Fig. 3 zeigt das normale Aussehen einer Hohlkathode in dem bei Schichtuntersuchungen in reinem H_2 üblichen Druckbereich; der Druck war gleich 0,538 mm, die Spannung beträgt 1400 Volt und die Stromstärke 26 MA.

1) Schüler, diese Zeitschr. **22**, 264, 1921.
2) Kost, Diss. Göttingen 1913.

Bergen bei Traunstein.

(Eingegangen 28. Juli 1921.)

Zur Frage der Verschiebung der scheinbaren Fixsternörter in Sonnennähe.

Bemerkung zur Untersuchung von E. Lihotzky[1]).

Von A. Kopff.

E. Lihotzky gelangt zu dem Ergebnis, daß die Ablenkung eines Lichtstrahles beim Vorübergang an der Sonne theoretisch denselben Betrag erreicht, gleichgültig, ob man bei der Berechnung von der Newtonschen oder der Einsteinschen Mechanik ausgeht; er befindet sich damit im Gegensatz zu den Angaben der englischen Astronomen bei der Diskussion der photographischen Aufnahmen der totalen Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919[2]), wonach die Lichtablenkung nach der Theorie Newtons nur halb so groß wie nach derjenigen Einsteins wird.

Das Resultat von E. Lihotzky ist jedoch unrichtig. Der Fehler kommt dadurch zustande, daß der Wert der Konstanten α der von Einstein gegebenen zusammenfassenden Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie[3]) entnommen ist. Der dort unter Gleichung (70a) stehende Wert von α ist zu verdoppeln, da ja das Gravitationspotential dem Wert von $\frac{g_{44}}{2}$ in der Bezeichnung der Tensoranalysis entspricht und nicht von g_{44}[4]). Infolgedessen erhält man für den Gesamtbetrag der Lichtkrümmung in Gleichung (74) den Ausdruck:

$$B = \frac{2\alpha}{r_1} = \frac{\varkappa M}{2\pi r_1} = \frac{4kM}{c^2 r_1},$$

demnach den doppelten Betrag wie bei E. Lihotzky. In Zahlen umgerechnet ergibt dies für einen Stern am Sonnenrand eine Ablenkung von 1,"7, wie von Einstein auch angegeben wurde.

Die Lichtkrümmung ist also nach der Einsteinschen Theorie in der Tat doppelt so groß als nach der Newtonschen. Die Ergebnisse der Beobachtungen der totalen Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 stimmen wesentlich besser

1) Diese Zeitschr. **22**, 69, 1921.
2) F. W. Dyson, A. S. Eddington u. C. Davidson, A determination of the deflection of light by the suns gravitational field etc. Philos. Transact. of the Royal Society of London A. **220**, 291, 1920.
3) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916.
4) Vgl. u. a. A. Kopff, Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie, S. 173 u. 178 ff. Leipzig 1921.

mit dem Einsteinschen Zahlenwert als mit dem von der klassischen Mechanik geforderten überein, und es ist von zukünftigen Sonnenfinsternissen sehr wohl eine endgültige Entscheidung für oder gegen die Theorie Einsteins — soweit die Lichtablenkung in Frage kommt — zu erwarten.

Heidelberg-Königstuhl, Juli 1921.

(Eingegangeu 28. Juli 1921.)

Berichtigungen.

Die im Aufsatz von F. Trey: „Die Bedeutung des elektrischen Windes für den Induktionsfunken" Seite 407 und 408 angeführten Abbildungen heißen nicht Fig. 1, 2, 3, sondern sind im Text mit Bild 1, 2, 3 erwähnt. Die im Text genannten Figuren 1 und 2 geben wir nachträglich.

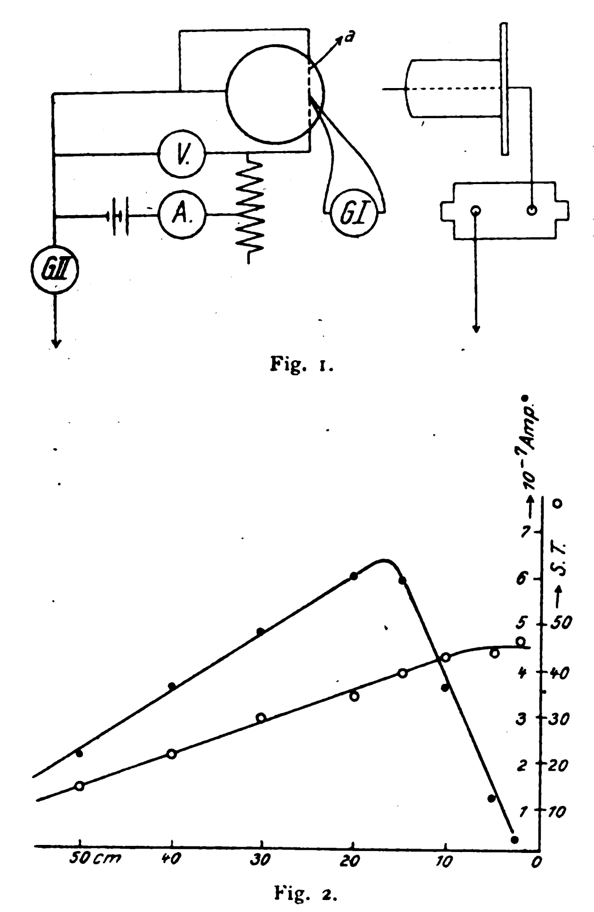


Fig. 1.

Fig. 2.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe der Benedikter-Pater Raphael Kögel vom Forschungsinstitut für Psychiatrie in München für Photochemie, an der Katholischen Universität Washington Dr. Hardee Charnbliss für Chemie, an der Universität München Dr. Adolf Kratzer für theoretische Physik, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Walther Dilthey (bisher an der Universität Erlangen) für Chemie.

Ernannt: Dr. Eric K. Rideal zum ord. Professor auf den Humphrey Owen Jones Lehrstuhl für Physikalische Chemie an der Universität Cambridge, zu ord. Honorarprofessoren an der Universität Hamburg der Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte Regierungsrat Professor Dr. G. Schott und das wissenschaftliche Mitglied des chemischen Staatsinstituts Professor Dr. Felix Voigtländer, zu außeretatsmäßigen außerord. Professoren ebenfalls an der Universität Hamburg der Privatdozent für Mathematik Dr. Paul Ribesell, der Privatdozent für Physik Oberlehrer Dr. Hans Georg Müller und der Privatdozent für Geophysik und Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte Professor Dr. Alfred Wegener, der a. o. Professor an der Universität München Dr. Ernst Wagner zum ord. Professor der Physik an der Universität Rostock, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster Dr. Leon Lichtenstein in gleicher Eigenschaft an der Universität Leipzig, Dr. A. I. Hale zum Professor für angewandte Chemie am Finsbury Technical College, der Privatdozent für Chemie an der Universität Berlin Professor Dr. Josef Houben zum Regierungsrat und ord. Mitglied der biologischen Reichsanstalt in Berlin-Dahlem, der Privatdozent an der Universität Rostock Dr. Ernst Pohlhausen zum a.o. Professor der Mathematik ebenda, der Abteilungsvorsteher am Chemischen Institut der Universität Halle Dr. Ernst Weitz zum ord. Professor der Chemie ebenda, der Hauptobservator am Astrophysikalischen Laboratorium in Potsdam Professor Dr. Hans Ludendorff zum Direktor desselben, der Professor der Chemie an der Universität Montpellier Dr. Tourneaux in gleicher Eigenschaft an der Universität Besançon, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Heinrich Faßbender zum ord. Professor für Elektrotechnik an der Universität La Plata, der a.o. Professor der Chemie an der Universität Hamburg Dr. Friedrich Paneth zum Abteilungsvorsteher am Chemischen Institut der Universität Berlin.

Gestorben: Der Dozent für Chemie am Hospital zu London und Sekretär der Chemical Society Henry Rondel Le Sueur, der emer. ord. Professor der Mathematik an der Universität Graz Hofrat Dr. Viktor Dantscher v. Kollesberg, der Gymnasialprofessor a. D. und Schriftsteller auf dem Gebiete der Mathematik und Physik Dr. Kaspar Isenkrahe in Trier, der a.o. Professor der organischen Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Emil Knoevenagel, das Mitglied des Aufsichtsrates der Siemens-Schuckert-Werke Professor Dr. Emil Budde (früher Privatdozent der Physik), der amerikanische Gelehrte Peter Cooper-Hewitt (der Erfinder der Quecksilber-Dampflampe) in Neuilly bei Paris.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



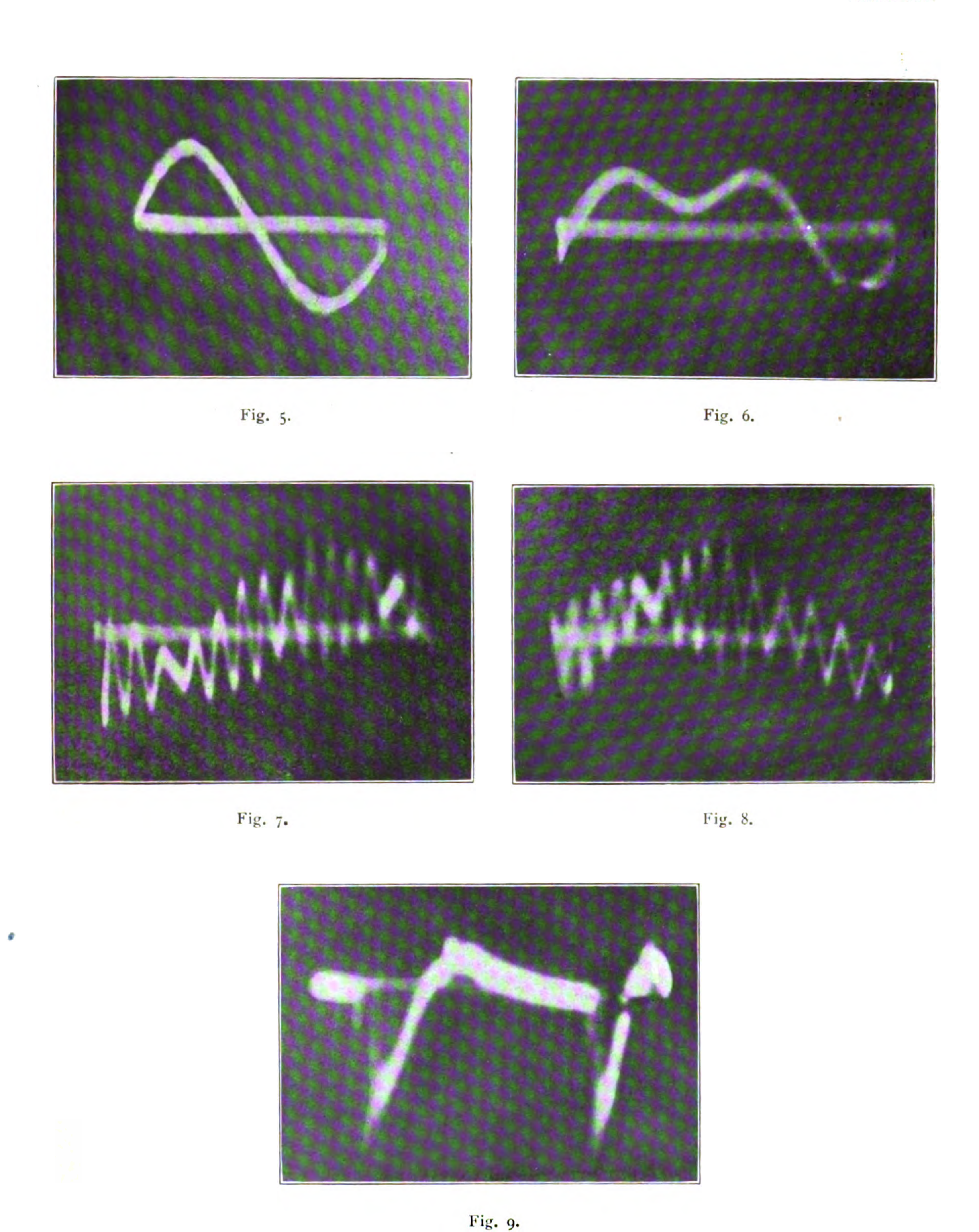


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

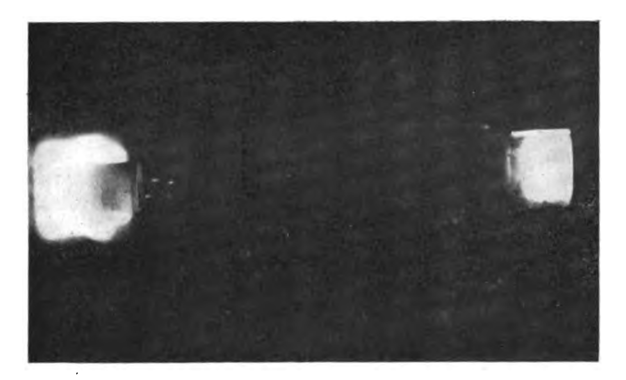


Fig. 1.

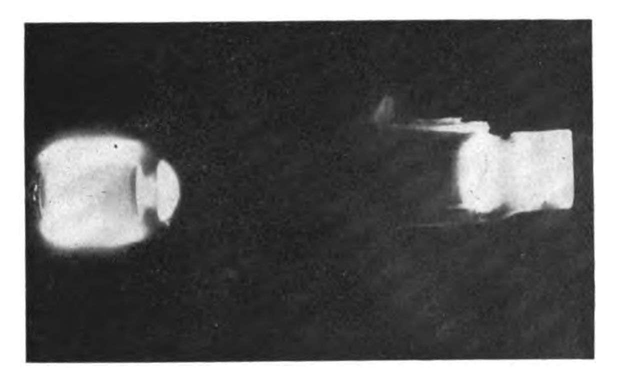


Fig. 2.

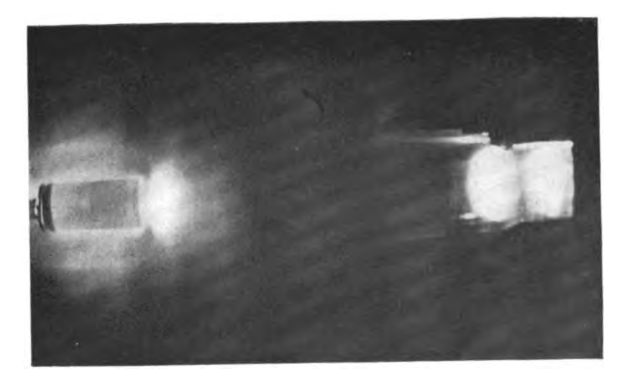


Fig. 3.

H. Kost, Beitrag zu der Arbeit von H. Schüler über Potentialgefälle an Elektroden in Gasentladungsröhren.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. | 15. September 1921. | 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 20 am 22. September 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur eindimensionalen Brownschen Bewegung.

Von Eberhard Buchwald.

1. In einer gleichzeitig in den Annalen der Physik[1]) erscheinenden Arbeit wird ein in Smoluchowskis Theorie der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung auftretender Ausdruck von grundlegender Bedeutung, nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein anfänglich irgendwo in dem Raumteile v eines Sols befindliches kolloidales Teilchen sich nach Ablauf der Zeit t nicht darin befinde (Außenwahrscheinlichkeit P), durch Versuche geprüft und im Anschluß daran eine Reihe verwandter Ausdrücke theoretisch und experimentell untersucht:

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bei $t=0$ in v eintretendes Teilchen sich zur Zeit t nicht darin befinde (Außenwahrscheinlichkeit P');

b) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bei $t=0$ in v eintretendes Teilchen v bis zur Zeit t wieder verlassen habe (Austrittswahrscheinlichkeit P_1);

c) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bei $t=0$ irgendwo in v befindliches Teilches v bis zur Zeit t wieder verlassen habe (Austrittswahrscheinlichkeit P_2).

Dabei ist als Gestalt von v ein flacher Kreiszylinder gewählt. Im Versuch (Ultramikroskop) sind seine Grundflächen durch Deckgläser gebildet; die Mantelfläche, durch die die Teilchen ein- und austreten, ist optisch durch eine kreisförmige Blende im Okular festgelegt. Alle Wahrscheinlichkeitsausdrücke führen in diesem Falle naturgemäß auf Zylinderfunktionen.

Im folgenden werden entsprechende Überlegungen für den eindimensionalen Fall mitgeteilt. v entartet dabei in die Strecke 0 bis h der x-Achse, und im Experiment ist die kreisförmige Blende im Okular durch eine spaltförmige zu ersetzen[1]). Wir beschränken uns auf die Berechnung von P' und P_1; denn von den Wahrscheinlichkeiten, die sich auf beliebige Anfangslage in v beziehen, ist die erste bereits von Smoluchowski angegeben[2]):

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\beta^\infty e^{-y^2} dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}[1 - e^{-\beta^2}], \quad (1)$$

$$\beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}} \quad (D \text{ Diffusionskonstante}), \quad (2)$$

während sich der Ausdruck für P_2 und der Weg seiner Ableitung aus der Diffusionstheorie in der zitierten Annalenarbeit findet[3]):

$$P_2 = 1 - 8 \sum_n^{1..\infty} \frac{1}{[(2n-1)\pi]^2} e^{-\frac{Dt}{h^2}[(2n-1)\pi]^2}. \quad (3)$$

§ 1. Die Außenwahrscheinlichkeit P'.

2. Wir benutzen das einfachste Modell, das erfahrungsgemäß die eindimensionale Brownsche Bewegung wiedergibt[4]): das Teilchen lege auf der x-Achse, vom Nullpunkt ausgehend, in jedem Zeitintervalle τ die Strecke δ zurück, die ebenso wahrscheinlich nach der positiven wie nach der negativen Seite gerichtet sein kann. Daß das Teilchen bei $t=0$ in das betrachtete Intervall $0 \ldots h$ eintritt, bringen wir dadurch zum Ausdruck, daß wir den ersten Schritt positiv verlangen. Dann läßt sich die Wahrscheinlichkeit

1) „Die Austrittswahrscheinlichkeit kolloidaler Teilchen und verwandte Begriffe".

1) A. Westgren, Arkiv f. Mat. Svensk. Vet. Ak. **11**, No. 14, 1916.
2) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. **123** (IIa), 2381, 1915; diese Zeitschr. **17**, 557, 1916 (Gl. 16, S. 563).
3) a. a. O., Gleichung 12'.
4) Vgl. z. B. G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung. Braunschweig 1913, S. 13ff.

$W(mn)$ angeben, daß durch m Schritte ein Abstand von n Wegstücken δ vom Nullpunkt erreicht wird. Ist etwa $m=4$, so ergeben sich $\frac{2^4}{2}=8$ Variationen:

$$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & + & + & - \\ + & - & - & - \end{matrix}$$

usw. bis (letzte Zeile),

und unter ihnen führen z. B. auf $n=+2$ die drei Variationen:

$$\begin{matrix} + & + & + & - \\ + & + & - & + \\ + & - & + & + \end{matrix},$$

so daß $W(4,2)=\frac{3}{8}$ zu setzen ist.

Auf diese Weise wird Tabelle I gefunden.

Tabelle I.

$W(mn)$.

$n=$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
$m=0$				1					
1					1				
2				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
3			$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{1}{4}$		
4		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$	
5	$\frac{1}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$
6		$\frac{5}{32}$		$\frac{10}{33}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{5}{32}$	

Man liest daraus als allgemeinen Ausdruck für $W(mn)$ ab:

$$W(mn)=\frac{1}{2^{m-1}}\binom{m-1}{\frac{m-n}{2}}. \tag{4}$$

Hätte man dagegen den ersten Schritt beliebig gelassen, so hätte sich ergeben[1]):

$$W^*(mn)=\frac{1}{2^m}\binom{m}{\frac{m-n}{2}}, \tag{5}$$

so daß

$$W(mn)=W^*(mn)\left[1+\frac{n}{m}\right]. \tag{6}$$

Wir wenden auf $W(mn)$ denselben Grenzübergang an, der von $W(mn)$ auf die bekannte Wahrscheinlichkeitsformel der Brownschen Bewegung führt[2]):

$$W^*(x)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}dx \tag{7}$$

(Wahrscheinlichkeit, daß ein bei $t=0$ vom Nullpunkt ausgehendes Teilchen sich zur Zeit t in dem Bereich $x \ldots . x+dx$ befinde) — setzen nämlich:

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{t}{\tau}, \\ n&=\frac{x}{\delta}, \\ \frac{\delta^2}{2\tau}&=D \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und nehmen $\frac{n}{m}$ als klein an — und finden für unsern Fall des positiven Anfangsschrittes:

$$W(x)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(1+\frac{x\delta}{2Dt}\right)dx \tag{9}$$

und hieraus die gefragte Außenwahrscheinlichkeit:

$$P'=1-\int_0^h W(x)\,dx,$$

oder mit der Abkürzung (2):

$$P'=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\beta e^{-y^2}dy+\frac{\delta}{2\sqrt{Dt}}\left(1-e^{-\beta^2}\right)\right]. \tag{10}$$

Bemerkenswert ist, daß in (9) und (10), entgegen dem Falle des beliebigen Anfangsschrittes, die Schrittgröße δ stehen bleibt. Die Bedeutung dieses Umstandes erklärt sich durch folgende Überlegung.

3. Jegliche Verteilungsfunktion W bei der Brownschen Bewegung ist eine Lösung der Diffusionsgleichung für bestimmte Anfangs- und Randbedingungen. In unserm Fall ist der erste Summand in (9) die sogenannte Hauptlösung der linearen Diffusionsgleichung und gibt die Masse an, die sich, stammend aus einem bei $x=0$ liegenden momentanen Quellpunkte von der Stärke 1, zur Zeit t zwischen x und $x+dx$ befindet. Der zweite Summand,

$$\frac{\delta}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}}xe^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

zeigt[1]), daß dem momentanen Quellpunkt ein momentaner Doppelquellpunkt vom Momente δ, also etwa der Ergiebigkeit ± 1 und dem Abstande δ, überlagert ist. Die Senke -1 liegt im Nullpunkt und gleicht sich mit dem dort vorhandenen einfachen Quellpunkt aus, und unsere Massenverteilung kann daher angesehen

1) Siehe z. B. de Haas-Lorentz oder v. Smoluchowski, diese Zeitschr., l. c.

2) Enzykl. d. math. Wissensch. 5 (4), S. 188.

1) Enzykl. d. math. Wissensch., ebenda.

werden als erzeugt durch einen momentanen Quellpunkt von der Stärke $+1$ bei $x=\delta$. Dem entspricht, daß wir die Verteilung (9) auch schreiben können:

$$W(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\,e^{-\frac{(x-\delta)^2}{4Dt}}\,dx. \qquad (9')$$

P' selbst läßt sich auffassen als derjenige Bruchteil der bei $t=0$ aus $x=\delta$ hervorquellenden Substanzmenge, der sich zur Zeit t nicht zwischen 0 und h befindet.

Hinsichtlich des Experiments trägt das Auftreten von δ der Tatsache Rechnung, daß man ein Teilchen erst dann als in die Schicht h eingetreten zählt, wenn es sich bereits ein eben merkliches Stück δ vom Rande entfernt hat. Es entspricht also durchaus der Beobachtungsmöglichkeit, den Quellpunkt um δ nach rechts zu verschieben. δ spielt die Rolle einer physiologischen Konstanten.

§ 2. Die Austrittswahrscheinlichkeit P_1.

4. Etwas schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P_1, daß ein bei $t=0$ in die Schicht h eintretendes Teilchen bis zur Zeit t die Schicht wieder verlassen habe. Wir übertragen die Schrittüberlegung auf diesen Fall: wie in § 1 geht das Teilchen von $x=0$ aus und macht seinen ersten Schritt in die Schicht hinein. Während aber von da ab dem Teilchen bisher die ganze x-Achse zur Verfügung stand, wird es jetzt nur so lange betrachtet, als es sich ohne Unterbrechung zwischen 0 und h aufhält; sobald es nur einmal wieder am Nullpunkt oder sobald es an der oberen Schranke h anlangt, scheidet es aus der Betrachtung aus.

Nehmen wir zunächst keine obere Schranke an, lassen wir also das Teilchen vorläufig nur am Nullpunkt verschluckt werden, so ergeben sich nach den in Nr. 2 skizzierten Überlegungen die Wahrscheinlichkeiten Tabelle II[1]).

Von den acht Variationen z. B., die bei $m=4$ möglich sind, führen nicht mehr drei zu $n=+2$, sondern nur noch die beiden

$$+ + + - \quad \text{und}$$
$$+ + - +,$$

während bei der früher noch möglichen Anordnung

$$+ - + +$$

das Teilchen nach dem zweiten Schritte verschluckt wird. Tabelle II wird durch die Formel:

$$W'(mn) = \frac{1}{2^{m-1}}\,\frac{n}{m}\binom{m}{\frac{m-n}{2}} \qquad (11)$$

dargestellt.

Tabelle II.

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m=1$		1								
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$							
3	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$						
4	$\frac{5}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{1}{8}$					
5	$\frac{10}{16}$	$\frac{2}{16}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{1}{16}$				
6	$\frac{22}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{4}{32}$		$\frac{1}{32}$			
7	$\frac{44}{64}$	$\frac{5}{64}$		$\frac{9}{64}$		$\frac{5}{64}$		$\frac{1}{64}$		
8	$\frac{93}{128}$		$\frac{14}{128}$		$\frac{14}{128}$		$\frac{6}{128}$		$\frac{1}{128}$	
9	$\frac{186}{256}$	$\frac{14}{256}$		$\frac{28}{256}$		$\frac{20}{256}$		$\frac{7}{256}$		$\frac{1}{256}$

5. Wird jetzt aber auch eine obere Schranke

$$b = \frac{h}{\delta}$$

eingeführt, so sind die Wahrscheinlichkeiten $W(mnb)$ für die einzelnen Punkte des erlaubten Gebiets im allgemeinen kleiner. Beispielsweise tritt, wenn die obere Schranke bei $b=5$ angenommen wird, an Stelle der Tabelle II die folgende:

Tabelle III.

$W(mn\,5)$.

$n=$	1	2	3	4
$m=1$	1			
2		$\frac{1}{2}$		
3	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
4		$\frac{2}{8}$		$\frac{1}{8}$
5	$\frac{2}{16}$		$\frac{3}{16}$	
6		$\frac{5}{32}$		$\frac{3}{32}$
7	$\frac{5}{64}$		$\frac{8}{64}$	
8		$\frac{13}{128}$		$\frac{8}{128}$
9	$\frac{13}{256}$		$\frac{21}{256}$	

1) Die entsprechende Tabelle für beliebigen Anfangsschritt bei v. Smoluchowski, Wiener Ber. **124** (IIa), 265, 1915.

Bis $m=5$ bleibt gegen Tabelle II alles beim alten. Bei $m=6$ aber erscheint der Wert für $n=4$, bei $m=7$ der für $n=3$ vermindert; bei $m=8$ erstreckt sich der Einfluß der Schranke bis herab zu $n=2$, bei $m=9$ und allen folgenden bis herab zu $n=1$. Zu (11) muß also ein negatives Glied hinzutreten, das für $m \leqq b$ null ist; in ihm müssen ferner, wie man leicht sieht, m und n in der Faktoriellen, und zwar als Summe $m+n$ auftreten, und man kommt zu folgender Form des Zusatzgliedes:

$$\frac{1}{2^{m-1}} \frac{2b-n}{m} \binom{m}{\frac{m-(2b-n)}{2}}.$$

Man überzeugt sich jedoch, daß durch Hinzunahme dieses einen Zusatzgliedes die $W(m\,n\,b)$ nur herauf bis zu einem gewissen m richtig dargestellt werden und späterhin zu klein ausfallen. Bei $b=2$ tritt die Abweichung von $m=5$ ab, bei $b=3$ von $m=7$ ab, bei $b=5$ von $m=11$ ab in Erscheinung. Ähnliche Überlegungen, wie sie zu dem negativen ersten Zusatzglied geführt haben, führen zu einem positiven zweiten, dann zu einem negativen dritten usw. Endlich ergibt sich:

$$W(m\,n\,b) = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{n}{m} \binom{m}{\frac{m-n}{2}} - \frac{2b-n}{m} \binom{m}{\frac{m-(2b-n)}{2}} + \frac{2b+n}{m} \binom{m}{\frac{m-(2b+n)}{2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{4b-n}{m} \binom{m}{\frac{m-(4b-n)}{2}} + \cdots \right\}. \qquad (12)$$

6. Führt man hieran mit Benützung der Gl. (8) wieder den Grenzübergang aus, so folgt als Wahrscheinlichkeit, daß das bei $t=0$ von $x=0$ aus in das Gebiet eintretende Teilchen sich zur Zeit t bei $x \ldots x+dx$ befinde, ohne die Gebietsgrenzen 0 oder h überschritten zu haben:

$$W_h(x)\,dx = \frac{\delta}{2\sqrt{\pi}\,(Dt)^{3/2}} \left\{ x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - (2h-x) e^{-\frac{(2h-x)^2}{4Dt}} + (2h+x) e^{-\frac{(2h+x)^2}{4Dt}} - \right.$$
$$\left. - (4h-x) e^{-\frac{(4h-x)^2}{4Dt}} + \cdots \right\} dx. \qquad (13)$$

$$= \frac{\delta}{2\sqrt{\pi}\,(Dt)^{3/2}} \sum_k^{-\infty \ldots +\infty} (x+2kh)\, e^{-\frac{(x+2kh)^2}{4Dt}}\, dx. \qquad (14)$$

Darnach wird die gesuchte Austrittswahrscheinlichkeit:

$$P_1 = 1 - \int_0^h W_h(x)\,dx,$$
$$= 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\pi D t}} \sum_k^{-\infty \ldots +\infty} \left(e^{-(2k)^2\beta^2} - e^{-(2k+1)^2\beta^2} \right),$$
$$= 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\pi D t}} \left(1 + 2 \sum_k^{1 \ldots \infty} (-1)^k e^{-k^2\beta^2} \right), \qquad (15)$$

wobei wieder

$$\beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$$

gesetzt ist.

7. Diffusionstheoretisch gesprochen liegt das Problem vor, eine Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu finden, die den Randbedingungen

$$\varrho = 0 \text{ für } \begin{cases} x=0 \\ x=h \end{cases} \qquad (\varrho \text{ Dichte})$$

und der Anfangsbedingung eines momentanen Quellpunktes bei $x=\delta$ genügt. Nach $x=0$ dürfen wir den Quellpunkt nicht legen, um nicht mit der ersten Randbedingung in Konflikt zu geraten, die es in diesem Falle — wie auch der gemeinsame Faktor δ in (13) zeigt — überhaupt zu keiner Diffusion kommen ließe. Auch entspricht die Lage δ den Überlegungen der Nr. 3.

Die durch (13) gegebene Form der Lösung läßt sich anschaulich machen. Das erste Glied stellt eine momentane Doppelquelle bei $x=0$ dar: der Quellpunkt $+1$ kann bei $x=+\delta$, der Quellpunkt -1 bei $x=-\delta$ angenommen werden. Faßt man letzteren nicht als Senke, sondern als Quelle von negativ zu bewertenden Teilchen auf, so sieht man, daß durch die beiden der Randbedingung $\varrho_{x=0}=0$ Genüge geleistet wird. Dagegen ist die zweite Randbedingung noch nicht erfüllt. Ihr zu genügen dient das zweite Glied in (13), eine Doppelquelle bei $x=2h$ (Figur). Durch beide Doppelquellen wird $\varrho_{x=h}=0$, aber $\varrho_{x=0}=0$ gilt nun nicht

- +   - +   -δ δ+   - +   - +
-4h   -2h   0   h   2h   4h

mehr, und man hat ihm zuliebe eine dritte Doppelquelle bei $x=-2h$ einzuführen, die dann wieder $\varrho_{x=h}$ einen kleinen positiven Wert gibt usw.

Quellpunktsmethode und Spiegelungsprinzip

in ähnlicher Verbindung finden sich häufig. Als nächstliegendes Beispiel sei die Smoluchowskische Behandlung des Brownschen Teilchens zwischen parallelen spiegelnden Wänden genannt[1]).

Zusammenfassung.

8. Auf Grund des einfachsten Modells der eindimensionalen Brownschen Bewegung wird in § 1 die Wahrscheinlichkeit berechnet, daß ein Teilchen t Sekunden nach seinem Eintritt in ein bestimmtes Gebiet der x-Achse sich nicht in dem Gebiet befinde (Außenwahrscheinlichkeit P'), in § 2 die Wahrscheinlichkeit, daß ein in das Gebiet eintretendes Teilchen das Gebiet bis zur Zeit t wieder verlassen habe (Austrittswahrscheinlichkeit P_1). Im ersten Falle hat das Teilchen volle Bewegungsfreiheit, im zweiten scheidet es beim ersten Verlassen des Gebiets aus der Betrachtung aus.

Vom Standpunkte der Diffusionstheorie führt das erste Problem auf eine Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung, die durch einen momentanen Quellpunkt in unmittelbarer Nähe der Eintrittsstelle gekennzeichnet ist, das zweite Problem auf eine unendliche Reihe äquidistanter momentaner Doppelquellpunkte auf der x-Achse.

1) M. v. Smoluchowski, Bull. Ac. Crac. No. 7A, 418, 1913.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, Juli 1921.

(Eingegangen 28. Juli 1921.)

Bemerkungen zur experimentellen Untersuchung an Telephonen.

Von H. Carsten.

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt.)

In letzter Zeit sind einige bemerkenswerte Arbeiten veröffentlicht worden, welche die Theorie des Telephons und ihre experimentelle Verwertung zum Gegenstand haben[1]). Die Verfasser gingen dabei aus von den bekannten, von Poincaré[2]) zuerst aufgestellten Gleichungen des Telephons und benutzten ihre Übereinstimmung mit den für einen Resonanztransformator geltenden Gesetzen, eine weitgehende Analogie mit diesem Apparat zu entwickeln. Der Verfolg eines derartigen Vergleiches bringt nun gewisse meßtechnische Schwierigkeiten mit sich, die durch die Eigenschaften des Telephons bedingt sind.

1) Hahnemann u. Hecht, diese Zeitschr. 20, 104, 245, 1919; Ann. d. Phys. 60, 454, 1919; 63, 57, 1920.
2) Poincaré, L'éclairage électrique L, 221, 1907.

Bei einer experimentellen Untersuchung wird man um so zweckmäßiger und sicherer vorgehen können, je einfacher die von der Theorie verlangten Versuchsbedingungen zu erfüllen sind. Um einen geeigneten Weg für die Messungen an Telephonen zu finden, empfiehlt es sich, unmittelbar an die erwähnten Gleichungen des Telephons anzuknüpfen.

Sie lauten:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+\alpha x=Mi. \tag{1}$$

$$R_0 i+L_0\frac{di}{dt}+M\frac{dx}{dt}=E. \tag{2}$$

Hierin bedeuten:

x die Auslenkung der Telephonmembran aus der Ruhelage,
t die Zeit,
r den Bewegungswiderstand der Membran (Nutzwiderstand zuzüglich Reibungswiderstand der Membran),
α die Federungskonstante,
M eine Konstante, abhängig von elektromagnetischen und geometrischen Daten des Telephons,
i den Strom in der Wicklung,
E die Klemmenspannung,
L_0 die Induktivität der Wicklung bei festgebremster Membran,
R_0 den Verlustwiderstand (ist gleich dem Widerstand bei festgebremster Membran c. p.).

Dabei ist die Membran in dynamischer Hinsicht ersetzt gedacht durch einen äquivalenten Massenpunkt der Masse m.

Wenn ω die Frequenz bedeutet, mit welcher die Membranschwingungen erregt werden, so ergibt sich unter Anwendung der komplexen Rechnung mit

$$x=Xe^{j\omega t};\ i=I_0e^{j\omega t};\ E=E_0e^{j\omega t};\ j=\sqrt{-1}.$$

$$X[(m\omega^2-\alpha)-j\omega r]+MI_0=0. \tag{3}$$

$$I_0(R_0+j\omega L_0)+j\omega MX=E_0. \tag{4}$$

Die Elimination von X aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt

$$\left.\begin{aligned}I_0\Bigg[R_0+\frac{r\omega^2M^2}{(\alpha-m\omega^2)^2+\omega^2r^2}+\\ +j\omega\left(L_0+\frac{(\alpha-m\omega^2)M^2}{(\alpha-m\omega^2)^2+\omega^2r^2}\right)\Bigg]=E_0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist der Scheinwiderstand des Telephons. Wie man sieht, erhalten Widerstand und Induktivität durch die Membranbewegung einen von der Frequenz ω stark abhängigen Zu-

wachs[1]). Handelt es sich nun darum, die Frequenzabhängigkeit der beiden Komponenten des Scheinwiderstandes experimentell zu ermitteln, so ist es praktisch, den Strom I_0, welcher die Telephonwicklung durchfließt, während der ganzen Meßreihe auf einen konstanten Wert zu halten. Der Vorteil ist leicht einzusehen, wenn wir uns der Berechnung der für die Schallstärke wichtigen Schwingungsweite X der Membran zuwenden. Aus Gleichung (3) geht nämlich hervor, daß X dann nur von der Frequenz, als einziger Veränderlichen, abhängig ist, da alle anderen in dieser Gleichung vorkommenden Größen Konstante sind. Für die Größe r gilt dies allerdings nur angenähert; weiter unten wird ihre Abhängigkeit von der Frequenz — in erster Näherung — ermittelt und bei der Berechnung von X berücksichtigt; vorläufig soll r als konstant angesehen werden.

Wir wollen zunächst einige abkürzende Bezeichnungen einführen. Der Scheinwiderstand des Telephons sei

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= R + j\omega L \\ \text{wobei } R &= R_0 + R' \\ \text{und } L &= L_0 + L' \text{ gesetzt ist.} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

R' und L' sind die von der Membranbewegung abhängigen Anteile des Widerstandes R und der Selbstinduktivität L. Die von dem Telephon insgesamt aufgenommene Leistung ist

$$W = \frac{I_0^2}{2} R.$$

Sie setzt sich aus zwei Beträgen zusammen, von denen der eine,

$$W' = \frac{I_0^2}{2} R'_0$$

die an die Membran abgegebene Leistung darstellt, während

$$W_0 = \frac{I_0^2}{2} R$$

die elektrischen Verluste im Telephon deckt. Die Abhängigkeit der aufgenommenen Leistung W von der Frequenz läßt sich durch die „Resonanzkurve des Telephons“ darstellen. Die Kenntnis der Resonanzkurve und der Verlustleistung W_0 ermöglicht es, wie Hahnemann und Hecht in ihren Arbeiten gezeigt haben[2]), die zur Beurteilung des Telephons notwendigen Größen zu berechnen.

Wie die Resonanzkurve zu ermitteln ist, läßt sich nach den bisherigen Überlegungen sofort übersehen. Da der Strom I_0 konstant gehalten wird, ergibt sich die Leistung W aus dem zu messenden Widerstand lediglich durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $\frac{I_0^2}{2}$. Der Verlauf des Widerstandes in seiner Abhängigkeit von der Frequenz ist also zugleich eine Darstellung der Leistungsaufnahme.

Neben der Ermittlung der Resonanzkurve ist die Messung der elektrischen Verlustleistung oder des Verlustwiderstandes von Wichtigkeit. Dieser ist die Summe aus dem Ohmschen Widerstand R_Ω und dem Eisenverlustwiderstand R_e, welcher wiederum, entsprechend den Hysteresis- und Wirbelstromverlusten aus den Anteilen R_H und R_W zusammengesetzt ist.

$$R_0 = R_\Omega + R_e = R_\Omega + R_H + R_W. \quad (7)$$

Es soll im Folgenden gezeigt werden, wie man bei der Bestimmung des Verlustwiderstandes zu verfahren hat und gleichzeitig eine Trennung der Eisenverluste erreichen kann.

Die Telephonmembran sei in ihrer Ruhelage festgeklemmt, was sich praktisch unschwer verwirklichen läßt. Da in diesem Fall keine Leistung an die Membran abgegeben wird, ist der Widerstand $R' = 0$, und man erhält durch eine Widerstandsmessung den Verlustwiderstand R_0. Der Ohmsche Widerstand der Wicklung, R_Ω, sei als bekannt vorausgesetzt; man kann daher die Eisenverluste $W_e = I^2 (R_0 - R_\Omega)$ berechnen, wobei I der Effektivwert des Stromes ist. Die Eisenverluste sind von zwei Größen abhängig, einmal von der Frequenz des Stromes, und dann von dem magnetischen Kraftfluß, der das Eisen durchsetzt. Der Kraftfluß ist proportional dem Quotienten $\frac{E}{\omega}$, — E bedeutet die induzierte EMK — es soll daher statt des Kraftflusses der Ausdruck $\frac{E}{\omega}$ als unabhängige Veränderliche gelten, für deren Berechnung die Beziehung besteht:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{I}{\omega} \sqrt{\omega^2 L_0^2 + (R_0 - R_\Omega)^2}. \quad (8)$$

Mißt man bei festgeklemmter Membran und unter Beibehaltung einer bestimmten Frequenz, etwa ω_1, Widerstand und Induktivität des Telephons, während der Strom I verändert wird, so kann aus den Meßwerten die Abhängigkeit der Eisenverluste W_e von $\frac{E}{\omega}$ berechnet werden. Man erhält eine Kurve

$$W_{e_1} = f_1\left(\frac{E}{\omega}\right).$$

1) In geringerem Maße sind auch R_0 und L_0 von der Frequenz abhängig (s. unten).

2) Siehe unter anderen Hahnemann u. Hecht, Ann. d. Phys. 60, 454, 1919.

Eine zweite gleichartige Messung bei einer anderen Frequenz ω_2 liefert die Kurve

$$W_{e_2} = f_2\left(\frac{E}{\omega}\right).$$

Da die Hysteresisverluste der Frequenz proportional ansteigen, die Wirbelstromverluste aber mit dem Quadrat der Frequenz wachsen, können die beiden Kurven analytisch dargestellt werden durch die Gleichungen

$$W_{e_1} = W_{H_1} + W_{W_1} = \omega_1 k_1\left(\frac{E}{\omega}\right) + \omega_1^2 k_2\left(\frac{E}{\omega}\right). \quad (9)$$

$$W_{e_2} = W_{H_2} + W_{W_2} = \omega_2 k_1\left(\frac{E}{\omega}\right) + \omega_2^2 k_2\left(\frac{E}{\omega}\right). \quad (10)$$

Die Funktionen k_1 und k_2 sind nur von $\frac{E}{\omega}$ abhängig. Sie werden aus den Gleichungen (9) und (10) gefunden zu

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{W_{e_1}\omega_2^2 - W_{e_2}\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)\,\omega_1\omega_2}, \\ k_2 &= \frac{W_{e_2}\omega_1 - W_{e_1}\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)\,\omega_1\omega_2}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Es können somit die Hysteresis- und die Wirbelstromverluste, z. B. für die Frequenz ω_1 ermittelt werden.

Die Eisenverluste des Telephons bei festgeklemmter Membran sind nunmehr gegeben. Mittels ihrer kann man die Eisenverluste bei beweglicher Membran, wie sie während der Aufnahme der Resonanzkurve tatsächlich vorhanden waren, bestimmen. Für irgendeinen Punkt der Resonanzkurve berechnen wir zunächst

$$\frac{E}{\omega} = \frac{I}{\omega}\sqrt{\omega^2 L^2 + (R - R_\Omega)^2}$$

und ermitteln, etwa aus einem Schaubilde, das auf Grund der vorangegangenen Überlegungen gewonnen wurde, die zugehörigen Werte W_{H_1} und W_{W_1}. Dann ergeben sich für die Frequenz ω die Eisenverluste W_H und W_W aus den Beziehungen:

$$W_H = W_{H_1} \cdot \frac{\omega}{\omega_1}; \; W_W = W_{W_1} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_1^2}. \quad (12)$$

Die gesamten Eisenverluste sind

$$W_e = W_H + W_W$$

und der Eisenverlustwiderstand

$$R_0 - R_\Omega = R_e = \frac{2W_e}{I_0^2}.$$

Jetzt ist auch die an die Telephonmembran abgegebene Leistung

$$W' = \frac{I_0^2}{2} R' = \frac{I_0^2}{2}(R - R_0)$$

bekannt. Da I_0 konstant ist, braucht hier ebenfalls nur R' betrachtet zu werden. Aus Gleichung (5) geht hervor, daß im Resonanzfall,

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}},$$

der Widerstand R' einen Maximalwert,

$$R'_{\max} = \frac{M^2}{r},$$

erreicht. Man erhält daher aus der Resonanzkurve die zu $R'_{\max}$ gehörige Frequenz als Resonanzfrequenz des Telephons.

Wir sahen oben, daß sich auch die Induktivität des Hörers, genau wie der Widerstand, aus zwei Teilen zusammensetzt, deren einer, L', von der Membranbewegung abhängig ist, während der andere, L_0, von ihr unabhängig ist, also der Induktivität des Telephons bei festgebremster Membran entspricht. L_0 berechnet man aus den beiden oben erwähnten Meßreihen, die bei festgebremster Membran und zwei verschiedenen Frequenzen ω_1 und ω_2 vorgenommen waren, in ähnlicher Weise wie die Eisenverluste.

Die Abhängigkeit der gemessenen Induktivitäten von $\frac{E}{\omega}$ wird in einem Schaubild aufgetragen. Wie Versuche gezeigt haben, hängen die Größen L_0 sehr angenähert linear von $\frac{E}{\omega}$ ab:

$$L_0' = k_1' + k_2' \cdot \frac{E}{\omega} \qquad \text{für } \omega = \omega_1,$$

$$L_0'' = k_1'' + k_2'' \cdot \frac{E}{\omega} \qquad \text{für } \omega = \omega_2.$$

Aus der graphischen Darstellung werden die Größen k entnommen; die Werte k_1 ergeben sich ebenfalls als linear abhängig von der Frequenz, k_2' und k_2'' sind dagegen Konstante. Sie können jetzt ohne weiteres berechnet werden. Man erhält dann für L_0 eine Beziehung der Form

$$L_0 = k_1 + k_2 \cdot \frac{E}{\omega} = k_0 + k\omega + k_2 \cdot \frac{E}{\omega}, \quad (13)$$

so daß für jede Frequenz und jeden Fluß L_0 ermittelt werden kann.

Es sind nun alle Unterlagen vorhanden, welche für die Auswertung der Messungen in Betracht kommen. Darauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden, da von anderer Seite auf diesen Gegenstand schon wiederholt hingewiesen worden ist[1]). Nur einige Versuchsergebnisse seien mitgeteilt, die an einem normalen O.-B.-Stielfernhörer der Firma Schuchhardt gewonnen wurden. Während der Versuche

1) Siehe die früheren Literaturvermerke.

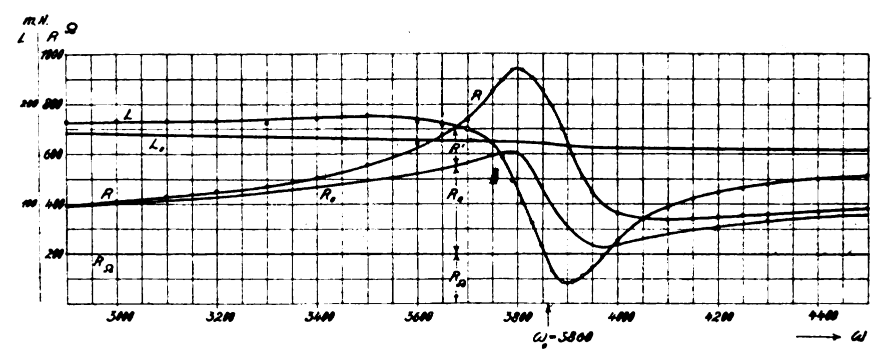


Fig. 1.

war der Hörer in eine ebene Wand fest eingespannt. Der Gleichstromwiderstand R_Ω betrug 196 Ohm.

Fig. 1 zeigt den Verlauf des Widerstandes R, des Verlustwiderstandes R_0 und der Induktivitäten L und L_0.

Bemerkenswert ist der Verlauf des Verlustwiderstandes. In größerer Entfernung von der Resonanzstelle nähert er sich asymptotisch der Resonanzkurve R, es wird nur ein kleiner Teil der aufgenommenen Leistung an die Membran abgegeben. An der Resonanzstelle selbst ändert sich der Verlustwiderstand ziemlich stark, die Eisenverluste sinken auf einen geringen Wert herab, da der Fluß kleiner wird.

Es ist nun interessant, den Zusammenhang des Wirk- und Blindwiderstandes R' und $\omega L'$, die auf Rechnung der Membranbewegung zu setzen sind, zu verfolgen. Trägt man diese Größen in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, $\omega L'$ als Ordinate und R' als Abszisse, so entsteht ein Kreis[1]), dessen Gleichung auf Grund von Gleichung (3) lautet

$$\left(R' - \frac{M^2}{2r}\right)^2 + \omega^2 L'^2 = \left(\frac{M^2}{2r}\right)^2. \qquad (14)$$

Hieran knüpft sich allerdings wieder die Voraussetzung, daß die Abhängigkeit des Bewegungswiderstandes r von der Frequenz zu vernachlässigen ist. Mit Hilfe des Kreises wird eine anschauliche Prüfung des Meßergebnisses möglich. Zu diesem Zweck muß aber noch ein Umstand berücksichtigt werden, der bisher außer acht gelassen wurde, das ist die Wirkung der Hysteresis- und der Wirbelströme in der Membran, welche durch die Membranbewegung entsteht. Demnach werden die gemessenen Werte $R - R_0$, $L - L_0$ mit den von der bisherigen Theorie verlangten Werten R', L' bis auf gewisse Korrektionsglieder R_k und L_k übereinstimmen, so daß statt Gleichung (6) jetzt zu setzen wäre:

$$\left.\begin{aligned} R &= R_0 + R' + R_k \\ L &= L_0 + L' + L_k \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{a})$$

Folgende Überschlagsrechnung gestattet nun eine angenäherte Bestimmung bzw. Abschätzung dieser Größen. Nach Gleichung (5) und (6) ist

$$L' = \frac{(a - m\omega^2)M^2}{(a - m\omega^2)^2 + \omega^2 r^2} = R' \cdot \frac{a - m\omega^2}{\omega^2 r}$$

oder

$$L' = \frac{m}{r} \cdot R' \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right), \qquad (15)$$

und man erkennt L' als Produkt der Dimensionsgröße $\frac{m}{r} R'$ und eines Zahlenfaktors, welcher von der Frequenz abhängt und mit $\omega = \omega_0$ verschwindet. Die Korrektionsgröße L_k wird dementsprechend proportional $\frac{m}{r} R'$ zu setzen sein; unter Hinzufügung einer Verhältniszahl k, die als konstant angenommen sei, ergibt sich

$$L_k = \frac{m}{r} R' \cdot k. \qquad (16)$$

Dieser Ausdruck soll noch etwas umgeformt werden. Da sich die Eisenverluste in der Membran mit der Frequenz ändern, so ist auch der Bewegungswiderstand r von ω abhängig. Wir berücksichtigen diesen Umstand unter Einführung der Dämpfung. Der Dämpfungsexponent des schwingenden Systems ist nach Gleichung (1) $\frac{r}{2m}$; daraus ermittelt sich das Dämpfungsdekrement $\mathfrak{d} = \frac{r}{m\omega_0}$. Der gemessene Zusammenhang von $\mathfrak{d}$ und ω ist in der weiter unten erläuterten Fig. 5 dargestellt. Nunmehr ist

$$L_k = \frac{R'}{\mathfrak{d}\,\omega_0} \cdot k$$

1) Kennelly u. Pierce, Electrician 69, 950, 1912.

oder

$$\omega L_k = \frac{R'}{\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k}{\mathfrak{d}_0}, \qquad (17)$$

wobei $\mathfrak{d}_0$ die Dämpfung bei der Resonanzfrequenz bedeutet. Der konstante Faktor $\frac{k}{\mathfrak{d}_0}$ ergibt sich mit $\omega = \omega_0$ aus den Gleichungen (6a), (15) und (17):

$$\frac{k}{\mathfrak{d}_0} = \frac{\omega_0 (L - L_0)_{\omega = \omega_0}}{R'_{\max}};$$

er kann also aus den Meßwerten berechnet werden.

Unter dem Vorbehalt, gegebenenfalls auch noch die Korrektionsgröße R_k zu berücksichtigen, haben wir danach folgende Konstruktion durchzuführen (Fig. 2):

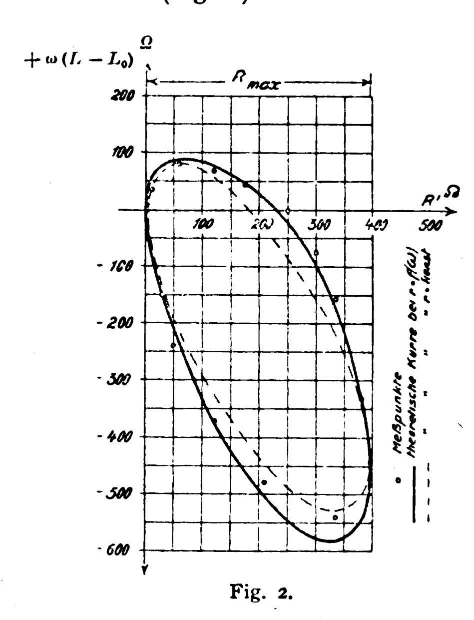


Fig. 2.

In das oben definierte Koordinatensystem ist der Kreis mit der Gleichung (14) einzuzeichnen und zu den Ordinaten des Kreises jedesmal der Betrag

$$\omega L_k = \frac{R'}{\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_0} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{k}{\mathfrak{d}_0}$$

hinzuzufügen. Die Verbindungslinie der so gefundenen Punkte ist eine ellipsenähnliche Kurve, die, wie man sieht, mit der durch die Meßpunkte gegebenen Kurve hinreichend genau zusammenfällt. (In die Figur ist auch noch die Kurve eingezeichnet, die man erhält, wenn r bzw. $\mathfrak{d}$ als konstant angesehen werden.) Die Korrektur des Wirkwiderstandes R', durch einen Betrag, entsprechend den zusätzlichen Eisenverlusten in der frei schwingenden Membran, würde die Annäherung zwar noch etwas verbessern, kann aber ganz gut vernachlässigt werden.

Die Abhängigkeit der Eisenverluste von $\frac{E}{\omega}$ ist in Fig. 3 für die Frequenz 3800 dargestellt. Es zeigt sich, daß die Hysteresisverluste etwas größer sind, als die Wirbelstromverluste.

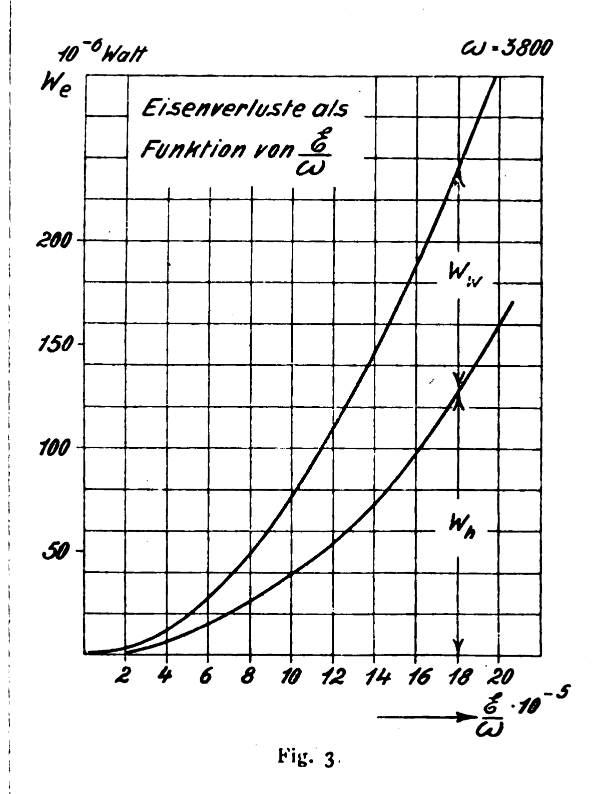


Fig. 3.

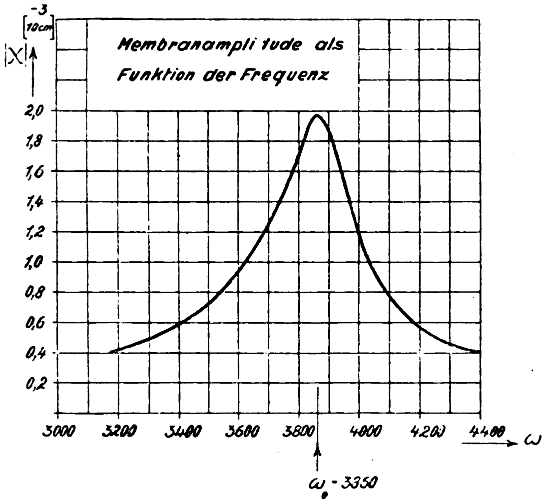


Fig. 4.

Fig. 4 gibt die Membranamplitude als Funktion der Frequenz wieder. Das Maximum liegt bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 3860$ und be-

sitzt rund den fünffachen Wert der normalen Schwingungsweite. Die Berechnung erfolgt nach Gleichung (3) und (5).

Es ist

$$|X| = \frac{M I_0}{\sqrt{m(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega^2 r^2}}.$$

Aus der Resonanzkurve entnimmt man

$$R'_{\max} = \frac{M^2}{r}.$$

Der Bewegungswiderstand r ist $r = m\omega_0 \mathfrak{d}$; die Dämpfung $\mathfrak{d}$ kann aus der Resonanzkurve ermittelt werden gemäß der Beziehung

$$\frac{R'_{\max}}{R'} = 1 + \left(\frac{2s}{\mathfrak{d}}\right)^2; \text{ siehe Fig. 5}^{1)}.$$

s bedeutet abkürzend $\frac{\omega_0}{\omega} - 1$.

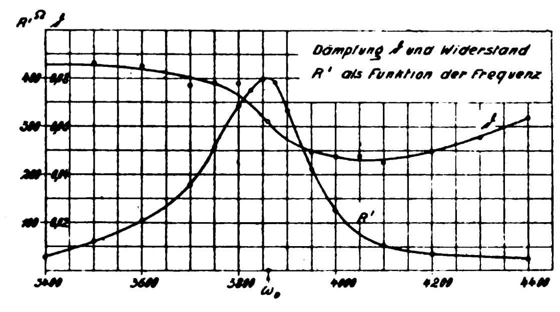


Fig. 5.

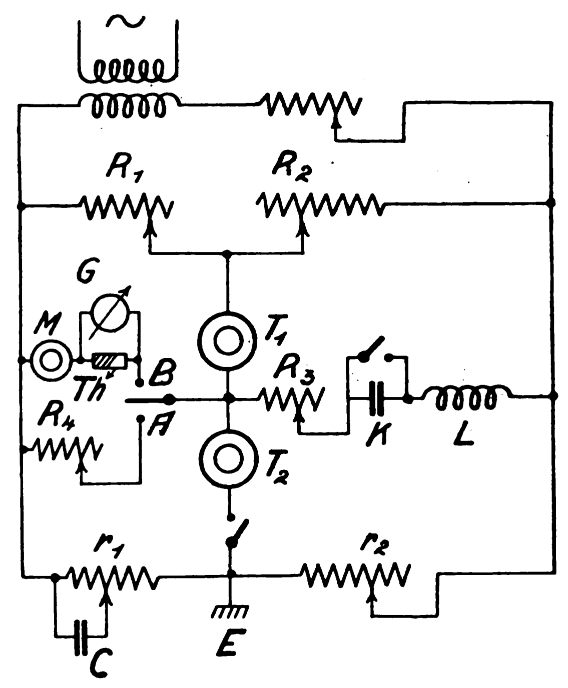
Der Ausdruck für die Membranamplitude nimmt dann die Form an

$$|X| = \frac{I_0}{\omega\sqrt{r}} \cdot \sqrt{\frac{R'_{\max}}{\left[\frac{s}{\mathfrak{d}}\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2 + 1}}.$$

Um r berechnen zu können, muß man noch die Schwingungsmasse m kennen. Poincaré hat für die am Rande eingeklemmte Membran die Beziehung[2] $m = G/5$ gefunden. (G = Membrangewicht.) Bei dem untersuchten Hörer war $m = 0{,}251$ g.

Zum Schluß sei noch über die Versuchsanordnung Einiges gesagt. Die Messung der reellen und imaginären Anteile des Scheinwiderstandes erfolgte nach dem Vorgange von K. W. Wagner[3]) in einer Brückenanordnung nach Fig. 6. Der Strom wurde durch ein Thermoelement in Verbindung mit einem Galvanometer gemessen. Der Brücke parallel lag eine Hilfsbrücke[4]) zur Beseitigung der störenden Wirkung der Erdkapazitäten. Als Stromquelle

1) Lichte, Zeitschr. f. techn. Phys. **2**, 12, 1921.
2) L'éclairage éléctrique **L**, 259, 1907.
3) Elektrotechnische Ztg. **32**, 81, 1911.
4) Elektrotechnische Ztg. **32**, 1001, 1911.



Es bedeutet
M Meßobjekt.
R_1, R_2, R_3, R_4 Normalwiderstände.
K, L Normal-Kondensator bzw. -Induktivität.
r_1, r_2. C Widerstände und Kondensator der Hilfsbrücke.
Th, G Thermoelement und Galvanometer.
T_1, T_2 Fernhörer zum Abgleichen der Haupt- und der Hilfsbrücke.
Umschalter nach A: Frequenzmessung.
Umschalter nach B: Objektmessung.

Fig. 6.

diente ein Röhrensender; die Frequenz ist dann außerordentlich konstant. Sie war durch einen Kondensator leicht regelbar und wurde, wie aus dem Schaltbild zu ersehen ist, gleich in der Brücke gemessen[1]). Diese Frequenzmessung ist sehr genau, was besonders dann von Wichtigkeit ist, wenn der Gang der Messung kleine Frequenzschritte erfordert.

Zusammenfassung.

Bei der Aufnahme von Resonanzkurven an Telephonen läßt man zweckmäßig den Strom konstant. Hierdurch werden theoretisch einfache Verhältnisse erreicht und die sichere Durchführung der Messungen erleichtert. Wirbelstrom- und Hysteresisverluste lassen sich durch Versuche bei festgehaltener Membran trennen. Es werden Versuchsergebnisse mitgeteilt und eine geeignete Meßanordnung beschrieben.

1) Heydweiller u. Hagemeister, Verh. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 52; K. Küpfmüller, Telegr. u. Fernspr.-Technik **8**, 124, 1919.

(Eingegangen 16. Juli 1921.)

Temperatur und Bandenspektrum.

Von W. Steubing.

(Mit Tafel IV u. V.)

Von der Voraussetzung ausgehend, daß die Bandenspektra typische Molekülspektra sind — eine Ansicht, die heute wohl ziemlich anerkannt ist — erscheint die Fragestellung berechtigt, welchen Einfluß die absolute Temperatur eines leuchtenden Dampfes auf das von ihm ausgesandte Bandenspektrum hat, auch dann, wenn das Spektrum durch elektrische Anregung erzeugt ist.

Denn gleichgültig, ob man das Problem vom Standpunkt der Bohrschen Theorie und Atommodelle behandelt oder andere Vorstellungen von Aufbau und Emission des Spektrums zugrunde legt, so bleibt bei obiger Voraussetzung die Tatsache bestehen, daß die thermische Dissoziation in vielen Gasen und Dämpfen den Molekülverband lockert und zerstört, und diese Vorgänge in den von ihnen ausgestrahlten Spektren sich widerspiegeln müssen.

Welcher Art diese Einwirkung ist, unter welchen Verhältnissen sie sich besonders bemerkbar machen kann und wird, ist eine zweite Frage, deren Beantwortung durch das Experiment von besonderer Wichtigkeit für die heutige Atomtheorie und die Molekülmodelle ist.

Wenn man die neueren Atommodelle zur Grundlage nimmt, so wird man folgendes beachten müssen.

Zunächst kann es sich bei Bandenspektren, die im sichtbaren oder ultravioletten Gebiet liegen, nicht um reine Wärme-(Rotations-)Spektren handeln, sondern um Elektronenschwingungen solcher Elektronen, die am Molekülverband teilhaben, und diese Elektronen sind in ihrer stabilen Lage in erster Linie abhängig von der gegenseitigen Lage und Bindung der Atomkerne. Nur dann, wenn man das zwei- oder mehratomige Molekül als ein absolut starres Gebilde ansieht, dessen Dissoziation explosionsartig vor sich geht, beim Überschreiten einer bestimmten Temperatur, wird man keine Änderung im Bandenspektrum erwarten können außer einer allmählichen Intensitätsabnahme mit der steigenden Temperatur infolge stetiger Verminderung der Zahl der Emissionszentren.

Im andern Falle, wenn man dem Molekül, d. h. den in ihm gebundenen Atomen bzw. ihren Kernen eine gewisse Schwingungsmöglichkeit einräumt, muß die jeweilige Temperatur ihren Einfluß äußern, da mit steigender Temperatur, schon ehe es zum eigentlichen Molekülzerfall kommt, die thermisch aufgenommene Energie die Kernschwingungen befördern und die von der Kernlage abhängigen Bandenelektronen beeinflussen wird. Hierbei ist wieder zu entscheiden, ob man die Kernschwingungen quanteln oder kontinuierliche Übergänge annehmen will. Je nachdem muß natürlich die Wirkung auf das Spektrum verschieden ausfallen.

Im Folgenden ist nun zunächst am Jodbandenspektrum diese Untersuchung durchgeführt, und zwar an der positiven Säule im Glimmstrom. Der Joddampf schien mir besonders geeignet, weil einmal genügende Unterlagen über die Art und Erzeugung des Spektrums vorlagen und anderseits der Joddampf besonders leicht dissoziierbar ist, also durch Variation der Temperaturen in verhältnismäßig engen Grenzen die Änderungen verfolgbar sein mußten.

Die Untersuchung an der positiven Säule durchzuführen hat gegenüber der Untersuchung des entsprechenden Absorptionsspektrums noch den Vorteil, daß man nicht nur die beginnende und fortschreitende thermische Dissoziation optisch in allen Gebieten des Spektrums verfolgen kann, sondern daß man gleichzeitig den Gasdruck, die Reinheit des Dampfes sowie alle Änderungen (Schwankungen) an der elektrischen Leitfähigkeit, die mit dem Auftreten anderer Elektrizitätsträger auftreten können, gleichzeitig beobachten, ferner daß man unabhängig von der Schichtdicke bzw. dem Dampfdruck arbeiten, also mehr Untersuchungsvariationen vornehmen kann.

Versuchsanordnung.

Die photographischen Aufnahmen wurden mit einem an anderer Stelle beschriebenen großen Spektrographen[1]) gemacht, mit der einzigen Änderung, daß an Stelle des dort beschriebenen Compoundprismas zeitweilig ein großes Rowlandplangitter von 16000 Lines to the inch, sowie ein aus Mitteln des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik beschafftes lichtstarkes Flintprisma von 60° brechendem Winkel Verwendung fand.

Als Plattenmaterial benutzte ich, da das Untersuchungsgebiet weit ins Rot hineinreicht, teils selbst sensibilisierte Hauff-Ultrarapid-Platten (gebadet in Pinachrom oder Pinacyanolblau), teils englische Wratten Panchromatic-Platten.

Zur visuellen Beobachtung des Spektrums während der Aufnahmen bei verschiedenen Temperaturen diente ein kleines Handspektroskop sowie ein großes lichtstarkes, nach Wellenlängen geeichtes Gradsichtspektroskop[2]) von Schmidt & Haensch.

Die benutzten Entladungsröhren hatten

1) Ann. d. Phys. IV, 58, 67, 1919.
2) Ebenda S. 65.



Fig. 1. Querschnitt.

Kohleelektroden meist von Plattenform (vgl. Figur), die, wie an anderer Stelle beschrieben, behandelt und eingesetzt waren und die Querschnitte der zylindrischen Röhren variierten zwischen 2 cm und 1 mm.

Die Beobachtungen bzw. Aufnahmen an der positiven Säule geschahen teils in Längsdurchsicht, teils normal senkrecht zur Entladungsröhre.

Für letzteren Zweck hatte der anfänglich benutzte elektrische Ofen eine horizontale Öffnung, während der später gebrauchte in Längsdurchsicht horizontal Verwendung fand. Die Beobachtungsöffnungen waren in allen Fällen durch Glimmerfenster in Asbestschiefer geschützt, um Luftströmungen zu vermeiden.

Die Temperaturmessung geschah mit einem Thermoelement aus Eisenkonstantan, dessen Enden eisgekühlt in einer Dewarflasche sich befanden und dessen Ausschlag an einem geeichten Millivoltmeter von Siemens und Halske abgelesen wurde. Die Konstruktion des für diese Zwecke gebauten kleinen Ofens erhellt aus beistehenden Fig. 1 und 2.

A sind die in Asbestschiefer eingelassenen Fenster aus klarem Glimmer, *B* stellt das längs der ganzen Entladungsröhre *C*, soweit deren horizontaler Teil durch den Ofen verläuft, verschiebbare Thermoelement dar. Auf diese Weise war es möglich, die Temperatur an jeder Stelle des Ofens bzw. an jeder der Entladungs-

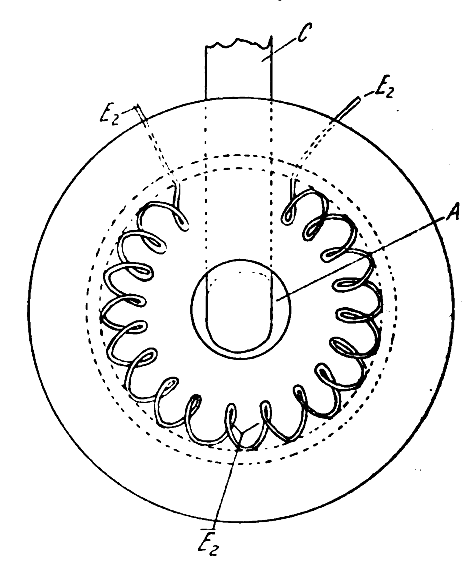


Fig. 2. Vorderansicht.

röhre zu messen, um sicher zu sein, daß bei den Beobachtungen ein gleichmäßig temperierter Teil der positiven Säule sein Spektrum aussandte.

So ließ sich auch die Temperatur des Ofens zu diesem Zweck genau einstellen. Um nämlich zu verhüten, daß ein merkbares Temperaturgefälle zwischen den Enden der Röhre nahe den Fenstern und der Mitte sich einstellen könnte, war zunächst der Heizdraht E^1 aus Chromnickel auf ein Messingrohr D (durch dünnen Glimmer isoliert) aufgewickelt. — In der Mitte in weiteren Abständen wie am Ende — und endlich mit gesonderter Stromzuführung eine kleine Heizspirale E^2 (deren Form und Lage an den Fenstern aus den Figuren erhellt), an beiden Enden des Ofens angebracht, die für sich so stark belastet wurde, daß sie den Temperaturabfall an den Enden, wo die positive Säule rechtwinkelig nach oben gebogen durch eine kleine Öffnung den Ofen verließ, wieder ausgleichen konnte (s. Fig. 2).

Die jeweils nötigen Stromstärken, um die stationäre Temperatur im ganzen Ofen zu erreichen, wurden in mehrstündigen Versuchen mit Hilfe des verschiebbaren Thermoelements festgestellt.

Der Heizdraht selbst war bifilar gewickelt, damit kein Magnetfeld, für das ja gerade Jod sehr empfindlich ist, die Entladung beeinflussen konnte.

In der Figur bedeuten F die in bekannter Weise eingeschmolzenen Kohleelektroden.

Die Entladungsröhre wurde im Ofen zusammengesetzt bzw. zurecht gebogen. Sie bestand aus gewöhnlichem Thüringer Glase, weshalb ich die Temperaturen nicht über 450° C steigerte, um ein Erweichen des Glases zu verhindern. Eine einmal gereinigte, bewährte Röhre hielt wochenlang allen Anforderungen von Strom und Heizen stand, ohne daß die Reinheit des Spektrums und die Klarheit des Glases beeinträchtigt wurde.

Bei den Aufnahmen stand der Ofen mit der Röhre unmittelbar vor dem Spalt des Spektrographen.

Die Entladungsröhre hatte einen seitlichen Ansatz mit festem Jod, der in ein besonderes Dewargefäß tauchte, um den Dampfdruck auf dem jeweils gewünschten Betrag zu halten.

Zum Evakuieren und Reinigen diente ein Luftpumpenaggregat von Gaede (Kapselpumpe und rotierende Quecksilberpumpe).

Die vollständig gereinigten Röhren wurden danach abgeschmolzen. Betrieben wurden die Röhren mit Hochspannungsgleichstrom von einer Maschine bis 4800 Volt Spannung.

Die Ergebnisse.

Das Spektrum der positiven Säule im Jod ist schon an anderer Stelle von mir beschrieben worden. Es besteht aus zwei wesensverschiedenen Teilen: A dem Bandenspektrum vom Rot bis Grün (identisch mit dem Jodfluoreszenzspektrum), B einem kontinuierlichen Spektrum von großer Intensität, beginnend im Blaugrün bis ins Ultraviolett verlaufend.

Da das menschliche Auge gegen Blauviolett sehr wenig empfindlich ist, wird das Aussehen der positiven Säule wesentlich vom ersteren Teil, „dem Bandenspektrum" beeinflußt und erscheint gelblich-grün.

Steigert man jetzt die Temperatur, so ändert sich schon für das unbewaffnete Auge das Spektrum, d. h. die positive Säule nimmt — soweit sie sich auf höherer Temperatur befindet — einen violett-bläulichen Farbton an, während die außerhalb des Ofens befindlichen Teile unverändert die ursprüngliche Farbe beibehalten.

Die Beobachtung mit dem Spektroskop zeigt dabei folgendes:

Die Intensität des Bandenspektrums nimmt ab, zunächst im grünen Teil, dann sich allmählich über das ganze Bandenspektrum ausdehnend, bis nur noch Reste im Rotorange (bei der angegebenen Temperaturgrenze von 450° C) zurückbleiben. Gleichzeitig nimmt die Intensität des kontinuierlichen Spektrums noch zu, sodaß dessen Farbe den bläulich-violetten Ton bedingt. Aber wesentlich wichtiger ist die Tatsache, daß das Verschwinden der Banden gepaart ist mit dem Hervortreten einzelner Linien aus ihnen, die um so intensiver erscheinen, je mehr das Spektrum den eigentlichen Bandencharakter verliert.

Diese Erscheinung ist weiterhin im Spektrogramm festgehalten worden. — Wie man aus den angegebenen Reproduktionen bzw. Schwärzungskurven ersieht, ist eine einfache Gesetzmäßigkeit dabei nicht erkennbar, wohl aber kann es bei sorgfältigen Vergleichen keinem Zweifel unterliegen, daß es tatsächlich Bandenlinien sind, die bis zur angegebenen Temperatur bestehen bleiben, denn weder treten im übrigen Teil des ganzen sichtbaren Spektrums neue Linien auf, die ein neues Linienspektrum ankündigen würden (nur die schon vorhandenen erscheinen relativ oder absolut verstärkt), noch ist zu bestreiten, daß jede dieser Linien in den Banden schon bei niedrigster Temperatur vorhanden ist. Aber es sind keineswegs Linien, die als Bandenköpfe oder sonstwie eine ausgezeichnete Lage zu haben scheinen, auch sind sie nicht in erkennbar einfacher Weise in das Bandensystem eingeordnet.

1) Ann. d. Phys. IV, **64**, 677, 1921.

Die wachsende Farbenänderung an der positiven Säule läßt sich in obiger Anordnung systematisch verfolgen, wenn man in gleichen Temperaturintervallen, die im elektrischen Ofen sich befriedigend konstant herstellen lassen, das Spektrum auf ein und derselben Platte aufnimmt. Eine derartige Platte, die das Bandenspektrum bei 100° C, 200° C, 300° C zeigt, wurde bei den Registrierkurven, Tafel V *A, B, C, D*, benutzt, und die Kurven stellen in fast achtfacher Vergrößerung der Originalplatte einen Teil des Rot im Bandenspektrum (etwa zwischen den Grenzen λ 6000 bis λ 6600 dar. Die Kurven sind nach Möglichkeit so untereinander orientiert, daß gleiche Bandenlinien in einer Vertikalen liegen (vgl. die punktierten Linien der Figur).

Die Höhe der Ordinate ist ein Maß für die Schwärzung der einzelnen Linien, also auch für die Intensität und der Abfall der Kurven (da die Empfindlichkeit und Meßgeschwindigkeit bei allen Platten konstant gehalten wurde), ein Maß für die Schärfe des Spektrums.

Zunächst sieht man bei einem Vergleich der Absoluthöhe der einzelnen Kurven, daß diese kontinuierlich heruntergeht, entsprechend dem allmählichen Verschwinden des Bandenspektrums infolge wachsender Dissoziation, d. h. Abnahme der Bandenträger.

Vergleicht man ferner die einzelnen Banden, deren einzelne Linien nicht scharf getrennt sind, da bei dieser Dispersion (8,9 AE pro mm) keine genügende Auflösung erfolgen kann, so sind beim Vergleich in einer Vertikalkolumne die zusammengehörigen an der Form der Schwärzungskurve, die den Intensitätsverlauf in jeder Bande widerspiegelt, deutlich zu erkennen, gleichzeitig bemerkt man aber, wie diese Kurve schärfere und definiertere Gestalt annimmt, ja, einzelne Bandenlinien als besonders bevorzugt von Kurve zu Kurve an Intensität und Schärfe wachsen bis schließlich (bei noch höherer Temperatur) nur noch einzelne Restlinien als Gerippe des ursprünglichen Bandenspektrums bleiben würden.

Eine gewisse Ausnahme bildet hierbei Kurve *C* entsprechend dem Spektrum bei 300°.

Zwar sind auch hier die „bevorzugten" Linien entsprechend ihrer Absolutintensität deutlich erkennbar, aber im übrigen zeigt die Kurve des Spektrums einen auffallend verwaschenen Verlauf gegenüber ihren Nachbarn.

Die Erklärung liegt in folgendem:

Während der Aufnahme mußte infolge einer Störung der Maschine vorübergehend ausgeschaltet werden und schwankte nach dem Wiedereinschalten der Gasdruck während einiger Minuten. Diese Schwankung im Gasdruck (nur entsprechend einem Sättigungsdruck des Jods zwischen 15° und 18° C) genügte, wie sich auch bei anderen Aufnahmen feststellen ließ, um die einzelnen Bandenlinien gegenseitig zu stören. Es ist natürlich völlig ausgeschlossen, für die Unschärfe und Verbreiterung der Linien das Dopplersche Prinzip oder ähnliche bekannte Vorgänge heranzuziehen, man muß vielmehr annehmen, daß bei der Emission dieses Bandenspektrums, das sich als Superposition der zahlreichen Emissionszentren darstellt, der jeweilige Molekular- oder Quantenzustand der einzelnen Träger maßgebend ist. Dieser Zustand der Moleküle ist seinerseits abhängig von der Temperatur, die im Dampf herrscht, d. h. der mittleren kinetischen Energie, mit der die einzelnen Moleküle zusammenstoßen und anderseits von dem Dampfdruck, d. h. der Häufigkeit der einzelnen Zusammenstöße.

Es ist anzunehmen, daß auch die große Masse der Jodmoleküle eine wichtige Rolle dabei spielt.

Damit wird auch die bessere Definition des Spektrums bzw. der Einzellinien mit wachsender Temperatur verständlich. Mit vermehrter Dissoziation nimmt nicht nur die Zahl der Moleküle „der Bandenträger" als solcher ab, sondern — bei konstantem Druck — es erfolgen jetzt bedeutend weniger Zusammenstöße zwischen einzelnen Jodmolekülen als zwischen Molekülen mit Atomen geringerer Masse bzw. Elektronen. Man darf dabei nicht an eine Beeinflussung des Spektrums während der Emission des einzelnen Moleküls denken, denn da die Leuchtzeit insgesamt nur 5×10^{-8} Sek. beträgt, so ist durch eine Überschlagsrechnung zu ersehen, daß die Stoßzeit der Moleküle von so viel höherer Größenordnung ist (10^{-5} Sek.), daß der Stoß auf den Emissionsvorgang selbst keinen Einfluß haben kann. Man muß aber weiterhin schließen, daß eine genau gleiche Erzeugung dieses Bandenspektrums, was gleichzeitig Anzahl, Intensität und Schärfe der einzelnen Linien angeht, eine Unmöglichkeit ist, da selbst bei strengster Innehaltung aller äußeren Bedingungen wie Strom, Temperatur und Druck es eine Frage der Beobachtungs- bzw. Aufnahmezeit ist, bis durch statistische Häufung der Vorgänge das genau gleiche Spektralbild erzeugt wird. Weitere Versuche in dieser Richtung sind in Vorbereitung.

Daß die obige Darstellung auf das vollständige Bandenspektrum nicht allein auf den in vier Kurven besprochenen roten Teil zutrifft, lehrt die Kurvendarstellung Tafel IVa u. b, die das vollständige Spektrum (auf einer anderen Platte bei 100° und 400° C erhalten) wiedergibt in ähnlicher Weise und gleichem Maßstab

aufgenommen, nur wegen der Wiedergabe entsprechend verkleinert. Jede der beiden Kurven ist aus vier Registrierplatten zusammengesetzt, daher sind an den Zusammensetzstellen kleinere Stücke des Spektrums herausgefallen und der Absolutwert der Abszissen nicht zuverlässig. Ein Vergleich bestätigt das oben angeführte auch bei diesen Aufnahmen und besonders sei hervorgehoben, daß die 100°-Kurve der Tafel IV in ihrem roten Teil an der gleichen Stelle wie Tafel V *A* (100°) betrachtet, zwar einen ähnlichen, aber keinen identischen Schwärzungsverlauf mit dieser zeigt. (Es ist die Platte 1 in $1^1/_2$ und die Platte 2 in $^3/_4$ Stunden unter sonst gleichen Bedingungen erhalten worden.)

Es bleibt noch zu erwähnen, welches Verhalten der eingangs erwähnte zweite Teil des Spektrums der positiven Säule, das kontinuierliche Spektrum im Blauviolett mit geänderter Temperatur zeigt. Wie an anderer Stelle[1]) bereits hervorgehoben wurde, ist das Spektrum wirklich kontinuierlich, d. h. auch bei größter Dispersion keine Auflösung in Banden oder Linien möglich und reicht mit größter Intensität weit ins Ultraviolett hinein. Nach langen Wellen endet es mit einem jähen Intensitätsabfall in einer ziemlich scharf begrenzten Kante im Blaugrün, wie sie aus der Reproduktion erkenntlich ist. Dieser Abfall ist nicht etwa photographisch durch das Verhalten der sensibilisierten Platten bedingt, sondern stellt sich auch dem Auge in gleicher Weise dar.

Die Kante photographisch ganz genau festzulegen ist aus folgendem Grunde unmöglich: Bei schwacher Expositionszeit wird die eigentliche Kantenlage durch Unterexposition nach kurzen Wellen verschoben. Bei genügender Belichtung wird sie infolge der einseitigen Intensitätsverteilung durch Überstrahlung leicht nach der entgegengesetzten Seite verschoben erscheinen. Aus diesem Grunde erschien eine Bestimmung mit dem Auge noch zuverlässiger und wurde mit dem erwähnten Gradsichtspektroskop, das einen der in Spektrophotometern üblichen Okularschieber besaß, wie folgt vorgenommen. Es wurde der Schieber einseitig bis zur Mitte des Okulars (Fadenkreuz) vorgeschoben und durch Drehen der Wellenlängentrommel von Rot herkommend abgelesen, sobald eine Aufhellung am Rande des Schiebers im Blaugrün erkennbar war. In gleicher Weise wurde verfahren von Violett herkommend, sobald die letzte Spur des kontinuierlichen Leuchtens hinter dem Schieber verschwand. Durch Gabelung und Mittelwertsbildung aus zahlreichen Ablesungen wurde die Kante übereinstimmend mit den Messungen auf den Spektrogrammen bei 4800 A.E. ermittelt mit einem maximalen Fehler von ± 15 A.E. Wie zu erwarten war, zeigte dieser Teil des Spektrums, da er mit den Molekülen des Jods nichts zu tun hat, mit der Temperaturänderung nur insofern einen Einfluß, als mit wachsender Dissoziation seine Intensität stark zunahm, entsprechend dem Aussehen der positiven Säule für das unbewaffnete Auge. Eine Verschiebung der Kante war nicht festzustellen, ebensowenig traten Strukturänderungen im kontinuierlichen Grunde auf. Es sei bemerkt, daß die Untersuchung sich auf das sichtbare Spektrum beschränkte.

Die elektrischen Verhältnisse wurden, wie erwähnt, möglichst konstant gehalten, d. h. es wurde darauf geachtet, daß keine Schwingungen auftraten und keine diskontinuierlichen Entladungen, welche das Linienspektrum des Jods erzeugen können; besonderer Wert wurde auf konstante Stromdichte der Hochspannungsmaschine gelegt. Dabei zeigte sich, daß die Leitfähigkeit bei konstantem Druck mit wachsender Temperatur zunahm, entsprechend der mit wachsender Dissoziation zunehmenden Bildung neuer Elektrizitätsträger (Elektronen-Atomionen).

Das bei den Versuchen verwendete große Flintglasprisma sowie teilweise die Entladungsröhren wurden aus Mitteln des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik beschafft, wofür ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Ferner möchte ich Herrn P. P. Koch in Hamburg, der in freundlichster Weise sein Mikrophotometer zur Registrierung der Platten zur Verfügung stellte, sowie Herrn Goos, der so liebenswürdig war, die Registrierung damit durchzuführen, meinen besonderen Dank aussprechen.

Aachen, Physik. Inst. der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 15. August 1921.)

1) Ann. d. Phys. IV, **64**, 677, 1921 u. Zeitschr. f. Phys. **1**, 428, 1920.

Das Spektrum der magnetischen Permeabilität des Eisens in dem Bereiche der Wellenlängen von 1 cm bis 1 km.

Von W. Arkadiew.

Im Jahre 1911 habe ich die Absorption der elektrischen Wellen an zwei parallelen Drähten gemessen und habe dabei gefunden, daß die magnetische Permeabilität von Eisen- und Nickeldrähten zu den kürzeren Wellen abfällt und sie die Werte 3,6 bzw. 0,85 bei der

Wellenlänge von 1,3 cm annehmen kann[1]). Bei der Vergrößerung der Wellenlänge nimmt die Permeabilität zu und bei Wellen von 72,7 cm habe ich „μ" gleich 78 bis 92 für Eisen und 20 für Nickel gefunden. Die Stärke des Wechselfeldes wurde bei diesen Versuchen gleich ca. 0,2—8 Gauß. Dieses Verschwinden der ferromagnetischen Eigenschaften habe ich damals durch die Eigenschwingungen der Elementarmagnete zu erklären gesucht und mittels der Theorie des elektromagnetischen Feldes in ferromagnetischen Metallen[2]) konnte ich Schlüsse über die Eigenperiode, Dämpfung, Größe und Reibung der Elementarmagnete in Nickel und Eisen ziehen. Mittels meiner Theorie hat neuerdings R. Gans[3]) die Ergebnisse von Loyarte betreffend eines Nickeldrahtes bearbeitet und qualitativ dieselben Resultate, wie ich, erhalten.

Jetzt möchte ich über die neueren Messungen von W. Kartschagin, die nach meiner Anregung ausgeführt worden sind, und diejenigen von K. Theodortschick und B. Wwedensky, die die von ihnen ausgearbeitete Anordnung zur Prüfung meiner theoretischen Ansichten angewandt haben, eine vorläufige Mitteilung machen.

Kartschagin untersuchte mittels eines Thermoelementes die Absorption elektrischer Wellen in zwei parallelen Eisendrähten im Bereiche der Wellenlängen von 2,2 m bis 42 m. Die Wellenenergie wurde mittels der gedämpften Funkenentladungen von Kondensatoren erregt. Die Permeabilität wurde bei der Feldstärke von einigen Gauß gemessen. Theodortschick und Wwedensky haben die Permeabilität mittels ungedämpfter Wellen von 54 m bis 705 m Länge in Wechselfeldern von ca. 0,01 bis 0,1 Gauß gemessen. Sie haben die Änderung der Selbstinduktion bestimmt, die bei der Einführung von einigen dünnen Eisendrähten in eine Spule auftritt. Bei der Berechnung von „μ" wurde die Wirbelstromwirkung berücksichtigt[4]). Die Resultate, die der Drahtdicke $d = 0{,}043$ mm, 0,1 mm und 0,5 mm angehören, sind in der Fig. 1 dargestellt. In Gebieten, wo das Spektrum nicht

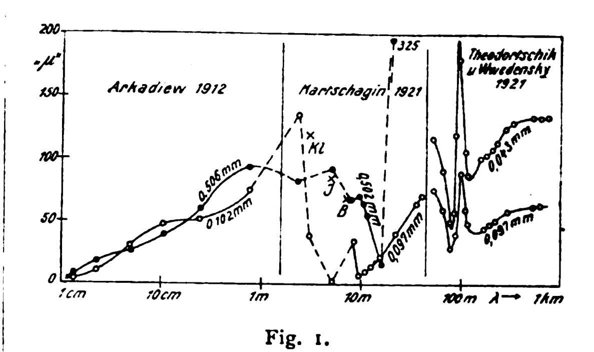


Fig. 1.

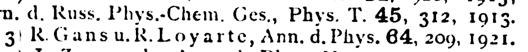
hinlänglich ausführlich erforscht zu sein scheint, sind die Punkte durch strichpunktierte Gerade miteinander verbunden.

Die früheren Messungen von mir, sowie die jetzigen von den genannten Beobachtern zeigen, daß der Verlauf der Kurve von der Drahtdicke stark beeinflußt wird. Die Kreuze *Kl*, *J* und *B* stellen die Werte dar, die aus den Arbeiten von Klemenčič[1]), John[2]) und Birkeland[3]) entnommen sind.

Die hier gegebenen Werte der Permeabilität „μ" sind in der Voraussetzung, daß die Magnetisierung keine Verzögerung gegen die Feldänderungen zeigt, berechnet. Diese Größe habe ich immer als „scheinbare Permeabilität" bezeichnet[4]), da sie noch die magnetische Leitfähigkeit enthält und je nach der Wahl der Meßmethode verschieden ausfallen kann.

Der Abfall der Permeabilität bei den Wellen von 500—150 m steht in quantitativer Zusammenstimmung mit der Erscheinung der magnetischen Viskosität in dünnen Eisendrähten, die jetzt mit den Beobachtungen von Wwedensky[5]) bestätigt ist. Der Verlauf der Kurve zeigt, besonders in dem Gebiete von 70 m bis 150 m den charakteristischen Gang der Dispersion, die für ferromagnetische Metalle schon längst berechnet und in Diagrammen dargestellt ist[6]).

1) Diese Zeitschr. **14**, 561, 1913; Ann. d. Phys. **58**, 105, 1919; Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys. T. **44**, 165, 1912; **45**, 103, 1913. Um bei den kürzeren Wellen die magnetischen Eigenschaften zu untersuchen, könnte man, wie in Versuchen von Hagen und Rubens (Ann. d. Phys. **11**, 873, 1903) die Reflexion der elektrischen Wellen von ferromagnetischen Metallen studieren. Deshalb habe ich im Jahre 1912 Herrn B. Milentz vorgeschlagen, die Lebensdauer der elektromagnetischen Strahlung von verschiedenen Wellenlängen in einem Hohlraume mit Messing- bzw. Eisenwänden zu vergleichen. Aus äußeren Umständen konnten die Versuche nicht fortgeführt werden.



2) W. Arkadiew, diese Zeitschr. **14**, 928, 1913; Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys. T. **45**, 312, 1913.

3) R. Gans u. R. Loyarte, Ann. d. Phys. **64**, 209, 1921.

4) J. Zenneck, Ann. d. Phys. **11**, 1135, 1903.

1) I. Klemenčič, Wied. Ann. **50**, 456, 1893; **53**, 707, 1894. $d = 0{,}452$ mm.

2) Ch. E. St. John, Phil. Mag. (5) **38**, 425, 1894; **39**, 297, 1895. $d = 0{,}785$ mm.

3) Kr. Birkeland, C. R. **116**, 625, 1893. $d = 0{,}205$ mm. Bei Klemenčič ist „μ" nach dem Widerstand der Eisendrähte berechnet und ist demjenigen von mir, Birkeland und Kartschagin analog. Das letztere ist mittels meiner Formel (Ann. d. Phys. **58**, 132, 1919) berechnet:

$$„\mu" = \frac{\lambda_0}{r}\left[138\,(1+\eta)\,\gamma\,\lg_{10}\frac{a}{\varrho} - 0{,}0029_r\right]^2.$$

Die Werte $\eta = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0}$ wurden aus dem Versuch unmittelbar entnommen.

4) Diese Zeitschr. **14**, 561, 931, 933, 1913.

5) B. Wwedensky, Ann. d. Phys. **64**, 609, 1921.

6) W. Arkadiew, Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges., Phys. T. **45**, 322, Fig. 2, 1913. Diese Kurven sind jetzt für denselben Parameter bei Gans und Loyarte, l. c., Fig. 2, 3 und 4, angegeben.

Das Hauptresultat: Die Veränderlichkeit der Größe „μ“, die aus der angeführten Kurve ersichtlich ist, scheint zu zeigen, daß es nicht nur eine einzelne, sondern viele Eigenperioden der Elementarmagnete gibt.

Moskau, Physikalisches Imstitut der Universität, Mai 1921.

(Eingegangen 8. August 1921.)

Über Lichtquanten.

Von R. Emden.

Die Erscheinungen der Optik können bekanntlich nicht mehr auf eine Grundanschauung zurückgeführt werden; die einst allmächtige Undulationstheorie versagt auf weiten Gebieten, die durch Annahme von Lichtquanten einfach und restlos behandelt werden können. Trotzdem werden im Banne der Undulationstheorie die Lichtquanten gleichsam nur als Verlegenheitshypothese betrachtet, bestimmt, früher oder später wieder zu verschwinden. Der Zwiespalt, der sich durch den Gegensatz beider Anschauungen ergibt, kann meistens vermieden werden, wenn man sich jeweils konsequent auf den Boden derjenigen Theorie stellt, durch welche das betreffende Erscheinungsgebiet am einfachsten behandelt werden kann. So sollen im folgenden die Gesetze der Temperaturstrahlung auf Grundlage der Lichtquanten entwickelt werden, ohne daß die Darstellung durch Erinnerung an die Undulationstheorie im geringsten beeinflußt wird; diese soll für das folgende nicht existieren. (Von deren eigentlichen Erscheinungsgebieten, Interferenz und Beugung kann ja im Innern eines gleichmäßig temperierten Hohlraums nicht die Rede sein.) Auf die Gesetze von Kirchhoff und Lambert soll im Interesse der Raumersparnis nicht eingegangen werden; ihre Behandlung auf Grund der Lichtquanten ist durch das folgende ohne weiteres gegeben.

Wir nehmen also an, daß jeder Körper infolge seines Temperaturzustandes an seiner Oberfläche, vollkommen spiegelnde Stellen ausgenommen, Lichtquanten, Energieansammlungen im Betrage von ε Erg, $0 < \varepsilon < \infty$, auswirft, die geradlinig mit der Signalgeschwindigkeit $c = 3{,}10^{10}$ cm/sec den Raum durcheilen. Ihre Anzahl N sei so groß, daß gegebenenfalls N praktisch als kontinuierlich veränderliche Größen behandelt werden kann.

I. Masse und Impuls eines Lichtquantes.

Da ein Lichtquant mit der Signalgeschwindigkeit c sich bewegt, muß nach der Relativitätstheorie seine Ruhmasse gleich null sein. Ist sein gesamter Energiegehalt ε, so ist nach derselben Theorie seine träge Masse anzusetzen

$$m_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c^2} \tag{1a}$$

und sein Impuls zu

$$m_\varepsilon c = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{1b}$$

II. Der Strahlungsdruck.

Der gleichmäßig temperierte Hohlraum habe die Gestalt eines Zylinders von der Höhe H und dem Querschnitt F; sein Boden sei vollkommen spiegelnd. Lichtquanten vom Energiewert ε seien N_ε vorhanden, von denen sich jeweils $\frac{N_\varepsilon}{3}$ in Richtung der Zylinderachse bewegen; jedes gelangt in der Sekunde $\frac{c}{2H}$ mal zum Stoß an der Bodenfläche, wobei sein Impuls $m_\varepsilon c$ umgekehrt wird. An dieser wird also in der Zeiteinheit Impuls erzeugt im Betrage

$$2m\,c \cdot \frac{c}{2H} \cdot \frac{N_\varepsilon}{3},$$

so daß sich der Druck ergibt

$$p_\varepsilon = \frac{m_\varepsilon c^2 \cdot N_\varepsilon}{3HF} = \varepsilon \cdot \frac{N_\varepsilon}{3V}.$$

Ist die Anzahl der Teilchen in der Volumeinheit

$$\frac{N_\varepsilon}{V} = n_\varepsilon,$$

und bezeichnet $u_\varepsilon = n_\varepsilon \cdot \varepsilon$ die Energiedichte, so folgt

$$p_\varepsilon = \frac{n_\varepsilon \cdot \varepsilon}{3} = \frac{u_\varepsilon}{3}. \tag{2a}$$

Da der Zylinder durch innere Kräfte nicht in Bewegung gesetzt werden kann, gilt diese Beziehung nicht nur bei vollkommener Spiegelung, sondern bei beliebiger Oberflächenbeschaffenheit.

(In der kinetischen Gastheorie lautet die entsprechende Gleichung

$$p = \tfrac{2}{3} u,$$

da hier $\frac{1}{2}mv^2$, (nicht mc^2), gleich der kinetischen Energie gesetzt werden muß).

Haben wir es mit einem Bündel paralleler Strahlen zu tun, so ergibt an Stelle von (2a) eine leichte Überlegung

$$p_\varepsilon = u_\varepsilon. \tag{2b}$$

u_ε die in Wirklichkeit vorhandene Strahlungsdichte an der gestoßenen Fläche.

Der Gesamtdruck der Strahlung wird durch Summation aller Partialdrucke p_ε erhalten.

III. Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz.

In einem Zylinder vom Volumen V seien Lichtquanten ε in der Energiedichte u_ε vorhanden; sein Energieinhalt ist dann $V \cdot u_\varepsilon$. Wird dieser (durch Temperatursteigerung) um $d(V \cdot u_\varepsilon)$ erhöht und gleichzeitig das Volumen gegen den Druck p_ε um dV vergrößert, so ist Wärme zuzuführen

$$dQ_\varepsilon = d(V \cdot u_\varepsilon) + p_\varepsilon dV = V du_\varepsilon + u_\varepsilon dV + p_\varepsilon dV.$$

Der Volumeinheit v also

$$dq_\varepsilon = du_\varepsilon + u_\varepsilon dv + p_\varepsilon dv.$$

Erfolgt die Ausdehnung isotherm, so ist $du_\varepsilon = 0$, und setzen wir in diesem Falle

$$dq_\varepsilon = r_\varepsilon dv,$$

so folgt für die Entwicklungswärme r_ε der Volumeinheit Strahlung (entsprechend der Verdampfungswärme der Masseneinheit Flüssigkeit)

$$r_\varepsilon = u_\varepsilon + p_\varepsilon$$

und mit Rücksicht auf (2a)

$$r_\varepsilon = \tfrac{4}{3} u_\varepsilon = 4 p_\varepsilon. \tag{3a}$$

Wird die Volumeinheit isotherm und umkehrbar mit Strahlung erfüllt, so sind von der zuzuführenden Wärme 75 Proz. zur Erzeugung der Lichtquanten, 25 Proz. zur Ausdehnungsarbeit verwandt.

Ein Zusammenhang zwischen r_ε und der Temperatur T läßt sich leicht (wie bei einem Verdampfungsprozeß) in Form einer Clapeyronschen Gleichung gewinnen. Zur isothermen Volumvergrößerung bei der Temperatur T ist die Wärmemenge $r_\varepsilon dv$ zuzuführen. Der Innenraum des Zylinders werde nun mit vollkommenen Spiegeln ausgekleidet (wodurch die Zahl n_ε vorhandener Lichtquanten konstant gehalten wird) und durch isentrope Ausdehnung die Temperatnr um dT, der Druck entsprechend um $\frac{\partial p}{\partial T} dT$ erniedrigt. Durch eine anschließende isotherme, dann isentropische Kompression wird der kleine Kreisprozeß geschlossen. Er hat sich zwischen T und $T - dT$ abgespielt, die ins Spiel getretene Wärmemenge ist $r_\varepsilon dv$ und die geleistete Arbeit $dv \cdot \frac{\partial p}{\partial T} dT$, so daß sich die Clapeyronsche Gleichung ergibt

$$r_\varepsilon = T \frac{dp_\varepsilon}{dT}$$

und weiter mit Rücksicht auf (3a)

$$T \frac{dp_\varepsilon}{dT} = 4 p_\varepsilon$$

und daraus mit geeignet bestimmter Integrationskonstante

$$p_\varepsilon = \frac{a_\varepsilon}{3} T^4, \tag{3b}$$

$$u_\varepsilon = n_\varepsilon \varepsilon = a_\varepsilon T^4, \tag{3c}$$

$$r_\varepsilon = \frac{4 a_\varepsilon}{3} T^4, \tag{3d}$$

$$s_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon}{T} = \frac{4 a_\varepsilon}{3} T^3. \tag{3e}$$

(s_ε = Entropie der Lichtquanten ε in der Volumeinheit). Dabei ist aber zu beachten, daß (wie unter V. näher ausgeführt) bei Temperatursteigerung nicht nur die Teilchenzahl n_ε vergrößert, sondern auch der Energiegehalt jedes Teilchens gesteigert wird. Ist die Strahlung in bezug auf ε gemischt, so ist über die Teilbeträge p_ε, u_ε, r_ε, s_ε zu summieren. Dabei ergibt sich leicht das Stefansche Gesetz in der gebräuchlichsten Form $E = \sigma T^4$.

(Mit $p = \frac{2}{3} u$ würde (3a) $r_\varepsilon = \frac{5}{2} p_\varepsilon$ lauten, so daß an Stelle von T^4 im Stefanschen Gesetze $T^{2,5}$ auftreten würde).

IV. Die Isentrope der Temperaturstrahlung.

Entropieinhalt des Volumens V bei der Temperatur T gibt sich für die Lichtquanten ε zu

$$S_\varepsilon = V s_\varepsilon = \frac{4 a_\varepsilon}{3} V T^3$$

und muß bei isentroper Behandlung konstant bleiben, so daß sich ergibt

$$T^3 V = \text{const} \tag{4a}$$

und mit Rücksicht auf (3b)

$$p_\varepsilon T^{-4} = \text{const} \tag{4b}$$

folgt weiter

$$p_\varepsilon V^{4/3} = \text{const} \tag{4c}$$

$$u_\varepsilon V^{4/3} = \text{const.} \tag{4d}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Isentropen eines vollkommenen Gesetzes mit

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{4}{3}.$$

[Ausgehend von $p_\varepsilon = \frac{2}{3} u_\varepsilon$ wären wir zu einer Stelle von (4c) zu $p_\varepsilon V^{5/3}$ gelangt, also zur Isentrope eines einatomigen Gases, $\varkappa = \frac{5}{3}$.]

V. Das Wiensche Verschiebungsgesetz.

Da die Temperaturstrahlung durch die Temperatur in jeder Hinsicht eindeutig bestimmt ist, wird bei Steigerung der Temperatur T auf T' das Endprodukt der Strahlung dasselbe, gleichgültig auf welche Weise die Temperatursteigerung bewirkt wird. Der Übergang von T zu T' läßt sich bei isentroper Behandlung am leichtesten

überblicken und findet seinen Ausdruck in dem Wienschen Verschiebungsgesetze.

Behandeln wir die Strahlung vom Volumen V isentropisch (vollkommen spiegelnde Innenwandung), so haben wir (4d)

$$u_\varepsilon V^{4/3} = \text{const.}$$

Da aber

$$u_\varepsilon = \frac{N_\varepsilon \cdot \varepsilon}{V},$$

folgt

$$\left(\frac{N_\varepsilon \cdot \varepsilon}{V}\right) V^{4/3} = \text{const.}$$

Die Lichtquantenhypothese findet ihren Ausdruck darin, daß bei isentroper Behandlung (vollkommen spiegelnde Innenwandung) N_ε konstant bleibt. Also ergibt sich

$$\varepsilon V^{1/3} = \text{const} \tag{5a}$$

und weiter mit Rücksicht auf Gl. (4a)

$$\frac{\varepsilon}{T} = \text{const.} \tag{5b}$$

Diese Gleichung ist von so fundamentaler Bedeutung, daß wir sie noch auf andere Weise ableiten. Bei isentroper Kompression (vollkommen spiegelnder Innenwandung) wird die ganze Kompressionsarbeit $-p_\varepsilon dV$ zur Steigerung der Strahlungsenergie um den Betrag $d(N_\varepsilon \cdot \varepsilon)$ verwandt, oder da N_ε konstant, zu $N_\varepsilon d\varepsilon$.

$$-p_\varepsilon dV = N_\varepsilon d\varepsilon. \tag{5c}$$

Da aber nach IV. $p \sim T^4$, $V \sim \frac{1}{T^3}$, ergibt sich

$$dT \sim d\varepsilon; \quad \frac{\varepsilon}{T} = \text{const.} \tag{5d}$$

Diese Beziehung ist der allgemeinste Ausdruck des Wienschen Verschiebungsgesetzes: Der Energiebetrag eines jeden einzelnen Lichtquantes ändert sich bei beliebig herbeigeführter Temperaturänderung der Strahlung proportional der Temperatur T. (Ausgehend von dem Ansatze $p = \frac{2}{3} u$ würde sich dasselbe Gesetz ergeben.)

Die Hohlraumstrahlung von der Temperatur T werde spektral zerlegt. Als Abszissen tragen wir Strecken $\sim \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \infty$, auf, als Ordinaten Strecken $u_\varepsilon = n_\varepsilon \varepsilon$ so bemessen, daß nunmehr

$$u_\varepsilon d\varepsilon = n_\varepsilon \cdot \varepsilon d\varepsilon$$

die Energie der Strahlung ε, genauer der Strahlung in dem Intervalle ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ darstellt. Steigern wir die Temperatur auf T', so steigern die Lichtquanten ε ihren Energiegehalt ε auf ε' gemäß dem Wienschen Gesetze (5b), so daß

$$\varepsilon' : \varepsilon = T' : T$$

und die Breite des Intervalles $d\varepsilon$ ändert sich in $d\varepsilon'$

$$d\varepsilon' : d\varepsilon = T' : T.$$

Da aber nach (3c)

$$(u_\varepsilon d\varepsilon)' : (u_\varepsilon d\varepsilon) = T'^4 : T^4,$$

folgt

$$u_\varepsilon' : u_\varepsilon = T'^3 : T^3 = \varepsilon'^3 : \varepsilon^3, \tag{5d}$$

$$(n_\varepsilon \varepsilon)' : (n_\varepsilon \varepsilon) = T'^3 : T^3 = \varepsilon'^3 : \varepsilon^3,$$

$$n_\varepsilon' : n_\varepsilon = T'^2 : T^2 = \varepsilon'^2 : \varepsilon^2. \tag{5e}$$

Die Anzahl der Teilchen in dem Intervalle ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ wächst also $\sim T'^2$. Da ferner Sattelwerte der Energiekurven bei Temperaturänderung offenbar Sattelwerte bleiben, gilt auch speziell

$$\frac{\varepsilon'_{\max}}{T'} = \frac{\varepsilon_{\max}}{T} = \text{const.}$$

Diese Konstruktion findet ihren analytischen Ausdruck in den Beziehungen

$$u_\varepsilon = n_\varepsilon \cdot \varepsilon = T^3 f\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) = \varepsilon^3 F\left(\frac{\varepsilon}{T}\right), \tag{5f}$$

$$n_\varepsilon = T^2 f\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) = \varepsilon^2 F\left(\frac{\varepsilon}{T}\right). \tag{5g}$$

Die Funktionen selbst sind noch zu bestimmen.

VI. Die Plancksche Strahlungsformel.

Die stationäre Hohlraumstrahlung ist vor anderen Strahlungen durch maximale Entropie ausgezeichnet. Wir teilen bei der Temperatur T ihr Volumen in eine hinreichend große Zahl von Teilvolumina und bringen in diesen die in genügend großer Zahl N_ε vorhandenen Lichtquanten ε derart unter, daß V_0 Teilvolumina 0, V_1 Teilvolumina 1 und V_i Teilvolumina i Lichtquanten enthalten, derart, daß die Anzahl möglicher Komplexionen ein Maximum wird. Es ist also das Maximum der Entropie zu bestimmen unter den Bedingungen

$$\sum V_i = V,$$

$$\sum V_i \cdot i\varepsilon = N_\varepsilon \varepsilon = E.$$

Die Lösung gibt bekanntlich für den mittleren Energiegehalt eines Teilvolumens

$$\frac{\sum V_i i\varepsilon}{\sum V_i} = \frac{\sum i \cdot \varepsilon e^{-\frac{i \cdot \varepsilon}{kT}}}{\sum e^{-\frac{i \cdot \varepsilon}{kT}}} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}.$$

Der Energiegehalt $u_\varepsilon d_\varepsilon = n_\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$ der Volumeinheit ist dieser Größe proportional, und da die Zahl N_ε der zur Verteilung gelangenden Lichtquanten nach (5e) mit T^2, bzw. $g \cdot \varepsilon^2$ wächst, folgt an Stelle von (5f, 5g)

$$n_\varepsilon = \text{const}\,\frac{\varepsilon^2}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \tag{6a}$$

und die Plancksche Strahlungsformel

$$u_\varepsilon = \text{const}\,\frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}\,. \tag{6b}$$

Bei konsequentem Festhalten an dem Standpunkt der Lichtquanten erübrigt sich (selbstverständlich) die Einführung des Wirkungsquantums h.

VII. Dopplereffekt.

Die Fläche 1 cm² wird von einem parallelen Strahlenbündel in Richtung der Normalen durchsetzt. In der Sekunde wird sie von c cm³-Strahlung, jeder n-Lichtquanten $\varepsilon = mc^2$ enthaltend, durchsetzt, so daß an Impuls $c \cdot n \cdot mc$ hindurchgeht, der aufgehalten einem Strahlungsdruck

$$p = n \cdot mc^2 = n\varepsilon = u$$

entspricht (Gl. 2b).

Bewegt sich die Fläche der Strahlung mit der Geschwindigkeit $\pm v$ entgegen, so steigt die Zahl hindurchgehender cm³ von c auf $c + v$, der hindurchgehende Impuls auf $(c \pm v) \cdot n \cdot mc$, entsprechend einem Druck

$$p' = n \cdot mc^2 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) = n\varepsilon' = u'.$$

Für die bewegte, auffangende Fläche treten die Lichtquanten ε als Lichtquanten ε'

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \tag{7a}$$

in Erscheinung (Dopplereffekt).

Dieselbe Beziehung ergibt sich, wie leicht ersichtlich, bei ruhender, auffangender, aber bewegter strahlender Fläche. Wie bei Umwandlung von ε in ε' durch Temperaturänderung, kommt diese Umwandlung durch Dopplereffekt in entsprechender Veränderung der trägen Masse m der Lichtquanten zustande.

VIII. Rotationen eines Lichtquants. Folgerungen.

Die isentrope Behandlung der Lichtquanten lieferte (4b):

$$p, V^\varkappa = \text{const}; \quad \varkappa = \frac{4}{3},$$

übereinstimmend mit der Isentropen eines dreiatomigen Gases. Wir haben also den Lichtquanten sechs Freiheitsgrade zuzuschreiben. Drei Freiheitsgrade stecken in der geradlinigen Bewegung; über die weiteren drei Freiheitsgrade können wir verfügen. Um diese unterzubringen, machen wir die einfachste Hypothese und lassen das Lichtquant um eine beliebige Achse rotieren. Diese Annahme führt zwangsläufig zu folgenden Ergebnissen. Die Gesamtmenge ε eines Lichtquants ist zu gleichen Teilen $\frac{\varepsilon}{2}$ vorhanden als kinetische Energie der geradlinig fortschreitenden Bewegung und kinetische Energie der Rotation. Bezeichnen wir mit Θ das Trägheitsmoment, mit ω die Winkelgeschwindigkeit und mit q die Tourenzahl, so folgt

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta(2\pi q)^2 = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8a}$$

Das Lichtquant muß als Rotator gequantelt werden. Sein Drehimpuls ist daher

$$\Theta\omega = \Theta 2\pi q = \frac{z \cdot h}{2\pi}; \quad z = 1, 2, 3 \ldots \tag{8b}$$

(Diesen Drehimpuls verliert das ausstrahlende Teilchen.) Also folgten aus (7a) und (7b):

$$\omega = 2\pi q = \frac{2\pi\varepsilon}{zh}. \tag{8c}$$

Setzen wir den Dimensionen entsprechend

$$\frac{\varepsilon}{h} = \nu \sec^{-1} = \frac{1}{\tau \sec}. \tag{8d}$$

So folgt für die Tourenzahl des Lichtquants

$$q = \frac{\nu}{z} \tag{8e}$$

und im einfachsten Falle $z = 1$

$$z = \nu. \tag{8f}$$

Führen wir noch den Trägheitsradius r ein, setzen also

$$\Theta = mr^2 = \frac{\varepsilon}{c^2} r^2,$$

so liefert (8a) unmittelbar

$$r\omega = c. \tag{8g}$$

Jeder Punkt im Abstand r von der Drehachse bewegt sich also mit der Geschwindigkeit c; rollt das Lichtquant auf diesem Kreise (Trägheitskreis) ab, so bewegt es sich vorwärts mit Signalgeschwindigkeit c. Schreiben wir weiter durch Einführung von $\frac{\varepsilon}{h} = \nu$ (8c) in der Form

$$\omega = 2\pi q = \frac{2\pi\nu}{z},$$

so folgt aus (8g)

$$\frac{r \cdot 2\pi\nu}{z} = c,$$

und führen wir noch eine Strecke λ ein durch die Beziehung

$$\nu \cdot \lambda = c,$$

so folgt:

$$2\pi r = z \cdot \lambda \tag{8h}$$

$$= \lambda \text{ für } z = 1.$$

Im einfachsten Falle $z = 1$ ergibt sich somit folgendes Resultat:

Liegt die Drehachse senkrecht zur Fortschreitungsrichtung; so bewegt sich das Lichtquant durch Abrollen auf dem Trägheitskreis mit der Geschwindigkeit c vorwärts, die Tourenzahl ist ν, durch jede Umdrehung wird in Richtung c eine Strecke λ abgesteckt, über welcher der betreffende Punkt des Trägheitskreises in der Zeit $\tau = \frac{1}{\nu}$ eine harmonische Schwingung ausführt (geradlinig polarisiertes Licht). Liegt die Rotationsachse in Richtung c, so legt jeder Punkt des Trägheitskreises mit der Tourenzahl ν je nach dem Drehsinn eine Rechts- oder Linksscheibe mit der Ganghöhe λ zurück, wie sie durch Fresnel zur Veranschaulichung zirkular polarisierten Lichtes eingeführt sind. Zwischenlagen ergeben elliptisch polarisiertes Licht. Im allgemeinen Falle sind Tourenzahl und Wegstrecke durch die Bezeichnungen $\frac{\nu}{z}$ und $z \cdot \lambda$ gegeben, $z = 1, 2, 3 \ldots.$

IX. Anzahl der Lichtquanten in Kubikzentimeter.

Die Solarkonstante beträgt mit genügender Genauigkeit $2 \frac{\text{gramm cal.}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}}$. Also sind enthalten:

$$\text{in } 1 \text{ cm}^3 \text{ Sonnenlicht} = \frac{2 \cdot 4{,}19 \cdot 10^7}{60 \cdot 3{,}10^{10}}$$

$$= 4{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ Erg.}$$

Nach den Messungen von Abbot und Fowle liegt das Intensitätsmaximum der Sonnenstrahlung bei $\lambda = 0{,}470\ \mu$. Der Energiegehalt eines Lichtquantes dieser Art beträgt

$$\varepsilon = h\nu = \frac{6{,}5 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}10^{10}}{4{,}7 \cdot 10^{-5}} = 4{,}1 \cdot 10^{-12} \text{ Erg.}$$

Da es sich nur darum handeln kann, die Größenordnungen festzusetzen, nehmen wir an, die ganze Sonnenstrahlung bestehe nur aus dieser Quantenart. Dann folgt:

1 cm² Sonnenlicht in Erdentfernung von der Sonne enthält 10^7 Lichtquanten,

1 cm³ Sonnenlicht an der Sonnenoberfläche enthält $10^7 \cdot (200)^2 = 10^{11}$ Lichtquanten.

Die Dimensionen eines Lichtquantes, die sich nach VII von der Größenordnung λ ergaben, lassen diese große Anzahl erwarten. 1 cm² an der Grenze der Atmosphäre erhält also bei senkrechter Bestrahlung sekundlich 10^{17} Lichtquanten zugeführt, bei Schwächung des Lichtes auch 10^{-10} immer noch 10^7.

Die Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte stehen in vollständigem Widerspruch zur Auffassung der Lichtquanten als Gebilde, in Anbetracht der Kohärenz von beträchtlicher Tiefendimension und in Anbetracht der Beugung von den Querdimensionen etwa eines Fernrohrobjektivs. Gerade ihre mit λ vergleichbare Größe und ihre ungeheure Zahl gestatten vielleicht, den Erscheinungen der Interferenz und Beugung durch Mittelwerte näher zu kommen.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 13. August 1921.)

Zur Theorie der Volumdilatation bei konzentrierten Lösungen.

Eine Bemerkung zu der Arbeit von Alfred Schulze[1]).

Von W. Deutschmann.

In der oben erwähnten Arbeit gibt der Verfasser an, daß im Falle der Volumdilatation eine theoretische Ableitung derselben noch nicht erbracht sei. Ich bemerke dazu, daß ich selbst sie bereits zweimal gegeben habe, einmal in meiner, von Herrn Schulze selbst zitierten Dissertation auf S. 16 bis 20, wo ich sogar für den Fall, daß eine Dampfdruckkurve gar nicht vorliegt, die Berechnungsweise aus zwei Punkten der Dilatationskurve angebe; zweitens habe ich dasselbe Thema in meiner Arbeit „Dichte und spezifische Drehung von Flüssigkeitsgemischen mit einer optisch aktiven Komponente"[2]) behandelt. Dort gebe ich auf S. 430 folgende Formel (7): $\Delta V = (z^0_{a_2} - z_{a_2}) \cdot (2 v_{a_1} - v_{a_2})$, eine Formel, welche bis auf die Bezeichnungsweise völlig mit der Formel (1) der Arbeit von Herrn Schulze übereinstimmt.

1) Diese Zeitschr. **22**, 177, 1921.
2) Zeitschr. phys. Chem. **96**, 428, 1920.

(Eingegangen 5. Juli 1921.)



Erwiderung auf die Bemerkung von W. Deutschmann zu meiner Arbeit über „Die Theorie der Volumdilatation bei konzentrierten Lösungen".

Von Alfred Schulze.

Herr Deutschmann nimmt Anstoß daran, daß ich in meiner Arbeit über die Theorie der Volumdilatation bei konzentrierten Lösungen[1]) behaupte, eine theoretische Ableitung derselben sei noch nicht erbracht. Ich hätte dabei allerdings hinzufügen müssen: „eine Ableitung mit Hilfe der Molenbrüche", wodurch wohl alles ohne weiteres geklärt ist. Unter Zugrundelegung der Dolezalekschen Anschauungen über das Verhalten zweier Flüssigkeiten beim Mischen, von denen die eine normal, d. h. rein monomolekular, die andere dagegen assoziiert ist, hat Herr Deutschmann allerdings eine Ableitung für die beim Mischen auftretende Volumdilatation erbracht; jedoch rechnet er mit den Molekülzahlen selbst, während ich die Rechnung mit Hilfe der viel anschaulicheren Molenbrüche durchgeführt habe. Diese Art der Rechnung, die zugleich auch ganz andere Überlegungen mit sich bringt, hat den Vorzug, daß in den resultierenden Ausdrücken für die Volumdilatation sowohl, als auch für die Molvolumina Größen auftreten, die in der allgemeinen Theorie der konzentrierten Lösungen immer wiederkehren und für die Berechnung der anderen physikalischen Eigenschaften der Mischungen von Wichtigkeit sind. Hierzu kommt noch, daß bei der Rechnung, mit den Molekülzahlen selbst für die reinen Komponenten unbestimmte Ausdrücke, wie z. B. o:o auftreten, deren Werte erst durch Differentiation ermittelt werden müssen. All dies fällt bei der Rechnung mit den relativen Größen, den Molenbrüchen, fort. Aus diesem Grunde hat Dolezalek schon sehr bald das Rechnen mit den absoluten Molekülzahlen fallen lassen und die viel anschaulicheren Molenbrüche angewendet. Es lassen sich dann beispielsweise die Dampfspannungen, die Molekularrefraktion, die Molekularwärme, die Molvolumina der Mischungen lediglich als Funktion des Molenbruchs darstellen. Um die Theorie einheitlich zu gestalten, sollte man sich mithin allgemein der „analytischen" und der „wahren" Molenbrüche bedienen, was auch für eventuelle Beziehungen zwischen den einzelnen physikalischen Eigenschaften der Mischungen untereinander, über die ich in nächster Zeit ausführlich zu berichten denke, und auch für eine kinetische Theorie der Mischungen von großer Wichtigkeit ist. Deshalb habe ich auch in dem vorliegenden Fall die beim Mischen auftretende Volumdilatation mit Hilfe der Molenbrüche dargestellt, die bisher noch nicht erbracht war.

Charlottenburg, im Juli 1921.

1) Diese Zeitschr. 22, 177, 1921.

(Eingegangen 28. Juli 1921.)

BESPRECHUNGEN.

Astronomie. Unter Redaktion von S. Hartmann; aus dem dritten Teile der „Kultur der Gegenwart". Verlag von B. G. Teubner. 640 S., 2 Tafeln u. 44 Abbildungen. Geb. einschl. Teuerungszuschlag M. 80.—.

Die großen Fortschritte der Physik in den letzten Jahren und die Umwälzungen, die die Grundlagen unserer Vorstellungen über das Weltbild erfahren haben und noch dauernd erfahren, werden es grade dem Physiker wünschenswert erscheinen lassen, sich eingehend und rasch über die Ziele und Erfolge der Astronomie, die ihrerseits z. T. angewiesen ist auf die Errungenschaften der theoretischen und praktischen Physik, informieren zu können. Ist doch die Sternenwelt in vielen Beziehungen ein Laboratorium, in dem uns physikalische Vorgänge in einer Großartigkeit vorgeführt werden, wie wir sie in unsern irdischen Laboratorien nie werden ausführen können. Das oben angeführte Buch wird daher in seiner Eigenart jedem Physiker besonders willkommen sein. Es besteht aus 12 Einzeldarstellungen aus der Feder bekannter Autoren. Neben den allgemein interessierenden Abhandlungen: „Die Entwicklung des astron. Weltbildes im Zusammenhange mit Religion und Philosophie" (F. Boll), „Die Zeitrechnung" (F. K. Ginzel), „Die Zeitmessung" (S. Hartmann), „Astronomische Ortsbestimmung" und „Die Beziehung der Astr. zu Kunst und Technik" (L. Ambronn), „Erweiterung des Raumbegriffes" (A. v. Flotow), „Mechanische Theorie des Planetensystems" (J. v. Hepperger) sei hier besonders hingewiesen auf die Abschnitte 7 bis 10 und 12, die dem Physiker besonders viel Anregungen geben werden. Sie behandeln: „Physische Erforschung des Planetensystems" (K. Graff), „Physik der Sonne" (E. Pringsheim), „Physik der Fixsterne" (P. Guthnick), „Das Sternsystem" (H. Kobold) und „Die Gravitation" (S. Oppenheim). Über die Arbeiten und Theorien des grauen Altertums bis zu den uns jetzt bewegenden Fragen, z. B. der viel umstrittenen Relativitätstheorie und ihrer Beziehung zur Astronomie, geben uns die 12 Abschnitte, die jeder für sich eine geschlossene wertvolle Abhandlung bilden, eingehend und doch leicht lesbar Auskunft. Ein reicher Literaturnachweis am Ende eines jeden Abschnittes erleichtert ein weiteres Studium einzelner Fragen. B. Meyermann.



Hans Schimank, Gespräch über die Einsteinsche Theorie. Berlin, S. Seemann Verlag. 1920.

Allgemeinverständliche Darstellung der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie in Form einer Teeunterhaltung. M. Abraham.

Richard Zsigmondy, Kolloidchemie. Ein Lehrbuch. Dritte vermehrte und zum Teil umgearbeitete Auflage. Mit einem Beitrag: Bestimmung der inneren Struktur und der Größe von Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen von P. Scherrer. XVI u. 429 S., 7 Tafeln und 58 Figuren im Text. Leipzig, Verlag von Otto Spamer. 1920.

Für die wachsende Bedeutung der Kolloidchemie spricht es, daß der zweiten Auflage des vorliegenden Werkes schon nach zwei Jahren die dritte folgen konnte. Es ist zugleich ein Beweis, daß die vom Verfasser verwendete Art der Darstellung, die Hervorhebung der gesicherten Tatsachen und die vorsichtige Abwägung in Heranziehung von Theorie und Hypothese allgemeinen Beifall gefunden hat.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Chemiker. Eine Besprechung an dieser Stelle rechtfertigt sich aber durch die immer zahlreicher und enger werdenden Beziehungen, die die Kolloidchemie mit der Physik verknüpfen. Die optischen Eigenschaften der Kolloide, die Ultramikroskopie, die elektrischen Eigenschaften, die Erscheinungen der Absorption und Adsorption, die Stäbchendoppelbrechung und die Eigendoppelbrechung, durch deren Untersuchung weitgehende Aufschlüsse über die Struktur der Gele erhalten wurden, die Wärmetönung bei Kolloidreaktionen, die Anreicherung an den Oberflächen — überall bieten sich Fragestellungen, die aus der Physik heraus Förderung erhoffen dürfen und die andererseits dem Physiker Anregungen zu bieten geeignet sind.

Besonders augenfällig wird die Beziehung in dem neu hinzugekommenen von Paul Scherrer bearbeiteten Abschnitt über die Bestimmung der inneren Struktur und der Größe der Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen. Die Röntgenanalyse sehr kleiner Partikel ist ja in den Bereich der Möglichkeit gerückt durch Anwendung der Methode der regellos orientierten Teilchen nach Debye und Scherrer. Die Versuche haben zu dem Ergebnis geführt, daß die Primärteilchen in sehr vielen Fällen kleine Kriställchen darstellen, die dasselbe Raumgitter aufweisen wie makroskopische Kristalle derselben Substanz. — Scherrer bietet hier eine elementar gehaltene Darstellung der Methodik nebst ausführlicher Beschreibung der Apparatur. Bestimmungen des Raumgitters und der Teilchengröße werden an Hand vortrefflicher Wiedergaben der Originalaufnahmen durchgeführt für kolloidales Gold verschiedener Herkunft, von kolloidalem Silber, von Kieselsäure- und Zinnsäure-Gel. Gutes Glas gibt sich dabei deutlich als wirklich amorphe Substanz zu erkennen; es zeigt nicht die geringste Andeutung einer Kristallstruktur, während gewöhnliches, vom Glasbläser bezogenes Glas neben amorpher Substanz kristallinische Einlagerungen aufweist, auch dann, wenn es vollkommen klar erscheint.

Das von der Chemie beifällig aufgenommene ausgezeichnete Werk von Zsigmondy ist sehr wohl geeignet, auch in den Kreisen der Physiker Interesse zu finden. Alfred Coehn.

Berichtigungen.

In dem Aufsatz „Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt II" von Friedrich Kottler, diese Zeitschrift **22**, 480, 1921, lies:

S. 482 linke Spalte, erste Zeile nach Fig. 1: „Sei A eine Lage von A..." anstatt: „Sei A eine Lage von A...";

ebendort, fünfte Zeile: „R_1 der benachbarten Relaisstation R_1" anstatt: „R_1 der benachbarten Relaisstation R_1";

ebendort, siebente und folgende Zeilen: „Zu R_1 ist gleichzeitig die Lage R_2 von R_2, d. i. der Durchschnittspunkt der Weltlinie von R_2 mit dem Normalraum von R_1" anstatt: „Zu R_1 ist gleichzeitig die Lage R_2 von R_2, d. i. der Durchschnittspunkt der Weltlinie von R_2 mit dem Normalraum von R_1";

S. 482 rechte Spalte, 24. Zeile von unten: „Die Normalebene $\overline{\varrho}$ von $\overline{R}$" anstatt: „Die Normalebene $\overline{a}$ von R";

ebendort, neunte Zeile von unten: „Zeitvergleichung zwischen A und B" anstatt: „Zeitvergleichung zwischen A und B";

S. 484 linke Spalte, neunte Zeile von oben: „Zentrale A" anstatt: „Zentrale A".

Berichtigung zu der Arbeit über Raum-Zeit-Symmetrie von N. H. Kolkmeijer: Durch ein Versehen ist auf S. 463 die Anzahl der in der Tabelle auf S. 464 u. f. aufgeführten Gruppen zu 168 statt 167, die Anzahl der periodischen Atommodelle zu 125 statt 124 angegeben.

Tagesereignisse.

Der zweite Kongreß der Russischen Physikalischen Assoziation fand vom 15.—21. September statt in Kiew.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1921/22.

Technische Hochschule Aachen. Starke: Experimentalphysik I; Übungen im physikalischen Laboratorium: a) Praktikum, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum. — **Seitz**: Mechanische Wärmetheorie; Theoretische Physik; Experimentalphysik, enz. Kurs; Übungen im physikalischen Praktikum. — **Polis**: Allgemeine Meteorologie: Aerologie; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie; Meteorologische Technik, mit Übungen. — **Steubing**: Photographie I und II; Spektroskopie. — **Hopf**: Schwingungslehre; Atombau und period. System.

Universität Basel. Hagenbach: Experimentalphysik II; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht); Physikalisches Kolloquium. — **Bernoulli**: Physikalische Chemie II; Kinetische Theorie der Materie; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere; Chemisches Kolloquium (mit Rupe, Fichter und Ruggli). — **Matthies**: Elektromagnetische Lichttheorie, Übungen; Strahlungstheorie; Quantentheorie; Mathematisch-physikalisches Seminar. — **Veillon**: Übungen in mathematischer Physik. — **Zickendraht**: Aerodynamik und Luftfahrt; Aerodynamisches Praktikum; Repetitorium der Elektrizitätslehre. — **Zehnder**: Geschichte der Physik: Optik, Elektrizität, Magnetismus; Physikalische Weltanschauungen: Makrokosmos; Übersicht über die Elektrotechnik. —

Universität Berlin. — **Rubens**: Experimentalphysik II: Elektrizitätslehre und Optik, dazu mathematische Ergänzung; Kolloquium, für Fortgeschrittene (mit v. Laue); Physikalische Forschungsarbeiten (mit Wehnelt, Westphal und Pringsheim. — **Planck**: Allgemeine



Mechanik. — **Wehnelt**: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik; Praktische Übungen für Anfänger II: Elektrizität und Magnetismus; Mathematische Ergänzungen zum Anfängerpraktikum; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene (mit Pringsheim); Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten. — **v. Laue**: Atombau und Spektrallinien; Mathematisch-physikalische Übungen; Physikalisches Proseminar (mit Einstein und Westphal). — **Warburg**: Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge. — **Byk**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften; Kinetische Theorie der Gase und Flüssigkeiten. — **Fock**: Einleitung in die Physik und Chemie. — **Westphal**: Ausgewählte Kapitel aus der Experimentalphysik, für Zahnärzte und Pharmazeuten. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Wärme. — **Henning**: Einführung in die Thermodynamik. — **Reiche**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. — **Gehrcke**: Ausgewählte Teile der modernen Optik. — **Grüneisen**: Atomistik fester Körper. — **Pringsheim**: Experimentelle Grundlagen der Atomtheorie. — **Hettner**: Ausgewählte Kapitel aus der Quantentheorie. — **Meyer**: Einführung in die moderne Maschinentechnik; Technische Exkursionen. — **Blasius**: Praktikum für Anfänger I: Mechanik, Wärme, Schall und Licht, dazu Übungen; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene. — **Martens**: Elektrotechnische Übungen. — **Hellmann**: Allgemeine Meteorologie, Meteorologisches Kolloquium für Vorgerücktere. — **Less**: Praktische Witterungskunde. — **Hergesell**: Die wissenschaftliche Erforschung der Atmosphäre im Interesse der Luftfahrt und des Wetterdienstes. — **Schmidt**: Luftelektrizität. — **Nernst**: Physikalische Chemie; Neuere Atomistik; Praktische Übungen und Arbeiten im Physikalisch-chemischen Institut: a) Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald), b) Physiko-chemische Übungen, c) Physiko-chemische Arbeiten; Physikalisch-chemisches Kolloquium (mit Riesenfeld). — **Riesenfeld**: Anorganische Strukturchemie. — **Hahn**: Radioaktive Umwandlungen, Periodisches System und Isotopie. — **Haber**: Chemische und physikalische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Walter G. Campbell zum Leiter und Dr. W. W. Skinner zum stellvertretenden Direktor des Bureau of Chemistry Dept. of Agriculture in Washington, der Honorarprofessor für Astronomie an der Universität Kiel Dr. Hermann Kobold, sowie die a. o. Professoren an der gleichen Universität Dr. Franz Feist (Chemie) und Dr. Paul Horrmann (Pharmazeutische Chemie) zu ord. Professoren daselbst, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau Dr. Erwin Schrödinger in gleicher Eigenschaft an die Technische Hochschule Zürich, der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Friedrich Reiche zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau, T. F. Buehrer zum Dozenten für analytische Chemie an der Universität Arizona, Dr. Harry F. Lewis von der National Analine and Chemical Co. Buffalo zum Associate Professor für Chemie am Cornell College Mount Vernon Jowa, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br. Dr. Aladar Skita zum Leiter der Organischen Abteilung des Chemischen Laboratoriums an der Universität Kiel, Dr. Howard Adler zum a. o. Professor der Chemie an der Universität Chicago, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Freiburg Dr. Emil Fromm zum Professor für medizinische Chemie an der Universität Wien.

Verliehen: Dem Vorstand des I. Chemischen Laboratoriums der Universität Wien Dr. Rudolf Wegscheider der Titel und Charakter als Hofrat, den Privatdozenten an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Ludwig Hopf (Theoretische Physik mit Einschluß der physikalischen Mechanik), Dr. Ing. Gustav Lambris (technische Chemie) und Dr. Peter Lipp (analytisch-organische Chemie) die Dienstbezeichnung als außerordentlicher Professor, dem Privatdozent für Technische Elektrochemie an der Technischen Hochschule Wien Dr. Josef Nußbaum der Titel a. o. Professor.

In den Ruhestand: Der Professor der Chemie am Beloit College in Beloit Wisc.

Gestorben: Der ord Professor der Chemie am Kgl. Technischen Institut in Pesaro Francesco Dupré, der Physiker und Hauptchemiker der Division of Weights and Mesures of the United States Bureau of Standards L. A. Fischer.

Angebote.

Voranzeige.

Die Physikalische Zeitschrift wird vom 1. Oktober 1921 von den Herren Professor Dr. **Max Born** und Professor Dr. **Peter Debye** in Zürich herausgegeben. Die Schriftleitung besorgt Herr Dr. **Ernst Hauser.** Weitere Mitteilungen folgen in Nummer 19.

Leipzig, den 20. September 1921. **Die Verlagsbuchhandlung.**

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Ausschnitt aus dem roten Teil des Bandenspektrums

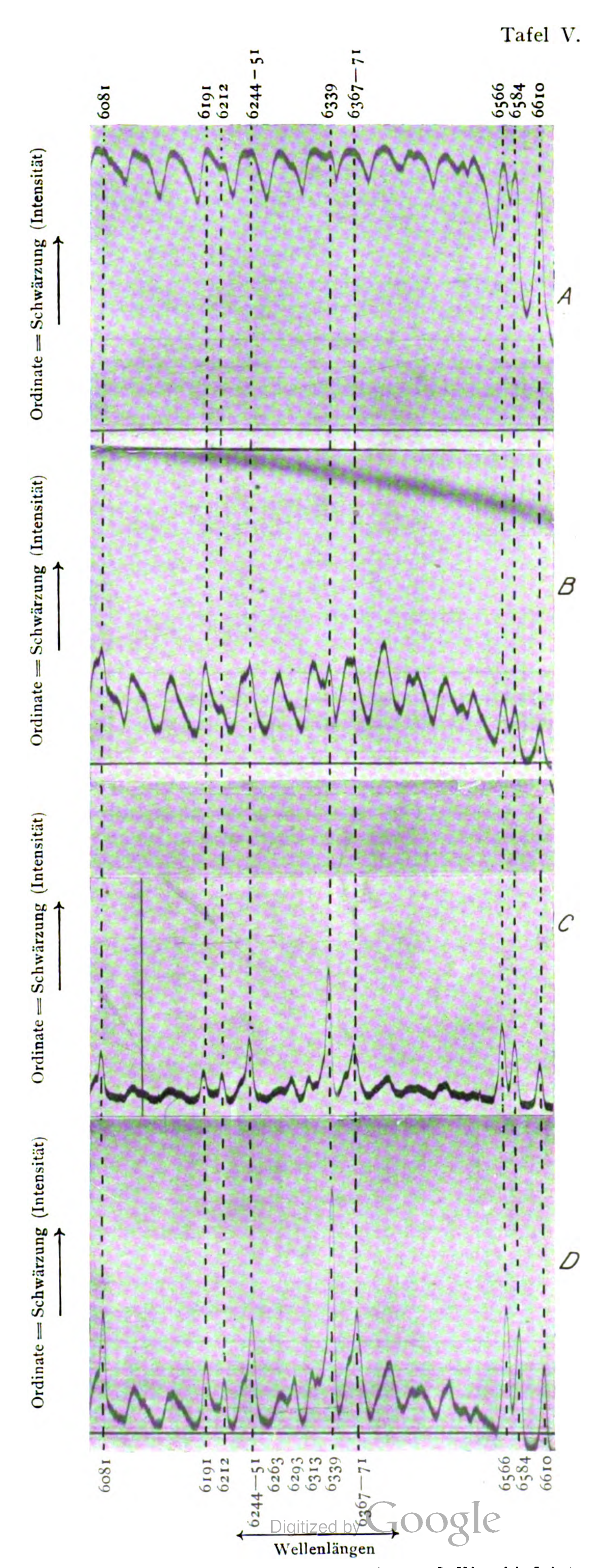
A bei 100° C,

B bei 200° C,

C bei 300° C,

D bei 400° C.

Die Ordinaten sind in ihrer Höhe ein Maß der Intensitätsverteilung in den Banden, die Abszissen sind genau untereinander orientiert und geben die Wellenlängen an. Zusammengehörige Teile sind durch punktierte Linien markiert.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19/20. 1./15. Oktober 1921. 22. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 21 am 22. Oktober 1921.

INHALT:

An unsere Leser!

Vom 1. Oktober 1921 ab wird die Physikalische Zeitschrift gemeinsam von Herrn Professor Dr. **M. Born** in Göttingen, Planckstraße 21 und Herrn Professor Dr. **P. Debye** in Zürich, Gloriastraße 35 (Physikalisches Institut der Eidg. Technischen Hochschule) herausgegeben. Die Redaktionsgeschäfte werden von Herrn Dr. **E. Hückel,** Physikalisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstraße 9 geführt. Manuskripte sind an einen der genannten Herren zu senden.

Herausgeber und Redaktion der Physikalischen Zeitschrift.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Spektroskopische Notizen.

Von E. v. Angerer.

(Mit Tafel VI.)

1. Eine Eisenbogenlampe. Das Spektrum des zwischen Eisenstäben brennenden Lichtbogens bürgert sich immer mehr als Normalspektrum ein, auch für Arbeiten, bei denen man nicht auf die internationalen Normalen zurückzugreifen beabsichtigt. Um es herzustellen verwendet man, wie mir scheint, meistens eine vorhandene Handregulierlampe, die mit Eisenelektroden versehen wird und sich nicht immer besonders für diesen Zweck eignet. Auf meine Veranlassung stellte Herr Werkmeister Frieß in unserem Institut eine einfache Eisenbogenlampe her, die sich in den letzten Jahren bestens bewährt hat (Fig. 1). Das Wesentliche daran ist, daß die Elektroden selbst aus sogenanntem „Gewindedraht" von 8 mm Durchmesser bestehen. Eisenelektroden brennen bekanntlich so langsam ab, daß (bei dem sehr intermittierenden Betrieb, der bei solchen Lichtquellen statthat) eine Reservelänge von ca. 10 cm für einige Jahre genügen dürfte. An den freien Enden tragen die Elektroden randelierte Hartgummischeiben; durch zwei isolierte, mit den Zuleitungen verbundene Muttern werden sie geführt. Die Feinverstellung der Bogenlänge durch die Schrauben ist bei einem Lichtbogen

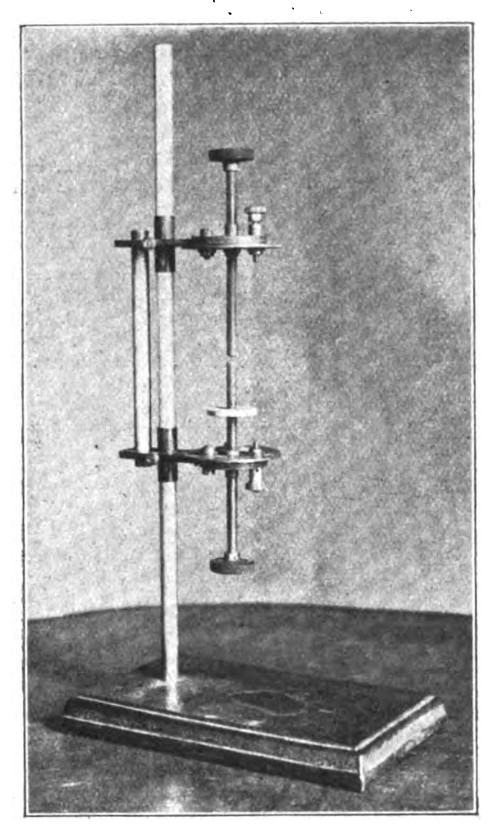


Fig. 1.

zwischen Metallen sehr vorteilhaft. Die Lampe gleitet an einem kräftigen Stativ und kann 30—40 cm in der Höhe verstellt werden.

Der Bogen brennt bei 220 Volt mit 2 bis 4 Ampère viertelstundenlang ohne Regulierung recht ruhig. Änderungen im Spektrum beim Vergleich mit dem Atlas von Buisson wurden nicht beobachtet.

Sehr gut eignet sich die Lampe auch zu Demonstrationsversuchen über den lichtelektrischen Effekt.

2. Tafel des Quecksilberspektrums. Arbeitet man mit geringer Dispersion, so wird man sich — besonders im Ultraviolett — zur Fokussierung eines Spektrographen und zur Aufstellung der Dispersionskurve gerne einer Quarzglas-Quecksilberlampe bedienen. In einem solchen Falle hatte ich einige Mühe, die ultravioletten Quecksilberlinien zu identifizieren: Die Abbildung in dem Atlas von Hagenbach und Konen („Vakuumbogen") reicht nur bis 3200 A.-E., die Aufnahmen von Hallwachs[1]) sind mit sehr kleiner Dispersion und sehr weitem Spalt gemacht, und in den Tabellen in Kaysers Handbuch fehlt gerade der Vakuumbogen von 3341 A.-E. ab. Bei den Spektrogrammen von Arons[1]) stören für diesen Zweck die zahlreichen anderen Metalllinien. Die schönen Aufnahmen von Eder und Valenta[2]) waren mir damals nicht zugänglich[3]).

Es sei daher gestattet, das Spektrum von einer neuen Heraeus-Lampe (220 Volt Netzspannung, 2,3 Amp). hier zu reproduzieren (Tafel VI, Fig. 1). Es wurde ein Steinheilscher Quarzspektrograph mit einem Prisma verwandt. Die Belichtungszeiten der drei Aufnahmen verhalten sich wie 1 : 10 : 100.

Recht geeignet zur Justierung ist auch das Spektrum des zwischen Kupferstäben brennenden Bogens, bei dem das äußerst intensive Dublett 3273,94 und 3247,53 A.-E. den ersten Anhalt bieten kann (Tafel VI, Fig. 2).

3. Aufkopierte Wellenlängenskala. Um sich auf einem neu hergestellten Spektrogramm eines Spektrographen, mit dem man längere Zeit arbeitet, zu orientieren, wird (z. B. in Kaysers Handbuch) vorgeschlagen, eine Skala der Wellenlängen auf eine Glasplatte zu ätzen und diese Glasplatte dann mit der Spektralaufnahme zur Deckung zu bringen. Dieses Verfahren ist etwas mißlich, solange die Gelatineschicht der frisch fixierten Platte noch naß ist, da man befürchten muß, dieselbe zu verletzen. Auch verschieben sich dann die Platten während der Betrachtung leicht gegeneinander.

Gut bewährt hat sich bei meinen Versuchen folgende Vorschrift, die dem Aufkopieren eines in eine versilberte Platte geritzten Koordinatensystemes bei astronomischen Aufnahmen nachgebildet ist: Man legt zunächst eine Platte so in die Kassette, daß ihre Kante K z. B. am linken Kassettenrand fest ansteht, exponiert ein bekanntes Normalspektrum (z. B. das Eisenspektrum), und mißt die Abstände der Linien bekannter Wellenlänge von der Kante K als Nullpunkt auf der Teilmaschine aus. Daraus berechnet man diejenigen Skalenteile der Teilmaschine, die z. B. den Wellenlängen 5000, 4500, 4000 usw. entsprechen, und überträgt die so ermittelte Wellenlängenskala mittels des Reißwerks auf die untere Hälfte einer versilberten Glasplatte, wobei einer ihrer Ränder R wieder den Nullpunkt bildet. Diese Skala wird beziffert, indem man die Wellenlängenzahlen (etwa mit einem stumpfen Kupferstift) in die Schicht graviert — in Spiegelschrift, wenn man die späteren Negative mit der Schicht gegen den Beschauer zu betrachten

1) W. Hallwachs, Ann. d. Phys. **30**, 598, 1909.

1) L. Arons, Ann. d. Phys. **23**, 176, 1907.

2) J. M. Eder und E. Valenta, Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse, Halle 1904.

3) Nachtrag bei der Korrektur: Auf die Aufnahmen von R. Küch und T. Retschinsky (Ann. d. Phys. **22**, 595, 1907) wurde ich erst nachträglich aufmerksam.

wünscht. Endlich wird die Silberschicht zaponiert und der Rand R mit einem rechtwinkelig gebogenen, etwas übergreifenden Blechstreifen versehen. Es würden also, wenn man den Rand R der versilberten Platte auf K legt, die Spektrallinien der Aufnahme auf die richtigen Stellen der Skala fallen. Die Trockenplatte, die für die Aufnahme des unbekannten Spektrums bestimmt ist, wird so unter diese geteilte Platte gelegt, daß sich Silber- und Gelatineschicht berühren und ihr Rand K' an dem Blechstreifen bei R ansteht. Man belichtet etwa eine Sekunde mit einer Glühlampe und kopiert dadurch die Skala auf die Platte. Beim Einlegen der Platte achtet man darauf, daß K' wieder am linken Kassettenrand ansteht und exponiert das zu untersuchende Spektrum. Beim Entwickeln erscheint die Skala gleichzeitig mit dem Spektrum.

Zu einer exakten Ausmessung der Platten kann das Verfahren natürlich nicht dienen; die zufälligen Verschiebungen der Skala gegen das Spektrum betragen aber erfahrungsgemäß höchstens etwa 0,2 mm. Auf den Aufnahmen des *Hg*- und des *Cu*-Spektrums (Tafel VI) ist die Skala angebracht.

4. *U-V*-Monochromat-Filter. Spektralaufnahmen ergaben, daß eine Lehmannsche *U-V*-Filteranordnung mit einer Quarz- und einer Uviolglaslinse Licht von 3650 bis 3200 A.-E. durchläßt. Da in dieses Gebiet das oben erwähnte intensive Kupferdublett fällt, liegt es nahe, statt der für die Filteranordnung empfohlenen „Nickellichtkohlen" den *Cu*-Bogen als Lichtquelle zu verwenden. Wie Tafel VI, Fig. 3 zeigt, erhält man dann eine Strahlung, die im wesentlichen aus den beiden, 26 A.-E. voneinander entfernten Kupferlinien besteht; nur bei starker Überexposition treten auch die schwachen Linien in der Nähe hervor. Die Intensität des Fluoreszenzlichtes von Leuchtschirmen war bei dem *Cu*-Bogen für 3 Ampère mindestens so groß, wie bei den nickelhaltigen Kohlen für 12 Ampère.

Zu den Aufnahmen wurden photomechanische Platten von Krauseder-München verwendet, die im Pinachrom-Bad sensibilisiert und mit Phenosafranin-Zusatz entwickelt wurden.

München, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, Juli 1921.

(Eingegangen 13. August 1921.)

Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken.

(Zur Diskussion der Versuchsergebnisse von Herrn W. Sorkau.)

Von Ludwig Schiller und Herbert Kirsten.

1. Herr W. Sorkau hat in einer größeren Reihe von Abhandlungen in dieser Zeitschrift[1]) Experimentaluntersuchungen über die Reibung von Flüssigkeiten in Glasrohren veröffentlicht und dort aus seinen Versuchen manche Schlüsse gezogen, die bereits zu einigen Bemerkungen von anderen Seiten[2]) Anlaß gegeben haben. Unwidersprochen geblieben ist jedoch bisher die Qualifizierung, die Herr Sorkau den verschiedenen Geschwindigkeitsgebieten entsprechenden Strömungsformen zuerteilt hat. Unter anderem stellt er hier „verschiedene Turbulenzstadien" fest, in den früheren Arbeiten drei, später nur noch zwei. Da diese und manche anderen Schlüsse in ausgesprochenem Gegensatz zu dem sonst Bekannten stehen, auch — zumal wegen des bereits vorhandenen Eindringens in die Lehrbuchliteratur[3]) — geeignet erscheinen, Ver-

1)
[1]) W. Sorkau, Experimentelle Untersuchungen über die innere Reibung einiger organischer Flüssigkeiten im turbulenten Strömungszustande. Diese Zeitschr. **12**, 582, 1911.
[2]) W. Sorkau, Über den Einfluß von Temperatur, spezifischem Gewicht und chemischer Natur von Flüssigkeiten auf die Turbulenzreibung. Diese Zeitschr. **13**, 805, 1912.
[3]) W. Sorkau, Über den Zusammenhang zwischen Molekulargewicht und Turbulenzreibungskonstante. Diese Zeitschr. **14**, 147, 1913.
[4]) W. Sorkau, Zur Turbulenzreibung des Wassers. Diese Zeitschr. **14**, 759, 1913.
[5]) W. Sorkau, Zur Turbulenzreibung des Wassers. II. Diese Zeitschr. **14**, 828, 1913.
[6]) W. Sorkau, Zur Kenntnis der Turbulenzreibung. Diese Zeitschr. **15**, 582, 1914.
[7]) W. Sorkau, Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren. I. Diese Zeitschr. **15**, 768, 1914.
[8]) W. Sorkau, Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren. II. Diese Zeitschr. **16**, 97, 1915.
[9]) W. Sorkau, Zur Kenntnis des Übergangs von der geordneten zur Turbulenzströmung in Kapillarröhren. III. Diese Zeitschr. **16**, 101, 1915.
Im Folgenden werden die Arbeiten jeweils nur unter der ihnen hier vorgesetzten Nummer zitiert.
Nr. 6 enthält Messungen aus einer Dissertation von
[10]) T. Ugarte, Investigación experimental sobre las corrientes de turbulencia en tubos capilares. Buenos Aires 1913.

2) Cl. Schaefer u. G. Frankenberg, Über den Einfluß der Temperatur auf die turbulente Strömung. (Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn W. Sorkau.) Diese Zeitschr. **14**, 89, 1913.
G. Mie, Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn W. Sorkau über Turbulenzreibung. Diese Zeitschr. **14**, 93, 1913.

3) K. Jellinek, Lehrb. d. phys. Chem. I, S. 575 ff. Stuttgart 1914.

wirrung zu stiften, seien die Versuchsergebnisse des Herrn Sorkau an einigen Stichproben einer genaueren Diskussion auf Grund des bereits länger Bekannten und einiger demnächst zu veröffentlichender eigener Untersuchungen[1]) unterzogen.

2. Man unterscheidet bei Strömung in Röhren und Kanälen bekanntlich zweierlei Strömungsformen, die laminare und die turbulente Strömung. Die erstere beherrscht das Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahlen ($R = \frac{\bar{u} \cdot r}{\nu} = \frac{\bar{u} \cdot r \cdot \varrho}{\mu}$; $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, r = charakteristische Länge, z. B. Rohrradius, ϱ = Dichte der Flüssigkeit, μ = innere Reibung, $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ = kinematische Zähigkeit) und geht bei einer bestimmten, von der Störungsfreiheit der Flüssigkeit abhängigen, „kritischen Reynoldsschen Zahl" in die turbulente Strömung über. Jede der beiden Strömungsformen gehorcht für den Fall eines glatten Kreisrohres einem ganz bestimmten, hundertfach bewährten Widerstandsgesetz, die laminare dem, auch theoretisch abgeleiteten, Poiseuilleschen Gesetz:

$$\Delta p = \frac{8 \mu \bar{u} l}{r^2} \qquad (1)$$

(Δp = Druckdifferenz, l = Länge der Meßstrecke), die turbulente dem empirisch von Blasius[2]) aufgestellten, den Forderungen des mechanischen Ähnlichkeitsgesetzes gehorchenden:

$$\Delta p = \lambda \cdot l \cdot \frac{\varrho \bar{u}^2}{2 r}, \qquad (2)$$

wo $\lambda = \frac{0{,}1582}{\sqrt[4]{2R}}$.

Beide Gesetze gelten nur, wenn die Meßstrecke genügend weit vom Einlauf entfernt ist, da die Flüssigkeit in allen Fällen erst eine gewisse Strecke zurücklegen muß, ehe sich die definitive Geschwindigkeitsverteilung (z. B. die parabolische des Poiseuilleschen Gesetzes) einstellt. Man wird also die obigen Gesetze nur dann genau bestätigt finden können, wenn man an zwei genügend weit vom Einlauf entfernten Stellen Druckmessungen ausführt.

3. Wendet man dagegen das bei Zähigkeitsmessungen übliche Verfahren an, wo lediglich der Überdruck bekannt ist, unter dem eine Flüssigkeit aus einem Vorratsgefäß durch eine Kapillare ausströmt, so ist auf der rechten Seite der Gleichungen (1) und (2) jeweils noch ein Glied hinzuzufügen. Für den Fall der Laminarströmung hat hierfür Hagenbach den Wert $2 \varrho \frac{\bar{u}^2}{2}$ angegeben. Dieser entspricht nämlich dem Betrag der lebendigen Kraft, mit dem die Flüssigkeit im Poiseuilleschen Zustand das Rohr verläßt und für den auch die wirksame Druckdifferenz aufzukommen hat. Auf Grund einer anderen Betrachtungsweise, die der Prandtlschen Grenzschichtenvorstellung entstammt, hat der eine von uns[1]) gezeigt, daß diese Korrektur nicht den konstanten Faktor 2, sondern einen variablen Beiwert erhalten muß. Und zwar ist dieser eine Funktion von $\frac{l}{rR}$. Für die Laminarströmung erhalten wir also in diesem Fall das Widerstandsgesetz:

$$\Delta p = \frac{8 \mu \bar{u} l}{r^2} + c \cdot \varrho \frac{\bar{u}^2}{2}. \qquad (3)$$

Die Abhängigkeit des Faktors c von $\frac{l}{rR}$ ist in Fig. 1 graphisch dargestellt.

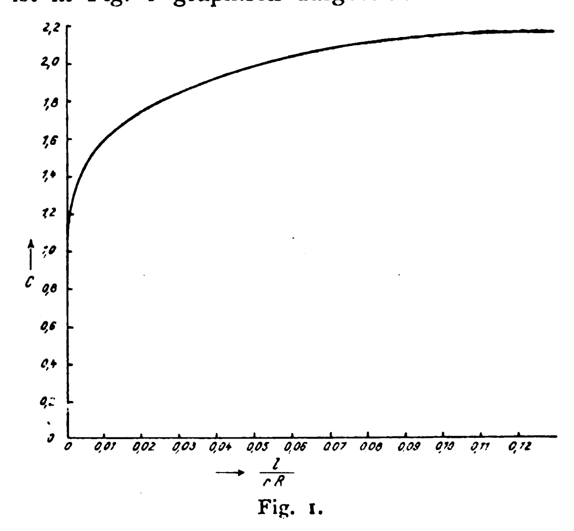


Fig. 1.

4. Auch im Fall der turbulenten Strömung hat der wirksame Druck außer für die Turbulenzreibungsarbeit (rechte Seite der Gl. 2) ebenfalls noch für die lebendige Kraft der schließlich aus dem Rohr austretenden Strömung aufzukommen zuzüglich eines durch die Kontraktion am Einlauf bedingten Eintrittsverlustes. Je nach der Form des Einlaufstückes (gut abgerundet bis scharfrandig) hat man hierfür im ganzen einen Verlust von 1 bis 1,4 Geschwindigkeitshöhen anzusetzen. Das Widerstands-

1) L. Schiller, Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung in Kreisrohren. (Erscheint in den Forschungsarbeiten des Vereins deutscher Ingenieure und auszugsweise in der Zeitschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik.)

2) H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschungsarbeiten d. Ver. deutsch. Ing. Heft 131, S. 12, 1913.

1) L. Schiller, l. c.

gesetz (2) geht also ebenfalls in die veränderte Form über:

$$\Delta p = \lambda \cdot l \frac{\varrho \overline{u}^2}{2r} + c \cdot \varrho \frac{\overline{u}^2}{2} \quad (1 < c < 1{,}4). \qquad (4)$$

Hierin kann λ nur dann den unter (2) angegebenen Wert haben, wenn angenommen werden darf, daß die Flüssigkeit bereits von der Einlaufstelle an turbulent ist, also bereits turbulent ankommt oder durch scharfrandigen Einlauf schnellstens turbulent wird. Wie gut in letzterem Fall tatsächlich die Gl. (4) erfüllt ist, zeigt das Ergebnis eigener Messungen[1]) mit Wasser an einem Rohr von 8 mm Durchmesser und 104 cm Länge, das in Fig. 2 niedergelegt

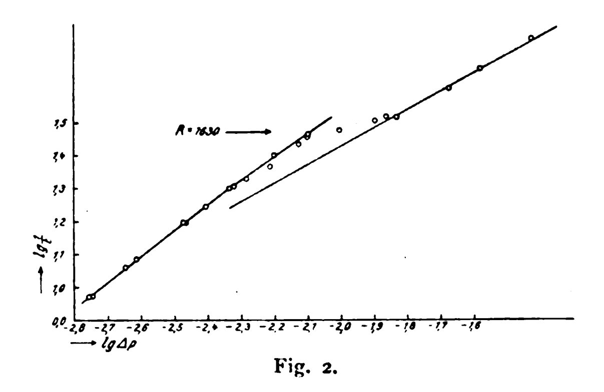


Fig. 2.

ist. Die Auftragung entspricht hier zum besseren Vergleich der von Sorkau meist angewandten: Abszisse $= \lg \Delta p$, Ordinate $= \lg \frac{1}{t}$ ($t =$ Ausflußzeit für ein bestimmtes Volumen, hier berechnet auf 1 ccm). Die beiden Kurven entsprechen dem laminaren und dem turbulenten Zustand, erstere nach (3) und Kurve Fig. 1 berechnet, letztere nach (4) (mit λ nach Gl. (2) und $c = 1{,}4$). Die gemessenen Werte liegen bei den kleinen Geschwindigkeiten auf der laminaren Kurve und gehen bei $\lg \frac{1}{t} = 1{,}47$, entsprechend etwa $R = 1630$ (einem verhältnismäßig niedrigen Wert, der eben dem scharfrandigen Einlauf zuzuschreiben ist) ziemlich scharf in die turbulente Kurve über.

5. Was für ein Verhalten werden wir aber nun bei mehr oder weniger abgerundetem Einlaufstück zu erwarten haben, wie es bei der vollkommen aus Glas hergestellten Sorkauschen Apparatur gegeben war? Zunächst muß die Strömung bis zu wesentlich höheren Reynoldsschen Zahlen laminar bleiben. Dann kann aber auch bei einsetzender Turbulenz der Übergang auf die turbulente Kurve nur ganz allmählich erfolgen. Denn bereits Reynolds[1]) hat durch Versuche mit eingeführtem Farbstoff festgestellt, daß bei Einströmung aus ruhigem Vorratswasser und abgerundetem Mundstück die Turbulenz erst ein beträchtliches Stück vom Einlauf entfernt sich entwickelt, mit wachsender Geschwindigkeit langsam gegen die Einlaufstelle hinrückend. Das Widerstandsintegral, das durch die Druckdifferenz gegeben ist, setzt sich demgemäß zusammen aus einem zunächst kleinen, mit wachsender Geschwindigkeit zunehmenden, turbulenten und einem zunächst größeren, dann abnehmenden laminaren Anteil. Wir werden also einen ganz allmählichen Übergang der Meßpunkte vom laminaren zum turbulenten Ast erwarten müssen. Je höher die Geschwindigkeit anwächst, in einem desto größeren Teil des Rohres wird Gl. (2) gültig sein und um so näher werden die gemessenen Punkte dem durch Gl. (4) angegebenen Wert rücken.

6. Mit den hier gegebenen Grundlagen gelingt es unschwer, die Sorkauschen Versuchsergebnisse zu diskutieren, ohne mit Herrn Sorkau die Existenz verschiedener Turbulenzstadien annehmen zu müssen. Zu diesem Zweck seien aus dem außerordentlich großen Versuchsmaterial einige wenige Proben herausgegriffen, die in den Fig. 3—7 wiedergegeben sind. In allen Figuren stellen die kleinen Kreise Herrn Sorkaus Versuchsdaten dar. Abszisse ist $\lg \Delta p$, Ordinate $\lg \frac{1}{t}$ ($t =$ Ausflußzeit für das jeweils bei Sorkau benutzte Volumen). Die obere ausgezogene Kurve der laminaren Strömung haben wir nach Gleichung (3) berechnet unter Zugrundelegung der von Sorkau angegebenen Dimensionen des Apparats und Werten für μ und ϱ, die wir Landolt-Börnstein, Kohlrausch oder Beilstein entnommen bzw. aus dortigen Werten interpoliert haben. Die untere ausgezogene Kurve der turbulenten Strömung wurde mit den gleichen Unterlagen nach Gl. (4) und mit einem Wert von $c = 1{,}4$ berechnet. Da 1,4 für scharfen Einlauf gilt, die beiden Sorkauschen Apparaturen jedoch mehr oder weniger abgerundeten Einlauf besessen haben dürften, so liegt dieser Wert wohl etwas zu hoch. Jedoch liefert auch der niedrigst mögliche Wert von ca. 1,1 eine nicht viel höher liegende Kurve, so daß dieser Punkt nicht sehr von Belang ist, zumal die turbulente Kurve, wie in 5. erklärt wurde und wie die Figuren zeigen, doch nicht erreicht wurde.

7. Die Fig. 3—5 stellen Ergebnisse dar, die Herr Sorkau mit seiner älteren Apparatur

1) L. Schiller, l. c. Der schärfste Übergang wäre durch die Horizontale gegeben.

1) O. Reynolds, Scient. pap. II, S. 60.



gewonnen hat, deren Mundstück nicht sehr gleichmäßig verblasen war.

Die Punkte der Fig. 3 sind entnommen Arbeit Nr. 1, S. 594 und beziehen sich auf

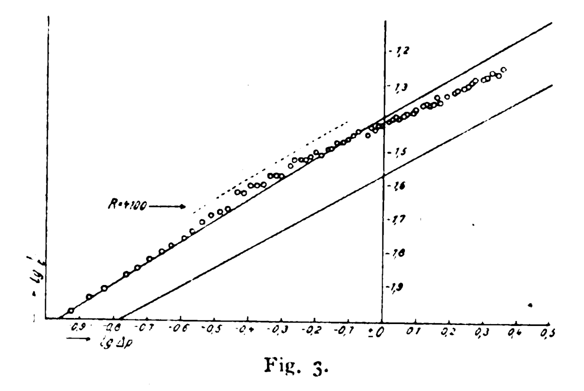


Fig. 3.

Trimethyläthylen von 30° C. Wir entnahmen (interpoliert) Beilstein $\varrho = 0{,}64$; $\mu = 0{,}0020$.

Fig. 4 stammt aus Nr. 2, S. 809: Äthyl-

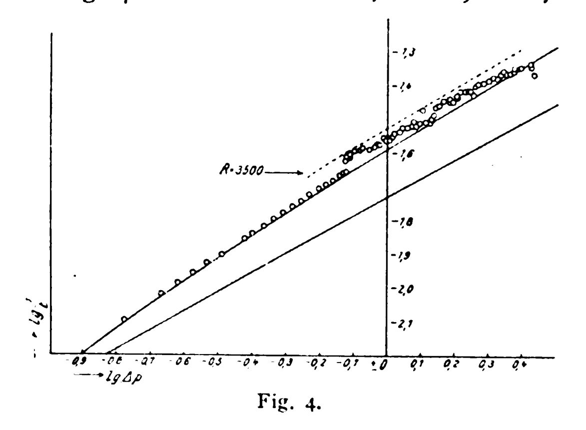


Fig. 4.

azetat von 30° C; nach Landolt-Börnstein $\varrho = 0{,}888$, $\mu = 0{,}00402$.

Fig. 5 aus Nr. 4, S. 762: Wasser von 50° C; $\varrho = 1{,}00$[1]); $\mu = 0{,}00551$ (Kohlrausch).

Zunächst sehen wir in allen Fällen ein ausgedehntes Gebiet, in dem die gemessenen Punkte, den Verhältnissen nach ausgezeichnet gut, mit der berechneten laminaren Kurve zusammenfallen. Es besteht also kein Zweifel, daß wir es hier tatsächlich mit der normalen Laminarströmung zu tun haben. Herr Sorkau nimmt für dieses Gebiet ganz oder größtenteils „Hagensche", d. h. die normale Turbulenz an und bezeichnet es mit „Turbulenz I", fußend auf der unrichtigen Annahme, daß für Laminarströmung hier das Gesetz (1) gelten müsse. Bei einem Wert der Reynoldsschen Zahl von etwa 3500—4000 muß man wohl nach dem dort auftretenden schwankenden Charakter der Messungen annehmen, daß hier Wirbelbildung

1) Also 1 Proz. zu hoch gerechnet.

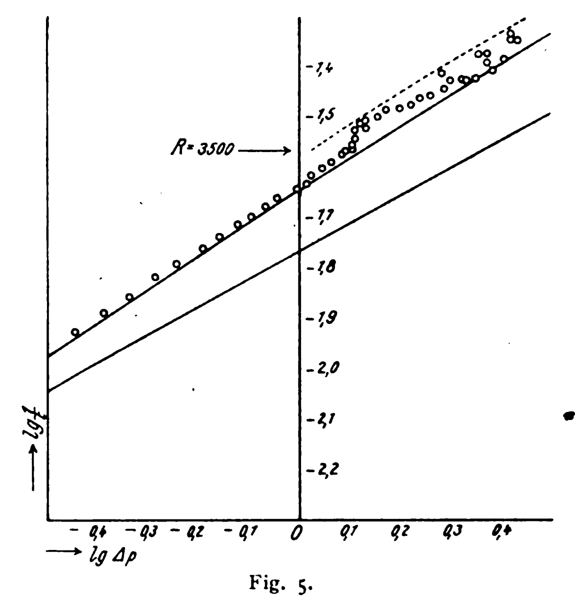


Fig. 5.

einsetzt. In Fig. 3 zeigt sich bei höheren Geschwindigkeitswerten der nach 5. zu erwartende allmähliche Übergang gegen die Turbulenzkurve hin, der wohl auch bei den Messungen der Fig. 4 und 5, sofern sie bis zu den gleichen Reynoldsschen Zahlen geführt worden wären, ersichtlich geworden wäre. Zu erwähnen ist hier jedoch die auffällige, von Herrn Sorkau nicht hervorgehobene Tatsache, daß bei dem kritischen Punkt eine Widerstandsverminderung aus den Messungen sich ergibt. Auch weiterhin bleibt der Widerstand zunächst noch unter dem laminaren. Da bei einsetzender Turbulenz man stets mit Schwankungen der Manometerflüssigkeit zu kämpfen hat, so wird man vielleicht geneigt sein, die Widerstandsverminderung nicht gelten zu lassen und auf Ablesefehler, Ungenauigkeit der Mittelbildung oder dergl. zu schieben. Ohne diese Möglichkeit näher zu diskutieren, möchten wir darauf hinweisen, daß die Messungen vielleicht doch zu Recht bestehen, möglicherweise tatsächlich eine Widerstandsverminderung vorhanden sein könnte. Bei den verhältnismäßig hohen Geschwindigkeiten wird nämlich ein beträchtlicher Teil der Druckenergie im laminaren Falle zur Beschleunigung der Kernströmung verbraucht[1]). Lösen sich nun bei der kritischen Geschwindigkeit am Einlauf zunächst einzelne Wirbel, so bedingen diese natürlich an sich eine Widerstandserhöhung. Sie hindern jedoch gleichzeitig das mit Energieverbrauch verknüpfte Anwachsen

1) An der Eintrittsstelle hat die Flüssigkeit etwa gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung $= \bar{u}$, bei der schließlichen parabolischen Verteilung der Poiseuilleschen Strömung herrscht in der Mitte die Geschwindigkeit $u = 2\bar{u}$.



der Geschwindigkeit in den mittleren Teilen der Strömung. Ist der damit verbundene Energiegewinn größer als der Energieverlust durch den Wirbel an sich, so könnte — natürlich nur bis zu den Stellen, wo die Turbulenz sich entwickelt hat — in den ersten Teilen des Rohres eventuell eine Widerstandsverminderung auftreten. Im Bilde unserer Gl. (3) heißt dies, daß wir mit einem kleineren Wert für c zu rechnen hätten. Um einen quantitativen Überblick über diese Frage zu geben, haben wir den laminaren Widerstand auch berechnet mit $c = 1,4$, ohne daß wir gerade diesem Wert hier eine besondere Bedeutung zuschreiben, und ihn als gestrichelte Kurve eingetragen. Wie man sieht, bleibt die Widerstandsverminderung noch unterhalb der so gewonnenen Werte.

Herr Sorkau spricht das Gebiet oberhalb des laminaren (seines Turbulenzgebietes I) als ein Gebiet höherer Turbulenz an, wobei er dessen ersten, z. B. in Fig. 4 einigermaßen getrennt auftretenden Teil ($\lg \Delta p = -0,13$ bis $\lg \Delta p = +0,14$) in Arbeit Nr. 2 als Turbulenz II von dem letzten, Turbulenz III, getrennt wissen will. Diese Trennung läßt er, da sich II als sehr labil erweist, in den späteren Arbeiten fallen und behält außer der „Turbulenz I" nur noch „Turbulenz III" bei. Da sich hier aus den Beobachtungen ein annähernd quadratisches Widerstandsgesetz ergibt, so bezeichnet er dies Gebiet auch als ein Gebiet „reibungslosen Durchflusses", ausgehend von der Tatsache, daß auch die Toricellische Ausflußformel für reibungslose Flüssigkeiten eine quadratische Beziehung zwischen Druck und Ausflußgeschwindigkeit enthält. Um jedoch den bei ihm auftretenden von 1 verschiedenen Koeffizienten zu erklären, nimmt Herr Sorkau an, daß ein Strahl geringeren Querschnitts reibungslos an einer ruhenden, an der Wand haftenden Schicht entlang gleitet. Nach allem, was man über Flüssigkeitsreibung weiß, wird man dieser Betrachtungsweise hier nur formale Bedeutung zuerkennen können und auch dies nur für ein geringes Geschwindigkeitsgebiet und innerhalb der Anlaufstrecke. Bei voll ausgebildeter Turbulenz gilt eben (s. o. unter 2) mit weitgehender Genauigkeit das $^7/_4$-Potenzgesetz ($\Delta p \sim \bar{u}^{7/4}$).

Zu erwähnen ist hier noch, daß der von Herrn Sorkau aus seinen Messungen bei Wasser[1]) berechneten kritischen Zahl $R = 224$ keine Bedeutung zukommt. Diese gibt lediglich die Stelle an, von der ab sich das Korrektionsglied in Gl. (3) bemerkbar macht. Die wirklichen kritischen Zahlen liegen sichtlich bei 3500—4000.

1) Arbeit Nr. 4, S. 760.

8. Wesentlich durchsichtiger liegen die Verhältnisse noch bei neueren Messungen, die mit einem anderen Apparat (mit besser abgerundetem Einlaufstück) von Herrn Ugarte ausgeführt wurden und teilweise auch von Herrn Sorkau in dieser Zeitschrift veröffentlicht sind (Arbeit Nr. 6). Hiervon sind Fig. 6 und 7 entnommen.

Fig. 6[1]): Äthylazetat 25° C; $\varrho = 0,8944$; $\mu = 0,004264$ (Beilstein).

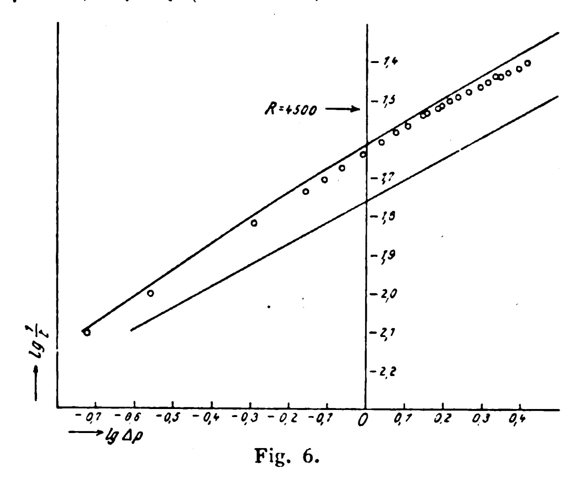


Fig. 6.

Fig. 7[2]): Chloroform 35° C; $\varrho = 1,4586$ (Beilstein); $\mu = 0,0049$ (Landolt-Börnstein).

Der laminare Teil der Beobachtungen liegt gut parallel, wenn auch etwas unter unserer berechneten Kurve; letzteres dürfte auf mögliche Materialverschiedenheiten zurückzuführen sein. Bei $R = 4500$ beginnt die Turbulenz und damit stetige Annäherung an die berechnete Turbulenzkurve, wie zu erwarten. Auch hier spricht Herr Sorkau den laminaren Teil als Turbulenz I, den Übergangsteil als Turbulenz III an. Der höher liegende kritische Wert

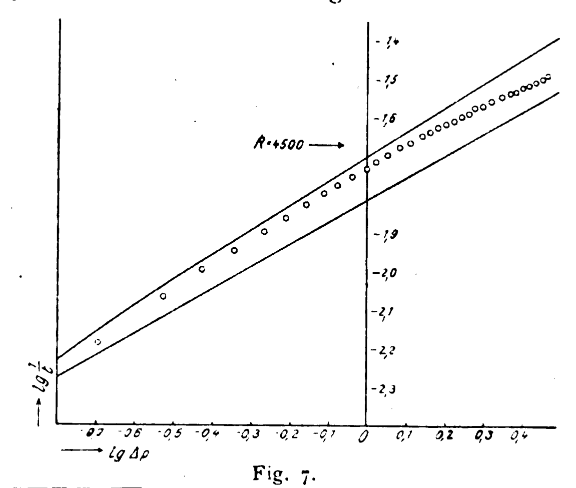


Fig. 7.

1) Nr. 10, Fig. 15.
2) Nr. 6, S. 583.

beruht auf der besseren Abrundung des Einlaufs. Eine Widerstandsverminderung mit Beginn der Wirbelablösung ist hier nicht vorhanden.

9. Zusammenfassung. Zunächst wurde eine allgemeine Darlegung der Widerstandsverhältnisse strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken gegeben. Auf Grund dieser Betrachtungen wurden die Sorkauschen Messungen einer Diskussion unterzogen, die diese im wesentlichen auf normale Laminar- und Turbulenzströmung zurückführt und damit die Annahme verschiedener „Turbulenzstadien" als hinfällig erscheinen läßt.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 8. August 1921.

(Eingegangen 22. August 1921.)

Über die Anwendung der Elektronenröhren bei den Versuchen mit dem sprechenden Lichtbogen und dem sprechenden Kondensator.

Von August Žáček.

Wollte man vor einem größeren Auditorium die Versuche mit dem sprechenden Lichtbogen oder dem sprechenden Kondensator vorführen, so war man bis jetzt gezwungen, einen, eventuell sogar mehrere, parallel geschaltete Starkstrommikrophone zu verwenden. Dagegen kann man eine intensive und dabei auch deutliche Reproduktion sowohl der Sprache als auch des Gesanges mit einem gewöhnlichen Schwachstrommikrophone erzielen, wenn man zuerst die Mikrophonströme mit Hilfe einer Elektronenröhre (Glühkathodenröhre) verstärkt.

Schaltungen, die sich dabei am besten bewährt haben, sind im folgenden beschrieben; in Fig. 1 ist das Schaltungsschema für den sprechenden Lichtbogen, in Fig. 2 dasjenige für den sprechenden Kondensator dargestellt.

Der möglichst lange elektrische Lichtbogen (Fig. 1) brennt zwischen zwei vertikal aufgestellten Flammendochtkohlen; den nötigen Strom von 5—10 Amp. liefert eine Akkumulatorenbatterie B von 120 Volt. Durch die Drosselspulen D_1, D_2 wird den Strömen, welche in der Primärspule des Induktoriums T_2 durch Veränderungen des Mikrophonstromes induziert werden, der Durchgang durch die Akkumulatorenbatterie B verhindert und dieselben über den Lichtbogen geleitet. Parallel zu den Polen des Lichtbogens ist die Primärspule (614 Windungen, ca. 1,7 Ohm) eines kleinen Induktoriums T_2 (von Hartmann-Braun, wird gewöhnlich zur Widerstandsmessung von Elektrolyten verwendet) über eine Batterie C von Telephonkondensatoren (20—30 MF.) geschaltet. Der Mikrophonkreis enthält einen gewöhnlichen Schwachstrommikrophon M, eine sechsvoltige Akkumulatorenbatterie und die Primärspule eines kleinen medizinischen Induktoriums T_1. Zur Verstärkung der Variationen des Mikrophonstromes wurde eine 10-Watt-Senderröhre der Firma Telefunken verwendet. Den nötigen Heizstrom (3,05 Amp., 9,9 Volt) liefert eine zwölfvoltige Akkumulatorenbatterie. Das Gitter G der Elektronenröhre ist mit einem Pole der Sekundärspule des Induktoriums T_1 verbunden; der zweite Pol der Spule ist dagegen an den negativen Pol der Röhrenkathode geschaltet. Um die Variationen der Gitterspannung, welche durch die Veränderungen des Mikrophonstromes hervorgerufen werden, möglichst groß zu gestalten, schaltet man in den Gitterkreis einen Edisonakkumulator E ein; dadurch wird das Gitter auf einem negativen Potentiale von ungefähr —1 Volt der Kathode gegenüber gehalten, infolgedessen ist der Sekundärkreis stromlos, das Induktorium unbelastet und die Variationen der Gitterspannung erreichen dann die möglichst größten Werte. Der Anodenkreis der Röhre enthält neben der Anodenbatterie (260 Volt) noch die Sekundärspule des Induktoriums T_2 (3600 Windungen, 84 Ohm).

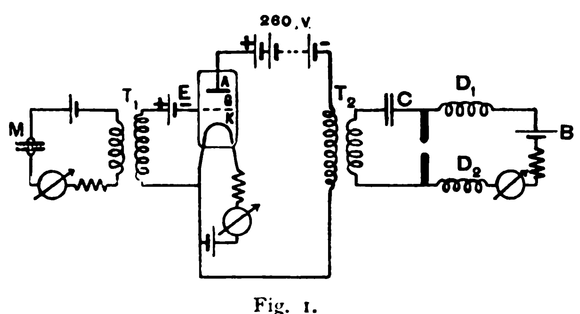


Fig. 1.

Die Wirkung der ganzen Anordnung ist klar: Wird gegen die Membrane des Mikrophons gesprochen, so verändert sich im Takte der auffallenden Schallwellen der Mikrophonstrom, wodurch weiter die Variationen der Gitterspannung entstehen. Durch dieselben werden weiter Variationen des Anodenstromes hervorgerufen, welche durch das Induktorium T_2 transformiert und über den Lichtbogen geführt werden: der Lichtbogen reproduziert die gegen die Mikrophonmembrane gesprochene Sprache. Die Reproduktion sowohl der Sprache als auch des Gesanges ist intensiv, klar und deutlich.

Eine ähnliche Anordnung wird auch bei dem sprechenden Kondensator angewendet. Der Mikrophonkreis sowie auch der Gitterkreis der Elektronenröhre sind identisch mit denjenigen bei der Schaltung für sprechenden Lichtbogen. In dem Anodenkreise der Röhre ist ein

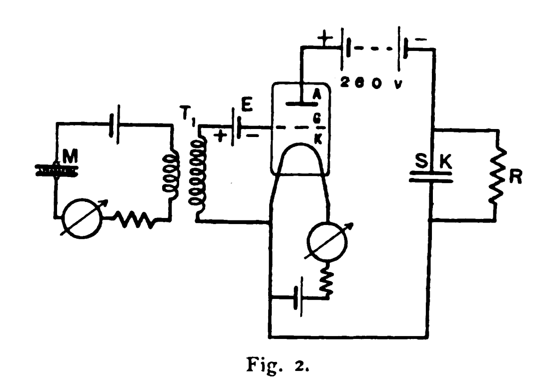


Fig. 2.

sprechender Kondensator SK (nach Ort-Rieger) über eine Anodenbatterie (von 260 Volt) eingeschaltet; parallel zu demselben liegt ein großer, Ohmscher Widerstand R, durch welchen die Gleichstromkomponente des Anodenstromes hindurchfließt. Die Variationen der Spannung an dem Widerstande R, die durch die Veränderungen des Anodenstromes bzw. des Mikrophonstromes hervorgerufen werden, werden somit auf den sprechenden Kondensator überführt. Dieselben haben das Tempo der auf die Mikrophonmembrane auffallenden Schallwellen und werden durch den Kondensator reproduziert. Es wurden die besten Resultate erreicht, indem man zirka 10000 Ohm parallel zum Kondensator SK schaltete. Die Reproduktion der Sprache und des Gesanges ist auch hier sehr intensiv und klar.

Bei Verwendung von zwei parallel geschalteten Elektronenröhren wurde die Lautstärke in beiden Fällen nur unbedeutend gesteigert.

Prag, Phys. Institut d. böhm. Universität am 11. August 1921.

(Eingegangen 6. September 1921.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

B. Gudden u. R. Pohl, Über lichtelektrische Leitfähigkeit. Zusammenfassung der beiden auf der Jenenser Tagung gehaltenen Vorträge.

§ 1.

Im Laufe der Jahre ist eine ganze Reihe von Stoffen bekannt geworden, deren elektrischer Widerstand sich ähnlich wie beim Selen durch Bestrahlung mit Licht vermindert, oder die „lichtelektrische Leitfähigkeit" zeigen. Wir nennen als Beispiele die Halogenide des Ag[1]), Kupferjodür[1]), die Sulfide des Sb (Antimonit)[1]), Mo (Molybdänglanz)[3a]), Ag (Akanthit)[3b]) u. a.; das alles sind schon im Dunkeln mehr oder minder gute Leiter der Elektrizität.

Doch zeigen auch Körper, die im Dunkeln Isolatoren sind, oft eine ausgesprochene lichtelektrische Leitfähigkeit, z. B. ZnS, HgS[4a]), durch Röntgenlicht oder auf anderem Wege kolloidal gefärbtes $NaCl$[5]), Wulfenit, Diamant[4c]) u. a.

Bei solchen Isolatoren läßt sich die lichtelektrische Leitfähigkeit besonders einfach nachweisen: Man verbindet nach Art der Fig. 1 einen einige Kubikmillimeter großen ZnS oder Diamantkristall mit einem Braunschen Elektrometer. Man lädt mit einer Siegellackstange auf und findet im Dunkeln statische Isolation. Bei Bestrahlung mit Bogenlicht aber klappt der Zeiger im Bruchteil einer Sekunde herunter[4f]). Für Messungen benutzt man auch bei Isolatoren besser ein Drehspulgalvanometer; als Stromquelle

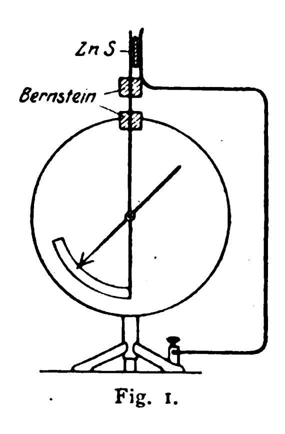


Fig. 1.

dient eine Akkumulatorenbatterie von etlichen 1000 Volt.

§ 2.

Für alle Fälle lichtelektrischer Leitfähigkeit findet man eine Reihe charakteristischer, aber höchst unübersichtlicher Tatsachen:

1. Der lichtelektrische Strom ist träge, sowohl im Anstieg nach Beginn, wie im Abfall nach Schluß der Belichtung. Fig. 2 zeigt den Verlauf. Die Kurve ist am CdS gemessen, das eine ganz besonders hohe Trägheit aufweist[4a]).

2. Der lichtelektrische Strom steigt mit der Lichtintensität weniger als proportional. Man erhält je nach der benutzten Wellenlänge und Spannung mehr oder weniger gekrümmte Kurven. Fig. 3 gibt Messungen an ZnS[4a]).

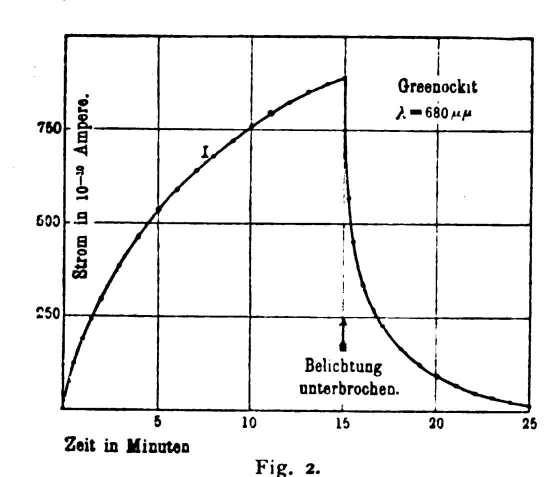


Fig. 2.

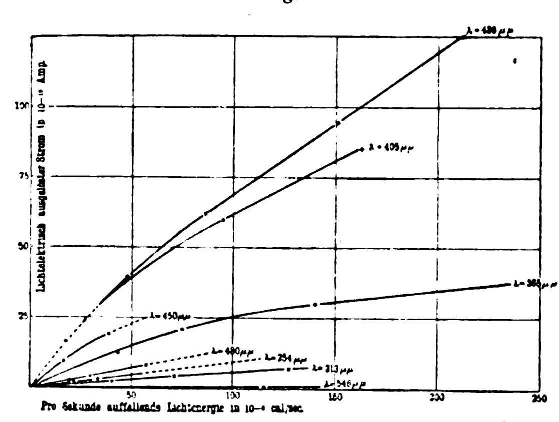


Fig. 3.

3. Zwischen dem lichtelektrischen Strom und der benutzten Spannung findet man Abhängigkeiten aller Art je nach benutzter Lichtintensität und Wellenlänge. Die schematische Fig. 4 gibt Beispiele.

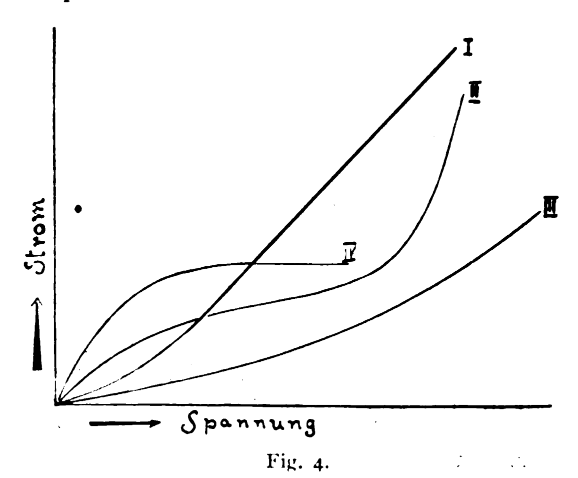


Fig. 4.

4. Für konstante Lichtenergie und Spannung hängt der lichtelektrische Strom stark von der Wellenlänge des Lichtes ab. Die Fig. 5, 12, 13

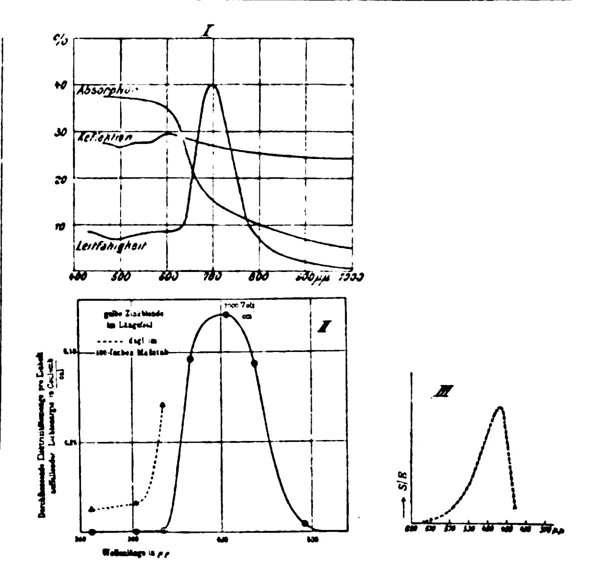


Fig. 5. Abhängigkeit der lichtelektrischen Leitfähigkeit von der Wellenlänge des erregenden Lichtes.
I. Selen (diese Zeitschr. **10**, 340, 1909).
II. Zinkblende (Zeitschr. f. Phys. **5**, 176, 1921).
III. Röntgenbestrahltes Steinsalz (Ann. d. Phys. **64**, 1, 1921).

geben einige typische Maxima, wie sie der Strom in gewissen Spektralgebieten aufweist[2, 3, 4a, 5]).

5. Das Bild der spektralen Verteilung wechselt bei langer Einwirkung gewisser Lichtwellenlängen. Vorhandene Maxima verschwinden und neue treten hervor. (Besonders ausgesprochen an Wulfenit beobachtet.)

Die eben aufgezählten Tatsachen finden sich nun, und das möge als wesentlich noch einmal betont werden, keineswegs nur beim Selen, bei dem sie seit langem bekannt sind. Sie sind vielmehr ganz allgemein für alle Stoffe mit lichtelektrischer Leitfähigkeit charakteristisch, d. h. also auch für Körper, die den technischen Selenpräparaten in physikalischer und chemischer Hinsicht so fern stehen, wie die kompliziert aufgebauten Lenardschen Phosphore[4b]) oder ein klarer durchsichtiger Diamantkristall[4c]). Es muß also diesen Tatsachen ein sehr allgemeiner, von den besonderen Eigenschaften des Körpers weitgehend unabhängiger Vorgang zugrunde liegen.

Es ist bisher nicht gelungen diesen Vorgang klarzustellen, obwohl allein über die Lichtempfindlichkeit des Selens mehr als 500 Arbeiten veröffentlicht sind[2]).

§ 3.

Nun scheint das Selen überhaupt nicht recht geeignet, um den Mechanismus der lichtelektrischen Leitfähigkeit zu untersuchen; denn beim Selen ist neben dem vom Licht hervorgerufenen Strom ein zweiter, seinem Wesen nach nicht minder ungeklärter Vorgang vorhanden, nämlich



der Stromdurchgang, der der Dunkelleitfähigkeit des Selens entspricht. Benutzt man einen Isolator zur Untersuchung der lichtelektrischen Leitfähigkeit, so bedeutet das eine wesentliche Vereinfachung der Bedingungen.

Eine zweite Vereinfachung ergibt die Beschränkung auf eine möglichst kleine räumliche Dichte der absorbierten Lichtenergie.

Unter diesen Umständen gelingt es, den lichtelektrischen Strom in zwei ganz verschiedenartige Bestandteile zu zerlegen:

1. einen primären Strom I_p, der zeitlos einsetzt, mit wachsender Spannung gesättigt werden kann und der Lichtenergie proportional ist.

2. einem sekundären Strom I_s, der sich zeitlich langsam ausbildet, keine einfachen Gesetze befolgt, und wahrscheinlich elektrolytischer Natur ist.

§ 4.

Zur Durchführung dieser Trennung wurden ein hochempfindliches Stoßgalvanometer und kurze, aber meßbar veränderliche Belichtungszeiten benutzt. Ist nur der primäre Strom vorhanden, der zeitlos einsetzt und dann konstant bleibt, so muß der Stoßausschlag des Galvanometers linear mit der Belichtungszeit ansteigen, Kurve a in Fig. 6. Tritt eine sekundäre Leitfähigkeit hinzu, die zeitlich nach einem nicht näher bekannten Gesetze ansteigt, so nimmt die Kurve die verwickelte Gestalt c der Fig. 6 an. Wie aber auch im einzelnen der zeitliche Anstieg des sekundären Stromes erfolgt, sicher kann man ihn mit um so größerer Annäherung

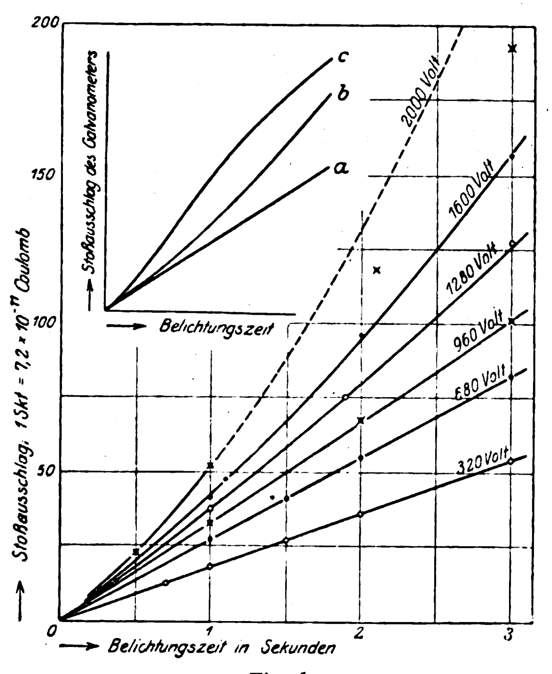


Fig. 6.

als linear betrachten, je mehr man die Beobachtung auf die ersten und hinreichend kurz gewählten Zeiten beschränkt, und je kleiner man die räumliche Dichte des absorbierten Lichtes wählt. Gelingt es durch Beschränkung auf kurze Dauer und Dichte des Lichtes den Anstieg des sekundären Stromes linear zu erhalten, so haben wir statt des unübersichtlichen Kurvenzuges c eine schwach nach oben gekrümmte Parabel b der Form $q = I_p \cdot t + i_s \cdot t^2$ zu erwarten.

Dieser parabolische Verlauf wird in der Tat beobachtet[4g]). Fig. 6 gibt ein Beispiel für einen regulären ZnS Kristall und die Wellenlänge 436 $\mu\mu$. Berechnet man I_p, so erhält man die Sättigungskurve der Fig. 7 und findet I_p der Lichtenergie proportional (Fig. 8).

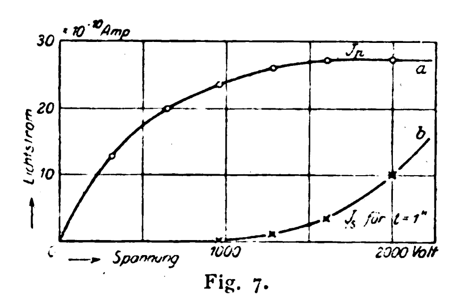


Fig. 7.

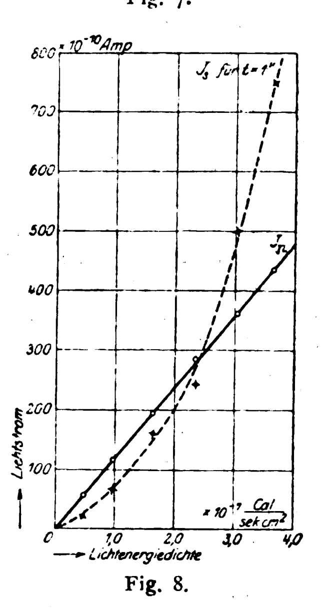


Fig. 8.

Für den primären Strom gelten also klare einfache Gesetze, wir haben Sättigung und Energieproportionalität; somit zweifellos ein Fortschritt gegenüber dem unübersichtlichen Bild, das die alten Beobachtungen über den gesamten lichtelektrischen Strom ergeben hatten*). Alles, was das Bild der älteren Beobachtungen so verwickelt

*) Frühere Beobachtungen Kämpfs über Sättigungsströme an Selen (diese Zeitschr. **13**, 689, 1912) finden ihre Erklärung in einem leicht erkennbaren Schaltungsfehler.

gestaltet hat, und was man vor allem in den zahllosen Selenarbeiten beschrieben findet, ist auf Rechnung des sekundären Stromes zu setzen. Er ist, wenn wir seine Größe etwa eine Sekunde nach Einsatz der Belichtung messen, keineswegs der Energie proportional, sondern zeigt den Verlauf der Kurve I_s in Fig. 8. Auch zeigt er keine Spur einer Sättigung, sondern steigt rasch mit der Spannung an. Vor allem aber setzt er erst bei einem gewissen Wert der Feldstärke ein. In unserm Beispiel der Fig. 7 bei 10000 Volt/cm*). Das aber gibt die Möglichkeit, bei den Experimenten den sekundären Strom auszuschalten. Es muß erst einmal die Grundlage der lichtelektrischen Leitfähigkeit: der primäre Strom klargestellt werden, bevor man an die Untersuchung des sekundären Stromes denken kann. Es scheint für die verschiedenen lichtelektrisch leitenden Körper verschiedene Ursachen zu haben und wird stark in das photochemische und elektrochemische Gebiet hinüberführen.

Wir lassen demgemäß im weiteren den sekundären Strom ganz beiseite und versuchen zunächst nur vom Wesen des primären Stromes eine nähere Anschauung zu gewinnen.

§ 5.

Wir haben bisher den primären Strom nur formal behandelt als $\frac{dq}{dt}$, wenn q die vom Stoßgalvanometer für die Belichtungszeit t gemessene Elektrizitätsmenge ist. Es ist daher noch eine Frage, ob diese Elektrizitätsmenge nur influenziert, oder wirklich transportiert ist, d. h. ob es sich im bestrahlten Kristall um Dipolbildung oder um Leitung handelt. Im Fall der Leitung mußte es unipolare Leitung sein, da der Primärvorgang in Isolatoren stets mit dem Auftreten von Gegenfeldern verbunden ist[4h]). Diese Gegenfelder von mehreren 1000 Volt/cm lassen sich nur entweder durch Polarisation oder durch Raumladung erklären. Der Versuch entscheidet für letztere und zwar mit positivem Vorzeichen und beweist damit Leitung ausschließlich oder überwiegend durch negative Träger[4h]).

§ 6.

Zur Ausführung des Versuches diente die in Fig. 9 wiedergegebene Anordnung. Ein ZnS-Kristall ist an beiden Enden mit dem positiven und negativen Pol einer in der Mitte geerdeten Hochspannungsbatterie von 2400 Volt verbunden. Seiner auf dem Potential Null befindlichen Mitte gegenüber steht eine mit einem Zweifadenelektrometer verbundene Sonde. Die Feldstärke im Kristall liegt weit unterhalb der für das Auftreten der Sekundärvorgänge erforderlichen. Bei Belichtung des Kristalls zeigt das Elektrometer unabhängig von der Feldrichtung stets positive Aufladung. Dipolbildung scheidet also aus, vielmehr liegt Raumladung vor infolge Abwanderung von negativen Trägern.

*) Kristalldicke war 1 mm.

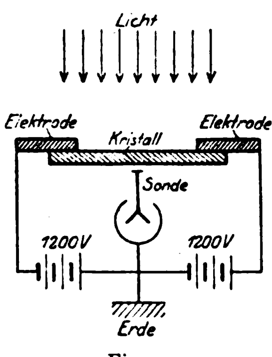


Fig. 9.

§ 7.

Der Primärvorgang verläuft in formaler Analogie zur Elektrizitätsleitung in Gasen: Belichtet man nur einen schmalen Streifen zwischen den Elektroden, so schreitet die Elektrizitätsbewegung ungehindert durch die dunklen nicht bestrahlten Kristallteile weiter, obwohl es sich nicht um ein Gas, sondern um ein festes Kristallgitter handelt. Diese an leitenden lichtempfindlichen Stoffen, wie Selen, längst gemachte Beobachtung führt bei den Isolatoren zur wichtigen neuen Erkenntnis, daß es sich in solchen teilweise belichteten Kristallen keineswegs um eine Reihenschaltung von Widerständen handelt, von denen der jeweils belichtete verkleinert wird; vielmehr wird beobachtet, daß bei Belichtung des mittleren Drittels etwa eines ZnS-Kristalles der verschwindend kleine Dunkelstrom nicht nur auf das $1^1/_2$fache ansteigt, wie es bei Änderung des spezifischen Widerstandes im bestrahlten Mittelstück sein müßte, sondern das 100 oder gar 1000fache erreicht[4h]).

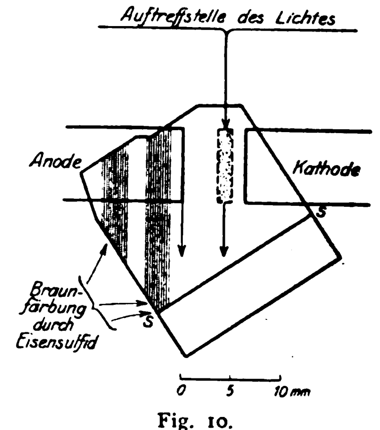


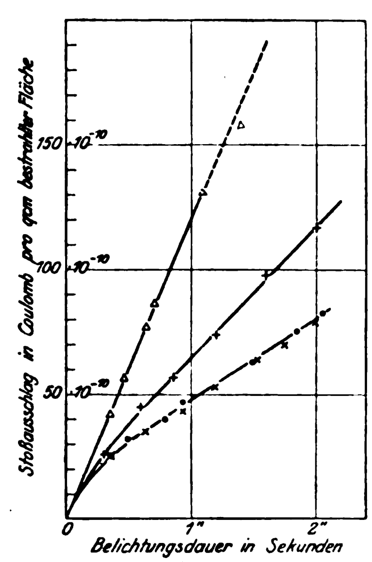
Fig. 10.

Weiter ist die Elektrizitätsausbeute im homogenen Kristall völlig unabhängig von der Lage des belichteten Streifens innerhalb der Strombahn (Fig. 10)[4h].

Die Analogie zur Gasionisation geht noch weiter. Bei Belichtung eines doppelten Streifens wird die doppelte, bei n facher Breite die n fache Elektrizitätsmenge beweglich gemacht.

§ 8.

Der Versuch scheint damit zunächst nicht in Einklang, da eine um so kleinere Elektrizitätsmenge pro Quadratzentimeter belichteter Fläche beobachtet wird, ein je kleinerer Bruchteil der Strombahn belichtet wird. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich aber, wenn man an die auftretenden Raumladungen denkt: Die die Ausbeute herabsetzenden Feldverzerrungen sind um so schädigender, je größere unbelichtete Teile des Isolators dem belichteten Teile vorgeschaltet sind. Vergleichbar sind daher nur die auf die Belichtungszeit Null extrapolierten Werte. Fig. 11 gibt eine solche Meßreihe an



× 1/4, • 2/4, + 3/4, △ 4/4 der Fläche zwischen den Elektroden bestrahlt (Punktierte Fläche in Fig. 10.)

Fig. 11.

ZnS, die in der Tat durch die für alle belichteten Bruchteile im Nullpunkt gleiche Tangente beweist, daß die in Teilflächen ausgelösten Elektrizitätsträger sich in der Gesamtfläche einfach addieren.

§ 9.

Ob Elektronen oder Ionen unter der Einwirkung des Lichtes wandern, ist noch unentschieden. Wer Scholls Arbeit[7]) über feuchtes Jodsilber kennt, wird an Elektronen denken. Auch wir halten Elektronen für wahrscheinlich, aber nicht für sicher.

Mit der Tatsache der verlustlosen Weiterleitung der einmal ausgelösten Elektrizitätsträger unter Gültigkeit eines Additionsgesetzes führt der lichtelektrische Strom mitten in das Problem der Elektrizitätsleitung durch feste, im besonderen kristallinische Körper. Wir wissen über die Elektrizitätsleitung in Kristallen noch sehr wenig, wissen nicht, wann Elektronen von Atom zu Atom weitergereicht werden, oder wann sich ganze Ionenketten verschieben. Wir sehen aber die Aufgabe, die Tatsachen der lichtelektrischen Leitfähigkeit für das allgemeine Problem der Elektrizitätsleitung durch Kristalle nutzbar zu machen.

§ 10.

Die zweite Frage, die sich bei der Behandlung der lichtelektrischen Leitfähigkeit aufdrängt, ist die nach ihrem Zusammenhang mit der Optik. Da kann man zunächst feststellen, daß man bei dem primären lichtelektrischen Strom in keinem Falle mehr Elektrizitätsatome beobachtet, als man nach der Quantenbeziehung erwarten soll, wenn q cal. Licht in n Elementarprozessen von der Energie $h\nu$ umgesetzt werden. Man hat dann im sichtbaren Gebiet etwa 2 $\frac{\text{Coul}}{\text{cal}}$ zu erwarten. Wir haben diese Zahl angenähert erreicht, aber nie überschritten. Weiter liegt die Analogie zum gewöhnlichen lichtelektrischen Oberflächeneffekt auf der Hand. Dann fragt sich, an welchen Teilen im Kristallinnern die Elektronen vom Licht abgespalten werden. Einstweilen müssen wir da verschiedene Fälle unterscheiden. In Steinsalz und Sylvin, die Röntgen untersucht hat[5]), sind es wahrscheinlich kolloidale Metallteile, die zuvor durch Bestrahlung mit Röntgenlicht abgeschieden worden sind und eine mehr oder minder lebhafte Fremdfärbung der Kristalle verursachen. Doch kann man mit dieser Vorstellung das Bild der spektralen Verteilung, das Röntgen z. B. an Steinsalz beobachtet hat (vgl. Fig. 5, III), nur zum Teil erklären. Es ist durchaus nicht alles Licht, das in den kolloidalen Teilen absorbiert wird, für die lichtelektrische Leitung wirksam; wir verweisen besonders auf den bemerkenswerten steilen Abfall der Kurve (Fig. 5, III) im Gebiet der kürzeren Wellen, der uns auch weiterhin unter ganz anderen Bedingungen begegnen wird.

An einen lichtelektrischen Effekt an fein verteilten Beimengungen kann man auch noch bei den Phosphoren denken. Ein Phosphor ist ein inhomogenes Gebilde. In ihm können Molekülkomplexe oder Mikrokristalle, die Lenard Zentren nennt, Sitz eines primären lichtelektri-

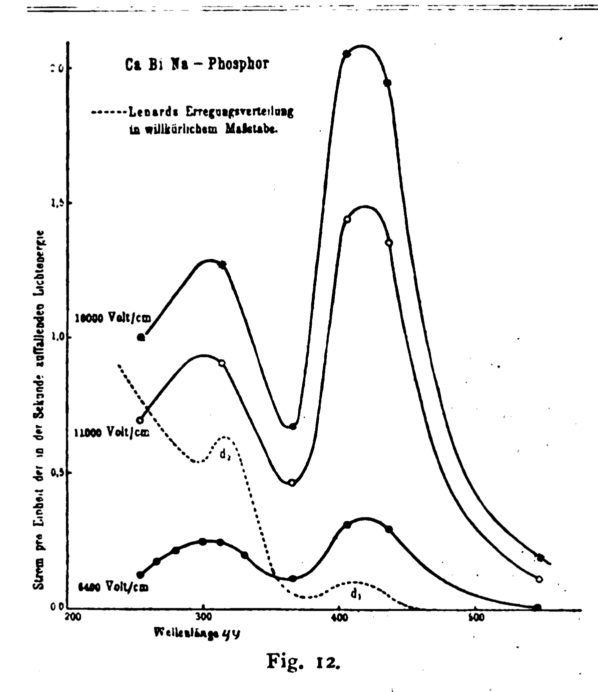


Fig. 12.

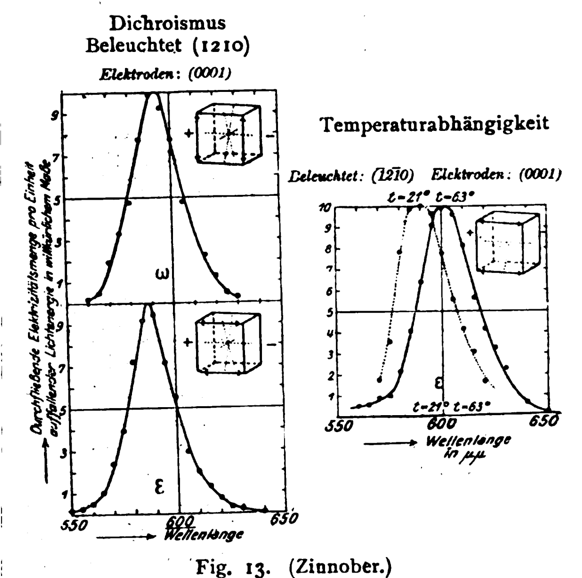


Fig. 13. (Zinnober.)

schen Vorganges sein, wie ihn Lenard schon lange als Ursache der Phosphoreszenz angenommen hat. Auf jeden Fall stimmt die spektrale Verteilung der lichtelektrischen Leitfähigkeit weitgehend mit der Verteilung der Phosphoreszenzerregung überein, die lichtelektrische Leitfähigkeit bietet geradezu einen neuen Weg, die Eigenfrequenzen oder Energiestufen der Phosphoreszenzzentren nachzuweisen (Fig. 12)[4b, 4d].

Am wichtigsten aber scheint uns die dritte und größte Gruppe der lichtelektrisch erregbaren Körper zu sein, in denen die Abspaltung der Elektrizitätsträger nicht an Beimengungen, sondern an Molekülen des Gitters selbst erfolgt. Als Vertreter dieser Gruppe nennen wir Diamant, Zinksulfid und Zinnober. Im Diamant setzt jede spektral nachweisbare Verunreinigung die Größe des lichtelektrischen Stromes erheblich, d. h. um 1 oder 2 Zehnerpotenzen herunter[4c]. Das gleiche gilt vom Zinksulfid, das leider nur höchst selten in wasserklaren Stücken erhältlich ist[4c].

Beim Zinnober kann man im polarisierten Licht zeigen, daß die spektrale Lage der lichtelektrischen Leitfähigkeit mit der der Eigenabsorption zusammenhängt[6]. Das Maximum der lichtelektrischen Leitfähigkeit verschiebt sich nach Roses Messungen bei der Drehung des elektrischen Lichtvektors genau im Sinne des Dichroismus. Auch wandert es bei einer Temperatursteigerung mit der Kante der optischen Eigenabsorption zu längeren Wellen (Fig. 13).

Bei den Stoffen mit Eigenabsorption besteht das Charakteristische der spektralen Verteilungen im folgenden:

Der Anstieg der lichtelektrischen Leitfähigkeit liegt vor der eigentlichen Absorptionsbande, an der Kante derselben fällt sie ziemlich steil zu kurzen Wellen ab. Im eigentlichen Absorptionsgebiet ist sie nur klein. Nach langem Zweifeln neigen wir jetzt doch der Ansicht zu, daß diese Maxima eine physikalische Bedeutung haben und nicht durch sekundäre Einflüsse, etwa zu kleine Lichteindringungstiefe, vorgetäuscht werden. Am Anfang der optischen Absorptionsbande spielt sich offenbar ein besonderer Vorgang ab. Wir erwähnten vorhin, daß fremde Beimengungen z. B. am Diamanten die lichtelektrische Leitfähigkeit heruntersetzen, auch dort liegt die Hauptstörung am Anfang der Bande, am meisten wird die Leitfähigkeit bei der Wellenlänge (Fig. 14) geschwächt, die durch die Verunreinigungen gerade noch hindurchgeht.

Sicher hängt die lichtelektrische Leitfähigkeit mit der Lichtbrechung zusammen, denn sie

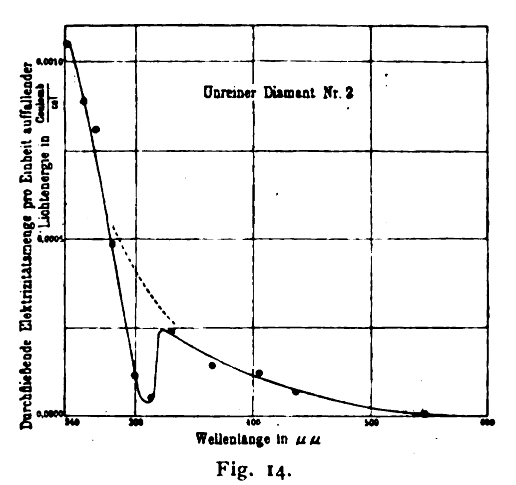


Fig. 14.

findet sich immer nur dort, wo der Brechungsindex bereits außerhalb der Absorptionsbande größer als 2 ist. D. h. die Größe des Brechungsindex darf nach der Drudeschen Theorie nicht dadurch bestimmt werden, daß $\nu = \nu_0$, sondern ϑ*), das die Verschieblichkeit der Elektronen ausdrückt, muß einen hohen Wert besitzen. n größer als 2 ist ein gemeinsames Merkmal aller Stoffe mit lichtelektrischer Leitfähigkeit**). Dieser Ausblick bilde den Schluß. Der Zusammenhang mit Absorption, Brechung und Dispersion des Lichtes, scheint nicht minder wichtig als der mit Kristallstruktur und Kristallleitung. Eine Klärung dieser Fragen ist noch keineswegs erreicht, scheint aber Erfolg versprechend angebahnt.

Literaturverzeichnis.

1) W. Hallwachs, Lichtelektrizität, § 39 in Handbuch der Radiologie, Bd. III.
2) Chr. Ries, Das Selen. Verlag Huber in Diessen 1918.
3) W. W. Coblentz,
   a) Scientific Papers of the Bureau of Standards **15**, 121, 1919.
   b) Scientific Papers of the Bureau of Standards **15**, 231, 1919.
4) B. Gudden u. R. Pohl,
   a) Zeitschr. f. Phys. **2**, 361, 1920.
   b) Zeitschr. f. Phys. **3**, 98, 1920.
   c) Zeitschr. f. Phys. **3**, 123, 1920.
   d) Zeitschr. f. Phys. **4**, 206, 1921.
   e) Zeitschr. f. Phys. **5**, 176, 1921.
   f) Zeitschr. f. Phys. **5**, 387, 1921.
   g) Zeitschr. f. Phys. **6**, 248, 1921.
   h) Zeitschr. f. Phys. **7**, 65, 1921.
5) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. **64**, 1. 1921.
6) H. Rose, Zeitschr. f. Phys. **6**, 174, 1921.
7) H. Scholl, Ann. d. Phys. **16**, 193, 417, 1905.

Diskussion.

A. Becker: Ich darf vielleicht bemerken, daß der Charakter des hier untersuchten Leitvorgangs offenbar ganz ähnlich ist dem vor über 15 Jahren zuerst von mir bezüglich der Leitfähigkeitserregung in festen Isolatoren durch Kathodenbestrahlung festgestellten. Auch die Fortsetzung dieser Untersuchung durch Herrn Ebeling und namentlich Herrn Eisenhut im Heidelberger Institut gelangte zu quantitativen Beziehungen, die weitgehende Ähnlichkeit mit den hier vorgetragenen zeigen. Bei allen diesen Erscheinungen liegt offenbar der gleiche Grundvorgang der Elektronenauslösung im Körperinnern vor.

H. Rubens: Vor einigen Jahren hat ein Amerikaner an nadelförmigen Selenkristallen gezeigt, daß eine Belichtung des einen Endes die elektrische Leitfähigkeit des ganzen Kristalles beeinflußt.

*) Vgl. Drude, Lehrbuch d. Optik, Kap. V, Hirzel 1912.
**) Außer den oben erwähnten Kristallen seien als neu aufgefunden noch aufgeführt: Anatas, Rutil, Pyrargyrit, Proustit, Lorandit, Vanadinit, Endlichit, Krokoit.

Pohl: Der amerikanische Autor, den Herr Geheimrat Rubens erwähnt, ist F. C. Brown. Herr Brown hat zwei hierher gehörige Versuche gemacht: Einmal befand sich der belichtete Streifen des nadelförmigen Selenkristalles zwischen den Elektroden. Dabei handelte es sich um den Fall der Serienschaltung von belichteten und unbelichteten Widerständen, den Herr Dr. Gudden gerade ausschloß. Das zweite Mal befand sich der belichtete Streifen außerhalb der Elektroden. Dann diffundierte ein bisher nicht näher bekanntes widerstandverminderndes Agens in den Elektrodenzwischenraum herein. Brown hält selbst eine Diffusion von Licht für möglich. Dr. Gudden und ich haben von ZnS diese zweite von Brown beobachtete Wirkung nicht auffinden können.

Richard Weichmann, Ein Banden-Absorptionsspektrum des Wassers bei Wellenlängen von mehreren Dezimetern.

(Auszug aus der Inaugural-Dissertation.)

Die letzten Arbeiten über die Brechung und Absorption des Wassers für elektrische Wellen umfassen den Bereich von $\lambda = 250$ cm bis $\lambda = 0{,}3$ cm. Es liegen für dieses Gebiet des elektromagnetischen Spektrums des Wassers, von zahlreichen, älteren Arbeiten abgesehen, Untersuchungen von Rukop[1]), Rückert[2]), Eckert[3]) und Möbius[4]) vor. Obwohl alle vier Autoren mit großer Exaktheit gearbeitet haben, lassen sich doch ihre Meßresultate nicht widerspruchslos aneinander reihen. Über diese Unstimmigkeiten soll diese und werden hoffentlich weitere Arbeiten Aufschluß geben. Denn die neueste Debyesche[5]) Theorie über die hohe Dielektrizitätskonstante vieler Flüssigkeiten drängt zur genauen Kenntnis ihrer Dispersionen und Absorptionen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Grenzgebiet der Rukop- und Rückertschen Messungen und umfaßt nahezu das Rukopsche Gebiet unter Hinzunahme der erforderlichen Absorptionsmessungen. Sie zeigt weiter den Weg, wie man den Anschluß bis an die Eckertschen Messungen mit Hilfe der Drahtwellen erreichen kann, und wie sich dabei die Fehlergrenze auf ein Minimum beschränken läßt.

Die große Verwirrung in den bisher vorliegenden, mannigfachen Meßresultaten im elektromagnetischen Spektrum des Wassers warnt vor einer Überschätzung der Meßgenauigkeit und

1) Rukop, Ann. d. Phys. **42**, 489, 1913.
2) Rückert, Greifswalder Dissertation 1918.
3) Eckert, Berliner Dissertation 1913.
4) Möbius, Ann. d. Phys. **62**, 293, 1920.
5) Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912.

fordert eine außerordentlich zuverlässig arbeitende Apparatur. Zur Messung der Dispersion und Absorption des Wassers wurde die Methode der Drahtwellen angewandt, wie sie auch von Rukop und Rückert benutzt wurde. Diese von Drude ausgebildete Methode hat den wesentlichen Vorteil, daß sich bei ihr durch das Verhältnis der Wellenlänge in Luft zu der in der betreffenden Substanz der Brechungsexponent direkt ergibt, ohne quantitative Intensitätsmessungen erforderlich zu machen. Wenn auch die Versuchsanordnung der vorliegenden Arbeit sich im wesentlichen auf die Rukopschen und Rückertschen Anordnungen stützte, so wurde sie doch im Verlauf vieler Vorversuche derartig modifiziert, daß eine Beschreibung der endgültigen Form hier zweckmäßig erscheint. Es wurde vor allem darauf gesehen, die Fehlergrenze in der Längenbestimmung der λ-Werte auf ein Minimum zu beschränken, um so eine Bestimmung des Brechungsexponenten zu ermöglichen, die an Genauigkeit den optischen Methoden nahe kommt. Es wurden zwei Apparaturen benutzt, die sich nur in ihren Dimensionen unterscheiden. Die Fig. 1 zeigt die Apparatur, wie sie für

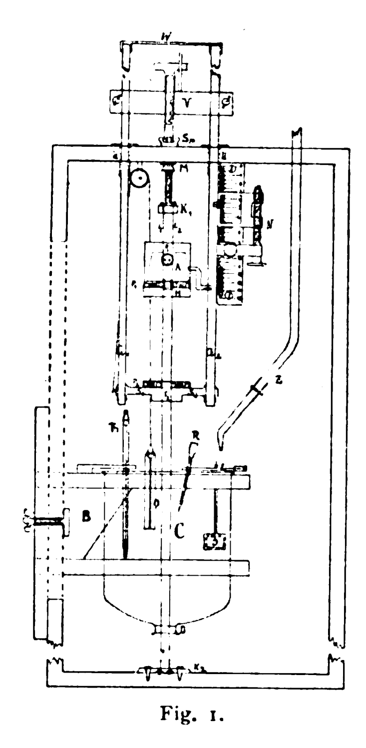


Fig. 1.

die Messungen von $\lambda = 37$ cm an abwärts benutzt wurde. Die Lecherschen Drähte (L_1, L_2) durchsetzen ein festes Holzgestell in seiner ganzen Länge. Eine Spannvorrichtung (Sp) ermöglicht es, sie bis zum hellen Tönen zu bringen. Die Spannschraube wird durch eine Gegenmutter (M) fest gegen den Holzrahmen gepreßt, so daß ein seitliches Ausweichen der Drähte und damit eine Änderung der Kapazität und Selbstinduktion ausgeschlossen ist.

Begrenzt wurden sie durch zwei exakt gearbeitete, verschiebbare, polierte Plattenbrücken von 2,5 cm Durchmesser. Zwecks Erreichung eines stetigen, guten Kontakts wurde ihnen eine neue Form gegeben.

Die Brücken (P_1, P_2) bestehen aus zwei kreisförmigen, plangedrehten und polierten Platten. Zwei horizontale Bohrungen dienen zur Aufnahme der kleinen Druckbolzen (a), die durch die Druckfedern (b), von Gegenschrauben (c) gehalten, gegen die die Brücken durchsetzenden Lecherschen Drähte (L_1, L_2) drücken. So wird erreicht, daß jederzeit, bei und nach jeder Verschiebung der Platten, ein einwandfreier, stetiger Kontakt vorhanden ist. Um eine gleichmäßige, horizontale Verschiebung der Brücken zu ermöglichen, sind zwei Führungen (F_1, F_2) angebracht. F_2 trägt zwei seitliche Arme zur Aufnahme der Führungsglasstäbe (G_1, G_2), die ihrerseits noch zwei metallene, federnde Gleithülsen (U_1, U_2) durchsetzen, die das feste Holzgestell trägt. Der Glasstab (G_2) trägt eine Präzisionsmensur, auf die sich durch ein Mikrometerschraubensystem ein Nonius einspielen läßt. Durch die beiden Glasstäbe und ein weiteres Mikrometerschraubensystem (V) läßt sich die untere Brücke um 0,01 mm verschieben und ihre jeweilige Stellung durch eine Ablesevorrichtung (N) mit Lupe (Q) und Beleuchtungsvorrichtung (X) auf einem Präzisionsmaßstab nachprüfen.

Zur Aufnahme des zu untersuchenden Wassers befindet sich in dem vertikal verschiebbaren Gefäßhalter (Fig. 1: B) ein verhältnismäßig weites Glasgefäß (C), das durch einen eingekitteten Gummistopfen (D) nach unten verschlossen ist. Den Gummistopfen durchsetzen die Lecherschen Drähte (L_1, L_2) und ein Abflußrohr. Der Gefäßhalter (B) trägt ferner einen beweglichen Arm (E) mit einer Hartgummischraube (R), durch deren Nickelspitze ein Einspielen des Wasserspiegels in Höhe der Brückenstellung ermöglicht wird. Die Zuleitung (Z) mit fein ausgezogener Spitze gestattet eine bequeme Auffüllung des Meßgefäßes mit dem zu untersuchenden Wasser. Zwei Senkstäbe (O) von demselben Material und Durchmesser der Glasstäbe (G_1, G_2) bewegen sich automatisch, an einem Faden aufgehängt, der an der unteren Brücke befestigt ist und über eine Rolle läuft, im umgekehrten Sinne der Brücke (P_2). Sie tarieren die Wasserspiegelverschiebungen aus, die durch das Heben oder Senken der Stäbe (G_1, G_2) bedingt sind.

Oszill.	R_1	R_2	R_3	I	II III	IV V	VI	VII	VIII
l in mm	120	80	50	34	30 29	23 21	17,5	15	10
d in mm	8	5	5	4,7	4,7	4,7	4,7	3,8	4
B in cm	300—150	180—80	110—50	100—45	80—40	50—35	40—25	28—15	22—12

Als Indikator liegt ein empfindliches Thermokreuz (Fig. 1: T), eine Kombination von 0,015 mm dickem Eisen- und Konstantandraht zur oberen Brücke im Nebenschluß und ist auf vier Messingstäbchen von 2,5 mm Höhe in Kreuzform verlötet. Es besitzt eine Spannbreite von 3 mm und liegt zwischen den Lecherschen Drähten L_1, L_2, mit diesen äußerst schwach induktiv gekoppelt. Die Koppelung darf nur eine sehr lose sein, damit T selbst nur verschwindend wenig Energie verbraucht. Man muß dies als unbedingte Forderung hinnehmen, um somit die Methode der Drahtwellen auch für Absorptionsmessungen brauchbar zu machen. Das Thermokreuz wird durch eine mit Watte gefüllte Papphülle (H) gegen äußere Temperatureinflüsse geschützt.

Oberhalb der Brücke (P_1) befindet sich eine Messingkapsel (A), die gleichzeitig als Führung (F_1) dient. A verhütet den Zutritt fremder Schwingungen zu den Zuleitungen des Galvanometers, die außerdem noch in Bleikabel isoliert verlegt waren. Der ganze Kreis Indikator-Galvanometer war somit metallisch abgeschirmt.

Als Meßinstrument wurde ein Doppelpanzergalvanometer nach Dubois-Rubens[1]) mit einem inneren Widerstand von $52 + 53) = 105$ Ohm und einer Empfindlichkeit von $2,5 \times 10^{-9}$ Amp. bei 2 m Skalenabstand verwandt. Das Instrument wurde sehr gut astasiert, so daß die Schwingungsdauer 8 Sekunden betrug; es wurde nur wenig gedämpft benutzt. Um die Funkenstrecke nicht allzulange belasten zu müssen und um eine dadurch unvermeidliche Erwärmung auszuschließen, wurde ballistisch beobachtet.

Als Erreger wurden Oszillatoren verwandt, über deren Brauchbarkeit Mie[2]) schon 1910 berichtete. Seitdem sind die Oszillatoren von Rukop[3]) sehr genau untersucht worden und von Rückert[4]) und in jüngster Zeit von Ramòn G. Loyarte[5]) benutzt worden. Die von mir konstruierten und benutzten Oszillatoren bestehen aus Funkenstrecke (peinlichst parallel stehenden Kupferelektrodenflächen an Messingmikrometerschrauben) und parallel dazu liegenden, verhältnismäßig großen Kondensatorplatten, die an zwei Barren seitlich aufgelötet sind. Die Barren tragen die Gewinde für die Mikrometerfunkenstrecke und die Glasgaskammer. Zwischen den quadrantenförmigen Kondensatorplatten liegt als Isolator eine 0,18 bis 0,20 mm starke Ebonitplatte. Die obige Tabelle gibt die günstigsten Größenverhältnisse für die betreffenden Bereiche an. R_1 bis R_3 sind Werte, die Rückert[1]) für die von ihm untersuchten Wellen fand.

Es bezeichnet hierzu l den Abstand von der Mitte der Elektrodenflächen (vom Durchmesser d) bis zum Ende der quadrantenförmigen Kondensatorplatten. Die dritte Reihe B enthält die dabei erreichten Wellenbereiche. Diese angegebenen Bereiche (I—VIII) sind in Wirklichkeit nach kürzeren und nach längeren Wellen hin etwas größer, da ich die Bereiche nur soweit verfolgte, wie sie mir die für meine Messungen erforderlichen Intensitäten bei geringer Dämpfung lieferten. Eine exakte Errechnung der für einen verlangten Bereich erforderlichen Größenverhältnisse läßt sich nicht ohne weiteres aufstellen, da in dieser Art von Erregern die Selbstinduktion von der Kapazität nicht scharf getrennt ist.

Über die Wichtigkeit der richtigen Behandlung der Löschfunkenstrecke für die Konstanz und Intensität der Galvanometerausschläge berichtet schon Rukop[2]) sehr ausführlich. Die günstigste Funkenlänge lag zwischen 0,02 und 0,04 mm. Der Löschfunke muß nach Art von äußerst schnellen „Szintillationen" die ganzen Elektrodenflächen gleichmäßig bedecken; er läßt ein kaum hörbares Summen vernehmen. Sprühende oder zischende Funkenübergänge ergeben geringe Intensitäten bei hohem Dekrement der Resonanzkurven. Aus diesen Gründen müssen die Elektrodenflächen peinlichst genau parallel und genau gegenüberstehen. Sind alle Bedingungen für einen guten Löschfunken erfüllt, so kann man leicht 150—200 ballistische Beobachtungen machen, ohne die Funkenstrecke nachregulieren zu müssen. Ein guter Löschfunke greift die Elektrodenflächen kaum an.

Von Wichtigkeit ist das Medium, in das der Funke übergeht.

Tabelle I zeigt die Abhängigkeit der Intensität und Konstanz des Maximalausschlages des Galvanometers desselben Erregers bei gleicher Funken- und Wellenlänge. Diese Tabelle zeigt,

1) Dubois-Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 20, 65, 1900.
2) Mie, diese Zeitschr. 11, 1035, 1910.
3) Rukop, l. c.
4) Rückert, l. c.
5) Ramòn G. Loyarte, Ann. d. Phys. 3, 228, 1921.

1) Rückert, l. c. 154.
2) Rukop, l. c. 502.



Tabelle I.

Nr.	I Wasserstoff	II Luft a	II Luft b	III Benzol a	III Benzol b	III Benzol c	IV Äther	V Petroleum	VI Leuchtgas
1	54	218	260	82	278	388	458	438	751
2	56	358	280	75	262	380	442	444	750
3	49	330	265	86	256	368	430	439	750
4	52	220	275	78	250	353	465	433	751
5	50	290	268	82	249	342	440	442	750
6	53	272	272	78	240	334	448	431	750

Die Substanzen wurden wie folgt der Funkenstrecke zugeführt:
I: durchgeblasen;
IIa: — — —
b: durchgesaugt;
IIIa: es wurde stark mit Benzol gesättigte Luft durchgesaugt.
Es wurde Wasserstoff durch fünf mit technisch reinem Benzol gefüllte Waschflaschen geschickt und durch die Funkenstrecke geblasen, so daß die Verbrennungsflamme
b: stark rußte,
c: schwach rußte;
IV: als Dampf durchgesaugt;
V: langsam durchgetropft;
VI: mit vorgelegtem Chlorkalziumrohr, durchgeblasen.

wie hervorragend günstig das Leuchtgas gegenüber den anderen untersuchten Stoffen ist; es wurde daher für alle Messungen benutzt. Allerdings mußte ich es, bevor es zur Funkenstrecke gelangte, mittels Chlorkalziumrohre gut trocknen. Sobald sich eine leichte Feuchtigkeit auf den Elektrodenflächen niederschlägt, wird der Löschfunke schlecht, frißt sich schließlich in die Elektrodenflächen ein und verdirbt sie für immer.

Den Schwingungskreisen wurde dieselbe Form gegeben, wie sie Rückert[1]) benutzte. Sie waren aus Messingröhrchen hergestellt, in denen in der Art eines Posaunenauszuges mit gutem Kontakt ein Bügel verschiebbar war. Zwecks festerer Koppelung wurde das untere Ende rechtwinklig umgebogen und befand sich in etwa 0,7 bis 0,9 mm Entfernung über den seitlichen Barren des Oszillators, mit diesem induktiv gekoppelt. Das obere Ende stand in einem Abstand von 20—30 cm der oberen Brücke so gegenüber, daß die beiden Längsseiten des Schwingungskreises vor den Lecherschen Drähten verliefen. Es muß darauf geachtet werden, daß sich ihre gegenseitige Lage im Verlaufe einer Meßreihe nicht im geringsten ändern kann. Eine geringe Änderung der Koppelung kann leicht einen Fehler in der Bestimmung der λ-Werte hervorrufen, der mehr als 0,1 mm beträgt. Ich verwandte daher Ebonithalter, die die Koppelungsgrade von Oszillator-Schwingungskreis und Schwingungskreis-Lechersches System absolut konstant erhielten. Die aufgenommenen Resonanzkurven zeigten, daß die Schwingungen dadurch nicht beeinträchtigt wurden. Die Kurven zeigten einen glatten Verlauf und keine erhöhten Dekremente.

1) Rückert, l. c. 154.

Betrieben wurde die Funkenstrecke durch ein kleines Induktorium, dessen Primärspule mit 26—30 Volt beschickt wurde. Dem Induktorium wurde ein Quecksilberunterbrecher vorgelegt, der von einem konstant laufenden Hauptschlußmotor so betrieben wurde, daß etwa 50 Unterbrechungen in der Sekunde stattfanden. Die Zahl der Unterbrechungen hat auf die Konstanz und Intensität der Galvanometerausschläge einen wesentlichen Einfluß. Beide wachsen mit der Zahl der Unterbrechungen. Die Reinheit der Resonanzkurven ist neben dem Koppelungsgrad auch stark abhängig von der Stromstärke. Für meine Anordnung lag die günstigste Stromstärke zwischen 0,8 bis 1,5 Amp. Ich verstehe unter „günstigster" Stromstärke die, die genügend große Intensität und völlig reine Resonanzkurven bei geringem Dekrement liefert.

Ich benutzte für meine Messungen einen verhältnismäßig weiten Glaszylinder, der mir gestattete, das zu untersuchende Wasser lange Zeit ziemlich rein zu halten und der das Einspielen des Wasserspiegels ungemein erleichterte, da ich die Wasseroberfläche seitlich beleuchten konnte. Die in Luft, mit oder ohne Gefäß, aufgenommenen Resonanzkurven waren alle frei von irgendwelchen Anomalien und die Abschnitte ($k = 1, 2, 3$ usw.) folgten einander in regelmäßigen Abschnitten unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Brückenverkürzung.

Die Knoten der elektrischen Kraft liegen nämlich in Wirklichkeit nicht um Multipla der halben Wellenlänge von der metallischen Brücke entfernt. Nach der Theorie, die Drude[1]) hierüber aufgestellt hat, könnte dies nur der Fall sein, wenn totale Reflexion der Wellen an

1) Drude, Wied. Ann. 60, 1, 1897.

den Brücken stattfinden würde. Die Theorie von Drude legt die von ihm in seinen Experimenten benutzten einfachen Bügelbrücken geringen Reflexionsvermögens zugrunde. Daher waren die von ihm bestimmten Brückenverkürzungen recht beträchtlich. Sie waren der Brückenlänge proportional und wuchsen im Verhältnis des Logarithmus der Wellenlänge. Die von mir verwandten gut reflektierenden Plattenbrücken zeigten eine weit geringere Brückenverkürzung. Doch mußte sie genau bestimmt werden, da ihre exakte Kenntnis für die Messungen in Wasser unbedingt erforderlich ist. Es wurden in dem ganzen untersuchten Bereich Messungen in Luft mit den verschiedensten Wellenlängen vorgenommen. Es ergibt sich dann die Brückenverkürzung als Differenz des zweiten bzw. eines folgenden Abschnittes gegen den ersten.

Die Ergebnisse der so bestimmten Brückenverkürzungen zeigt die Tabelle II.

Tabelle II.

λ = Wellenlänge in mm,
d = Brückenverkürzung in mm.

Apparatur: I				II	
λ	d	λ	d	λ	d
640,04	0,20	514,97	0,17$_5$	371,75	0,57
630,06	0,19	506,78	0,17	352,80	0,56
618,28	0,19$_5$	485,07	0,17$_5$	338,15	0,55$_5$
594,62	0,19	459,83	0,17	311,40	0,56
579,63	0,20$_5$	447,66	0,18	290,07	0,53$_5$
553,80	0,20	427,47	0,16$_5$	273,46	0,53
547,45	0,18$_5$	411,93	0,17$_5$		
536,62	0,19	391,39	0,17$_5$		
536,44	0,18	370,48	0,17		
529,61	0,17$_5$				

Ich konnte somit deutlich, wenn auch nur einen geringen Abfall der Brückenverkürzung mit der Abnahme der Wellenlänge konstatieren. Die von mir für meine Apparatur I gefundene Brückenverkürzung ist kleiner als die von Rückert gefundene, obwohl seine Apparatur annähernd dieselben Dimensionen hatte. Das wird seine Ursache darin haben, daß meine Plattenbrücken besser reflektierten, da sie aus einer kreisförmigen, gut polierten Platte bestanden, während sie bei Rückert in der Mitte — also an der Stelle maximalsten Energieflusses — durchgeschnitten waren und seitlich gegen die Lecherschen Drähte gepreßt wurden. Bei der Apparatur II ist die Brückenverkürzung etwas größer. Die Ursache wird eine zweifache sein. Die Brücken werden ihrer kleineren Dimensionen wegen ein nicht so vollkommenes Reflexionsvermögen wie die Brücken der Apparatur I besessen haben. Des weiteren ist es möglich, daß Energie auf die seitlichen Arme S_1, S_2 der Führung F_2 (Fig. 1) abgeleitet wurde. Die Arme waren bei der Apparatur I aus Ebonit, bei der Apparatur II aus Kupfer hergestellt.

Die in der Tabelle II gefundenen Brückenverkürzungen wurden den späteren Messungen in Wasser zugrunde gelegt. Die Abschnitte in der zu untersuchenden Flüssigkeit sind nämlich nur dann gleich einer halben Wellenlänge, wenn die Eintrittsstelle der Lecherschen Drähte mit einem wahren Strombauch zusammenfällt.

Die Aufnahmen der Resonanzkurven zeugen für das exakte Arbeiten der ganzen Apparatur.

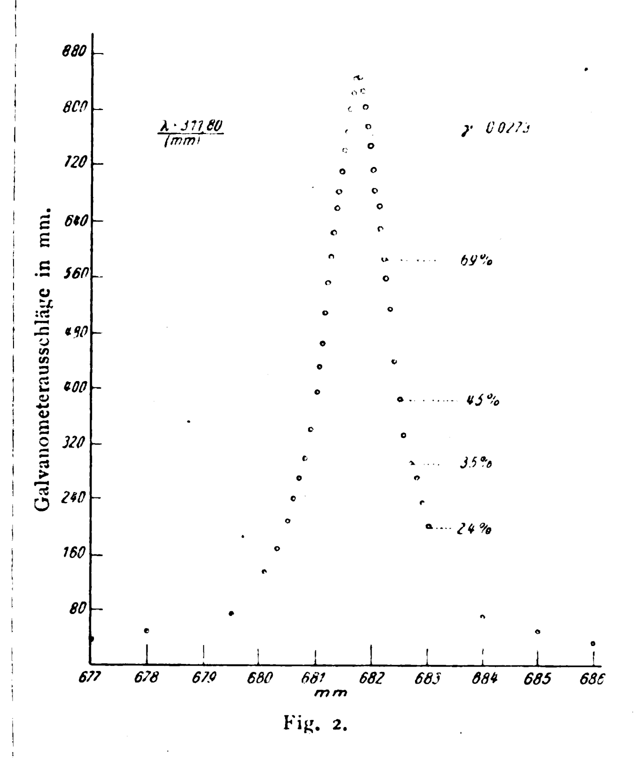


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt eine Resonanzkurve, wie sie bei einmaliger Aufnahme erhalten wurde. Ihr glatter Verlauf zeigt, daß keiner der fünfzig Meßpunkte wesentlich herausfällt, und daß es meine Versuchsanordnung gestattete, innerhalb eines Millimeters zwanzig Punkte der Resonanzkurve so zu bestimmen, daß sie sich einwandfrei zu einer glatten Kurve vereinen lassen. Einer Brückenverschiebung von 0,05 mm folgt also noch die Ablesegenauigkeit in der Längenbestimmung und der Feststellung des Umkehrpunktes des gut astasierten Galvanometers. Die aufgenommenen Kurven folgen alle ausgezeichnet der Bjerknesschen Formel für Resonanzkurven. Die Koppelung und die Stromstärke ließen sich stets so wählen, daß die beiden Äste der Kurve symmetrisch waren. Die Figur stellt eine Welle von $\lambda = 311{,}80$ mm dar. Errechnet man aus der Bjerknesschen Formel die zugehörigen

Dekremente und geht von verschiedenen Punkten der Kurve aus, die in Prozenten des maximalen Galvanometerausschlages angegeben sind, so erhält man:

Proz.:	24	35	45	69
Dekrement:	0,0273	0,0274	0,0273	0,0271

Die aufgenommenen Resonanzkurven gehorchen alle der Bjerknesschen Formel. Als Verstimmung rechne ich den Wert

$$\mu = \frac{2d}{k \cdot \lambda_0}, \qquad (1)$$

wo d die Verschiebung der Brücke gegen die Stelle des maximalen Ausschlages, λ_0 die Wellenlänge in Luft, k die Zahl der Abschnitte bedeuten. Die Gleichung der Resonanzkurve im $k$ten Strombauch

$$\alpha = \frac{\alpha_k}{1 + \frac{4\pi^2\mu^2}{\gamma_k^2}} \qquad (2)$$

liefert den Wert des Maximalausschlages α_k und den Wert des Dämpfungsdekrementes γ_k. Für γ_k liefert die Theorie die Beziehung

$$\gamma_k = \gamma_0 + \gamma_L + \frac{1}{k} \cdot \gamma_B, \qquad (3)$$

wo γ_0 die Eigendämpfung der Schwingung des Oszillators, γ_L die Dämpfung durch Absorption in den Lecherschen Drähten und γ_B die Dämpfung durch Absorption in den Brücken bedeutet.

Von den drei Summanden der Formel (3) kann man γ_L berechnen:

$$\gamma = \frac{W}{2 \cdot L \cdot \nu}, \qquad (4)$$

wo W und L Widerstand und Selbstinduktion der Paralleldrahtleitung pro Längeneinheit für Wechselstrom von der Schwingungszahl

$$\nu = 3 \cdot 10^{10} : \lambda_0$$

sind; und es ist

$$W = \frac{2\sqrt{\nu \cdot \sigma} \cdot 10^{-9}}{\varrho} \frac{\text{Ohm}}{\text{cm}}, \qquad (5)$$

$$L = 4 \cdot 10^{-9} \ln \frac{2a}{\varrho} \frac{\text{Henry}}{\text{cm}}, \qquad (6)$$

wo $2a$ der Abstand der Drahtachsen, ϱ der Radius des Drahtes und σ der spezifische Widerstand des Drahtmaterials in Ohm × cm ist. In meinen Apparaturen war:

$$\text{I.} \quad \gamma_L = 0{,}00261 \sqrt{\frac{\lambda_0}{100}}, \qquad \text{II.} \quad \gamma_L = 0{,}00340 \sqrt{\frac{\lambda_0}{100}}. \qquad (7)$$

Messungen in Luft.

Es wurden zunächst von allen Oszillatoren aus den verschiedensten Stellen ihrer Bereiche Resonanzkurven für die Abschnitte $k = 1, 2, 3$ aufgenommen und die Dekremente $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ermittelt.

Die folgende Fig. 3 faßt die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die Dämpfung zu-

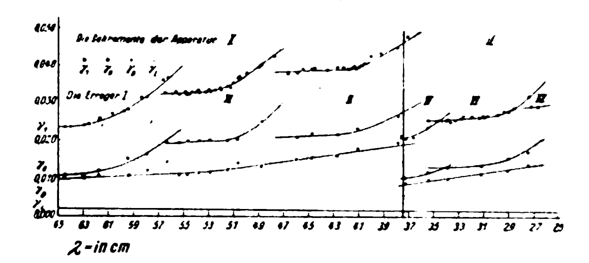


Fig. 3.

sammen. Ein Vergleich der Werte γ_B, die sich aus den gemessenen Werten der Dämpfungsdekremente γ_1 und γ_2 ergeben, mit der Kurve, die die Abhängigkeit von der Wellenlänge ungefähr wiedergeben soll, zeigt, daß in den gemessenen Werten von γ_B noch systematische, kleine Fehler stecken müssen. Denn genau genommen, ergibt sich für jeden der Oszillatoren I, III und IV eine besondere γ_B-Kurve und die drei Kurven schließen sich nicht ganz, wie man nach dem Wesen von γ_B, als der allein in den Brücken vorhandenen Absorption, erwarten müßte, zu einer einheitlichen Kurve zusammen. Die in Fig. 3 gezogene Kurve ist nur durch eine Art Mittelbildung der drei einzelnen Kurven zustande gekommen. Wodurch sich dieses sonderbare Verhalten von γ_B erklären läßt, ist schwer zu sagen. Vor allem sei hier hervorgehoben, daß die Formel (3) für γ nur eine Näherungsformel ist, die möglicherweise nicht mehr streng gültig ist, wenn die Schwingungen etwas unsauber werden, wie das vielleicht in den Gebieten der Fall ist, wo γ_0 stark ansteigt. Bei der Aufnahme der Resonanzkurven ließ sich allerdings kein merklicher Unterschied in ihrer Reinheit konstatieren. Es wäre des weiteren die Frage zu untersuchen, ob die Rückkoppelung der Lecherschen Drähte mit dem Oszillator von Einfluß auf die Berechnung der Dämpfung sein könnte. Aber fürs erste können wir diese Frage zurückstellen, weil auf die Berechnung der Absorption des Wassers der kleine Wert der Brückenabsorption wenig Einfluß hat, und weil er daher hierfür nicht genau gegeben zu sein braucht. Ich komme hierauf später noch einmal zurück.

Die Messungen in Wasser.

Zu jeder vollständigen Meßreihe zwecks Errechnung der Dispersion und Absorption wurde wie folgt vorgegangen: Es wurde die erste

Tabelle III.

Der Brechungsexponent.

Nr.	Erreger	$^1/_2 \lambda_0$	$^1/_2 \lambda_1$	n_t	t	n_{17}	λ_0
1	I	322,62	36,00	8,961	17,2	8,965	645,24
2	I	313,04	34,78	9,001	14,9	8,959	626,08
3	I	309,00	34,18	9,040	13,2	8,964	618,00
4	I	303,76	33,74	9,003	15,0	8,963	607,52
5	I	299,08	33,20	9,008	14,5	8,958	598,16
6	I	292,09	32,51	8,987	15,6	8,959	584,18
7	I	283,86	31,61	8,984	15,6	8,956	567,72
8	III	283,06	31,44	9,003	15,0	8,963	566,12
9	III	279,43	31,14	8,973	16,4	8,961	558,86
10	III	278,38	31,00	8,980	15,7	8,954	556,76
11	III	275,34	30,48	9,033	14,7	8,987	550,68
12	III	274,80	30,44	9,042	15,2	9,006	549,60
13	III	273,38	30,31	9,022	15,2	8,986	546,76
14	III	272,18	30,42	8,950	16,7	8,944	544,36
15	III	270,44	30,22	8,949	15,8	8,925	540,88
16	III	269,49	30,03	8,974	14,4	8,922	538,98
17	III	266,43	29,91	8,905	16,7	8,899	532,86
18	III	264,43	29,76	8,897	16,2	8,881	528,86
19	III	262,78	29,62	8,866	16,5	8,856	525,56
20	III	260,58	29,56	8,818	17,1	8,820	521,16
21	III	260 28	29,51	8,823	17,0	8 823	520,56
22	III	258,70	29.22	8,853	17,4	8,847	517,40
23	III	256,28	28,90	8,868	17,0	8,868	512,56
24	III	255,52	28,54	8,944	16,5	8,934	511,04
25	III	253,26	28,24	8,968	16,3	8,954	506,52
26	III	249,38	27,80	8,971	16,2	8,955	498,76
27	III	244,76	27,31	8,963	16,8	8,959	489,52
28	III	238,66	26,61	8,969	16,4	8,957	477,32
29	IV	233,52	26,02	8,975	16,3	8,961	467,04
30	IV	227,38	25,30	8,987	16,1	8,969	454,76
31	IV	223,22	24,90	8,965	16,5	8,955	446,44
32	IV	217,31	24,18	8,987	15,9	8,965	434,62
33	IV	211,48	23 50	8,999	15,5	8,969	422,96
34	IV	209,37	23,30	8,986	16,6	8,978	418,74
35	IV	207,94	23,01	9,037	15,1	8,999	415,88
36	IV	206,89	23,00	8,994	15,0	8,954	413,78
37	IV	205,22	23,25	8,827	15,1	8,809	410,44
38	IV	203,84	23,01	8,860	15,8	8,836	407,68
39	IV	202,96	22,90	8,863	16,1	8,845	405,92
40	IV	199,34	22,31	8,937	16,9	8,935	398,68
41	IV	189,54	21,21	8,940	16,8	8,938	379,08
42	IV	188,05	20,97	8,968	16,4	8,958	376,10
43	IV	183,63	20,49	8,962	16,6	8,954	366,26
44	VI	177,11	19,79	8,956	16,9	8,954	354,22
45	VI	174,31	19,47	8,953	17,2	8,957	348,62
46	VI	171,85	19,08	9,008	16,8	9,004	343,70
47	VI	169,25	18,73	9,036	16,0	9,016	338,50
48	VI	168,41	18,72	8,996	16,9	8,994	336,82
49	VI	166,10	18,50	8,879	16,7	8,973	332,20
50	VI	164,34	18,40	8,942	17,3	8,948	328,68
51	VI	163,41	18,28	8,939	16,9	8,941	326,82
52	VI	159,76	17,94	8,905	16,9	8,903	319,52
53	VI	157,19	17,75	8,852	17,4	8.860	314,38
54	VI	155,52	17,59	8,842	16,5	8,832	311,04
55	VI	154 10	17,33	8,897	16,4	8,885	308,20
56	VI	149,68	16,74	8,943	17,0	8,943	299,36
57	VI	146,90	16,40	8,958	17,1	8,960	293,80
58	VI	145,25	16,18	8,977	16,1	8,959	290,50
59	VI	142,86	15,99	8,930	18,2	8,954	285,72
60	VI	136,67	15,21	8,985	16,2	8,969	273,34

Resonanzkurve in Luft ($k = 1$) aufgenommen. Sie lieferte dann unter Berücksichtigung der Brückenverkürzung die Wellenlänge in Luft λ_0 und das erste Dämpfungsdekrement γ_1. Die Fig. 3 lieferte dann die dazugehörigen Werte von γ_L, γ_B und γ_0. Es wurde nun die Wassergrenze in den wirklichen ersten Strombauch verlegt und mehrere folgende Resonanzkurven in Wasser aufgenommen ($k = 2, 3, 4$). Vor und nach jeder Meßreihe wurde die Temperatur (t) und das Leitvermögen (l) des Wassers bestimmt. Der Mittelwert der Abschnitte in Wasser liefert

die Wellenlänge λ_1, der Quotient aus λ_0 und λ_1 den Brechungsexponenten; denn es ist

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}. \qquad (8)$$

Der bei der betreffenden Temperatur gefundene Brechungsexponent (n_t) wurde auf 17,0° C reduziert nach der Formel:

$$n_{17} = n_t + 0{,}020\,(t - 17). \qquad (9)$$

Die Auswertung der Formeln (8) und (9) zeigt die Tabelle III.

Die in Wasser aufgenommenen Abschnitte ($k = 2, 3, 4$) liefern nun auch das Dämpfungsdekrement infolge der Absorption im Dielektrikum. Als Verstimmung hat man am $k$ten Bauch folgende Größe μ zu rechnen

$$\mu = \frac{2d}{\lambda_0 + (k-1)\lambda_1}. \qquad (10)$$

Unter Benutzung der Bjerknesschen Formel (2) ergeben sich dann die Dämpfungen γ_2, γ_3, γ_4. Nun ist

$$\frac{(k-1)\lambda_1}{\lambda_0 + (k-1)\lambda_1}(\gamma_w - \gamma_B) = \gamma_k - \gamma_1, \qquad (11\,\mathrm{a})$$

also

$$\gamma_w = (\gamma_k - \gamma_1)\left(\frac{n}{k-1} + 1\right) + \gamma_B. \qquad (11)$$

Hierin haben γ_k, γ_B dieselbe Bedeutung wie in der Formel für Luft. Der kleine weiter oben erwähnte Fehler in der Bestimmung der Brückenabsorption γ_B hat, wie diese Formel deutlich zeigt, wenig Einfluß auf die Bestimmung der γ_w-Werte.

Da ich mit sehr wenig gedämpften Schwingungen und mit genügend großen Intensitäten arbeitete, zeigten alle Meßpunkte der Resonanzkurven in Wasser einen glatten Verlauf und gestatteten es bis zu $k = 2$, 3 bzw. 4 γ_w einwandfrei zu ermitteln. Die Intensitäten der Resonanzkurven der folgenden Abschnitte begannen schon so schwach zu werden, daß Willkürlichkeiten in ihrer Auswertung nicht auszuschließen gewesen wären. Aus γ_w läßt sich nun der Absorptionsindex $\varkappa'$ errechnen, denn es ist $\varkappa' = \dfrac{\gamma_w}{2\pi}$.

Da vor und nach jeder Meßreihe die Leitfähigkeit gemessen wurde, kann man aus $\varkappa'$ auch den Absorptionsindex des reinen Wassers $\varkappa$ berechnen. Es ist nämlich der Absorptionsindex $\varkappa_S$ einer Salzlösung von der Leitfähigkeit l

$$\varkappa_S = \frac{l \cdot 30 \cdot \lambda_1}{n}. \qquad (16)$$

Man erhält also den Absorptionsindex des reinen Wassers unter Benutzung von (16) nach der Formel:

$$\varkappa = \varkappa' - \varkappa_S. \qquad (17)$$

Die Auswertung dieser beiden Formeln für meine Messungen zeigt die Tabelle IV.

Tabelle IV.

λ_0	λ_1	n_{17}	$\varkappa'$	$l \times 10^{-6}$	$\varkappa$
645,24	72,00	8,965	0,0103	25,0	0,0097
618,00	68,36	8,964	0,0118	24,0	0,0113
607,52	67,48	8,963	0,0124	23,5	0,0119
584,18	65,02	8,959	0,0132	24,7	0,0127
566,12	62,88	8,963	0,0139	40,5	0,0130
558,86	62,28	8,961	0,0085	42,5	0,0076
550,68	60,96	8,987	0,0048	27,2	0,0043
549,60	60,78	9,006	0,0048	28,3	0,0042
546,76	60,62	8,986	0,0103	28,0	0,0097
538,98	60,06	8,922	0,0162	42,5	0,0153
528,86	59,44	8,881	0,0311	42,8	0,0303
521,16	59,10	8,820	0,0412	43,9	0,0403
512,56	57,90	8,868	0,0334	42,3	0,0326
506,52	56,48	8,954	0,0253	43,7	0,0244
498,76	55,60	8,955	0,0170	39,0	0,0163
489,52	54,31	8,959	0,0140	39,2	0,0133
477,32	53,22	8,957	0,0148	39,5	0,0141
454,76	50,60	8,969	0,0179	40,8	0,0172
434,62	48,36	8,965	0,0223	44,5	0,0216
422,96	47,00	8,969	0,0201	45,5	0,0194
415,88	46,02	8,999	0,0149	46,6	0,0142
413,78	46,00	8,954	0,0413	42,3	0,0407
410,44	46,50	8,809	0,0667	43,3	0,0660
407,68	46,02	8,836	0,0270	42,6	0,0264
398,68	44,62	8,935	0,0360	40,8	0,0354
379,08	42,42	8,938	0,0322	44,1	0,0316
376,10	41,94	8,958	0,0205	25,1	0,0202
367,26	40,98	8,954	0,0206	22,1	0,0203
348,62	38,94	8,957	0,0258	23,2	0,0255
343,70	38,16	9,004	0,0270	20,1	0,0268
338,50	37,46	9,016	0,0153	20,4	0,0151
336,82	37,42	8,994	0,0135	20,4	0,0133
328,68	36,76	8,948	0,0339	20,4	0,0336
319,52	35,88	8,903	0,0419	23,4	0,0416
311,04	35,18	8,832	0,0440	23,6	0,0437
308,20	34,66	8,885	0,0185	21,4	0,0183
299,36	33,48	8,943	0,0150	19,9	0,0148
273,34	30,42	8,969	0,0302	18,4	0,0300

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigt die nächste Fig. 4.

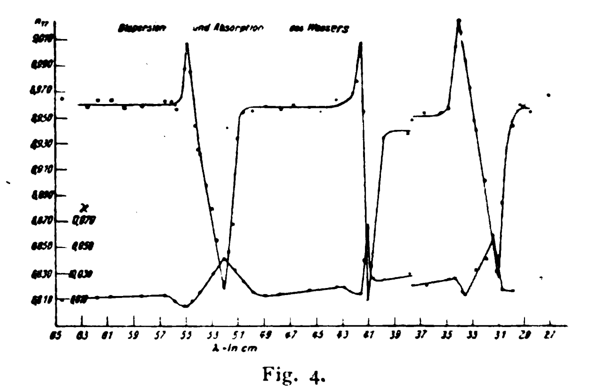


Fig. 4.

Die Kurve des Brechungsexponenten zeigt deutlich drei Streifen anomaler Dispersion in dem untersuchten Intervall, und zwar bei

$$\lambda = 549 - 521;\ \lambda = 417 - 411;$$
$$\lambda = 341 - 312\ \mathrm{mm}.$$

Der Charakter dieser Dispersionsstreifen ist bei dem ersten und dritten ziemlich der gleiche; der zweite hingegen fällt wegen der schnellen Abnahme der n-Werte nach kürzeren Wellen besonders auf. In einem Bereich von wenigen Millimetern fällt hier der Brechungsexponent von $n = 9{,}0$ bis 8,8, während bei den beiden anderen Dispersionsstreifen bei etwa gleicher Differenz des Brechungsexponenten die Breite 30 mm beträgt. Man muß also bei der Untersuchung des Wasserspektrums die Messungen sehr dicht legen, um den wirklichen Verlauf des Brechungsexponenten einwandfrei feststellen zu können. Aus diesem Grunde darf man schwerlich mit Rückert[1]) sagen, daß der Brechungsexponent in dem von ihm untersuchten Bereich den innerhalb der Fehlergrenzen konstanten Wert von $n = 8{,}964$ hat. Nach kürzeren Wellen hin haben die Arbeiten von Möbius und Eckert das Vorhandensein weiterer, starker Dispersionsstreifen gezeigt. Es ist wohl kaum anzunehmen, daß die von mir gefundenen Dispersionsstreifen die letzten nach längeren Wellen hin sind, und ich glaube sicher, daß sie in jenem Teil des Spektrums noch zu konstatieren sind. Im übrigen sei hier betont, daß sich meine Messungen sowohl in bezug auf die Dispersion als auch auf die Absorption sehr gut an die Rückertschen Messungen anschließen.

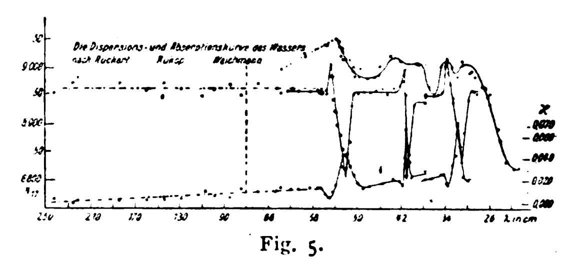


Fig. 5.

Die Fig. 5 zeigt die Stellung meiner Meßresultate innerhalb der bereits vorliegenden von Rückert und Rukop. Die Rukopschen n-Werte sind meines Erachtens sowohl etwas nach größeren Werten als auch nach kürzeren Wellen verschoben. Schon Rückert bespricht die mögliche Ursache der Diskrepanz seiner Messungen gegen die von Rukop. In der Rukopschen Anordnung durchsetzten die Lecherschen Drähte eine dünne Ebonitplatte, ehe sie in das Wasser eintraten. Da nun Ebonit bei den benutzten Wellenlängen verhältnismäßig stark absorbiert, so wäre es nicht ausgeschlossen, daß durch die Zwischenschaltung der Ebonitplatte die Länge der gemessenen Abschnitte beeinflußt wurde. Des weiteren scheint mir auch die Brückenverkürzung nicht genau genug bestimmt worden zu sein. Aus diesen Gründen erscheint das Rukopsche Spektrum des Wassers etwas verwaschen. Man kann aber auch in der von Rukop gefundenen Kurve deutlich drei Streifen anomaler Dispersion erkennen, die allerdings gegen die von mir gefundenen Streifen jedesmal um etwa 2 cm nach den kürzeren Wellen hin verschoben erscheinen. Hierbei möchte ich es aber noch offen lassen, ob nicht der letzte und größte Abfall der Rukopschen Messungen zu zwei getrennten Dispersionsstreifen gehört. Hier werden hoffentlich bald weitere Arbeiten Klarheit schaffen. Der von mir angefertigte Satz von Oszillatoren gestattet es, das Spektrum mit großer Exaktheit bei fast monochromatischer Strahlung bis zu 12 cm Wellenlänge zu verfolgen, so daß der Anschluß bis an die Eckertschen optischen Messungen mit Hilfe der Drahtwellen zu ermöglichen ist. Auch die Ursache, welche die Verschiebung der Rukopschen Streifen gegenüber den von mir gefundenen hervorgebracht hat, muß durch weitere Untersuchungen erst aufgeklärt werden. Möglicherweise sind es die Temperaturunterschiede. Die Rukopschen Messungen sind durchweg bei ungefähr 19° bis 20° angestellt, meine hingegen bei ungefähr 16°.

Gewissermaßen die „Probe auf das Exempel" der Dispersionsmessungen liefert die Feststellung der selektiven Absorption. Meine Absorptionskurve bestätigt die Resultate der Dispersion auf das beste. Allerdings läßt sich das Fallen des Absorptionsindex vor jedem anormalen Anstieg schwer erklären. Wahrscheinlich bedürfen die von mir benutzten Formeln, die nur Näherungsformeln sind, noch einer Korrektur. Es kann sein, daß die sehr starke Dispersion den Absorptionskoeffizienten ein wenig fälscht; denn die Formeln sind unter der Annahme eines konstanten Brechungsexponenten aufgestellt. Trotzdem kann man aber mit voller Sicherheit behaupten, daß ein Streifen anomaler Dispersion zugleich immer ein Absorptionsstreifen, eine Absorptionsbande, ist.

Resultate.

Zusammenfassend läßt sich von der vorliegenden Arbeit sagen:

1. Die Methode des Paralleldrahtsystems ist so umgestaltet worden, daß sie eine Bestimmung des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten mit einer Genauigkeit von 0,5 ‰ gestattet.
2. Es sind Erreger konstruiert worden, die es gestatten, eine fast monochromatische Strahlung bis zu $\lambda = 12$ cm mit genügender Intensität zu erzeugen. Die Resonanzkurven zeigen einen äußerst glatten Verlauf und

1) Rückert, l. c. 175.

ein Dekrement, das im allgemeinen 0,04 nicht übersteigt. Die Breite der Spektrallinie liegt dementsprechend nur wenig über $\Delta\lambda = 1$ mm.

3. Im Spektrum des Wassers wurden im Intervall von $\lambda = 65$ cm bis $\lambda = 27$ cm drei Streifen anomaler Dispersion gefunden, die zugleich drei Absorptionsbanden sind. Die Breite der beiden äußeren Banden beträgt rund $\Delta\lambda = 3$ cm. Die mittlere Bande ist schärfer, für sie ist ungefähr $\Delta\lambda = 0{,}5$ cm.
4. Die Ergebnisse meiner Untersuchungen machen es wahrscheinlich, daß das Wasser für diese langen Wellen ein richtiges Banden-Absorptionsspektrum besitzt, das sich auch in das langwelligere Spektrum des Wassers fortsetzt. Daß Rückert keine Banden fand, kann sehr wohl seine Ursache darin haben, daß seine Meßpunkte zu weit auseinander liegen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. G. Mie, für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie vor allem für die liebenswürdige Beratung bei ihrer Ausführung, meinen ergebensten Dank auszusprechen. Auch Herrn Professor Dr. Herweg danke ich für das meiner Arbeit allzeit entgegengebrachte Interesse und für die mir erteilten Ratschläge.

Diskussion.

Rubens: Ich möchte dem Herrn Vortragenden meinen herzlichen Glückwunsch zu diesen schönen Experimentaluntersuchungen aussprechen. Bringt der Herr Vortragende die beobachteten Absorptionslinien mit dem Vorhandensein von Mehrfachmolekülen im Wasser zusammen?

Weichmann: Darüber sind noch keine Untersuchungen angestellt.

Debye: In Flüssigkeiten wie Wasser sind die Moleküle zum großen Teil zu zwei- und dreifachen Molekülen gebunden. Meiner Meinung nach sollten sich die Eigenschwingungen dieser Gebilde im fraglichen Spektralbereich als Absorptionsstreifen geltend machen. Auch bei Flüssigkeiten wie Glyzerin müßte diese Erscheinung auftreten, während sie z. B. bei Äther nicht auftreten dürfte.

Mie: Die Stelle, wo der Brechungsexponent definitiv auf kleine Werte heruntersinkt, liegt bei wesentlich kürzeren Wellen als denen, die Herr Weichmann untersucht hat, nämlich bei wenigen Zentimeter Wellenlänge, in dem von Herrn Fr. Eckert untersuchten Gebiet.

Karl F. Herzfeld (München), Die Breite der Absorptionsbanden bei den seltenen Erden. (Verkürzt vorgetragen.)

1. Die Tatsachen und ihre Deutung. Es ist schon lange bekannt, daß die Salze der seltenen Erden in gelöstem und in festem Zustand ein Absorptionsspektrum mit verhältnismäßig schmalen Banden (Breite ∼ 5 ÅE.) geben. J. Becquerel[1]) hat weiter gefunden, daß im festen Zustand die Bandenbreite mit sinkender Temperatur stark abnimmt, und zwar von Zimmertemperatur bis -188^0 ziemlich genau proportional $\sqrt{T}$. Betrachtet man die Photographien solcher Spektren, so hat man ganz den Eindruck eines Linienspektrums, in welchem die Linien durch einen äußeren Einfluß stark verbreitert sind. Als solchen wird man in Anlehnung an Debye und Holtsmark[2]) elektrische Felder annehmen, die einen Starkeffekt hervorrufen und so die Linien verbreitern. Doch liegen die Verhältnisse hier anders als in dem von diesen Forschern betrachteten Fall der Gase. Das elektrische Feld hängt vom mittleren Abstand der Teilchen ab und dieser ist bei Gasen nur vom Druck abhängig, ändert sich aber mit der Temperatur praktisch nicht. Anders hier. Im Ruhezustand ist das Feld am Ort des Teilchens Null, da wir annehmen, daß die Kristalle durch elektrostatische Kräfte zusammenhalten und die Gleichgewichtsbedingung die Feldstärke Null verlangt. Sobald die Teilchen aber über die Ruhelage hinausschwingen, kommen sie in Gebiete mit elektrischen Feldern, und zwar in desto stärkere Felder, je höher die Amplitude, also die Temperatur ist; desto größer wird also der Starkeffekt und damit die Linienbreite. Diese Überlegungen wollen wir in Formeln kleiden, begnügen uns aber mit ungefährer Rechnung.

2. Körper mit einer Schwingungszahl. Wir denken uns ein Kristallgitter, aufgebaut aus Ionen und betrachten ein Metallion, das etwa in der x-Richtung schwingen möge. Sein Potential sei in der Ruhelage angenähert gegeben durch

$$\varphi_0 = e\left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r^n}\right), \qquad (1)$$

wo r der Abstand zum nächsten Ion sein möge.

Das elektrostatische Gitterpotential am Orte x des schwingenden Ions entwickeln wir in eine Reihe nach x, der Abweichung von der Ruhelage

$$\varphi = \varphi_0 + x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=0} + \dots \qquad (2)$$

1) J. Becquerel, z. B. diese Zeitschr. 8, 629, 1907.
2) P. Debye, diese Zeitschr. 20, 160, 1919; J. Holtsmark, ebenda S. 162.



und beachten, daß

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

ist (Gleichgewichtsbedingung).

Die elektrische Feldstärke wird dann

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=0}. \qquad (3)$$

Wir ersetzen nun im folgenden $-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0$ durch $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2}$, was in der Größenordnung sicherlich richtig ist und gewinnen aus (1) und der Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{1}{e}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \frac{a}{r^2} - \frac{nb}{r^{n+1}} = 0$$

$$\mathfrak{E}_x = +x\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} = -x\cdot\frac{(n-1)ae}{r^3}. \qquad (4)$$

Hierfür können wir unter Einführung der Kompressibilität $K = -\frac{18r}{e\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2}}$ auch schreiben

$$-\mathfrak{E}_x = \frac{x}{e}\frac{18r}{K}. \qquad (5)$$

Wir müssen nun noch den Ausschlag x durch die Energie der Schwingung ausdrücken.

Aus (2) folgt die potentielle Energie der Schwingung zu

$$e\frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0.$$

Diesen Wert setzen wir $\frac{1}{2}AU$, wo U die Gesamtenergie der Schwingung und A einen Zahlenfaktor bedeutet, der vom Verhältnis des gewählten x-Wertes zur Maximalamplitude, also von der Phase abhängt; er wird 2, wenn man x gleich der Amplitude wählt, 1 für $x^2 = \overline{x^2}$. Das heißt, sein Wert hängt davon ab, wie man die Breite der Bande definiert. Im nächsten Abschnitt werden wir die Schwingungszahl ν brauchen, wir erhalten sie aus der potentiellen Energie, die $4\pi^2 m\frac{x^2}{2}\nu^2$ ist.

$$e\frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \frac{A}{2}U = \frac{4\pi^2}{2}m x^2 \nu^2; \qquad (6)$$

daraus

$$x = \sqrt{\frac{AU}{e\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}}, \qquad \nu^2 = \frac{e}{4\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=0}. \qquad (7)$$

Daraus folgt nach (4) und (5)

$$-\mathfrak{E}_x = \sqrt{\frac{AU}{e}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x=0}} = \frac{1}{e}\sqrt{AU\frac{18r}{K}} \qquad (8)$$

$$= \sqrt{AU\frac{(n-1)a}{r^3}}.$$

Für die Energie setzen wir

$$U = kT = 1{,}35\cdot 10^{-16}T. \qquad (6')$$

Für r schreiben wir $r'\,10^{-8}$ cm, für K $K'\,10^{-12}$ $e = 4{,}77\cdot 10^{-10}$ und multiplizieren zur Umrechnung auf Volt mit 300. Dann finden wir:

$$\mathfrak{E}_{\text{Volt}} = 3{,}06\cdot 10^6\sqrt{A\frac{r'}{K'}T} \qquad (9)$$

$$= 3{,}5\cdot 10^6\sqrt{(n-1)A\frac{a}{r'^3}T}.$$

Die Bandenbreite erhält man, wenn man mit S den Starkeffekt bezeichnet, der in Å.-E. dem Feld $10^6\,\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ entspricht, zu

$$\Delta\lambda = 3{,}06\,S\sqrt{A\frac{r'}{K'}T} = 7S\sqrt{(n-1)A\frac{a}{r'^3}T}. \qquad (10)$$

Da die erste Wurzel die Größenordnung 10 hat, entspricht der Bandenbreite von 5 Å.-E. ein Starkeffekt von der Größenordnung 1 Å.-E. für $6\cdot 10^6\,\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$, was ganz vernünftig ist. Auch die Temperaturabhängigkeit stimmt genau mit der von Becquerel gefundenen überein. Da hier die Schwingung selbst maßgebend ist, muß eine Nullpunktsenergie erkennbar sein. Wir gehen im folgenden daher zur Behandlung eines Debyeschen Körpers unter besonderer Berücksichtigung tiefer Temperaturen über.

3. Debyescher Körper. Nullpunktsenergie. Das betrachtete Ion stehe unter dem gleichzeitigen Einfluß zahlreicher Schwingungen. Seine mittlere Amplitude ist gegeben durch

$$\overline{x^2} = \sum \overline{x_\nu^2}, \qquad (11)$$

wo $\overline{x_\nu^2}$ die mittlere von der Frequenz ν herrührende Amplitude ist. Diese findet man aus

$$4\pi^2\overline{x_\nu^2} = \frac{U_\nu}{\nu^2 mN}. \qquad (12)$$

Die Zahl der Schwingungen im Intervall $d\nu$ ist

$$9N\frac{\nu^2 d\nu}{\nu^3_{\max}},$$

also

$$4\pi^2\overline{x^2} = \frac{9}{\nu^3_{\max}}\frac{1}{m}\int_0^{\nu_{\max}} U_\nu\, d\nu. \qquad (13)$$

Für U_ν setzen wir

$$U_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} + B\frac{h\nu}{2}.$$

B ist bei Vorhandensein von Nullpunktsenergie

1, sonst 0. Mit der Abkürzung $y = \frac{h\nu}{kT}$ wird (13)

$$4\pi^2 \overline{x}^2 = \frac{9}{m\nu^3_{max}} \left\{ \frac{(kT)^2}{h} \int_0^{y_{max}} \frac{y\,dy}{e^y - 1} + B \frac{h\nu^2_{max}}{4} \right\}. \quad (14)$$

Das wird für hohe Temperaturen (kleine y)

$$4\pi^2 \overline{x}^2 = \frac{9}{m\nu^3_{max}} \left\{ kT\nu_{max} + (1 - B) \frac{h\nu^2_{max}}{4} \right\}$$

$$= \frac{9}{m} \left\{ \frac{kT}{\nu^2_{max}} + (1 - B) \frac{h}{4\nu_{max}} \right\},$$

d. h. (bis auf den Zahlenfaktor) für $B = 1$ (Nullpunktsenergie) mit (6), (6') übereinstimmend.

Für tiefe Temperaturen ($kT < h\nu$) erhalten wir

$$4\pi^2 \overline{x}^2 = \frac{9}{m} \left\{ \frac{(kT)^2}{h\nu^3_{max}} + B \frac{h}{\nu_{max}} \right\}. \quad (15)$$

Hier müßte sich experimentell über das Vorhandensein einer Nullpunktsenergie entscheiden lassen[1]).

4. Andere Anwendungen. a) Lösungen: Da in Lösungen die Bandenbreite von der gleichen Größenordnung ist wie im festen Salz, kann man schließen, daß auch die mittlere Feldstärke im Wasser von der Größenordnung $5 \cdot 10^7 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ ist. Doch sind die Holtsmarkschen Formeln auf diesen Fall wohl kaum anwendbar, so daß sich über die Moleküle des Lösungsmittels noch nichts aussagen läßt. Man kann aber den Grund für den Einfluß erkennen, den Änderungen des Lösungsmittels auf das Aussehen der Banden haben.

b) Phosphore: Die Breite der Phosphoreszenzbanden hat schon Herr Lenard[2]) auf genau die gleichen Ursachen zurückgeführt und hervorgehoben, daß die große Breite dieser Banden auf die besonders starke Lockerung des maßgebenden Elektrons (d. h. in unserer Terminologie besonders großen Starkeffekt) zurückzuführen ist. Auch das Schmälerwerden bei sinkender Temperatur hat er gefunden und gedeutet.

Zusammenfassung: Die Breite der Absorptionsbanden bei festen Salzen der seltenen Erden wird auf Starkeffekt zurückgeführt, der durch das beim Schwingen erfolgende Eindringen in die elektrischen Felder der Nachbarionen hervorgerufen wird. Es ergibt sich die richtige Temperaturabhängigkeit und Größenordnung der Bandenbreite. Beobachtungen bei sehr tiefen Temperaturen könnten über die Anwesenheit von Nullpunktsenergie Aufschluß geben. In Wasser läßt sich die Stärke des elektrischen Feldes schätzen.

1) Neuere Versuche von J. Becquerel u. H. Kamerlingh Onnes. Leid. Comm. **103**, 1908 scheinen für ihr Vorhandensein zu sprechen. Anmerkung bei der Korrektur.

2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. **15**, 455, 1904; P. Lenard, H. Kamerlingh Onnes u. W. E. Pauli, Leid. Comm. **111**, 1909; P. Lenard, Ann. d. Phys. **31**, 666, 1910; [P. Borissow, Ann. d. Phys. **42**, 1321, 1913; J. Becquerel, Le Radium **7**, 236, 1910. Anmerkung bei der Korrektur.]

Diskussion.

Debye: Die Prinzipien der Holtsmarkschen Theorie sind wohl ohne weiteres auch für Flüssigkeiten zu verwerten. Die Endformel für die Verbreiterung dürfte in diesem Falle der Gaußschen Fehlerkurve entsprechen.

Swinne: Bereits Herr Borissow, ein Schüler von Herrn Lenard, hat 1913 den Temperatureinfluß auf die Breite der Phosphoreszenzbanden an Wismutsulfidphosphoren im Bereich von — 180° bis 400° quantitativ untersucht. Herr Lenard hat übrigens seine sogenannte Nähewirkung stets auf elektrische Feldkräfte zurückgeführt.

L. Grebe und H. Konen (Bonn), Bandenspektra von Isotopen.

Bereits ehe der Begriff der isotopen Elemente durch Soddy und Fajans seine volle Klärung gefunden hatte, sind einige vergebliche Versuche gemacht worden, Verschiedenheiten in den Linienspektren isotoper Elemente aufzufinden[1]). Nach der Aufstellung des genannten Begriffes lag es außerordentlich nahe, auf optischem Wege nach Unterschieden von Isotopen zu suchen. Solche Versuche sind auch von mehreren Seiten[2]) besonders an Bleiisotopen gemacht worden, ohne daß in älterer Zeit irgend eine Verschiedenheit gefunden worden wäre. Nachdem man zunächst nach Unterschieden in der Zusammensetzung und Intensität der Linienspektra gesucht hatte, wandte man sich der Frage der Wellenlängengleichheit der Linienspektra von Isotopen zu. So haben insbesondere Aronberg[3]) und weiterhin Merton[4]) eine kleine Differenz der Wellenlänge der Flammenlinie λ 4058 im gewöhnlichen Blei gegenüber

1) A. S. Russel and R. Rossi, Proc. Roy. Soc. **87**, 478, 1912, Thorium und Ionium; F. Exner und E. Haschek, Wien. Ber. IIa, **121**, 1075, 1912.

2) F. Soddy and H. Hyman, Trans. Chem. Soc. **105**, 1402, 1914; Th. W. Richards and M. Lembert, Journ. Amer. Chem. Soc. **36**, 1329, 1914; O. Hönigschmid und St. Horovitz, Wien. Ber. IIa, **123**, 1635, 1914; Th. Merton, Proc. Roy. Soc. (A) **91**, 198, 1914; vgl. auch F. Aston, Rep. Brit. Ass. 1913, **403**.

3) L. Aronberg, Astrophys. Journ. **47**, 96, 1918.

4) Th. Merton, Proc. Roy. Soc. (A) **96**, 388, 1920.

Uranblei und Thoriumblei zu finden geglaubt. Indem wir die Frage der theoretischen Begründung einer solchen Differenz hier ganz beiseite lassen, bemerken wir, daß die von Merton gefundene Differenz, wie auch die von Aronberg gefundene, nämlich 0,005 A.-E. (Uranblei—Blei), 0,002 (Blei—Thoriumblei) bzw. 0,004 (Uranblei—Blei) an der Grenze liegen, bei der bekanntlich eine Reihe von Fehlerquellen bei der Messung von Bogenlinien berücksichtigt werden müssen. Dies gilt insbesondere von der wegen der Spärlichkeit des Materials jedesmal benutzten Linie λ 4058 des Bleis, die sich nicht nur stark verbreitert, sondern auch zusammengesetzt ist, ohne daß über die Zahl und Lage der Komponenten oder ihr Verhalten unter verschiedenen Umständen volle Klarheit herrschte[1]). Die von Aronberg und Merton gefundenen Differenzen müssen daher als sehr zweifelhaft bezeichnet werden und die Hoffnung Mertons, „daß die spektroskopische Untersuchung sich als wertvolle Waffe bei Inangriffnahme des Problems der isotopen Elemente bewähren werde“, jedenfalls soweit die Linienspektra in Frage kommen, erscheint reichlich kühn. Daß mit den gegenwärtigen Mitteln auch im Bereiche der Röntgenspektren kein Unterschied zwischen Blei und Uranblei zu finden ist, haben außer Rutherford[2]) Siegbahn und Stenström[3]) sowie Takeo Shimizu[4]) gezeigt.

Aussichtsvoller erschien uns, schon vom theoretischen Standpunkte, die Untersuchung der Bandenspektra. Während wir mit der Verfolgung dieses Gedankens beschäftigt waren, erschienen eine Reihe von Arbeiten über ultrarote Bandenspektra, und wir erhielten Mitteilungen von Herrn Kratzer, die zeigten, daß unabhängig von uns bereits von anderer Seite der gleiche Weg eingeschlagen war. Ziemlich gleichzeitig haben Loomis[5]), Kratzer[6]) und Haas[7]) auf theoretisch zu erwartende Unterschiede in der Wellenlänge der Linien der Serien in den Bandenspektren hingewiesen, und insbesondere haben Loomis und Kratzer die ultraroten Absorptionsspektra der Halogenwasserstoffverbindungen im Sinne ihrer Theorie gedeutet. Ohne die Richtigkeit dieser Deutung etwa bestreiten zu wollen, muß doch darauf aufmerksam gemacht werden, daß infolge der relativ geringen Auflösung, die bei radiometrischen Untersuchungen ultraroter Spektra zur Verfügung steht, die Erkenntnis von Feinstrukturen bzw. engen Doppellinien mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist. Dies zeigt sich an den neuesten Resultaten einer Untersuchung der Absorption des HCl von Colby und Meyer[1]), die mit verbesserten Hilfsmitteln an der gleichen Stelle wie die Untersuchung von Imes vorgenommen ist und nur zweifelhafte Andeutungen von Doppellinien liefert. Außerdem kann die Frage mit Sicherheit erst dann entschieden werden, wenn es gelingt, getrennte Isotopen zu untersuchen.

Unter diesen Umständen gewinnt die Untersuchung der Bandenspektra getrennter Isotopen im Bereich des optischen Spektrums ein besonderes Interesse. Das Blei zeigt zwischen λ 6700 und 3600 ein nach Rot abschattiertes Bandenspektrum, das z. B. als Photographie von Hagenbach und Konen[2]) sowie Eder und Valenta[3]) publiziert und von Lamprecht[4]) zwischen 5700—5800 sowie 5468—5623 auf seine Struktur untersucht worden ist. Dieses Spektrum besteht aus einer ungeheuren Anzahl von Einzellinien, die ihrer theoretischen Entwirrung im Sinne der heutigen Theorie noch harren, übrigens bei Anwendung einer Auflösung von etwa 100000 weitgehend aufgelöst sind. Wie von Lamprecht an den beiden von ihm untersuchten Banden gezeigt worden ist und im übrigen der Augenschein lehrt, sind innerhalb jeder Bande eine Anzahl Serien zu erkennen, über deren Verhalten wir uns weitere Mitteilungen vorbehalten. Man erhält das Spektrum in der Flamme sowohl mit reinem Metall wie unter Anwendung verschiedener Bleiverbindungen, z. B. des Superoxyds, Chlorids, Sulfats. Aus diesem Grunde wird es von Kayser[5]) dem Metall zugeschrieben, zumal auch nach den Angaben von Stark und Küch[6]) der Vakuumbogen (Metalldampflampe) das gleiche Spektrum zu liefern scheint. Ein zwingender Beweis der Zugehörigkeit eines Bandenspektrums zu einem bestimmten Element oder einer bestimmten Verbindung ist bekanntlich sehr schwer zu erbringen.

---

1) L. Janicki, Ann. d. Phys. (64) **29**, 833, 1909; Wali-Mohammad, Astrophys. Journ. **39**, 189, 1914; L. Aronberg, Astrophys. Journ. **47**, 96, 1918.

2) E. Rutherford and N. da Andrade, Phil. Mag. (6) **27**, 854, 1914.

3) M. Siegbahn und W. Stenström, diese Zeitschr. **18**, 547, 1917.

4) W. Duane and Takeo Shimizu, Proc. Nat. Akad. **5**, 198, 1919.

5) F. W. Loomis, Astrophys. Journ. **52**, 248, 1920.

6) A. Kratzer, Zeitschr. f. Phys. **3**, 460, 1920; ebenda **4**, 476, 1921.

7) A. Haas, Zeitschr. f. Phys. **4**, 38, 1921.

1) W. F. Colby and Ch. F. Meyer, Astrophys. Journ. **53**, 300, 1921.

2) A. Hagenbach und H. Konen, Atlas, 1905, Taf. 119, 120.

3) J. M. Eder und K. Valenta, Atlas typischer Spektra, 1911, Tafel 2, 3, 5, 7, 8.

4) H. Lamprecht, Diss. Bonn, 1911, Zeitschr. wiss. Phot. **10**, 16, 33, 1911.

5) H. Kayser, Handbuch, Bd. 6, 270.

6) J. Stark und R. Küch, diese Zeitschr. **6**, 438, 1905.

Insoweit besteht natürlich auch bezüglich des von uns mittels Bleichlorids hergestellten Spektrums eine gewisse Unsicherheit. Wir sind indes auf Grund der uns bekannten Tatsachen der Ansicht, daß das Spektrum in der Tat dem Bleimetall selbst angehört.

Wir haben nun das genannte Bandenspektrum einmal mit gewöhnlichem und dann mit Uran-Bleichlorid erzeugt, welch letzteres uns von Herrn Hahn und Frl. Meitner in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt worden war. Es handelte sich um reines Uranblei-Chlorid, dessen Metall nach einer Bestimmung von Hönigschmid ein Atomgewicht von 206,06 besitzt. Da die uns zur Verfügung stehende Menge naturgemäß nur gering war, andererseits das gewöhnlich benutzte Verfahren der Erzeugung von Bandenspektren in Flammen erhebliche Substanzmengen verbraucht, so handelte es sich darum, ein Verfahren zu finden, das mit wenig Material auskommt und doch für Spektra großer Dispersion ausreicht.

Nach mannigfachen Vorversuchen zeigte sich, daß man mittels einiger Kunstgriffe zum Ziel kommt, unter denen die Benutzung eines kleinen Lichtbogens geringer Stromstärke und hoher Spannung erwähnt sein möge (440 Volt, $^1/_2$ Amp.). Wir benutzen dabei die erste Ordnung eines Gitters größter Art und beschränken uns vorläufig auf den am besten photographierbaren Teil des Spektrums. Dieses besteht neben den mäßig verbreiterten Bogen- und Flammenlinien des Bleis aus dem sehr vollständig entwickelten Bandenspektrum neben den Linien einiger Verunreinigungen, insbesondere des Kalziums. Das Bleichlorid befand sich auf einer passend gestalteten Kohleelektrode; als zweite Elektrode diente ein Platinstab. Platinlinien haben wir nicht bemerkt. Zur Ausmessung dienten die Linien des Eisenspektrums, das mit allen notwendigen Vorsichtsmaßregeln aufgenommen wurde. Die Linien der Verunreinigungen dienten zur Kontrolle.

Die Ausmessung aller Linien des Bandenspektrums stellt eine ungeheure Arbeit dar, die zunächst nicht lohnend erscheint. Wir haben immerhin die Ausmessung und Analyse größerer Teile in Angriff genommen; über das Ergebnis wird später zu berichten sein. Inzwischen haben wir ausgewählte Teile untersucht, in denen einerseits der Serienbau deutlich hervortrat, andererseits eine völlige Auflösung den Vergleich beider Spektra ermöglichte. Da wir bei dieser vorläufigen Durchmusterung keine Nullstellen oder symmetrische Anomalitäten bemerkt haben, so ist allerdings eine Ermittlung der Ordnungszahlen bisher nicht möglich gewesen. Indessen besteht nach dem ganzen Verhalten der von uns untersuchten Linien kein Zweifel, daß es sich um hohe Ordnungszahlen handelt.

Der direkte Vergleich der Bandenspektra von gewöhnlichem Bleichlorid (Blei) und Uranblei zeigt zunächst keine Unterschiede im Aufbau und in der Intensität. Dagegen besteht kaum ein Zweifel, daß die Linien im Spektrum des gewöhnlichen Bleis weniger scharf sind als die Linien des Uranbleis. Wir haben von beiden Bleisorten eine ganze Anzahl Aufnahmen hergestellt und konnten uns auch durch die Kritik unbefangener Beobachter, denen die Herkunft der Platten nicht bekannt war, von der Richtigkeit unserer Auffassung betreffs der Schärfe der Linien überzeugen.

Die Ausmessung ergibt nun eine charakteristische Differenz der Wellenlänge in dem Sinne, daß die Linien des gewöhnlichen Bleis bei längeren Wellen als diejenigen des Uranbleis liegen, also im umgekehrten Sinne, wie die von Merton und Aronberg angegebene Verschiebung der Linienspektra. Bei den bisher gemessenen Linien ergab sich eine mittlere Differenz von etwa $^{50}/_{1000}$ A.-E. Bei einzelnen Linien kommen Abweichungen bis zu $^{2}/_{100}$ vor, über deren Realität wir vorläufig keine Ansicht äußern möchten, da der Charakter der einzelnen Linien sehr verschieden ist. Es kann indes kein Zweifel über die Realität der mittleren Verschiebung bestehen, die weit außerhalb der möglichen Fehlergrenzen liegt. In der folgenden Tabelle ist eine Probe der Messungen wiedergegeben:

Uran-Blei	gew. Blei	Differenz
4257,690	748	+ 58
4258,834	886	+ 52
4259,900	965	+ 65
4262,156	211	+ 65
4263,319	375	+ 56
4264,480	540	+ 60
4265,674	723	+ 49
4266,915	952	+ 37
4268,112	163	+ 51
4269,367	425	+ 58
4270,638	697	+ 59
4273,226	277	+ 51
4274,543	599	+ 52
4275,896	953	+ 57
4277,261	293	+ 32
4278,621	684	+ 63
4280,026	094	+ 58
4281,458	510	+ 62

Die angegebenen Zahlen sind die Mittelwerte aus jedesmal einer größeren Zahl von Messungen an verschiedenen Platten, und sie sind unabhängig von uns beiden gemessen, im allgemeinen mit einem mittleren Fehler von wenigen Tausendstel. Als Mittelwert ergibt sich, wie bereits be-

merkt, eine Verschiebung von 55 Einheiten der dritten Stelle. Die Linien gehören einer Serie an.

Dieser Unterschied entspricht der Größenordnung nach dem Betrage, der sich aus der gegenwärtigen Bandentheorie erwarten läßt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß das Uranblei eine einheitliche Substanz darstellt, und daß die Linien des Bandenspektrums demnach von Molekülen einer Art herrühren und einfach zu erwarten sind. Anders verhält sich das gewöhnliche Blei, indem die beiden Isotopen in gleichen Mengen vorhanden sind. Geht man davon aus, daß die Banden einem Bleimolekül aus zwei Bleiatomen zuzuschreiben sind, so muß wegen der drei möglichen Kombinationen jede Linie in ein Triplet aufgespalten sein. Dies würde auch eine Erklärung für die beobachtete Unschärfe liefern, während man eine Trennung bei der benutzten Dispersion — (2,6 A.-E. pro mm) — nicht erwarten kann. Unter den drei möglichen Kombinationen der isotopen Atome ist die Kombination der beiden verschiedenen Atome die wahrscheinlichste. Sie würde der Mitte des angenommenen Triplets — und damit dem gemessenen Werte — entsprechen, und müßte wegen des größeren Trägheitsmomentes gegen die entsprechende Linie des Uranbleis nach Rot verschoben sein. Rechnet man unter dieser Voraussetzung und unter Benutzung der von Lenz[1]) angegebenen Bandenformel und der von uns gefundenen mittleren Verschiebung das Trägheitsmoment des Bleimoleküls aus, so erhält man für eine Quantenzahl 50 den Wert $8 \cdot 10^{-39}$ g · cm², also einen mit sonstigen Erfahrungen der Größenordnung nach gut stimmenden Wert.

Zusammenfassung.

Die Ausmessung ausgewählter Teile der Bandenspektra von Uranblei und gewöhnlichem Blei ergibt eine mittlere Wellenlängendifferenz von etwa 0,055 A.-E. für höhere Glieder einer ausgewählten Serie, der Größenordnung nach übereinstimmend mit der Annahme zweiatomiger Moleküle als Träger des Bandenspektrums.

Die Arbeit wird fortgesetzt.

Diskussion.

Glaser: Es ist anzunehmen, daß der ganze Betrag der Verschiebung durch das elektrische Feld des elektrischen Lichtbogens hervorgerufen wird.

Grebe: Das ist nicht möglich; elektrische Verschiebungen hätten sich bei beiden Bleiarten in gleicher Weise bemerkbar machen müssen.

Glaser: Man muß diese Frage mit größter Vorsicht behandeln. Sind die Versuche mit Gitter gemacht?

Grebe: Ja, wir haben ein großes Gitter benutzt. Die Messungen auf den verschiedenen Platten stimmen bis auf $^1/_{1000}$ Ångström überein.

Glaser: Man kann bei dem elektrischen Lichtbogen nicht die Dichte im Bogen kontrollieren. Diese variiert sehr. Die Versuche sind jedenfalls mit größter Vorsicht zu behandeln.

Grebe: Es ist ausgeschlossen, daß so große Effekte durch Nebenumstände erklärt werden können.

Kratzer: Die von Herrn Grebe angegebene Berechnung des Trägheitsmomentes hat außer der Laufzahl in der Bande die möglicherweise größere Verschiebung infolge der Kernschwingung zu berücksichtigen, die gerade im Ultrarot die meßbare Verschiebung lieferte.

Grebe: Ich habe nur die Größenordnung angegeben.

Konen: Die Differenzen lassen sich nicht auf Poleffekte zurückführen, da beide Aufnahmen unter identischen Verhältnissen gemacht sind, nur die mittleren Partien des Bogens benutzt wurden und die Poleffekte unter der hier gefundenen Größe liegen. Was die Theorie anbetrifft, so muß natürlich zunächst der feinere Bau der Banden aufgeklärt werden. Bei der großen Zahl der Linien ist eine völlige Ausmessung bisher nicht möglich gewesen. Diese ist abzuwarten, ehe eine Berechnung erfolgen kann.

Swinne: Die Bedeutung der Untersuchung der isotropen Bleispektren liegt in der dadurch wohl möglichen Klärung der Zusammensetzung des gewöhnlichen Bleies (Atomgew. — 207,12) entweder allein aus Uran *Pb* (Atomgew. — 206) und Thor *Pb* (Atomgew. — 208) oder aus einem weiteren *Pb* mit dem Atomgew. — 207.

Grebe: Das ist natürlich möglich. Wir wollen weitere Untersuchungen machen.

Swinne: Da es sich um ein Triplet handelt, kann man vermuten, daß es sich um 3 Atome handelt.

R. Ladenburg (Breslau), Die Einwirkung elektrischer Felder auf Absorptionslinien (*D*-Linien des *Na*-Dampfes).

Die Versuche, von denen hier kurz berichtet werden soll, betreffen die Frage, ob die Absorptionslinien nichtleuchtender Alkalidämpfe, speziell die *D*-Linien des *Na*, durch elektrische Felder merklich beeinflußt werden können. Sie

1) Literatur siehe: A. Sommerfeld, Atombau, 2. Aufl., 1920, S. 530ff.; A. Eucken, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 16, 361, 1920; A. Kratzer, Habilitationsschrift, München 1921.

bilden die Fortsetzung von Untersuchungen, die im Jahre 1913, kurz nach der Entdeckung der elektrischen Zerlegung der Wasserstofflinien durch J. Stark, begonnen wurden, aber dann infolge des Krieges unterbrochen werden mußten[1]). Damals zeigte sich auch in Feldern von 27000 Volt/cm keine Änderung der *D*-Linien in Absorption von 0,1 Å. Versuche von Paschen und Gerlach[2]) an der Absorptionslinie des *Hg* 2537 mit noch empfindlicheren Apparaten sowie von Mendenhall und Wood[3]) an verschiedenen scharfen Absorptionslinien fester Körper sind ebenfalls erfolglos geblieben.

Prinzipiell ist eine elektrische Einwirkung auf Absorptionslinien, das Analogon zum inversen Zeemaneffekt, aus mannigfachen Gründen von Bedeutung — ich erinnere an die hier vorgetragenen Untersuchungen der Herren Füchtbauer und Herzfeld —, allerdings ist sie gerade an den *D*-Linien auf Grund der Starkschen Versuche und der Bohrschen Atomtheorie nur in sehr starken elektrischen Feldern zu erwarten[4]), falls es überhaupt möglich ist, unerregte Atome elektrisch merklich zu beeinflussen.

Da es nunmehr gelang, in *Na*-Dampf elektrische Felder von über 150000 Volt/cm zu erreichen, wurden die Versuche mit der vortrefflichen Lummerschen Interferenzplatte des Breslauer Physikalischen Instituts wieder aufgenommen. Die Platte hat eine Länge von 30 cm und eine Dicke von 1 cm, ihr Auflösungsvermögen beträgt im Gelb etwa 0,01 Å., das Dispersionsgebiet aber nur 0,13 Å. Zur Untersuchung der *D*-Linien in Absorption wurden deshalb als „kontinuierlicher Hintergrund" *D*-Linien in Emission von geeigneter Breite verwendet, und zwar diente als Lichtquelle bei den endgültigen Versuchen eine mit transformiertem Wechselstrom betriebene, senkrecht gestellte Quarzkapillare, in der sich reines *Na* in einem Neon-Heliumgemisch befand[5]). In einem elektrischen Ofen auf geeignete Temperatur erhitzt (etwa 190° C), liefert diese Lampe helle *D*-Linien von etwa $^1/_{10}$ Å Breite. Ihr Licht wird zwischen den einander vertikal gegenüberstehenden Kondensatorplatten des gut evakuierten Absorptionsrohres hindurch, in dem reines *Na* in einem kleinen elektrischen Ofen schwach erhitzt wird, auf den Spalt des Interferenzspektroskops von Lummer-Gehrcke abgebildet[1]). Die im Kollimator parallel gerichteten Strahlen werden in einem großen Prisma spektral zerlegt und durchdringen dann die Lummersche Platte. So können die Interferenzen von D_1 und D_2 getrennt beobachtet werden. Bei einer Temperatur des Absorptionsrohrs von etwa 160° C erscheinen in den Interferenzmaxima der *Na*-Lampe mäßig scharfe Absorptionslinien.

Bei Erregen des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten des Absorptionsrohrs zeigt sich eine deutliche Verschiebung beider Absorptionslinien nach Rot. Hierzu waren Feldstärken von über 100000 Volt pro cm erforderlich[2]). Allerdings gelang es noch nicht, die hohen Felder genügend lange konstant zu erhalten, um den Effekt photographisch zu fixieren.

Eine Zerlegung der Absorptionslinien wurde bisher nicht wahrgenommen. Wahrscheinlich werden die parallel und senkrecht zum Felde schwingenden (*p*- und *s*-) Komponenten verschieden stark in gleichem Sinne verschoben, aber infolge mangelnder Auflösung bzw. zu geringer Feldstärke nicht getrennt. Denn erstens zeigt sich gleichzeitig mit der Verschiebung ein Verblassen der Absorptionslinien[3]) sowie eine stärkere Verschiebung des roten gegenüber dem violetten Rande. Zweitens ergeben die bisherigen Beobachtungen in polarisiertem Licht (die allerdings durch große Lichtschwäche der Erscheinung erschwert werden), daß die *p*-Komponente merklich stärker verschoben wird als die *s*-Komponente. Es ist geplant, diese elektrische Doppelbrechung des *Na*-Dampfes durch direkte Versuche nachzuweisen.

1) Vgl. R. Ladenburg, Schles. Ges. f. vaterländ. Kultur, Breslau. Sitzung vom 24. Febr. 1914.

2) F. Paschen u. W. Gerlach, diese Zeitschr. **15**, 489, 1914.

3) C. E. Mendenhall u. R. W. Wood, Phil. Mag. (6) **30**, 316, 1915.

4) Herr Stark teilte mir gelegentlich mit, daß nach seiner Ansicht ein Effekt an den *D*-Linien nur in Feldern über 30000 Volt/cm merklich sein dürfte.

5) Das Edelgas verdanke ich dem großen Entgegenkommen des Herrn Dr. Pollitzer von der Firma Linde, Herrn Dr. v. Angerer schulde ich herzlichen Dank für die Reinigung des Gasgemisches von fremden Beimengungen.

1) Um jederzeit die *D*-Linien der Lampe auf ihr Aussehen (speziell Selbstumkehr) zu prüfen, ehe das Licht der Lampe das Absorptionsrohr durchsetzt hat, wird ein Satz aus vier total reflektierenden, geeignet angeordneten Prismen durch einen einfachen Handgriff in den Strahlengang gebracht, so daß das Licht der Lampe um das Absorptionsrohr herum in das Spektroskop geleitet wird.

2) Die Spannung wurde von einer Influenzmaschine erzeugt und mit parallelgeschalteter Funkenstrecke gemessen, die Feldstärke aus dem Abstand der Kondensatorplatten im Absorptionsrohr berechnet, der vorläufig durch die Glaswand hindurch zu 1,9 mm bestimmt wurde. Die Genauigkeit der angegebenen Feldstärken beträgt deshalb bisher nur etwa 20 Proz.

3) Offenbar muß die Absorption an einer bestimmten Stelle geringer werden, wenn von dem auffallenden unpolarisierten Licht der Lampe eine Komponente nicht absorbiert wird. Übrigens wird die Erscheinung dadurch komplizierter, daß die *D*-Linien der Lampe bei längerem Stromdurchgang etwas Selbstumkehr zeigen, sowie dadurch, daß die Lummerplatte das durchtretende Licht bekanntlich teilweise polarisiert.

Was die Abhängigkeit von der Feldstärke betrifft, so zeigt sich der Effekt unabhängig von der Richtung des Feldes, d. h. ein Kommutieren der Spannung ändert nichts an der Erscheinung, wie offenbar erwartet werden muß. Denn ob die rechte oder linke Platte positiv geladen ist, kann natürlich den Sinn der Verschiebung nicht ändern. Wegen der Unsymmetrie des Effektes ist deshalb anzunehmen, daß der Effekt nicht der ersten Potenz der Feldstärke proportional ist. In der Tat wächst die Verschiebung rascher als die Stärke des Feldes $\mathfrak{E}$, und zwar innerhalb der bisherigen Meßgenauigkeit von etwa 20 Proz. proportional dem Quadrat von $\mathfrak{E}$. Die Verschiebung des roten Randes der D_2-Linie betrug bei 160000 Volt/cm etwa 0,02 Å[1]). Versuche an höheren Seriengliedern und an denen des *Li*, an denen ein stärkerer Effekt als an den *D*-Linien zu erwarten ist, sind in Angriff genommen.

Die Art des Effektes ist offenbar grundsätzlich verschieden von dem unvergleichlich größeren symmetrischen Starkeffekt der wasserstoff- und der wasserstoffähnlichen Linien, der der ersten Potenz der Feldstärke proportional wächst, ähnelt dagegen den ebenfalls von Stark gefundenen und von seinen Mitarbeitern Kirschbaum, Liebert, Wendt, Wetzel und Ritter näher untersuchten Erscheinungen an den Emissionslinien der Hauptserie und scharfen Nebenserie von *He*I, *Li*, *Na*, *Zn*, *Hg* sowie an einzelnen Linien des Viellinienspektrums des Wasserstoffmoleküls[2]). Speziell an den *D*-Linien und an dem 2. Glied der *Na*-Hauptserie 3303 haben Stark und Kirschbaum in Feldern von 35000 Volt/cm^{-1} eine geringe Rotverschiebung beobachtet, doch ist den dortigen Angaben nach einer späteren Bemerkung von Stark[3]) kein quantitativer Wert beizulegen, da die gemessenen sehr kleinen Komponentenabstände vielleicht durch einen systematischen Fehler (Temperaturgang während der langdauernden Belichtung oder ungleichmäßige Füllung der Gitteröffnung bei der Entwerfung der Vergleichslinien) gefälscht seien. Nach den vorliegenden Versuchen kann also noch nicht entschieden werden, ob sich Emissions- und Absorptionslinien auch im elektrischen Felde tatsächlich in allen Einzelheiten gleichmäßig verhalten.

Bemerkenswert ist es, daß W. Voigt bereits vor 20 Jahren in seiner bekannten Theorie über das elektrische Analogon des Zeemaneffektes aus der klassischen Elektronentheorie einen dem hier beschriebenen Effekt nach Art und Größe ähnlichen berechnet, — aber experimentell vergeblich gesucht hat — (äußerst geringe Rotverschiebung der *s*-Komponente, dreimal so große Verschiebung der *p*-Komponente, proportional dem Quadrat der Feldstärke), indem er die quasielastische Kraft durch den Ansatz

$$K = (k + k' r^2) \cdot r, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

erweiterte. Allerdings sind die klassischen Elektronenbewegungen zurzeit zugunsten der Bohrschen Quantenbahnen arg in Mißkredit geraten; aber vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips aus ist eine derartige Übereinstimmung von experimentellen Ergebnissen und klassischen Konsequenzen vielleicht doch von Bedeutung. Auch die reine Quantentheorie läßt im Fall wasserstoffunähnlicher Atome im wesentlichen eine unsymmetrische, dem Quadrat der Feldstärke proportionale Aufspaltung erwarten, wenigstens solange die Feldstärke klein ist gegen das Störungsfeld der inneren Elektronen. Denn nach Sommerfeld besteht die Wirkung der (elektrisch nicht beeinflußten) inneren Elektronen auf das emittierende und absorbierende „Valenzelektron" der Alkaliatome in gewisser Annäherung in einer kleinen Zentralkraft, die zur Coulombschen Anziehungskraft des Kerns als Störungsglied hinzutritt, ähnlich wie der Einfluß der von der Relativitätstheorie geforderten Veränderlichkeit der Elektronenmasse beim Wasserstoffatom durch ein störendes Zentralfeld beschrieben werden kann; und in diesem Fall ruft ein relativ kleines elektrisches Feld den obengenannten Effekt hervor, wie Kramers bei Berechnung der elektrischen Beeinflussung der Feinstruktur der Wasserstofflinien gezeigt hat[1]). Man muß also zwei grundsätzlich verschiedene Arten einer elektrischen Beeinflussung von Spektrallinien unterscheiden: den symmetrischen, relativ großen Starkeffekt, proportional der Feldstärke, der wasserstoffähnlichen Termen entspricht[2]) und den unsymmetrischen Effekt proportional $\mathfrak{E}^2$, der eintritt, wenn auf das beeinflußte Elektron neben der Coulomb-

1) Vgl. hierzu Anm. 2, S. 550 rechte Spalte. Die aus den Daten der Platte berechnete Dispersion wurde mittels des normalen Zeeman-Effektes an der scharfen Neonlinie 5853 kontrolliert.

2) Vgl. auch die schönen Versuche von T. Takamine und N. Kokubu, Mem. Coll. of Sc. Kyoto III, S. 271 ff.

3) Elektr. Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig, 1914, S. 75.

1) H. A. Kramers, Zeitschr. f. Phys. **3**, 223, 1920. Außerdem hat Sommerfeld darauf hingewiesen (Ann. d. Phys. (4) **65**, 36, 1921), daß in der Epsteinschen Theorie des Starkeffektes neben dem Gliede erster Ordnung in der Feldstärke ein Glied zweiter Ordnung auftritt, das eine dem Quadrat der Feldstärke proportionale Rotverschiebung bewirkt, die auch in Aufnahmen von Takamine und Kokubu (Starkeffekt der Wasserstofflinie $H\gamma$ bei sehr hohen Feldstärken) zu erkennen ist.

2) Der symmetrische Starkeffekt an der diffusen Nebenserie der Alkalielemente zeigt wohl die elektrische Beeinflussung der annähernd wasserstoffähnlichen Anfangsbahn, nämlich des *d*-Termes.



schen Kraft eine Zentralkraft wirkt, gegen die das äußere Feld $\mathfrak{E}$ als klein anzusehen ist.

Im Fall der *Hg*-Linie 2537 wirkt sicherlich keine reine Coulombsche Kraft; deshalb ist bei ihr der erstgenannte, annähernd symmetrische Effekt auch nicht zu erwarten. Ob in genügend hohen Feldern ein unsymmetrischer Effekt auftritt, soll durch neue Versuche entschieden werden.

Diese Frage ist auch für die wichtigen Untersuchungen Füchtbauers und seiner Mitarbeiter über die Verbreiterung dieser *Hg*-Linie durch fremde Gase von Bedeutung. Jedenfalls scheint die von Stark verschiedentlich betonte und von Ritter näher untersuchte[1]) Analogie zwischen elektrischem Effekt und Verbreiterung bzw. Druckverschiebung für die Absorptionslinien der Alkalidämpfe bis zu einem gewissen Grade zu gelten. Speziell die von Bevan[2]) und Füchtbauer[3]) untersuchte Unsymmetrie der nach längeren Wellen sich erstreckenden Verbreiterung des zweiten Gliedes der Cäsiumhauptserie ist nach den oben beschriebenen Versuchen bei einer elektrischen Einwirkung der Nachbaratome zu erwarten. Sehr deutlich ist die Erscheinung bei Absorptionsversuchen an den *D*-Linien des *Na*-Dampfes, die kürzlich Herr R. Minkowski im Breslauer Institut ausgeführt hat und an anderer Stelle ausführlicher besprechen wird. Aufnahmen bei niedrigem *Na*-Druck (0,015 mm) und beigemischtem Stickstoff (von 900 mm) lieferten stark nach Rot verbreiterte *D*-Linien von mehreren Å-Breite, während ohne Beimischuug fremder Gase bei gleichem *Na*-Dampfdruck relativ schmale Linien, dagegen bei höherem *Na*-Druck von 0,50 mm wiederum sehr breite, aber symmetrische *D*-Linien entstehen[4]). Im letzteren Falle ist die elektrische Beeinflussung des einzelnen absorbierenden Atoms durch die Nachbaratome gering, die große Breite entsteht durch die sich addierende Wirkung der vielen in der Beobachtungsrichtung hintereinander liegenden *Na*-Atome. Aber eine quantitative Erklärung der verbreiternden Wirkung der Stickstoffmoleküle auf Grund des Starkeffektes ist vorläufig nicht möglich. Jedenfalls reicht die von Holtsmark[5]) entwickelte Theorie bestimmt nicht aus. Denn diese berücksichtigt lediglich den symmetrischen Starkeffekt, d. h. eine der Feldstärke proportionale Aufspaltung, die nach meinen Versuchen bis 200000 Volt/cm bei den *D*-Linien nicht auftritt. Berechnet man die mittlere, die sogenannte Normalfeldstärke, die nach Holtsmark die Halbweite der Linie bestimmt, so ergibt sich mit der Konstante $A = 8 \times 10^{-26}$ der als Quadrupole vorzustellenden Stickstoffmoleküle unter den Versuchsbedingungen etwa 24000 Volt/cm^{-1}, also ein Feld, das nur eine ganz unmerkliche Verbreiterung nach Rot (von weniger als $^1/_{1000}$ Å) hervorrufen könnte, niemals aber die beobachtete über 1000 mal so große beiderseitige, wenn auch unsymmetrische Verbreiterung. Die Wirkung der hundertmal stärkeren Felder der dicht an den *Na*-Atomen vorüberfliegenden Stickstoffmoleküle[1]) sind zurzeit schwer abzuschätzen, da man den elektrischen Effekt dieser Feldstärken nicht kennt und z. B. nicht weiß, ob bei ihnen nicht vielleicht bereits der Übergang zum symmetrischen Effekt eintritt, wie er von Kramers (a. a. O.) im Fall der Einwirkung elektrischer Felder auf die Feinstrukturkomponenten des Wasserstoffs und Heliums berechnet worden ist.

Die Arbeit ist im physikalischen Institut der Universität Breslau ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Lummer für die bereitwillige Überlassung aller Mittel des Instituts auch an dieser Stelle herzlichst zu danken.

1) M. Ritter, Ann. d. Phys. (4) **59**, 181, 1919.
2) P. V. Bevan, Proc. Roy. Soc. **86**, 1912.
3) Chr Füchtbauer, Ann. d. Phys. (4) **4**, 43, 1914.
4) Die Lage des Schwerpunktes der Linien wurde dabei exakt durch gleichzeitig oberhalb und unterhalb des Spektrums aufgenommene scharfe Absorptionslinien von *Na*-Dampf niedrigen Drucks bestimmt.
5) I. Holtsmark, Ann. d. Phys. **58**, 577, 1919, speziell S. 619; s. a. P. Debye, diese Zeitschr. **20**, 166, 1919.

1) Diese relativ seltenen Felder können dadurch merklichen Einfluß auf die Linienbreite ausüben, daß sie nicht nur die Quantenbahnen, sondern nach J. Franck auch die Häufigkeit der Quantensprünge beeinflussen.

A. Kratzer (München), Die Termdarstellung der Cyanbanden.

Die Theorie von Lenz[1]) und Heurlinger[2]) erklärt das Zustandekommen der Bandenspektren aus der Überlagerung von Rotation und Schwingung der Kerne auf die Elektronenschwingung. Insbesondere hat Heurlinger bereits den Aufbau der Bandensysteme, wie sie beispielsweise durch die violetten Cyanbanden repräsentiert werden, prinzipiell dadurch verstehen gelehrt, daß er den Kernschwingungsvorgang als unharmonischen ansetzte. Dieser Ansatz muß aber zum genauen Verständnis der Bandenstruktur noch verfeinert werden, vor allem muß die Wechselwirkung zwischen Oszillation und Rotation mitberücksichtigt werden. Die hierzu nötigen Rechnungen wurden vom Verf. in einer früheren Arbeit[3]) für zweiatomige Moleküle ausgeführt und

1) Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. **21**, 632, 1919.
2) Diss. Lund 1918, diese Zeitschr. **20**, 188, 1919; Zeitschr. f. Phys. **1**, 82, 1920.
3) Zeitschr. f. Phys. **3**, 289, 1920.



es ergab sich für die Energie der Schwingung und Rotation zusammen die folgende Entwicklung nach der kleinen Größe u (m = Rotations-, n = Oszillationsquantenzahl):

$$W_m^n = W_0^n - m^2 a_n h + \frac{h^2}{8\pi^2 J}(m^2 - m^4 u^2) + \dots \qquad (1)$$

Dabei war:

$$\left.\begin{aligned} W_0^n &= nh\nu^0[1 - nxu + \dots], \\ a_n &= nu\frac{h}{8\pi^2 J}(\alpha + \beta nu + \dots), \\ u &= \frac{h}{4\pi^2 J \nu^0}. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

γ^0 ist die Frequenz der Kernschwingung bei unendlich kleiner Amplitude, J das Trägheitsmoment für das ruhende Molekül. $x, \alpha, \beta, \dots$ sind Konstante, die das besondere gerade betrachtete Molekül charakterisieren.

1. Wir interessieren uns zunächst nur für die Lage der Nullinie, um die sich die einzelnen Bandenlinien gruppieren. Wir bekommen sie, wenn wir die Rotationsquantenzahl $m = 0$ nehmen. Es ergibt sich durch Überlagerung auf die vom Elektronenvorgang emittierte Frequenz:

$$\nu_{\text{Nullinie}} = \nu_e + \nu_k,$$

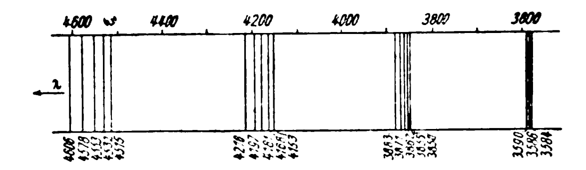
wobei sich die Kernschwingungsfrequenz ν_k aus (1) nach der Bohrschen Frequenzbedingung rechnet:

$$\left.\begin{aligned} \nu_k = \frac{W_0^{n_1} - W_0^{n_2}}{h} &= n_1 \nu_1^0 (1 - n_1 x_1 u_1) - \\ &- n_2 \nu_2^0 (1 - n_2 x_2 u_2) + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hier ist zu beachten, daß wegen der gleichzeitigen Änderung der Elektronenkonfiguration alle Größen im Anfangs- und Endzustand verschiedene Werte haben, was bereits durch die Indizes zum Ausdruck kommt. Wir können (3) noch etwas umschreiben in die Form:

$$\left.\begin{aligned} \nu_k = (n_1 - n_2)\nu_1^0 + n_2(\nu_1^0 - \nu_2^0) - \\ - (n_1^2 x_1 u_1 \nu_1^0 - n_2^2 x_2 u_2 \nu_2^0). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{a})$$

Hieraus können wir bereits die sofort ins Auge springende Struktur der Bandensysteme verstehen, sobald wir uns über die Größen-



verhältnisse der verschiedenen Koeffizienten klar geworden sind. Im allgemeinen werden ν_1^0 und ν_2^0 von der gleichen Größenordnung sein, während ihre Differenz klein gegen die Werte selbst ist. Dementsprechend ist in (3a) der erste Term ausschlaggebend, er definiert die Lage einer Gruppe innerhalb des Bandensystems. Alle zum gleichen Sprung der Oszillationsquantenzahl gehörenden Banden liegen nahe zusammen in einer Gruppe. Das zweite Glied, das gegenüber dem ersten klein ist, hängt vom absoluten Wert der Endquantenzahl ab; die zum gleichen Quantensprung aber verschiedenem Absolutwert der Schwingungsquantenzahl gehörenden Banden einer Gruppe werden hierdurch nebeneinander gelegt, es wird die Lage der Banden (Nullinien) innerhalb der Gruppen hierdurch geregelt. Das letzte Glied endlich bringt die durch die anharmonische Bindung außerdem noch veranlaßte Abweichung von der Äquidistanz (Linearität) zum Ausdruck. Am Beispiel der violetten Cyanbanden heißt dies zunächst qualitativ gedeutet: Alle Banden von 3883 bis 3850 Ångström gehören zum gleichen Quantensprung (hier speziell Null), je nachdem aber der Endzustand der Oszillation 0, 1, 2, 3, 4 ist, erhalten wir die Banden 3883, 3871, 3862, 3855, 3850.

Verfolgen wir die Verhältnisse bei den violetten Cyanbanden genauer, so ergibt sich, daß sich deren Nullinien darstellen lassen durch die Formel:

$$\left.\begin{aligned} \nu = 25797{,}83 + n_1(2143{,}88 - n_1 \cdot 20{,}25) \\ - n_2(2055{,}64 - n_2 \cdot 13{,}25). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{b})$$

Die Zuordnung der einzelnen Banden zu den Quantenzahlen n_1 und n_2 kommt in der Tabelle I zum Ausdruck. Diese enthält in der ersten Zeile die Wellenlängen der Bandkanten in Ångström-Einheiten, in der zweiten Zeile die Wellenzahlen der von Heurlinger empirisch bestimmten Nullinien, die dritte Zeile enthält jeweils die aus unserer Formel berechneten Wellenzahlen. Der Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung ergibt durchaus gute Übereinstimmung; wo diese Prüfung wegen Fehlens der empirischen Daten nicht möglich ist, werden wir sie später nachholen.

Die Wahl der absoluten Werte von n_1 und n_2 erscheint zunächst willkürlich; man hat aber folgende Gesichtspunkte zu beachten: Sämtliche Bandensysteme müssen darstellbar sein, ohne daß negative Werte der Quantenzahlen auftreten. Zu sämtlichen wahrscheinlichen, d. h. nicht zu großen Quantenzahlen und Sprüngen, müssen auch Banden vorhanden sein. Die Banden müssen sich ihrer Intensität nach in die theoretisch aus der Größe der Quantenzahlen und Sprünge zu erwartende Reihenfolge einfügen. Alle diese Bedingungen sind bei unserer auf Heurlinger zurückgehenden Anordnung erfüllt. Nachdem so zunächst das Kantengesetz der

Tabelle I.

n_1	$n_2 = 0$	1	2	3	4	5	6
0	3883 25797,83 25797.83	4216 23755.44 23755.44	4606 21739.54 21739.55				
1	3590 27921.3 27921,38	3871 25879,0 25878,99	4197 23863.0 23863,10	4578 21873.4 21873.71			
2	3361? — 30004,43	3586 27962,7 27962,04	3862 25945.5 25946,15	4181 23956,5 23956,76	4553 — 21993,87		
3			3584 — 27989,70	3855 — 26000,31	4168 — 24037,42	4532 — 22101,03	
4					3850 — 26040,47	4153 — 24104,08	4515 — 22194,19

Bandensysteme theoretisch begründet ist, können wir auf die Einzelheiten der Struktur der Bandenserien eingehen.

2. Um die einzelnen Bandenlinien zu bekommen, haben wir außer der Elektronenkonfiguration und der Oszillationsquantenzahl die Rotationsquantenzahl m um ± 1 springen lassen. Nach Lenz kommt dann aus dem ausschlaggebenden Glied von (1) zur Frequenz der Nullinie die Rotationsfrequenz hinzu:

$$\nu_{\text{rot}} = \frac{(m \pm 1)^2 h}{8 \pi^2 J_1} - \frac{m^2 h}{8 \pi^2 J_2} = \frac{h}{8 \pi^2 J_1} \pm \\ \pm \frac{m h}{4 \pi^2 J_1} + m^2 \left(\frac{h}{8 \pi^2 J_1} - \frac{h}{8 \pi^2 J_2} \right),$$

oder mit $B = \frac{h}{8 \pi^2 J}$

$$\left. \begin{aligned} \nu_{\text{rot}} &= B_1 \pm 2 m B_1 + m^2 (B_1 - B_2) \\ &= B_1 \pm 2 m B_1 + m^2 C. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Formel gibt ein theoretisches Verständnis des Deslandresschen Bandenseriengesetzes, sie läßt aber noch keinen gesetzmäßigen Zusammenhang der Banden eines Systems erkennen. Dies ist erst möglich, wenn wir das zweite Glied in (1), das die Wechselwirkung zwischen Rotation und Schwingung darstellt, mitberücksichtigen. Gl. (4) bleibt dabei unverändert, es ändert sich lediglich die Bedeutung von B.

$$B = \frac{h}{8 \pi^2 J} - a_n.$$

Mit Berücksichtigung von (2) kommt schließlich:

$$B = \frac{h}{8 \pi^2 J} (1 - n \cdot u \alpha + \ldots) \quad (5)$$

Wir verlangen also in erster Näherung einen linearen Gang von B mit der Oszillationsquantenzahl. Dieses Gesetz ist bei einfach gebauten Banden, z. B. bei O_2 gut bestätigt und wir wollen seine Gültigkeit auch für die Cyanbanden nachweisen.

Für diese hat Heurlinger die Koeffizienten B_1 und C zum großen Teil empirisch festgelegt. Seine Resultate sind in der Tabelle II zusammengefaßt. Dabei ist zu beachten, daß

Tabelle II.

$n_2 =$	0		1		2		3	
n_1	B_1	100 C	B_1	100 C	B_1	100 C	B_1	100 C
0	3,84	6,8	3,83	8,5	3,85	10,1		
1	3,88	4,5	3 81	6,4	3.80	8,2	3,82	9,7
2			3,80	4,1	3,88	5,6	3,78	7,6

den Werten von B_1 keine allzu große Sicherheit beigelegt werden darf, da sie von der manchmal zweifelhaften Wahl der Nullinie stark abhängen. Dagegen ist C von der Numerierung unabhängig. Nach (5) sollten in der Tabelle nebeneinanderstehende Werte von B_1 gleich sein. Wie man sieht, ist dies nur angenähert der Fall, dagegen zeigen die Werte von C sowohl in den Zeilen wie in den Kolonnen den zu erwartenden linearen Gang. Nach der Bedeutung von C in (4) ist nämlich

$$C^{n_1 n_2} = (B_1^{n_1} - B_2^{n_2}), \quad (6)$$

und da in den Zeilen (Kolonnen) der Tabelle II n_1 (n_2) festgehalten ist, so kommt der Gang von $B_2^{n_2}$ $(B_1^{n_1})$ hier rein zum Ausdruck. Wir können die aus vorliegenden Daten für C sich ergebenden Werte des Ganges ausgleichen und erhalten schließlich

$$\left. \begin{aligned} 2 B_1^n &= 2 B_1^0 - n \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-2}, \\ 2 B_2^n &= 2 B_2^0 - n \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}, \\ 2 B_1^0 - 2 B_2^0 &= 13{,}6 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für B_1^0 bestimmen wir aus dem vorliegenden empirischen Material

$$2 B_1^0 = 3{,}841$$

und können nun die Größen $C^{n_1 n_2}$ extrapolieren. Die extrapolierten Werte wollen wir an den gemessenen Wellenzahlen der Kanten prüfen.

3. Haben wir eine Bandenserienformel:

$$\nu = \nu_{\text{Nullinie}} + 2 m B_1 + m^2 C,$$

so erreichen die Wellenzahlen für:

$$m = -\frac{B_1}{C}$$

ein Minimum; die Bande hat hier eine Kante. Deren Wellenzahl wird:

$$K = \nu_{\text{Nullinie}} - \frac{(B_1)^2}{C}. \qquad (8)$$

Indem wir nun die Wellenzahlen der Nulllinien der Tabelle I entnehmen und B und C nach (6) und (7) berechnen, erhalten wir für die Wellenzahlen der Kanten der Cyanbanden die jeweils in der 2. Zeile der Tabelle III angegebenen Werte. Die Zahlen der ersten Zeile

Tabelle III.

Kanten der violetten Cyanbanden.

n_1	$n_2 = 0$	2	3	4	5	6
2	29761 29857,6			21962,0 21956,4		
3		27901,3 27896,9	25939,9 25937,2	23993 6 23989,6	22065,0 22062,6	
4				25968 25973,3	24049,0 24054,3	22148,6 22154,7

1. Zeile: beobachtete Wellenzahlen.
2. „ : gerechnete „

dieser Tabelle sind gemessen und dem Handbuch von Kayser[1]) entnommen. Trotz der weitgehenden Extrapolation und der unsicheren empirischen Daten ist die Übereinstimmung durchweg befriedigend. Dies ist um so bemerkenswerter, als bei der Berechnung nach (8) die kleine Differenz C in den Nenner kommt. Nur bei der Kante $K^{20} = 29761$ ist die Übereinstimmung unbefriedigend. Nach einer Bemerkung von Kayser[2]) weicht aber diese Bande auch in ihrem sonstigen Verhalten von den übrigen Cyanbanden ab. Allerdings ist gerade hier C^{20} besonders klein, so daß ein kleiner Fehler sich stark geltend macht. Wir können aus diesem Grunde nicht bestimmt schließen, daß diese Bande nicht zum System der Cyanbanden gehört, möchten sie aber mit großer Wahrscheinlichkeit ausschließen.

1) Band II, S. 481.
2) Handbuch, Band V, S. 229.

Auf Grund der zahlenmäßigen Bestätigung können wir also das gesamte Liniensystem der violetten Cyanbanden durch die theoretisch begründete Formel darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \nu = \nu_e + B_1^{n_1} + n_1 \nu_1^0 (1 - n_1 u_1 x_1) - \\ - n_2 \nu_2^0 (1 - n_2 u_2 x_2) + \\ \pm 2 m B_1^{n_1} + m^2 (B_1^{n_1} - B_2^{n_2}). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \nu_e + B_1^0 &= 25797{,}83, \\ \nu_e &= 25795{,}91, \\ \nu_1^0 &= 2143{,}88, \\ \nu_1^0 u_1 x_1 &= 20{,}25, \\ 2 B_1^{n_1} &= 3{,}841 - 0{,}0044 \cdot n_1. \\ \nu_2^0 &= 2055{,}64, \\ \nu_2^0 u_2 x_2 &= 13{,}25, \\ 2 B_2^{n_2} &= 3{,}705 - 0{,}035 n_2. \end{aligned}$$

Es bleibt sonach lediglich die Feinstruktur, das Dublett, der Cyanbanden zu erklären, auf dessen Deutung wir an anderer Stelle eingehen werden.

Bemerkenswert ist, daß wir nun auch in der Lage sind, die roten Cyanbanden und ferner die sogenannten Stickstoffbanden zu entwirren. Wie bereits Heurlinger[1]) bemerkte, haben die roten Cyanbanden den Endterm mit den violetten gemeinsam. Da wir nun die Terme der violetten Cyanbanden in allen Einzelheiten kennen, ist der Weg zur Termdarstellung der roten Cyanbanden bereits vorgezeichnet. Sobald wir eine Serie aus dem Beobachtungsmaterial herausgreifen können, also den Koeffizienten C kennen, ist die Bestimmung der Nullinie und die richtige Numerierung eindeutig durchführbar.

Diskussion.

Konen: Ich bitte den Herrn Vortragenden, sich darüber zu äußern, welche Folgerungen sich aus seiner Theorie für den Zusammenhang der Träger des sogenannten Cyan-Spektrums und des Stickstoffspektrums ergeben.

Kratzer: Die von Herrn Konen gestellte Frage nach dem Träger der Cyanbanden ist bereits nach einer Bemerkung von Heurlinger (Zeitschr. f. Phys. 1, 82, 1920) zu beantworten. Darnach haben die violetten Cyanbanden, die roten Cyanbanden und die 1., 2. und 4. positive Stickstoffgruppe paarweise gemeinsame Terme, so daß man alle diese Banden dem gleichen Molekül als Träger zuschreiben muß.

1) Zeitschr. f. Phys. 1, 82, 1920.

E. Gehrcke und E. Lau (Charlottenburg), Die veränderliche Feinstruktur der Balmerserie. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die Balmerserie des Wasserstoffs ist bekanntlich eine Dublettserie. Das Intensitätsverhältnis der Komponenten einer Linie zueinander ist von uns als variabel festgestellt worden. Es ergab sich dafür eine Abhängigkeit von 2 Faktoren.

1. Bei einer Variation des Druckes ändert sich das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten, und zwar bei H_α am meisten, bei den höheren Gliedern der Serie in geringerem Maße. Beifolgende Tabelle gibt eine Übersicht über diese Veränderlichkeit bei einem Rohr von etwa 2 cm lichter Weite und großer Länge[1]).

	H_α	H_β	H_γ
$\frac{I_k}{I_l}$ 0,1 mm Druck	1	1	1
0,01 mm „	1,5	1,11	1,05
Veränderung in Proz.	50	11	5

$\frac{I_k}{I_l}$ bedeutet das Intensitätsverhältnis der kurzwelligen zur langwelligen Komponente. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Änderung dieses Intensitätsverhältnisses bei den verschiedenen Linien mit dem Druck ungefähr umgekehrt proportional dem Quadrat der Seriennummer ist.

2. Die lichte Weite des verwendeten Rohres ist maßgebend für das Intensitätsverhältnis. Bei einem ca. 5 cm langen Rohr von etwa 1,5 mm lichter Weite ist die langwelligere Komponente stärker, gleichzeitig werden beide Komponenten verwaschener. Das Aussehen der Linie bleibt ziemlich unverändert, wenn man den Druck von 5 mm bis 0,1 mm variiert.

Es ist bekannt, daß bei einer Verminderung des Druckes die höheren Seriennummern relativ zu H_α stärker herauskommen. Dasselbe tritt ein, wenn man Geißlerröhren mit großer lichter Weite benutzt. Das Hervortreten der kurzwelligen Komponente von H_α ist nach obigen Versuchsresultaten an dieselben Bedingungen geknüpft. Vielleicht kann man vermuten, daß die Gemeinsamkeit des Schicksals der kurzwelligeren Komponente mit dem der höheren Glieder der Serie auf dem gleichen Grunde beruht.

Zwei Gründe werden bisher angeführt für das stärkere Auftreten der höheren Glieder der Serie. Zunächst die höhere Geschwindigkeit der Elektronen. Das wäre für die Komponenten von H_α auch näher zu untersuchen. Ferner kommt der Gedanke Bohrs in Betracht, daß die Anregungsvorgänge für die höheren Glieder einer Serie deshalb vom Druck abhängen, weil sie sich mehr in der Peripherie des Atoms abspielen. Es würde sich dann bei der Anregung der kürzeren Komponente um einen Vorgang handeln, der weiter in die Peripherie des Atoms hineinreicht, also etwa, wenn man sich auf den Boden der Sommerfeldschen Anschauungen stellt, um Ellipsenbahnen. Es ist jedoch zu bemerken, daß der auf Grund dieser Anschauungen berechnete Wert des Dublettabstandes der Balmerserie von uns nicht bestätigt werden konnte. Der Dublettabstand ist um 20 bis 25 Proz. kleiner beobachtet als berechnet. Die oben erwähnten Intensitätsverschiebungen ändern hieran nichts.

[1]) Über die technischen Einzelheiten bei diesen Messungen siehe: E. Gehrcke u. E. Lau, Ann. d. Phys. **65**, 564—576, 1921.

Diskussion.

Sommerfeld: Die Ergebnisse über die Abhängigkeit der Intensität des Wasserstoffdubletts vom Druck sind um so wichtiger, als sie, soviel ich sehe, durch die Kramersche Theorie, die hier allein in Betracht kommt, nicht erklärt wird. Was die Frequenzdifferenz betrifft, so weicht die hier gefundene nicht nur von der Theorie ab, sondern auch von den neueren Messungen (Meißner, Merton).

Koch: Das Nichtstimmen des gemessenen Komponentenabstandes mit der Sommerfeldschen Theorie könnte sich vielleicht durch die Übereinanderlagerung der Komponenten erklären, wodurch ein Zusammenrücken der Intensitätsmaxima im Betrag von 25 Proz. leicht entstehen kann.

Gehrcke: Wenn eine gemessene Zahl nicht ganz mit der Berechnung stimmt, so pflegt man besonders eingehend zu prüfen, ob der Unterschied durch Beobachtungsfehler zu erklären ist. Ich kann hier nur bemerken, daß wir bei Berücksichtigung aller Umstände, auch des von Herrn Koch erwähnten, sagen müssen: wir können keinen andern Wert für $\Delta\nu$ finden, als den angegebenen. Natürlich haben wir die Überlagerung der Komponenten berücksichtigt. Wenn jemand bessere Messungen beibringen könnte, so würde uns dies freuen. Ferner möchte ich bemerken, daß ich bezüglich der Abweichung der Beobachtung von der theoretischen Erwartung in derselben Lage bin, wie Herr Sommerfeld, da auch nach meinen früher veröffentlichten Vorstellungen über die Entstehung der Wasserstofflinien dieselbe Abweichung von etwa 25 Proz. des Wertes für $\Delta\nu$ von der Beobachtung herauskommt.

Sommerfeld: Es handelt sich nicht nur

um Widersprüche mit der Theorie, sondern auch um Widersprüche mit anderen Messungen.

Lau: Wir sind in Übereinstimmung mit sämtlichen früheren Messungen, die im Gegensatz zu der neueren Messung von Merton stehen. Die Überlagerung der Komponenten an H_α kann unmöglich eine scheinbare Verschiebung von der Größenordnung 25 Proz. ergeben.

Walter Gerlach (Frankfurt a. M.), Kristallgitteruntersuchungen mit Röntgenstrahlen und eine einfache Röntgenröhre.

I.

Im Folgenden soll über Versuche berichtet werden, welche gemeinsam mit den Herren E. Madelung und O. Pauli ausgeführt wurden. Es handelte sich zunächst um die Untersuchung von Kristallgittern mit zweiwertigen Ionen, nämlich MgO, CaO, SrO, BaO. Diese Substanzen erwiesen sich als regulär, und zwar vom $NaCl$-Typ. Als Gitterkonstante (d. h. Kante des Elementarwürfels) erhielten wir die in folgender Tabelle I unter „a beob." verzeichneten Werte[1]),

Tabelle I.

	a beob. (in Å.-E.)	σ	a ber.
Magnesiumoxyd . . .	4,20₄	3,47 [2]) 3,60	4,25 4,20
Calciumoxyd	4,76₂	3,40	4,78
Strontiumoxyd	5,10₀	4,75	5,24
Baryumoxyd	5,47	5,72	5,62

während unter a ber. die aus der bekannten Formel

$$a = 2\sqrt[3]{\frac{(A_1 + A_2)}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{N}}$$

erhaltenen Werte verzeichnet sind, unter Zugrundelegung von $N = 60{,}6 \times 10^{22}$ und dem unter σ gleichfalls angeführten spezifischen Gewicht. Diese Werte sind äußerst unsicher. Dagegen ist es gelungen, die röntgenographische Methode methodisch so zu verbessern, daß nach Ermittelung des Kristallgitters die Kantenlänge des Elementarwürfels auf wenige Promille genau bestimmt werden kann. So ist es möglich, mit dieser Methode — unter der Voraussetzung, daß die Ermittelung des Gittertyps gelungen ist, — zwar nicht gerade einfach — aber genau das spezifische Gewicht von solchen Körpern zu bestimmen, bei denen andere Methoden versagen (z. B. wegen starker innerer Zersplitterung oder Lufteinschlüsse).

Tabelle II gibt 8 Bestimmungen von a für Magnesiumoxyd, aus welchen sich ein spezifisches Gewicht von $\sigma = 3{,}58_3$ mit einem Fehler von höchstens $\pm$ 0,5 Proz. berechnet, während, vgl. Tabelle I, die vorliegenden Bestimmungen um 3,7 Proz. differieren.

Tabelle II.

MgO $a = 4{,}19_5$ $4{,}20_2$ $4{,}191$ $4{,}19_0$ $4{,}21_9$ $4{,}22_7$ $4{,}19_5$ $4{,}22_0$

Mittel: $4{,}20_4 \times 10^{-8}$ cm; maximale Abweichung vom Mittel 0,4 Proz.

II.

Magnesiumoxyd ist deswegen interessant, weil es ermöglicht, die Debye-Scherrersche Prüfung über die Wertigkeit der Ionen anzuwenden. Die Zahl der Elektronen des Magnesium ist 12, die des Sauerstoffs 8. Sind im Kristall Ionen vorhanden, so sind die Zahlen Mg^{++} 10, O^{--} 10. Ist die Amplitude der zerstreuten Strahlung proportional der Anzahl der Elektronen, so sollen alle die Interferenzmaxima fortfallen, welche im Strukturfaktor der Mg- und O-Ausdrücke gleiche Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben, das heißt die Ausdrücke, deren h_1, h_2, h_3 (Kristallindices) sämtlich ungerade sind. Das trifft zu für die erste Linie 111, welche selbst bei starker Überexposition fehlt, dagegen treten die höheren Glieder 113, 331 usw. auf; als Erklärung hierfür kommt der gleiche Umstand in Betracht, wie bei den Untersuchungen von Debye und Scherrer über die Wertigkeit der Ionen im Natriumfluorid: daß nämlich das genannte Proportionalitätsgesetz nur für kleine Winkel gilt. So zeigen also die MgO-Aufnahmen mit Deutlichkeit die Zweiwertigkeit der Ionen im Kristall.

III.

Das Gitter des Flußspats wurde neu bestimmt, die Braggsche Struktur bestätigt. Als Gitterkonstante ergab sich mit einer maximalen Abweichung vom Mittel

$$a = 5{,}452 \text{ Å.-E.} \pm 0{,}2 \text{ Proz.},$$

während aus dem hier sehr genau bekannten spezifischen Gewicht (Madelung-Fuchs, l. c.) $\sigma = 3{,}18$ $a = 5{,}45$ folgt.

IV.

Verschiedene Modifikationen des Siliziums wurden untersucht und kristallographisch als

---

1) Ausführliche Publikation der MgO-Messungen, besonders wegen der Berechnungen und Korrektion siehe Zeitschr. f. Phys. 7 (im Druck); weitere Untersuchungen über CaO, SrO, BaO werden an anderer Stelle veröffentlicht.

2) E. Madelung u. R. Fuchs, Ann. d. Phys. 65, 269, 1921.

vollkommen gleich befunden. Als Gittertyp wurde in Übereinstimmung mit Debye-Scherrer der Diamanttyp gefunden, als Gitterkonstante $a = 5{,}40_0 \times 10^{-8}$ cm, Genauigkeit 0,2 Proz.

V.

Methodisch wurde vor allem als günstig befunden, statt einer kreisförmigen Strahlenblende einen Spalt zu benutzen. Als günstigste Dimension ergab sich eine Spaltlänge von 4 mm, eine Spaltbreite von etwas über 1 mm und eine Stäbchendicke von 1 mm. (Die Spaltbreite wird etwas größer als der Stäbchendurchmesser gewählt, um die sichere Zentrierung des Stäbchens in der Kamera zu erleichtern.) Das Pulver wird nicht allzu fein gerieben; dann treten in den Interferenzlinien kleine intensive Pünktchen auf, welche von zufällig unter dem Glanzwinkel liegenden größeren Kriställchen herrühren. Die hierdurch hervorgerufene Inhomogenität der einzelnen Interferenzmaxima stört zwar meist die Photomotrierung; solange dagegen die Faktoren, welche die Intensität bestimmen, so wenig bekannt sind, hat die quantitative Photometrierung überhaupt keinen Sinn. Für Strukturbestimmungen dagegen genügen qualitative Feststellungen der Intensität. Dann bieten aber die Pünktchen hoher Intensität bemerkenswerte Vorteile: die Belichtungszeit kann wesentlich verkürzt werden ($^1/_2$—$^1/_3$ schätzungsweise), da wenige Pünktchen schon genügen, um die ganze Interferenzlinie zu konstruieren; auch sehr schwache Linien können durch solche Pünktchen erkannt werden; aus der Anzahl der Pünktchen sind Schlüsse auf einen Intensitätsfaktor, nämlich die Häufigkeit der betreffenden Ebene, zu ziehen; und schließlich kann zwischen Linien, welche durch Reflexion an den Blenden und Metallteilen der Kamera entstehen (die bei längeren Aufnahmen nicht vermeidbar sind) und keine Pünktchen haben, und zwischen Kristallinien sicher und schnell entschieden werden.

VI.

Die — im Lichtbild gezeigten — Interferenzlinien haben äußerst große Schärfe, so daß sie mit Sicherheit auf $^1/_{10}$ mm ausmeßbar sind. Die Reflexionspünktchen erwiesen sich auf ihnen sämtlich als doppelt, und zwar derart, daß das nach größeren Winkeln liegende Pünktchen größere Intensität hat. Nimmt man an, daß die Feinstruktur der Pünktchen in einer Feinstruktur der primären Strahlung besteht, so berechnet sich aus allen Linien und aus allen Kristallen eine Wellenlängendifferenz von rund 1,35 Promille.

Zum Beispiel:

CaF_2-Aufnahme,

Linie	422	440	531	620
$\lambda_1 - \lambda_2$ in Proz.	0,132	0,136	0,136	0,134

MgO-Aufnahme,

Linie	440
$\lambda_1 - \lambda_2$ in Proz.	0,136

Si-Aufnahme,

Linie	422	531
$\lambda_1 - \lambda_2$ in Proz.	0,136	0,136

Diese stimmt mit der Wellenlängendifferenz $K\alpha_1 - K\alpha_2$, welche 0,24 Proz. beträgt, nicht überein. Sicher ist, daß der Abstand unabhängig von allen Faktoren der Anordnung ist, so insbesondere von Stäbchendurchmesser und Spaltblende bzw. Kreisblende. Eine Erklärung für diesen Befund fehlt uns daher vorerst.

VII.

Die Reflexion erfolgt fast ausschließlich in der Oberfläche. Stellt man in den Strahlengang des Stäbchens ein nur 0,5 mm dickes Plättchen aus Kristallpulver, so sind — bei scharfen Interferenzlinien nach rückwärts — die in Richtung des primären Strahles liegenden Interferenzen durch mehrfache Reflexion im Pulver ganz außerordentlich verbreitert und daher sehr geschwächt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch solchen Effekt die von Madelung[1]) behauptete mikrokristalline Struktur von Flüssigkeiten bei den bisherigen Versuchen verschleiert wurde. Deshalb sollen solche Untersuchungen nur mit sehr dünnen und verteilten Flüssigkeitsschichten wiederholt werden.

VIII.

Schließlich sei über den Transport von Antikathodenmaterial nach der Kathode berichtet. Nach langem Betrieb der Siegbahn-Haddingschen Röhre zeigt sich auf der Kathode ein Beschlag von Antikathodenmaterial, der in einem Fall, als die Kupfer-Antikathode infolge Überlastung etwas angeschmolzen war, die Form von kleinen Kristallen hatte: es lagen — nur im mittleren Teile der Aluminiumkathode — nebeneinander eine Reihe von gut ausgebildeten Würfeln geringer Dicke und etwa 1 mm Kantenlänge. Der Transport des Kupfers zur Kathode ist offenbar in Ionenform vor sich gegangen; hierfür spricht, daß die Randzone stets frei ist, also von einem gewöhnlichen Destillationsbeschlag nicht gesprochen werden kann. Auch die geschätzte Masse der transportierten Masse stimmt mit plausiblen Annahmen über die Größe

1) Diese Zeitschr. **14**, 729, 1913.

des Ionenstroms überein. Diese Beobachtung wird weiter verfolgt.

IX.

Eine Röntgenröhre wird beschrieben[1]), deren neues Prinzip darin besteht, daß ein Teil der Außenwand der Röhre als metallische Halbkugel die Kathode bildet, während die Antikathode im geometrischen Mittelpunkt dieser Halbkugel angeordnet ist. Die Röntgenstrahlen treten durch eine oder mehrere Durchbohrungen in der Kathode, die mit geeigneten Filtern luftdicht verschlossen sind, aus. Über Messungen an der Röhre wird berichtet werden, wenn die endgültige Bauart ausgearbeitet ist. Bemerkenswert ist, daß der „Brennpunkt" der Kathode ziemlich scharf im geometrischen Mittelpunkt liegt.

Diskussion,

Spangenberg fragt an, ob und in welcher Weise die Schwierigkeiten überwunden werden, die sich offenbar bei der Intensitätsauswertung der Pünktchendiagramme ergeben müssen.

Gerlach: Die Intensitätsmessung hat offenbar einen Haken. Denn es kommt auch das Reflexionsvermögen mit hinein. Manche Linien, die ziemlich schwach sein sollten, kommen plötzlich ganz stark hervor.

Kirchner: Ich habe hier in Jena bei Herrn Prof. Wien ähnliche Versuche gemacht. Bezüglich der Dicke der reflektierenden Schicht fand ich an elektrolytischen Niederschlägen, daß schon bei Schichten von weniger als $^1/_{200}$ mm deutliche Interferenzen auftraten.

Herzog: Die Herren Becker und Jancke haben in unserem Institut eine große Anzahl von organischen Verbindungen nach der Methode von Debye und Scherrer untersucht und gleichfalls die Dichte auf röntgenspektrographischem Wege bestimmt.

Gerlach: Die Flüssigkeitsuntersuchungen wollen wir, um ganz dünn verteilte Schichten zu bekommen, etwa derart machen, daß wir die Flüssigkeiten in Filtrierpapierstäbchen aufsaugen.

1) Eine Beschreibung einer sehr primitiven Form dieser Röhre befindet sich in Verh. d. D. phys. Ges. 1921, S. 55.

Adolf Smekal (Wien), Über die Feinstruktur der Röntgenspektren.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich aus der Bohrschen Frequenzbedingung als unmittelbare Folgerung das Ritzsche Kombinationsprinzip ergibt. Während die Bewährung dieser Gesetzmäßigkeiten bis zur ultravioletten Lücke des Spektrums schon seit längerer Zeit über jeden Zweifel hinaus als gesichert gelten konnte, ist Gleiches bezüglich der Röntgenspektren erst kürzlich in vollem Umfange nachzuweisen gelungen. Über diesen Punkt sowie einige daranschließende Fragen soll im folgenden berichtet werden.

Die Vorstellungen, welche Kossel vor einigen Jahren vom Mechanismus der Röntgenlinienemission entworfen hat, führten ihn bei Annahme der Frequenzbedingung bekanntlich zu einer Reihe von Additionsbeziehungen, in denen die Frequenzen von gewissen Röntgenlinien teils untereinander, teils auch zusammen mit denen von Röntgenabsorptionskanten kombiniert erscheinen. Während letztere Beziehungen sich innerhalb der Fehlergrenzen durchaus bewährten, zeigten sich bei ersteren die bekannten „Kombinationsdefekte". Seinerzeitige Versuche von Vegard und dem Vortragenden, diese Defekte auf Grund gewisser Abänderungen der Grundvorstellungen, aber ohne Verzicht auf die Frequenzbedingung zu erklären, müssen heute als gescheitert angesehen werden. Den einfachsten möglichen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten zeigte später Kossel selbst, indem er, die kurz vorher von Stenström experimentell festgestellte Mehrfachheit der M-Niveaus benützend, zu der Vermutung gelangte, daß manche in den Additionsbeziehungen auftretenden Linien bisher keine zutreffende Deutung erfahren hätten; für K_β insbesondere gelang es ihm, sowie Duane und Stenström, eine Deutung anzugeben, die den bekannten Kombinationsdeffekt $K_\beta - K_\alpha - L_\alpha$ als Frequenzbestand der ersten und dritten M-Kante erscheinen ließ. Wenn auch diese Auffassung damals noch nicht ganz einwurfsfrei bleiben konnte, so hat sich doch jetzt herausgestellt, daß sie vollständig zu Recht besteht.

Das Problem der Mehrfachheit der zu jeder Elektronenschale gehörigen Energieniveaus führt auch von einem etwas anderen Ausgangspunkte aus zu den Vermutungen von Kossel und in weiterer Folge zur vollständigen Bewährung des Kombinationsprinzips auch im Röntgengebiete. Die, allgemein zuletzt von Bohr in seiner neuen Arbeit bestätigte Erkenntnis, daß die Elektronenringvorstellung als zu weitgehend schematisiert, fallen gelassen werden muß, eröffnete dem räumlichen Atommodell freien Weg, dessen Elektronenbahnen im allgemeinen mittels dreier Quantenzahlen festgelegt werden müssen. Die naheliegendste Folgerung, die daraus gezogen werden konnte, war, daß die zweiquantige L-Schale zu im ganzen drei verschiedenen L-Niveaus Anlaß geben könnte, die dreiquantige M-Schale zu maximal 6 M-Niveaus, die vierquantige N-Schale zu maximal

10 N-Niveaus usw. In der Tat ergab sich die zuerst von M. de Broglie festgestellte Dreizahl der L-Kanten als Höchstzahl einwandfrei aus den Messungen amerikanischer Forscher und wurde kurz darauf auch noch durch die schönen Messungen von G. Hertz bestätigt. Die wirkliche Anzahl 5 der M-Kanten ist hingegen um weniges später, nachdem sie auf dem sogleich zu schildernden Wege vorausberechnet worden war, von Coster durch direkte Messung im Thorium- und Uranspektrum nachgewiesen worden.

Erwägt man die soeben als möglich bezeichnete große Anzahl insbesondere der M- und N-Niveaus und die daraus resultierende große Mannigfaltigkeit von möglichen Elektronenübergängen zwischen ihnen, so ist auch bei Geltung eines dieselben stark einschränkenden Auswahlprinzips klar, daß die bis zum Ende des Vorjahres mit Sicherheit zur L-Serie gezählten Linien an Zahl zu gering waren, um diesen Folgerungen recht zu geben. Indessen fand sich in den L-Messungen an Wolfram von Dershem, Siegbahn, Overn und M. de Broglie eine Anzahl sehr schwacher Linien, deren Zugehörigkeit zum Wolframspektrum noch nicht als gesichert gelten. Durch Einbeziehung dieser Linien wurde das vorhandene Material aber auch hinsichtlich Sommerfelds empirischer Feinstrukturtheorie in befriedigender Weise ergänzt, indem sich damit zugleich zu den bisherigen vier Sommerfeldschen L-Dubletts weitere derartige Dubletts gesellen ließen.

War nun die Bohrsche Frequenzbedingung und damit das Kombinationsprinzip im Röntgengebiete wirklich exakt zutreffend, so mußten sich unter den Frequenzdifferenzen: Absorptionskante minus zugehörige Linie, wenn man diese für alle bekannten Linien und Absorptionskanten bildete, stets dann mindestens zwei übereinstimmende Beträge ergeben, wenn ein bestimmtes bis dahin noch unbekanntes Energieniveau an der Entstehung von mindestens zwei bekannten Linien Anteil hatte. Dies war in der Tat der Fall und so gelang es, mit einer Ausnahme, sämtliche am Wolfram gemessenen Röntgenlinien in ein Frequenzschema einzuordnen, das nun die Gültigkeit des Kombinationsprinzips in deutlichster Weise zum Ausdruck brachte[1]). Es ergaben sich, wie bereits erwähnt, 5 verschiedene M-Niveaus, ferner mindestens 5 N-Niveaus, sowie O-Niveaus, deren Trennung die Genauigkeit der damaligen Messungen jedoch nicht gestattete. Die Zuordnung der einzelnen Linien selbst ergab sich dabei unabhängig, aber in vollkommener Übereinstimmung mit den Anregungsmessungen von Hoyt und Dauvillier.

Die durch das vorhandene Material gebotene Beschränkung der Untersuchung auf die Wolframlinien hatte den Nachteil, daß eine Prüfung sämtlicher gefundenen Linien-Zuordnungen bei anderen Elementen zunächst unterbleiben mußte, auch war es nicht möglich, den Verlauf der einzelnen neuen Energieniveaus mit veränderlicher Ordnungszahl zu studieren. Auf Grund der neuen seither erschienenen L-Linienmessungen von Coster und Dauvillier, welche durch Auffindung neuer, schwacher Linien der Elemente Ta bis U das diesbezügliche vorhandene Material fast zu der beim Wolfram erreichten Vollständigkeit brachten, hat Herr Wentzel bei Geheimrat Sommerfeld diese wichtigen Ergänzungen vorgenommen. Alle diese Herren haben, zum Teil auch selbständig, Frequenzschemata für die Röntgenlinien aufgestellt; sie weichen von dem oben erwähnten Schema nur hinsichtlich einiger schwacher Linien voneinander ab, deren Identifikation von Element zu Element Schwierigkeiten bot. Als feststehendes Ergebnis aller dieser, auf ein nunmehr sehr reichhaltiges Material gegründeten Untersuchungen kann angenommen werden, daß die Gesamtzahl der N-Niveaus auf sieben zu erhöhen ist. Man hat somit die Regel: Beträgt die Quantensumme einer Elektronenschale k, d. h. ist die Schale k-quantig, so ist die Anzahl der ihr zugehörigen Energieniveaus $2k - 1$. Da nun nach Bohr die O-Schale bei den schwersten Elementen dreiquantig ist, ferner die P-Schale zweiquantig, so muß man die Existenz von 5 O- und 3 P-Niveaus annehmen. Anzeichen dafür, daß die O-Schale wirklich dreiquantig ist, hat Herr Wentzel in der Tat auf Grund seines wichtigen Auswahlprinzips gefunden, auf dessen Einzelheiten hier aber nicht näher eingegangen werden kann. Bei der großen Schwäche der Linien, welche zu diesen ganz nahe der Atomoberfläche befindlichen Schalen gehören, kann es nicht wundernehmen, daß hier noch manches ungeklärt ist und über die Einordnung gewisser Linien noch Meinungsverschiedenheiten bestehen. So glaubt z. B. Herr Dauvillier neuerdings, 8 N-Niveaus annehmen zu sollen, ferner ordnet er die von ihm am Uran gemessene, kurzwelligste Linie L_{γ_8} einem O-Niveau zu, während sie nach Frequenz und Auswahlprinzip einem P-Niveau zugehören müßte, worauf auch Herr Wentzel den Vortragenden freundlicherweise aufmerksam gemacht hat. Abgesehen von solchen Einzelheiten kann aber

1) A. Smekal, Wien. Anz. 10. Februar 1921; Wien. Ber. 130 [2a], 25, 1921; Zeitschr. f. Phys. 5, 91, 121, 1921.

der von Kossel seinerzeit geäußerte Wunsch, „ein möglichst vollständiges Netz von Additionsbeziehungen über alle Terme und Linien zu spannen" heute im wesentlichen als erfüllt angesehen werden.

Die nächste Frage, die sich angesichts dieser Ergebnisse erhebt, ist nun die nach der Erklärung der zahlreichen gefundenen Energieniveaus auf Grund des Atommodells. Nach Bohr gibt es zwei Arten von L-Elektronen, hingegen haben wir aber drei L-Niveaus!, ferner drei Arten von M-Elektronen, aber fünf M-Niveaus! usw. Leider sind anscheinend noch keine experimentellen Tatsachen bekannt, welche eine bestimmte Aussage darüber zu machen gestatten, auf welche Art man unter den hierfür in Betracht kommenden Möglichkeiten etwa das Auftreten von drei L-Kanten zu verstehen hätte. Eine unter Umständen aussichtsreiche Gelegenheit zu derartigen Schlüssen böte die genauere Untersuchung des Intensitätsanstieges der L-Linien mit wachsender Röhrenspannung. Nach den Untersuchungen von Webster und Clark ist dieser Anstieg für die zu L_1 und L_2 gehörigen Linien ungefähr proportional der $^2/_3$ten Potenz des Spannungsüberschusses über das Anregungspotential, doch fehlen genauere Angaben, sowie auch die Untersuchung von zu L_3 gehörigen Linien. Sollte sich der Verlauf des Intensitätsanstieges mit wachsendem Potential für eine zu L_3 gehörige Linie als von dem der übrigen Linien verschieden herausstellen, so könnte hieraus — wie Herr Herzfeld gelegentlich gesprächsweise zusammen mit dem Vortragenden feststellte — unter Umständen auf eine gewisse Abhängigkeit der Anregung des L_3-Niveaus von L_1 oder L_2 geschlossen werden.

Eine andere Möglichkeit um derartige Fragen zu entscheiden, bietet die Abhängigkeit der Frequenzen einzelner Röntgenlinien von der Ordnungszahl. In dieser Hinsicht kann vielleicht einmal die nur bis zum Indium ($Z = 49$) gemessene Linie L_{α_3} eine gewisse Bedeutung erlangen. Dauvillier ist zwar der Ansicht, daß L_{α_3} nichts anderes als eine Fortsetzung der in diesem Gebiete nicht gefundenen Linie L_{η} darstelle, doch überzeugt man sich leicht, daß gegen diesen Schluß mancherlei ernste Bedenken vorliegen. Sollte L_{α_3}, wie wir annehmen möchten, nicht mit L_{η} identisch sein, so wäre daraus beispielsweise zu folgern, daß das Auftreten des M_5-Niveaus der schwersten Elemente, dem die Linien L_t und L_{η} ihre Entstehung verdanken, an das Vorhandensein einer vierquantigen N-Schale gebunden ist, die nach Bohr erst von den seltenen Erden an existieren kann, während L_{α_3} etwa mit der Dreiquantigkeit der N-Schale jener Elemente, bei denen diese Linie allein auftritt, in Verbindung gebracht werden müßte. Dies würde dann bedeuten, daß das M_5-Niveau nur unter wesentlicher Mitwirkung der nächstäußeren Schale zustande kommt.

Eine dritte Möglichkeit wäre schließlich vorhanden, wenn sich herausstellen sollte, daß Quantenübergänge zwischen verschiedenen Niveaus derselben Elektronenschale vorkommen. Wie Wentzel und Coster hervorheben, wäre eine dem Übergange $L_3 \rightarrow L_1$ entsprechende Spektrallinie in der Nähe der härtesten M-Linien beobachtbar, doch fehlen über dieses Gebiet, wie auch jenes der zu M_5 gehörigen Linien (deren Frequenzen sich aus dem Niveauschema ohne weiteres vorausberechnen lassen) Messungen noch vollständig. Hoffentlich werden diesbezügliche Untersuchungen, die Herr Coster bereits in Aussicht gestellt hat, baldigst einen weiteren Fortschritt in diesen wichtigen Fragen ermöglichen.

Diskussion.

Herr Wentzel weist auf Gesetzmäßigkeit des Niveauschemas hin. 1. Auswahlprinzip für zwei Quantenzahlen:

$$|n_A - n_E| < 1 \qquad |m_A - m_E| = 1.$$

2. Dublettanordnung des Niveaus; es wechseln reguläre Dubletts ($\Delta X = \text{const}$) und irreguläre Dubletts ($\Delta \sqrt{\nu} = \text{const}$) im Niveauschema ab.

E. Hückel, Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch anisotrope Flüssigkeiten. (Auszug aus der Göttinger Dissertation 1921.) (Mit Tafel VII.)

Das Ziel der auf Veranlassung von Herrn Professor Debye ausgeführten Arbeit ist die Entscheidung der Frage, ob bei den von O. Lehmann als „flüssige" bzw. als „fließende" Kristalle bezeichneten Substanzen eine Raumgitterstruktur vorkommt oder nicht. Diese Substanzen haben in den einfachsten Fällen ein bestimmtes zwischen Schmelz- und Klärungspunkt liegendes Temperaturgebiet, in dem sie trübe Schmelzen bilden. Die Beobachtung unter dem Polarisationsmikroskop zeigt, daß diese trüben Flüssigkeiten aus ungeordneten, optisch anisotropen Bereichen bestehen. Bei den fließenden Kristallen lassen sich unter dem Mikroskop bei Abkühlung unter den Klärungspunkt polyedrische kleine Kristalle beobachten, deren Ecken und Kanten mehr oder weniger abgerundet sind.

Die Arbeit wendet auf die trüben Flüssig-

keiten bei flüssigen und fließenden Kristallen die Debye-Scherrersche Methode der Röntgeninterferenzen an regellos orientierten Teilchen an. Dabei kommen aber nur die trüben Schmelzen als solche, nicht die sich bei den fließenden Kristallen während der Abkühlung ausscheidenden Kristalle zur Untersuchung. Denn diese letzteren zu durchstrahlen ist einerseits nicht notwendig, andererseits aber auch schwer ausführbar, da sie sich nicht stundenlang halten lassen, wie dies bei den erforderlichen langen Belichtungszeiten notwendig wäre.

Die Versuchsanordnung war folgende: die Substanz wurde in einem heizbaren Gefäß geschmolzen, dessen Boden von einer 0,01 mm dicken Aluminiumfolie gebildet wurde. Die Temperatur konnte mit einem Thermoelement gemessen werden. Auf diese Substanz fiel senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche ein Bündel Röntgenstrahlen, welches in der Hauptsache charakteristische Kupferstrahlung enthielt. Hinter der Aluminiumfolie des Gefäßbodens war eine photographische Platte aufgestellt. Besäßen die optisch anisotropen Bereiche der Flüssigkeit Raumgitterstruktur, so hätte man auf der Platte scharfe Interferenzen zu erwarten, die in Kreisen um den Primärstrahl bestehen. Handelt es sich dagegen um eine Flüssigkeit, so hat man nur einen unscharfen Beugungsring zu erwarten, dessen Durchmesser nach Debye[1]) ein Maß für die Größe der Moleküle der Flüssigkeit abgibt. Würde es sich um in Flüssigkeit suspendierte Raumgitterbereiche handeln, so müßten Kristallinterferenzringe und Flüssigkeitsbeugungsring gleichzeitig auftreten.

Es wurden untersucht:

Von den flüssigen Kristallen:

Paraazoxyanisol	fest,	trübflüssig,	klarflüssig
Paraazoxyphenetol	„	„	—
Dianisalazin	—	„	—

Von den fließenden Kristallen:

Cholesterylproprionat	fest,	trübflüssig,	klarflüssig
Cholesterylbenzoat	—	„	—

Ein Teil der gemachten Aufnahmen ist auf der beigegebenen Tafel zum Abdruck gebracht. Es ist dazu zu bemerken, daß die in Bild 1 erhaltene Interferenzfigur von der *Al*-Folie des Gefäßbodens herrührt und demgemäß auf allen Aufnahmen wiederkehrt. Daß die von der *Al*-Folie herrührenden Interferenzen keine Kreise, sondern symmetrisch auf Kreisen angeordnete Figuren geben, erklärt sich daraus, daß durch das Walzen der Folie gewisse Orientierungen der das Aluminium bildenden Kristalle bevorzugt sind.

Das Resultat, welches ebenso aus den nicht zum Ausdruck gebrachten Aufnahmen folgt, läßt sich aus den Aufnahmen ohne weiteres ablesen:

Bei den festen Substanzen ergaben sich Raumgitterinterferenzen. Bei den trüben Flüssigkeiten trat ebenso wie bei den klaren nur der unscharfe Beugungsring auf ohne eine Andeutung von Raumgitterinterferenzen. Daraus ist die Folgerung zu ziehen: Die trüben Schmelzen bestehen nicht aus Raumgitterbereichen; ferner sind auch keine merklichen Mengen von Raumgitterbereichen in der Flüssigkeit suspendiert. Nicht unmöglich dagegen ist es, daß geringe Mengen von Kristallen in der Flüssigkeit suspendiert sind, da die von ihnen herrührenden Interferenzen zu schwach wären, um nachweisbar zu sein. Nicht berührt wird hiervon die Tatsache, daß bei den fließenden Kristallen bei der Abkühlung unter dem Klärungspunkt sich Kristalle ausscheiden.

Auf Grund dieses Ergebnisses ist in der Überschrift von anisotropen Flüssigkeiten statt von flüssigen und fließenden Kristallen die Rede. Denn es entspricht wohl dem allgemeinen Gebrauch, das Wort Kristall für Körper mit Raumgitterstruktur vorzubehalten. Man wäre sonst genötigt, z. B. ein Gas mit Molekülen, welche elektrische Dipole tragen im elektrischen Felde, oder ein paramagnetisches Gas im magnetischen Felde als Kristall zu bezeichnen. Denn hier tritt ebenso wie bei den sog. flüssigen und fließenden Kristallen optische Anisotropie auf.

Da also die anisotropen Flüssigkeiten keine Raumgitterstruktur besitzen, so ist wohl anzunehmen, daß es sich bei den anisotropen Bereichen um infolge ihrer elektrischen oder auch magnetischen Eigenschaften mehr oder weniger geordnete Moleküle handelt, etwa in dem Sinne, wie dies die Bornsche Theorie der anisotropen Flüssigkeiten annimmt, doch vermag naturgemäß die vorliegende Arbeit darüber keinen Aufschluß zu geben.

Zum Schluß möchte ich es nicht unterlassen, Herrn Professor Vorländer auch an dieser Stelle für die freundliche Überlassung der Substanzen zu danken, durch die er mir die Ausführung der Versuche ermöglichte.

1) Nach einem auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Bad Nauheim 1920 gehaltenen Vortrage.

Diskussion.

Weigert-Leipzig: Das Resultat von E. Hückel steht in Übereinstimmung damit, daß bis jetzt noch niemals bei der akzidentellen Doppelbrechung Änderungen der Röntgeninterferenz aufgefunden wurden, so daß die Anisotropie der flüssigen Kristalle wahrscheinlich wie bei den akzidentell doppelbrechenden Stoffen nicht in Molekulardimensionen liegt, sondern in größeren Molekularkomplexen, die gerichtet sind, innerhalb derer aber die Einzelmoleküle ungeordnet liegen.

E. Tiede (Berlin), Borsäurehydrate als Grundlage hochphosphoreszenzfähiger Systeme. (Nach gemeinsamen Versuchen mit den Herren P. Wulff und A. Ragoß.) (Mit Demonstrationen.)

Setzt man zu reinster Orthoborsäure gewisse organische Verbindungen, besonders aromatische und heterozyklische in sehr geringer Menge hinzu und entwässert dann diese Mischungen in geeigneter Weise weitgehend, aber nicht völlig, durch Schmelzen, ohne daß eine Zersetzung der organischen Körper stattfindet, so erhält man Präparate, die nach dem Erkalten und Erstarren der Borsäurehydratschmelzen außerordentlich stark phosphoreszieren. Die neuartigen Phosphore leuchten nach vorangegangener Belichtung durch passende, besonders ultraviolette, Lichtquellen in sehr intensivem nach den jeweils eingebetteten organischen Verbindungen verschiedenfarbigem Lichte nach und klingen relativ schnell ab, die bisher besten Präparate in etwa 2—3 Minuten. Die Borsäurephosphore stehen in Analogie zu den durch die schon lange zurückliegenden Versuche von E. Wiedemann und G. C. Schmidt entdeckten Lumineszenzerscheinungen, doch zeigen sie auch weitgehende Unterschiede, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Die Intensität des Phosphoreszenzeffektes, sowie die Möglichkeit, die Präparate in durchsichtiger Schicht darzustellen, dürfte diese Phosphore verschiedenen Problemen der physikalischen und chemischen Forschung nutzbar machen. Es braucht ja hier nur an die Arbeiten der Herren Lenard und Stark und auf rein chemischem Gebiet an die von Kauffmann, Ley usw. erinnert zu werden.

(Die ausführliche Publikation der Untersuchung erfolgt demnächst in den Berichten der Deutschen Chemischen Gesellschaft.)

—

R. Seeliger (nach Versuchen gemeinsam mit K. Lapkamp), **Über Absorption von Gasen durch Kristalle.**

I. Einleitung.

Einige Kristalle der Zeolithgruppe haben, wie zuerst Friedel[1]) feststellte, später Rinne[2]) und Grandjean[3]) weiter untersuchten, die merkwürdige Eigenschaft, daß sie nach Austreibung des in ihnen enthaltenen Wassers sehr heftig und in großen Mengen Gase oder Dämpfe an Stelle dieses Wassers aufzunehmen vermögen. Die von Friedel mitgeteilten Zahlenangaben sowie die Ergebnisse einer orientierenden Untersuchung von Wolff[4]) zeigten bereits eine auffallend große Aufnahmefähigkeit für Gase, so daß eine eingehendere Untersuchung wünschenswert schien. Wir geben hier den ersten Teil der Untersuchung, die für eine Reihe ausgewählter Gase die bei 0° C zwischen 0 und 760 mm *Hg* Druck aufgenommenen Mengen und den zeitlichen Verlauf der Gasaufnahme enthält, und zwar in quantitativen Angaben. Ob es sich dabei um eine reine Adsorption im üblichen Sinne handelt oder ob die Gase in den Kristallverband eintreten und dort festgehalten werden, ist eine noch nicht entschiedene Frage. Während die Absorptionsversuche wenigstens zum Teil dafür zu sprechen scheinen, daß ein entwässerter Zeolithkristall ein offenbar sehr feines Netzwerk von großer wirksamer Oberfläche und sehr geringer Porengröße darstellt und sich prinzipiell ähnlich verhält wie die bekannten porösen, adsorbierenden Körper (wobei allerdings der Gitterbau insofern quantitativ von Bedeutung ist, als er die Größe der wirksamen Oberfläche bedingt und als alle Umstände die Aufnahmefähigkeit vermindern oder ganz zum Verschwinden bringen, welche ihn zerstören), scheinen andererseits gewisse mit der Absorption verknüpfte Änderungen der optischen Eigenschaften, z. B. der Lage der optischen Achsen, darauf hinzudeuten, daß die aufgenommenen Gase unmittelbar in das Kristallgitter eintreten[5]).

II. Versuchsanordnung.

Zu unseren Versuchen benutzten wir als das am besten geeignete Mineral Chabasit (von Rübendörfel in Böhmen), dessen Zusammen-

1) G. Friedel, Bull. Soc. Min. Francs. **19**, 14, 94, 1896.
2) F. Rinne, Jahrb. d. Min. 1897, II, 30.
3) Grandjean, C. R. **149**, 866, 1909.
4) W. Wolff, Diss. Greifswald 1920; R. Nacken u. W. Wolff, Centralbl. f. Min. etc. 1921, S. 364.
5) Zusammenfassung der Literatur bis 1905 bei C. Doelter, Phys.-chem. Mineralogie, Kap. 17.

setzung zu $Ca(Al_2)Si_4O_{12} \cdot 6H_2O$ angegeben wird. Er wurde stets bei 400° C entwässert, wobei er rund 16 Proz. seines Gesamtgewichts oder rund 80 Proz. des ursprünglichen Wassergehaltes verliert. Bringt man den so vorbereiteten Chabasit in einen evakuierten Raum, so ist er bereit, Gase irgendwelcher Art aufzunehmen. Diese Aufnahme kann durch erneute Evakuation in den meisten Fällen quantitativ rückgängig gemacht, der Kristall also so in einfacher Weise vollständig regeneriert werden, vorausgesetzt natürlich, daß die aufgenommenen Gase sorgfältig getrocknet waren. Unter den von uns untersuchten Gasen ließen sich nur NO, NH_3 und C_2H_2, letzteres wenn es nicht vom Phosphorwasserstoff befreit war, nicht durch bloße Evakuation wieder vollständig austreiben, sondern es mußte eine erneute Erhitzung zu Hilfe genommen werden. Vor und nach jedem Absorptionsversuch prüften wir durch Einschalten eines Versuchs mit trockener Luft und eines Versuchs im evakuierten Raum in doppelter Weise, ob der Chabasit wirklich unverändert geblieben war, wobei sich innerhalb der Fehlergrenzen (die für unsere Messungen kleiner als 1 Proz. sind) stets dieselben Werte ergaben. Da sich ferner zeigte, daß die Aufnahmefähigkeit bei öfterem Erhitzen (auf 400°) sich ändert, mußte auch hier die Möglichkeit streng reproduzierbarer Verhältnisse festgestellt werden. Es ergab sich, daß die Aufnahmefähigkeit mit der Zahl der vorangegangenen Erhitzungen abnimmt zu einem konstanten Endwert (der nach etwa drei Erhitzungen bereits erreicht wird und etwa 70 Proz. des für den nur einmal benutzten Chabasit geltenden Wertes beträgt). Auf diesen Endzustand beziehen sich demgemäß alle unsere Angaben.

Untersucht wurden die Gase $(Ne + He)$ Gemisch, bestehend aus 75 Proz. Helium und 25 Proz. Neon, Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Metan (CH_4), Acetylen (C_2H_2), Ammoniak (NH_3), Kohlensäure (CO_2) und Stickoxyd (NO). Über die Herstellung dieser Gase ist, abgesehen von sorgfältiger Trocknung in mehreren langen Phosphorpentoxyd-, Chlorcalcium- oder Natronkalktürmen, noch folgendes zu sagen: (Ne, He) Gemisch entnommen aus einer Bombe, die uns von der Linde-A.-G. freundlichst zur Verfügung gestellt war, geleitet über glühendes Mg; H_2 aus Bombe, sowie elektrolytisch dargestellt; N_2 aus Bombe, geleitet über glühendes Cu; O_2 elektrolytisch dargestellt. CO_2 aus Bombe; C_2H_2 aus Calciumcarbid, geleitet durch $AgNO_3$; CH_4 aus Aluminiumcarbid, geleitet durch $AgNO_3$-Lösung; NH_3 aus konzentrierter Lösung; NO aus KNO_2 und H_2SO_4 mit $FeSO_4$-Zusatz, geleitet durch eine essigsaure Lösung von gelbem Blutlaugensalz.

Die Methode der Absorptionsmessung war die in einer vorläufigen Notiz bereits beschriebene dynamische Methode[1]), die sich vorzüglich bewährt hat und mit einer fast beliebigen Genauigkeit große Bequemlichkeit verbindet. Sie besteht darin, daß man den absorbierenden Körper einmal im Vakuum vor der Absorption und dann in dem zu untersuchenden Gas nach der Absorption Torsionsschwingungen ausführen läßt. Die Zunahme dT der Schwingungsdauer T gibt dann unmittelbar die absorbierte Gasmenge ε in Gewichtsprozenten des absorbierenden Körpers nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{2dT}{T}(1 + K_0/K_K),$$

worin K_0 das Trägheitsmoment der Aufhängung, K_K das des absorbierenden Körpers ist. In unserem Fall waren K_0/K_K und Dämpfung zu vernachlässigen, sodaß wir ε erhielten aus zwei reinen Zeitmessungen. Diese, d. h. die Bestimmung der Schwingungsdauern, wurden vorgenommen mit Skala und Spiegel und mit Hilfe einer elektromagnetisch ausgelösten Stoppuhr. Die Benutzung einer Koinzidenzmethode, welche die Genauigkeit ohne Mühe auf 0,1 Promille steigern ließe, war für den vorliegenden Zweck entbehrlich, da wir auch mit der genannten einfachen Anordnung eine vollkommen hinreichende Genauigkeit (von einigen Promille) erzielten[2]). Im einzelnen ist zur Versuchsanordnung noch folgendes zu bemerken: Wir benutzten etwa 4 g ausgesuchte Chabasitkristalle in Stückchen von etwa 3 mm Durchmesser, die von einem dünnen Drahtnetz zusammengehalten wurden. Dieses Netz, das zugleich einen kleinen Spiegel trug, war aufgehängt an einem Platindraht von 50 cm Länge und 0,04 mm Dicke und konnte durch einen Torsionkopf mit Schliff in Schwingungen versetzt werden. Das ganze Absorptionsgefäß war umgeben von einem Bad aus schmelzendem Eis, um die Temperatur auf 0° konstant zu halten, eine Vorsichtsmaßregel, welche die über Tage sich erstreckenden Versuchsdauern erforderten. Der Druck im Absorptionsgefäß wurde abgelesen an einem Quecksilbermanometer, und zwar unter Berücksichtigung des Barometerstandes auf 1 mm genau. Die Schwingungsdauer war von der Größenordnung von 5 sec und wurde in der angegebenen Weise aus je 100 Schwingungen bestimmt.

1) R. Seeliger, Zeitschr. f. Phys. **4**, 189, 1921.

2) Sollte bei der Absorption eine Quellung oder Schrumpfung der Kristalle stattfinden, so käme hierdurch eine Fehlerquelle herein, die sich aber im Gegensatz zu der Sachlage bei der üblichen volumetrischen Methode bei unserer dynamischen Methode durch Verkleinerung der Korndimensionen beliebig verkleinern ließe.

III. Ergebnisse.

Die Absorptionsisothermen bei 0° zwischen 0 und 760 mm Hg sind nach unseren Versuchen in der Fig. 1 gezeichnet, und zwar sind

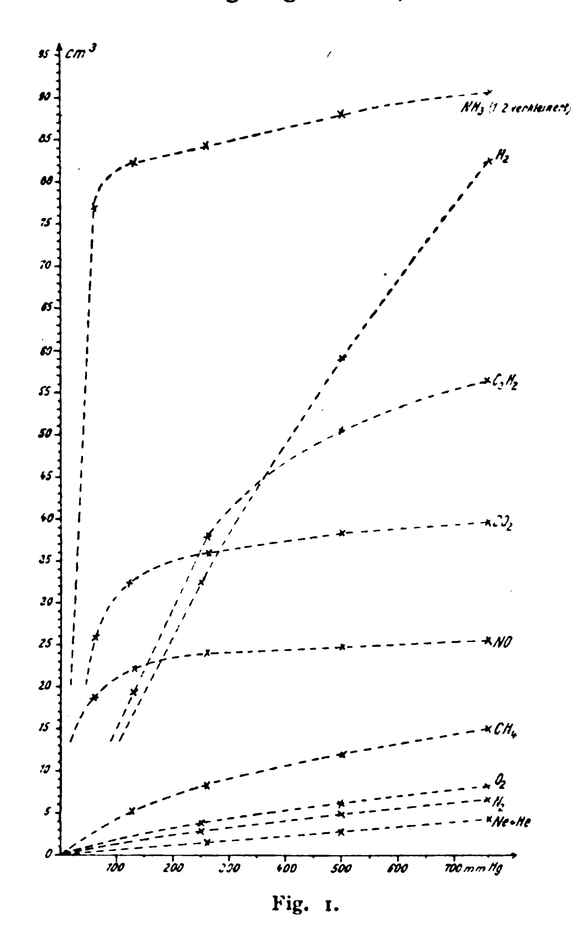


Fig. 1.

als Ordinaten ccm (reduziert auf 0° und 760 mm) der von 1 g Chabasit aufgenommenen Gase angegeben. Qualitativ fällt bereits die Ähnlichkeit mit den Adsorptionsisothermen auf, wie sie bei den bisher untersuchten Adsorbentien (Kohle, Meerschaum, Glaspulver u. dgl.) erhalten wurden, nämlich das Hinstreben nach einem Sättigungszustand mit wachsendem äußeren Druck. Dabei machen sich aber spezifische Eigenschaften der Gase schon insofern bemerkbar, als die schwer verdichtbaren H_2, N_2, O_2, $(Ne + He)$ in dem untersuchten Druckbereich deutlich nach am weitesten von der Sättigung entfernt sind. Eine Gesetzmäßigkeit ergab sich bei dem naheliegenden Versuch, die Aufnahmefähigkeiten in Beziehung zu bringen zu den kritischen Temperaturen der aufgenommenen Gase. In Unkenntnis der im Sättigungszustand aufgenommenen Mengen konnten wir allerdings nur die bei 760 mm Druck erhaltenen Werte miteinander vergleichen, doch zeigte sich bereits hier ganz unverkennbar, daß die aufgenommenen Mengen (cm³/g) um so größer sind, je höher die kritische Temperatur ist, wie dies die Tabelle I zeigt[1]). Eine Ausnahme macht nur H_2, der vollkommen aus der Reihe herausfällt. Bei NO und CH_4 könnte man bei Betrachtung der Kurven daran zweifeln, ob im Zustand der Sättigung ersteres oder letzteres mehr aufgenommen hätte. Die in der Literatur angegebenen Werte der kritischen Temperaturen (94° für NO und 82—95° für CH_4) sind mit der einen oder anderen Extrapolation im Sinne unserer Regel verträglich. Bemerkenswert scheint endlich noch zu sein, daß sich bei den Gasen, deren kritische Temperatur oberhalb der Beobachtungstemperatur (0° C) liegt, nämlich bei CO_2, C_2H_2 und NH_3 keinerlei Unregelmäßigkeiten im Verlauf der Isothermen finden. Tiefer kann man natürlich in die Verhältnisse eindringen, wenn man den ganzen Verlauf der Isothermen berücksichtigt, wie dies am besten durch eine formelmäßige Darstellung desselben geschieht[2]). Ebenso wie die bekannten Adsorptionsisothermen lassen sich die von uns gefundenen Kurven näherungsweise darstellen durch die Formel[3])

Tabelle I.

Gas	v_{760}	T_K (in C)
$(Ne + He)$ . .	4,10	(< —264; < —200)
N_2	6,89	— 146
O_2	8,32	— 119
CH_4	15,18	— 82 (— 95)
NO	25,67	— 94
CO_2	39,60	+ 31
C_2H_2	56,46	+ 37
H_2	82,22	— 241
NH_3	180,59	+ 131

$$v = a \cdot p^{\frac{1}{n}}.$$

Die numerische Rechnung und besser noch die graphische Prüfung durch Zeichnung der log. p-log. v-Kurven (Fig. 2) zeigen, daß eine solche Darstellung in erster Näherung möglich ist. Die Abweichungen liegen wie bei den Adsorptionsisothermen in dem Sinn, daß $\frac{1}{n}$ mit wachsendem Druck abnimmt. Die Werte für die

1) Benutzt man zur Ordnung der Gase an Stelle der kritischen Temperaturen die Konstante a der van der Waalsschen Gleichung (vgl. Zsigmondy, Kolloidchemie, S. 91), so erhält man, wiederum mit Ausnahme von H_2, einen analogen gesetzmäßigen Zusammenhang.

2) Für alles Folgende sei hingewiesen auf Freundlichs Kapillarchemie.

3) v ist gemessen in cm³/g, p in cm Hg.

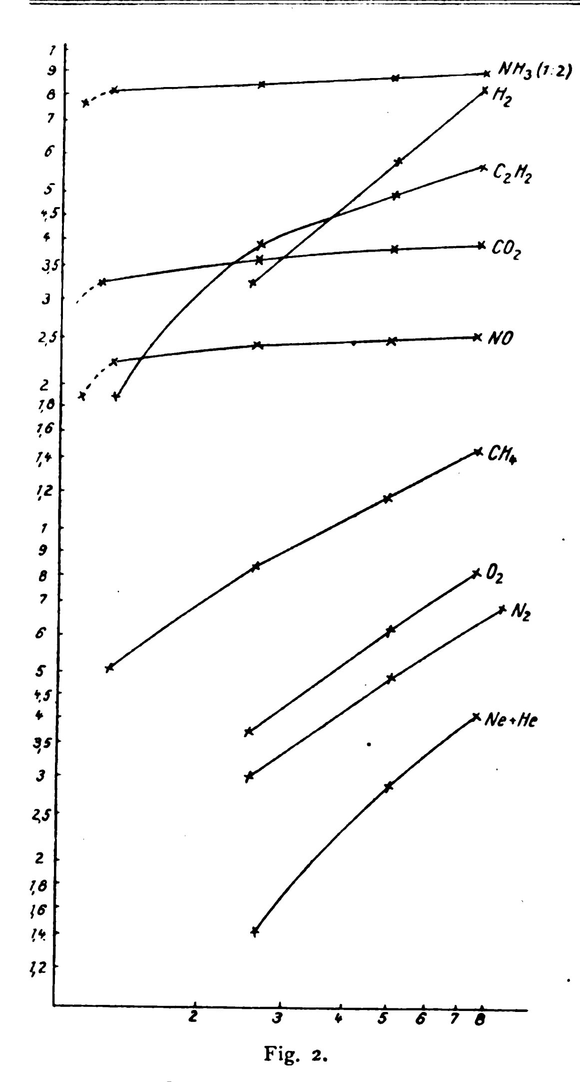


Fig. 2.

konstanten $\frac{1}{n}$ und α sind in der Tabelle II zusammengestellt, und zwar sind die Gase geordnet

Tabelle II.

Gas	$1/n$	α
$(Ne + He)$ . . .	0,96	0,06
H_2	0,83	2,26
N_2	0,73	0,29
O_2	0,71	0,37
NO	0,08	18,14
CH_4	0,64	9,76
CO_2	0,12	24,13
C_2H_2	0,43	9,38
NH_3	0,06	138,02

nach steigenden kritischen Temperaturen. Sehen wir zunächst ab von einer Diskussion der α-Werte, denen bei der weiten Extrapolation geringe Bedeutung zukommt, so finden wir, daß $\frac{1}{n}$ mit sinkender kritischer Temperatur gegen den Wert 1 strebt, wie dies auch Adsorptionsversuche an den üblichen Adsorbentien wahrscheinlich gemacht haben. Bemerkenswert ist, daß sich nun H_2 durchaus in die reguläre Reihenfolge einordnet und daß die Grenzen für $\frac{1}{n}$ bei Chabasit wesentlich weiter gespannt sind als bei den anderen Adsorbentien. Deutliche Ausnahmen bilden nur NO und C_2H_2. Bei letzterem sind allerdings die Abweichungen der logarithmischen Kurven von der Geradlinigkeit so groß, daß ein Rückschluß auf den Wert von $\frac{1}{n}$ mit Vorsicht zu betrachten ist. (Es scheint auf einen tieferen Zusammenhang hinzudeuten, daß gerade diese Gase, wie wir sogleich sehen werden, auch bezüglich des zeitlichen Verlaufs der Gasaufnahme sich irregulär verhalten.) Über die α-Werte ist aus dem oben genannten Grund wenig zu sagen, sie spiegeln in rohem Gang den bereits bekannten Zusammenhang der Sättigungsmengen mit den kritischen Temperaturen nun auch für die bei 1 cm Druck aufgenommenen Mengen wieder. Abgesehen von der bereits bemerkten Ausnahme für H_2 fallen deutlich wiederum NO und C_2H_2 aus der Reihe heraus, und zwar liegt die Abweichung für α in beiden Fällen gerade in der umgekehrten Richtung wie die für $\frac{1}{n}$.

Der zeitliche Verlauf der Gasaufnahme bei 760 mm Druck ist in Fig. 3 wiedergegeben. Qualitativ zeigen unsere Kurven dasselbe Bild, wie es für die Adsorption bereits bekannt ist; quantitativ mißt die Zeit bis zur Erreichung des Gleichgewichts jedoch hier nach Stunden, bei dem am schnellsten eindringenden Wasserstoff etwa 1/2 Stunde, bei dem am langsamsten eindringenden Stickstoff etwa 20 Stunden, die Aufnahmegeschwindigkeit ist also erheblich kleiner als bei den üblichen Adsorbentien. Auffallend ist, daß gerade die beiden Gase NO und C_2H_2 durch besonders kleine Aufnahmegeschwindigkeit ausgezeichnet sind, für die wir oben eine Irregularität der $\frac{1}{n}$- (und α-)Werte gefunden hatten. Ferner ist bemerkenswert, daß Wasserstoff hier auch insofern eine Sonderstellung einnimmt, als für ihn die Aufnahmegeschwindigkeit besonders groß ist, größer insbesondere als die für $(He + Ne)$, O_2 und N_2.

Zum Schluß sei noch die Aufnahmefähigkeit einiger der bisher untersuchten Adsorbentien verglichen mit der Aufnahmefähigkeit des Chabasits, wie dies in der Tabelle III durchgeführt ist. Mit Ausnahme wiederum von Wasserstoff erhielten wir (alles bezogen auf 0°

Tabelle III.

Absorber	He	$(Ne+He)$	H_2	N_2	O_2	CH_4	CO_2	NH_3	Bemerkungen
Kohle . . .	—	—	1,5	13,0	—	—	65,8	135,0	Titoff, Zeitschr. f. phys. Chem. **74**, 641, 1910.
Kohle . . .	1,2	—	2,4	9	10,8	—	—	—	Dewar.
Kohle . . .	—	—	—	12	—	33	55	—	Homfrey, Ztschr. f. phys. Chem. **74**, 121, 1910.
Chabasit . .	—	4,1	82,2	6,9	8,3	15,1	39,6	180,6	

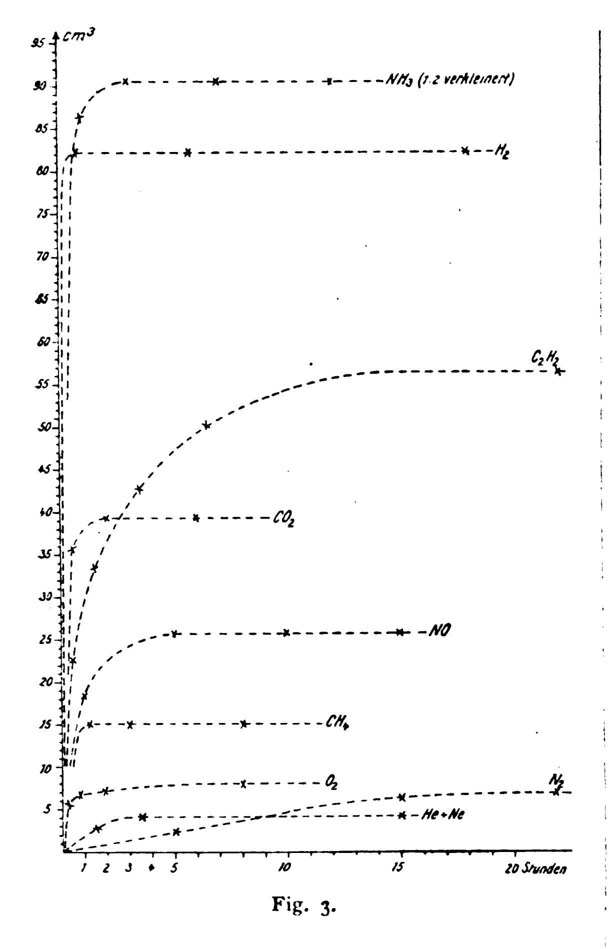


Fig. 3.

und 760 mm) dieselbe Größenordnung, wie sie an jenen beobachtet wurde. Ergänzt seien diese Angaben noch durch die α-Werte: Für NH_3 an Meerschaum 54,8, an Chabasit 138, für CO_2 an Kohle 2,9, an Chabasit 24, soweit die notwendigen Extrapolationen nach dem oben über die Erfüllung des exponentialen Gesetzes Gesagten einen Vergleich zulassen.

IV. Zusammenfassung.

Soweit die bisherigen Versuche reichen, kommt man zusammenfassend zu einem recht verwickelten Bild für das Verhalten des Chabasits, insofern, als zwar der größere Teil der Beobachtungsergebnisse eine Deutung der Gasaufnahme im Sinn einer thermodynamisch erfaßbaren Adsorption erlaubt, als aber diesen so deutliche Ausnahmen gegenüberstehen, daß man die Mitwirkung spezifischer, noch unbekannter Faktoren nicht in Abrede stellen kann und als endlich drittens diese Ausnahmen z. T. noch recht widerspruchsvoll mit anderen etwa möglichen Deutungsversuchen sind.

Für die Deutung als reine Adsorption sprechen:

1. Der qualitative Charakter der Absorptionsisothermen und des zeitlichen Verlaufs.

2. Der bei allen Gasen mit Ausnahme von H_2 bestehende gesetzmäßige Zusammenhang zwischen den aufgenommenen Mengen und den kritischen Temperaturen.

3. Der bei allen Gasen mit Ausnahme von NO und C_2H_2 bestehende gesetzmäßige Zusammenhang zwischen den Werten von $\frac{1}{n}$ und den kritischen Temperaturen.

4. Die Tatsache, daß sich alle Gase mit Ausnahme von NO, NH_3 (und ungereinigtem C_2H_2) durch bloßes Abpumpen, d. h. Erniedrigung des äußeren Druckes wieder entfernen lassen.

Gegen die Deutung als reine Adsorption sprechen:

5. Die außerordentlich große Aufnahmefähigkeit für H_2, die ganz außerhalb der Regel 2 liegt (vgl. jedoch 3 und 4).

6. Die außerhalb der Regel 3 liegenden Werte von für NO und C_2H_2.

7. Die Tatsache, daß sich NO, NH_4 und C_2H_2, wenn es nicht von PH_3 befreit ist, durch Abpumpen allein nicht wieder vollständig entfernen lassen.

Endlich sind noch die folgenden Befunde beachtenswert, die auf tiefere Zusammenhänge hindeuten:

8. Der großen Aufnahmefähigkeit für H_2 (vgl. 5) entspricht auch eine große Aufnahmegeschwindigkeit.

9. Den Ausnahmen 6 entspricht auch eine Ausnahmestellung bezüglich der Aufnahmegeschwindigkeit.

Greifswald, Juli 1921.



Diskussion.

Riesenfeld: Das abweichende Verhalten von NO und NH_3 erklärt sich vielleicht dadurch, daß NO- und NO_3-Moleküle an Stelle fehlender H_2O-Moleküle in das Kristallgitter der Zeolithe eintreten. Die leichte Ersetzbarkeit von Kristallwasser durch NO und NH_3 ist dem Chemiker in sehr vielen Fällen bekannt.

Spangenberg fragt an, ob die von Nacken und Wolff veröffentlichten Ergebnisse, z. B. bezüglich der Proportionalität von aufgenommener Gas- und abgegebener Wassermenge, durch die neuen Versuche bestätigt werden.

Fürth: Ich möchte fragen, wie es kommt, daß die geometrische Gestalt des Kristalls nicht in die Formel für ε eingeht, da doch die Absorption vornehmlich von der Oberfläche des Kristalls ausgeht, also das Trägheitsmoment nicht der aufgenommenen Gasmenge proportional verändert wird.

Seeliger: Das kommt nicht in Betracht. Wir haben zu den Versuchen ganz kleine Kristalle in ein Netz eingeschlossen.

Lichtenecker: Die Adsorption ruft ja nicht bloß eine Vergrößerung der Masse, sondern auch eine Vergrößerung des Volumens hervor, die beide in die Änderung des Trägheitsmomentes eingehen. Dies scheint in der Formel nicht berücksichtigt zu sein. Namentlich bei Wasserstoff, der bei den Versuchen eine Sonderstellung ergibt, ist eine relativ große Volumänderung möglich, die auf das mitgeteilte Ergebnis Einfluß haben könnte.

Seeliger: Ich habe keine Vergrößerung des Volumens bemerken können und deshalb in der Formel auch nicht berücksichtigt. Sollte es aber der Fall sein, so ließe sich der Fehler durch Zerteilung in kleine Teile beliebig verkleinern (vgl. S. 564 Fußnote 2).

Walther Gerlach u. Peter Lertes (Frankfurt a. M.), Magnetische Messungen: Barkhauseneffekt, Hysteresis und Kristallstruktur.

Barkhausen[1]) hat beobachtet, daß in einem Telephon, welches unter Zwischenschaltung eines Lautverstärkers mit einer um ein Ferromagnetikum gelegten Spule verbunden ist, ein lautes Rauschen auftritt, wenn der magnetische Kern ummagnetisiert wird. In einer früheren Mitteilung[2]) konnten wir an Hand quantitativer Messungen zeigen, daß mit einer Magnetisierung bzw. Ummagnetisierung nicht immer auch dieser Effekt auftritt. Andererseits zeigten wir das Auftreten des Effektes bei rein mechanischer Beanspruchung des ferromagnetischen Kernes. Ferner ergab sich, daß die Temperaturabhängigkeit des Effektes absolut nicht mit der Temperaturabhängigkeit der Induktion übereinstimmt, vielmehr ganz ähnlichen Verlauf hat wie die Temperaturfunktion der Koerzitivkraft oder — noch mehr — der Magnetostriktion. Wir haben in verschiedenen Richtungen weitere Versuche gemacht, von denen hier zwei mitgeteilt werden sollen: Der Zusammenhang des Effektes mit der Hysteresis und der Kristallstruktur des Ferromagnetikums. Hierfür standen uns Proben zur Verfügung, welche wir dem entgegenkommenden Interesse von Krupp (bes. Herrn Professor B. Strauß sind wir zu Dank verpflichtet) und der Chemischen Fabrik Griesheim-Elektron verdanken.

Es ergab sich allgemein das schon von früher bekannte Resultat, daß der Effekt bei verschiedenen Materialien um so größer ist, je magnetisch weicher das Material ist. Untersucht man dagegen dasselbe Material nach verschiedener thermischer Vorbehandlung, so wird der Effekt um so kleiner, je kleiner der Hysteresisverlust wird. Dies wurde sowohl an Elektrolyteisen wie an Schmiedeeisen und Stahl bestätigt gefunden. Auch zwei Proben von Transformatorenblech (von Krupp), die aus gleichem Material hergestellt, dagegen thermisch verschieden behandelt waren, hatten Effekte, welche etwa im Verhältnis der Wattverluste waren.

In diesem vorerst nur in großen Zügen erkannten Ergebnis kommt zweierlei zum Ausdruck: beim Vergleich verschiedener Materialien wesentlich die Form der Hysteresisschleife, in der der Effekt mit wachsender Steilheit zunimmt, wobei sich das Maximum des Effekts gleichzeitig zu kleineren Feldstärken hin verschiebt; hat die Hysteresisschleife dagegen bei zwei Proben wesentlich dieselbe Form, so hat die Probe den kleineren Effekt, welche den kleineren Verlust hat. Wieweit noch zwischen Koerzitivkraft und Remanenz unterschieden werden muß, ist noch nicht erkannt.

Wir haben früher schon auf einen möglichen Einfluß der Kristallstruktur hingewiesen. Dieser konnte nun bestätigt werden, indem einmal gefunden wurde, daß die Größe des Hysteresisverlustes mit der Größe der Kristallite direkt zusammenhängt, andererseits der Effekt mit wachsender Größe der Kristallite abnimmt. Aus einem von Krupp gestifteten Kristallblock von 4 Proz. Eisensilicium konnte ein einheitlicher Kristall von 3 cm Länge herausgeschnitten werden, der gegen ein anderes nicht kristallisiertes

1) Diese Zeitschr. **20**, 401, 1919.
2) W. Gerlach u. P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. **4**, 383, 1921.

Stück einen außerordentlich kleinen Effekt nur noch hatte.

Weiterhin wurde Eisendraht gleichzeitig longitudinal und zirkular magnetisiert, letzteres dadurch, daß ein Gleichstrom durch den Draht geschickt wurde. Diese zirkulare Magnetisierung bewirkt bei geringer Stärke schon eine bedeutende Verminderung, bei hinreichender Stärke ein vollständiges Verschwinden des Effekts. Eine Tabelle möge ein Beispiel geben: Geglühter Eisendraht 0,3 mm Durchmesser, longitudinales Feld etwa 50 Gauß. E Größe des Effekts bei longitudinaler Ummagnetisierung als Funktion des zirkularen Magnetisierungsstromes J (Amp.)

J	0	0,5	1,0	2,0	4,0	5,0
E	4400	3600	2900	1400	600	270

Dasselbe für ein longitudinales (Ummagnetisierungs-)Feld 500 Gauß:

J	0	0,5	1,0	2,0	4,0	5,0
E	2900	2000	1300	750	250	160

Die unter E gegebenen Zahlen sind die Galvanometerausschläge in einem hinter den Verstärker gesetzten Gleichrichtungskreis. Die Deutung dieser Versuche liegt offenbar in der Verringerung der Hysteresisverluste durch die zirkulare Magnetisierung.

Fassen wir alle unsere Beobachtungen zusammen, so dürften sie etwa zu folgender Erklärung der Erscheinung führen[1]). Durch die Magnetisierung tritt eine Deformation der das Ferromagnetikum bildenden Kristallite (oder „Elementarmagnetkomplexe" oder „größere Verbände von Molekularmagneten" nach Barkhausen) ein, und dadurch mechanische Reibung zwischen benachbarten Teilchen. Diese bringen den ganzen Kern zum Schwingen; und die hierdurch bedingten, bei der Ummagnetisierung auftretenden mehr oder weniger periodischen Formänderungen des Kernes (vielleicht verbunden mit Änderungen der Permeabilität) erzeugen die unregelmäßigen Induktionsstöße, welche im Telephon der anfangs genannten Anordnung gehört werden.

Diskussion.

Lertes: Die magnetischen Felder, welche durch die Wechselströme in den Verstärkerformatoren entstehen, sind minimal, die minimalen Wechselstromamplituden so klein, daß die dadurch in den Eisenteilen der Transformatoren entstehenden Barkhausenschen Geräusche so gering sind, daß sie mit dem Telephon gar nicht wahrgenommen werden können. Demnach sind die beobachteten Geräusche auch nicht im Verstärker begründet.

1) Über weitere Untersuchungen wird an anderer Stelle berichtet werden.

H. Rubens und G. Michel[1]) (Berlin), Prüfung der Planckschen Strahlungsformel.

Die kritische Untersuchung der Herren W. Nernst und Th. Wulf[2]), welche bei sorgfältiger Durchsicht des älteren Beobachtungsmaterials[3]) auf gewisse scheinbar systematische Abweichungen von der Planckschen Formel gestoßen sind, hat eine erneute experimentelle Prüfung dieser Formel notwendig gemacht. Auf Herrn Nernsts Anregung haben wir uns dieser Arbeit unterzogen und besonders diejenigen Spektralgebiete und Temperaturbereiche berücksichtigt, in welchen jene Abweichungen am stärksten hervortreten. Es handelt sich hier um das Gebiet der mittleren Werte von $x = \frac{c}{\lambda T}$, da für große x-Werte das Wiensche, für kleine x-Werte das Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz mit den früheren Beobachtungen in guter Übereinstimmung gefunden worden ist, wenn man die Konstante c entsprechend den neueren Bestimmungen gleich 14300 setzt[4]).

Zur Prüfung der Strahlungsformel wählten wir der zahlreichen, oft genannten Vorteile wegen die Methode der Isochromaten. In theoretischer Beziehung ist sie der Isothermenmethode gleichwertig, wenn man das thermodynamisch sehr sicher begründete Wiensche Verschiebungsgesetz als richtig anerkennt.

Unseren Messungen haben wir die neue Temperaturskala[5]) der Reichsanstalt vom Jahre

1) Eine eingehendere Darstellung der hier mitgeteilten Versuche ist in den Berichten der Preuß. Akademie der Wissensch. 1921, S. 590 veröffentlicht. In Beziehung auf alle Einzelheiten der Versuchsanordnung, der Instrumente und Kontrollmessungen muß auf diese Arbeit hingewiesen werden.

2) W. Nernst u. Th. Wulf, Verh. d. D. Phys. Ges. 1919, S. 294.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 1899, S. 23 u. S. 215; 1900, S. 163; 1901, S. 37; ferner F. Paschen, Wied. Ann. **58**, 455, 1896; **60**, 662, 1897; Berichte der Preuß. Akad. d. Wissensch. 1899, S. 5, 405 u. 459; Ann. d. Phys. **4**, 277, 1901; ferner H. Rubens u. F. Kurlbaum, Berichte der Preuß. Akad. d. Wissensch. 1900, S. 929 u. Ann. d. Phys. **4**, 649, 1901; ferner W. W. Coblentz, Bull. Bur. of Standards 1913 u. 1916.

4) E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka u. C. Müller, Ann. d. Phys. **40**, 609, 1913; E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. **48**, 410, 1915; ferner L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. **22**, 1, 1907; S. Valentiner, Ann. d. Phys. **39**, 489, 1912; L. Flamm, diese Zeitschr. **18**, 521, 1917; W. W. Coblentz, Bull. Bur. of Standards 1916.

5) E. Warburg, Ann. d. Phys. **48**, 1034, 1915. Nach dieser Skala liegt der Palladiumschmelzpunkt bei 1557°, also 8° höher als der von Day und Sosman gasthermometrisch gemessene.

1915 zugrunde gelegt; doch sind unsere Ergebnisse von dieser Skala insofern unabhängig, als wir dieselbe durch Strahlungsmessungen im Geltungsbereich des Rayleigh-Jeansschen Gesetzes nachprüfen und bestätigen konnten.

Unsere schwarzen Körper gestatteten eine Variation der Strahlungstemperatur zwischen derjenigen der flüssigen Luft und etwa 1400° C. In einigen Fällen konnten wir auch bis zum Palladiumschmelzpunkt gehen. Unter diesen Umständen erschien es uns am vorteilhaftesten, Isochromaten für die Wellenlängen 4, 5, 7, 9, 12, 16, 22 und 52 μ innerhalb möglichst weiter Temperaturgrenzen aufzunehmen.

Versuchsanordnung und Instrumente.

Die Versuchsanordnung, welche bei der Aufnahme der kurzwelligeren Isochromaten (4—16 μ) verwendet wurde, ist in Fig. 1 dargestellt. K ist einer der verwendeten schwarzen Körper, D ein mit Leitungswasser gespültes, kreisförmiges Diaphragma von 1 cm Durchmesser, M_1 ein vorderseitig versilberter Planspiegel, H ein Hohlspiegel, welcher die auffallende Strahlung auf den Spalt S_1 eines Wadsworthschen Spiegelspektrometers $S_1H_1H_2S_2$ wirft und dort ein

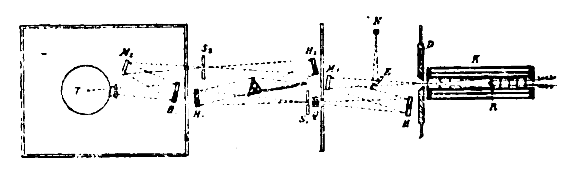


Fig. 1.

scharfes verkleinertes Bild des Diaphragmas D erzeugt, welches den 5 mm langen Spalt S_1 vollkommen bedeckt. Die Öffnung des Hohlspiegels H sowie die Entfernungen DM_1, M_1H und HS_1 waren so bemessen, daß nur solche Strahlen zur Beobachtung gelangten, welche von der Rückwand R des strahlenden schwarzen Körpers ausgesandt wurden. Die Messungen bei 4 μ, 5 μ und 7 μ wurden mit einem Flußspatprisma, diejenigen bei 9 und 12 μ mit einem Steinsalzprisma, diejenigen bei 16 μ mit einem Sylvinprisma ausgeführt. Die vorderseitig versilberten Hohlspiegel H_1 und H_2 hatten 5 cm Öffnung und 35 cm Brennweite. Nach ihrem Austritt aus dem Spalt S_2 wurde die Strahlung an dem Planspiegel M_2 und darauf an dem Hohlspiegel H_3 reflektiert, welcher sie auf dem Thermoelement T des als Strahlungsempfänger verwendeten Mikroradiometers R zu einem Bilde des Spaltes S_2 vereinigt. Q ist der für die Ausschlagsmessung notwendige Klappschirm, bestehend aus vier parallelen Aluminiumplatten mit Luftzwischenräumen. Das benutzte Mikroradiometer zeichnete sich durch besonders gute Ruhelage aus, so daß der Fehler bei der Messung kleiner Ausschläge selten ein Zehntelmillimeter überschritt. Die Proportionalität der Ausschläge mit den zu messenden Intensitäten wurde nach der Ångströmschen Methode[1]) sorgfältig geprüft.

Die in Fig. 1 mit NE bezeichnete Einrichtung diente dazu, die Strahlung des betreffenden schwarzen Körpers K mit derjenigen eines konstanten Hilfsstrahlers N (Glühstift oder Heizspirale einer Nernstlampe) durch Einschalten oder Entfernen des Planspiegels E zu vergleichen. Wir haben uns auf diese Weise gegen Fehler gesichert, welche durch Variation der Empfindlichkeit unserer Meßanordnung während einer mehrere Stunden erfordernden Versuchsreihe eintreten können.

Fig. 2 zeigt die Versuchsanordnung für die Aufnahme der langwelligen Isochromaten. Die Strahlung des schwarzen Körpers K_1 durchsetzt das Diaphragma D und trifft auf die 6 mm dicke Flußspatplatte Q', welche als Klappschirm dient. Dann treten die Strahlen durch das Diaphragma

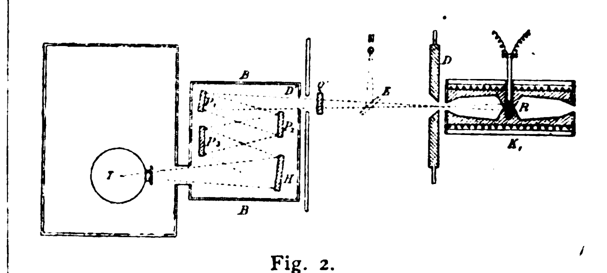


Fig. 2.

D' in den Kasten B, welcher die reflektierenden Platten und den Hohlspiegel H enthielt. Dieser bestand bei den Versuchen mit Reststrahlen von Flußspat, bei welchem man nur drei Reflexionen braucht, aus versilbertem Glas. Bei den Reststrahlen von Steinsalz aber sind vier Reflexionen unbedingt erforderlich. Deshalb wurde hier eine als Hohlspiegel geschliffene Steinsalzplatte zur Konzentration der Strahlung verwendet. Durch den Hohlspiegel H wurden die Reststrahlen auf das Thermoelement T des Mikroradiometers geworfen.

Strahlungsquellen.

Es gelangten vier schwarze Körper zur Verwendung, welche im folgenden mit den Nummern I bis IV bezeichnet sind. Nummer I war ein Kupferblechkasten in Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds von $18 \times 13 \times 13$ cm, in welchen ein 13 cm langer, 10 cm

1) K. Ångström, Wied. Ann. **26**, 256, 1885.

breiter zylindrischer Innenkörper mit konischen Enden eingesetzt war. Die Öffnung hatte 3 cm Durchmesser. Der Hohlkörper war mit einem Gemisch von Kohlenruß und Natronwasserglas auf seiner Innenseite geschwärzt. Dieser schwarze Körper wurde ausschließlich im Bereich der tiefen Temperaturen benutzt. Insbesondere diente er zur Ermittelung der Klappenkorrektion, wobei der Zwischenraum zwischen seinen Metallwänden mit flüssiger Luft gefüllt war.

Der schwarze Körper II ist in Fig. 2 abgebildet. Er sollte zwischen Zimmertemperatur und 550° C verwendet werden. In diesem Temperaturbereich ist die Wärmeleitung das beste Ausgleichsmittel, während im Gebiete der hohen Temperaturen die Wärmestrahlung das wirksamere Mittel der Energieübertragung bildet. Der hier beschriebene schwarze Körper wurde deshalb aus möglichst gut leitendem Material mit großen Wandstärken hergestellt. Er bestand aus einem 22 cm langen zylindrischen Kupferblock von 8 cm Durchmesser, welcher in der in Fig. 2 angedeuteten Weise hohl ausgedreht war, so daß zwei nach außen sich verjüngende birnenförmige Öffnungen entstanden. Das in der Mitte stehengebliebene Kupferstück war mit einem auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Bohrloch versehen, in welches ein Widerstandspyrometer eingeführt werden konnte. Der äußere Mantel des Kupferzylinders war mit einer Lage Asbestpapier umgeben und mit einer Heizspirale aus Manganindraht umwunden. Diese wiederum war von mehreren Lagen Asbestpappe umkleidet, und ebenso waren die beiden Endflächen des Kupferzylinders durch kreisförmige Asbestscheiben, welche nur die beiden Öffnungen der Hohlräume frei ließen, gegen Wärmeverlust möglichst geschützt. Die eine dieser beiden Öffnungen hatte 2,5 cm, die andere 3 cm Durchmesser. Der Körper war auf seiner inneren Oberfläche mit Kupferoxyd geschwärzt.

Die mit III und IV bezeichneten schwarzen Körper entsprachen in Beziehung auf ihre Einrichtung und ihre Abmessungen genau dem von den Herren Lummer und Kurlbaum beschriebenen Modell[1]), so daß auf eine nähere Beschreibung hier verzichtet werden kann. Sie unterschieden sich nur dadurch voneinander, daß Körper III ein Innenrohr aus Marquardtscher Masse besaß, welches mit einem Gemisch von Kobaltoxyd und Chromoxyd geschwärzt war, während das Innenrohr des Körpers IV aus ungeschwärzter Magnesia hergestellt war. Zur Temperaturmessung diente in beiden Fällen ein Le Chateliersches Thermoelement. Die Heizung wurde in der üblichen Weise durch einen dünnwandigen Platinzylinder bewirkt, welcher das Innenrohr eng umschloß.

Ein Unterschied in der „Schwärze" der verwendeten schwarzen Körper II, III und IV konnte nicht nachgewiesen werden, da sie bei gleicher Temperatur hinter demselben Diaphragma innerhalb der Fehlergrenzen die gleiche Strahlung ergaben.

Temperaturmessung.

Bei dem mit I bezeichneten schwarzen Körper war keine Vorrichtung zur Messung der Temperatur angebracht. Das in dem Körper II zur Temperaturmessung dienende Widerstandspyrometer aus Platin hatte einen Widerstand von 25 Ohm bei 0°. Es war von der Firma Heraeus bezogen und von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeicht worden. Die Widerstandsmessung geschah mit Hilfe eines Wolffschen Präzisionsrheostaten in Form einer Wheatstoneschen Brücke (Meßschaltung 10 zu 100 Ohm).

Es war zu erwarten, daß die in dem Meßloch mit Hilfe des Widerstandspyrometers gemessene Temperatur etwas höher sein würde als diejenige der strahlenden inneren Oberfläche des schwarzen Körpers. Um die Größe dieser Temperaturdifferenz festzustellen, bedienten wir uns eines geeichten Thermoelements aus 0,3 mm dicken Silber- und Konstantandrähten, welches bei konstant gehaltener Temperatur des schwarzen Körpers abwechselnd in das Meßloch und durch eine der Strahlungsöffnungen in das Innere des strahlenden Hohlraumes eingeführt wurde, so daß die temperaturempfindliche Lötstelle des Elements die Wand bei R (Fig. 2) berührte. Diese Temperaturdifferenzen, welche im Maximum 3,5° betrugen, wurden wiederholt sorgfältig gemessen und bei der Aufnahme der Isochromaten berücksichtigt.

Die Le Chatelier-Thermoelemente in den Körpern III und IV wurden nur als „Halteinstrumente" verwendet und mehrfach im Laufe der Untersuchung mit einem von der Reichsanstalt besonders sorgfältig geeichten „Normalelement" verglichen. Die Messung der elektromotorischen Kräfte geschah durch Kompensation nach dem Holmann-Lindeckschen Verfahren. Diese außerordentlich bequeme Methode[1]) gestattet zwar nur Temperaturmessungen bis auf etwa 1°. Es hat jedoch nur geringen Wert, genauere

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 106, 1898. Der Körper ist in Fig. 1, K in kleinem Maßstab abgebildet.

1) Vgl. Burgess Le Chatelier, übersetzt von G. Leithäuser, Berlin, Julius Springer 1913, S. 126.

Temperaturangaben zu machen, weil einerseits die Eichgenauigkeit der Thermoelemente Fehler von derselben Größenordnung zuläßt und weil andererseits die strahlenden Innenwände der schwarzen Körper noch Temperaturunterschiede von mehreren Graden aufweisen.

Korrektionen.

Um uns von der spektralen Reinheit der untersuchten Strahlung zu überzeugen oder um gegebenenfalls den etwa vorhandenen Betrag von diffuser Strahlung anderer Wellenlängen zu messen und in Abzug zu bringen, wurde meist in der Weise verfahren, daß eine Kristallplatte in den Strahlengang eingeführt wurde, welche für die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers in dem betreffenden Temperaturbereich eine hohe Durchlässigkeit besitzt, die untersuchte homogene Strahlung von der Wellenlänge λ aber vollkommen absorbiert. Eine scheinbare Durchlässigkeit dieser Platte für die untersuchte Strahlung zeigt dann das Vorhandensein diffuser Strahlung an, deren Stärke sich aus dieser scheinbaren Durchlässigkeit sowie aus der Durchlässigkeit derselben Platte für die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers leicht berechnen läßt, wenn man die wohlbegründete Annahme macht, daß die Verunreinigung dieselbe spektrale Zusammensetzung besitzt wie die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers. Wir verwendeten bei 5 μ und 7 μ eine 2 mm dicke Quarzplatte, bei 12 μ und 16 μ eine 6 mm dicke Flußspatplatte, bei 22 und 52 μ eine 10 mm dicke Steinsalzplatte. Die beobachteten Verunreinigungen waren meist sehr gering und erreichten nur bei den Isochromaten von 12 und 16 μ im Bereich der höchsten Temperaturen Beträge, welche 2 Proz. überstiegen. Da die Größe der Korrektion sich sehr genau ermitteln ließ, wurde die Genauigkeit der Isochromaten durch die vorhandenen Spuren fremder Strahlung kaum beeinflußt.

Bei den Versuchen mit der Reststrahlenanordnung waren zwei weitere Korrektionen anzubringen. Die eine wurde dadurch verursacht, daß die Temperatur des Wassers, mit welchem das Diaphragma D gespült wurde, niemals genau mit derjenigen des Mikroradiometers übereinstimmte, so daß Strahlen, welche von den Rändern des Diaphragmas ausgingen und auf das Thermoelement gelangten, einen noch eben erkennbaren Einfluß auf die Größe der gemessenen Ausschläge ausübten, welcher im Maximum etwa 0,15 mm betrug. Eine zweite Korrektion wurde deshalb notwendig, weil auch die als Klappschirm dienende Flußspatplatte Q' sich bei hohen Temperaturen des schwarzen Körpers durch die dauernde Bestrahlung merklich über Zimmertemperatur erwärmte, so daß bei ihrem Aufziehen ein sehr kleiner Kälteausschlag entstand, welcher einige Promille des Gesamtausschlags erreichte. Beide Korrektionen wurden in jedem einzelnen Falle sorgfältig ermittelt und die beobachteten Ausschläge entsprechend korrigiert.

Beobachtungsergebnisse.

Die Resultate unserer Messung sind in den Tabellen I bis VIII enthalten. An dem Kopf einer jeden Tabelle ist die Wellenlänge der betreffenden Isochromate sowie die Breite der Spalte S_1 und S_2 in Millimetern angegeben, bei den Wellenlängen oberhalb 5 μ auch die „Klappenkorrektion", das ist der Ausschlag, welchen man beim Aufziehen des Klappschirms erhalten würde, wenn der schwarze Körper sich auf der Temperatur des absoluten Nullpunkts befände. Bei 4 μ und 5 μ ist die „Klappenkorrektion" vollkommen zu vernachlässigen, bei 7 μ beträgt sie 0,31 mm. Ihre Größe wurde hier nicht durch Beobachtung, sondern durch Rechnung unter Zugrundelegung der Planckschen Formel ermittelt. Im Bereiche der längeren Wellen konnte die Klappenkorrektion mit Hilfe des mit flüssiger Luft gefüllten schwarzen Körpers I direkt gemessen werden. Da es sich hierbei um die Beobachtung sehr geringer Strahlungsintensitäten handelte, wurden die Spalte S_1 und S_2 auf den $1^1/_2$fachen Betrag erweitert und die Ausschläge dadurch reichlich verdoppelt. Durch Aufnahme einiger Punkte derselben Isochromate mit den gleichen Spaltbreiten bei höheren Temperaturen (Körper II) wurde der Anschluß der „Klappenkorrektion" an die mit engen Spalten beobachtete Zahlenreihe gewonnen. Die Plancksche Formel lehrt, daß bei 9 μ, 12 μ und 16 μ der beobachtete Kälteausschlag des schwarzen Körpers bis auf unmeßbar kleine Größen derselbe ist, wenn sich der Strahler auf der Temperatur der flüssigen Luft oder auf derjenigen des absoluten Nullpunktes befindet. Bei 22 μ beträgt jene Differenz δ in dem dort gewählten Maßstab erst ein Zehntel, bei 52 μ 0,73 mm. Bei diesen beiden Tabellen ist der theoretisch berechnete Wert der Ausschlagsdifferenz δ angegeben, welcher sich bei einer weiteren Abkühlung des schwarzen Körpers von -190^0 bis -273^0 ergeben würde. In allen Tabellen sind die als „beobachtet" bezeichneten Ausschläge gleich den direkt gemessenen vergrößert um den vollen Betrag der auf den absoluten Nullpunkt bezogenen Klappenkorrektion.

Die angegebenen Wellenlängen sind bei Verwendung des Fluoritprismas mit Hilfe der

Tabelle I.

$\lambda = 4{,}002\ \mu$, Spaltbreite $= 0{,}25$ mm, Klappenkorrektion o.

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	$C' = \frac{C}{1+\alpha}$	$\delta C'$
361	634	5,636	279,4	9,46	26,46	— 11	1,044	25,34	+ 36
459	732	4,881	130,8	20.33	26,60	+ 3	1,051	25,31	+ 33
563	836	4,274	70.89	37,95	26,90	+ 33	1,058	25,43	+ 45
659	932	3,834	45,24	58,34	26,39	— 18	1,063	24,83	— 15
763	1036	3,449	30,47	87,00	26,51	— 6	1,066	24,87	— 11
856	1129	3,165	22,69	116,50	26,43	— 14	1,068	24,75	— 23
956	1229	2,907	17,31	154,27	26.70	+ 13	1,071	24,93	— 5
1064	1337	2,673	13,48	197,44	26,62	+ 5	1,072	24,83	— 15
1147	1420	2,516	11,38	232,49	26,46	— 11	1,072	24,68	— 30
1258	1531	2,334	9,318	283,14	26,39	— 18	1,069	24,69	— 29
1355	1628	2,195	7,979	335.30	26,76	+ 19	1,067	25,08	+ 10
					Mittel: 26,57	16,7		Mittel: 24,98	

Tabelle II.

$\lambda = 4{,}990\ \mu$, Spaltbreite 0,3 mm, Klappenkorrektion o.

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	$C' = \frac{C}{1+\alpha}$	$\delta C'$
245*	518	5,532	251,6	5,43	13,66	+ 14	1,045	13,07	+ 33
344*	617	4,645	103,03	13,06	13,43	— 9	1,055	12,75	+ 1
370	643	4,457	85,22	15,81	13,47	— 5	1,056	12,76	+ 2
452*	725	3,953	51,08	26,69	13,63	+ 11	1,061	12,85	+ 11
463	736	3,894	48,09	28,04	13,48	— 4	1,062	12,70	— 4
561	834	3,436	30,07	44,63	13,42	— 10	1,067	12,58	— 16
657	930	3,082	20,79	64,57	13,42	— 10	1,069	12,56	— 18
758	1031	2,780	15,11	89,95	13,59	+ 7	1,072	12,68	— 6
859	1132	2,532	11,57	117,76	13,62	+ 10	1,072	12,71	— 3
959	1232	2,326	9,215	147,26	13,58	+ 6	1,069	12,70	— 4
1040	1313	2,183	7,870	171,56	13,50	— 2	1,067	12,65	— 9
1158	1431	2,003	6,409	209,72	13,44	— 8	1,060	12,68	— 6
1256	1529	1,874	5,517	244,20	13,48	— 4	1,054	12,79	+ 5
1341	1614	1,776	4,904	276,15	13,53	+ 1	1,040	12,00	+ 16
					Mittel: 13,52	8,4		Mittel: 12,74	

Paschenschen Dispersionsmessungen berechnet[1]). Bei den Versuchen mit dem Steinsalz- und Sylvinprisma wurden sowohl die Dispersionsmessungen von Herrn Paschen[2]) als auch diejenigen von Rubens und Trowbridge[3]) herangezogen und aus beiden berechneten Wellenlängen, welche sich um einige Promille unterscheiden, der Mittelwert gebildet. Die angegebenen mittleren Wellenlängen der Reststrahlen von Flußspat sind mit dem Beugungsgitter[4]), diejenigen von Steinsalz mit dem Interferometer[5]) unter Versuchsbedingungen, welche den hier vorliegenden vollkommen entsprachen, früher gemessen worden. Es mag nochmals hervorgehoben werden, daß die Reststrahlen von Flußspat durch die Einschaltung der 6 mm dicken Sylvinplatte in den Strahlengang, welche als Mikroradiometerfenster diente, sehr viel homogener werden, während gleichzeitig ihre mittlere Wellenlänge auf 22,3 μ verringert wird.

Die erste Spalte der Tabellen gibt die Temperatur t des strahlenden schwarzen Körpers in Celsiusgraden. Die unbezeichneten Zahlen beziehen sich auf den schwarzen Porzellankörper III, die mit einem Sternchen versehenen auf den Kupferkörper II, die mit einem Punkt bezeichneten auf den Magnesiakörper IV, die mit zwei Sternchen markierten auf den Hohlkörper I. In der zweiten Spalte sind die absoluten Temperaturen T, in der dritten die Werte von $x = \frac{c}{\lambda T}$ angegeben, wobei c entsprechend den Darlegungen der Herren Nernst und Wulf zu 14300 angenommen worden ist. In der vierten Spalte sind die Größen $e^x - 1$ aufgeführt, welche nach der Planckschen Formel den Strahlungsintensitäten umgekehrt proportional sein müssen. Dann folgen in der fünften Spalte die als „E

1) F. Paschen, Wied. Ann. **53**, 301, 1894 u. Ann. d. Phys. **4**, 299, 1901.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. **26**, 120, 1908.

3) H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied. Ann. **60**, 724, 1897.

4) H. Rubens, Berichte der Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 1282.

5) H. Rubens, Berichte der Preuß. Akad. d. Wissensch. 1913, S. 522.

Tabelle III.

$\lambda = 6{,}992\ \mu$, Spaltbreite 0,7 mm, Klappenkorrektion 0,31 mm (berechnet).

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x = 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	$C' = \frac{C}{1+\alpha}$	$\delta C'$
152*	425	4,812	122,4	3,03	37,09	+ 8	1,052	35,26	− 7
252*	525	3,896	48,19	7,65	36,87	− 14	1,062	34,71	− 48
344*	617	3,315	26,54	14,08	37,39	+ 38	1,068	35,01	− 18
354	627	3,262	25,10	14,81	37,17	+ 16	1,068	34,81	− 38
464	737	2,774	15,02	24,85	37,33	+ 32	1,071	34,85	− 34
556	829	2,467	10,79	34,15	36,85	− 16	1,072	34,37	− 83
661	934	2,190	7,933	46,63	36,98	− 3	1,067	34,66	− 53
765	1038	1,970	6,173	60,09	37,08	+ 7	1,058	35,05	− 14
852	1125	1,818	5,160	72,27	37,29	+ 28	1,048	35,58	+ 39
956	1229	1,664	4,281	86,33	36,95	− 6	1,043	35,43	+ 24
1051	1324	1,545	3,687	100,65	37,14	+ 13	1,036	35,85	+ 66
1158	1431	1,429	3,176	115,57	36,74	− 27	1,030	35,67	+ 48
1255	1528	1,339	2,813	130,51	36,67	− 34	1,027	35,71	+ 52
1372	1645	1,243	2,467	148,31	36,63	− 38	1,023	35,81	+ 62
				Mittel:	37,01	22,6	Mittel:	35,19	

Tabelle IV.

$\lambda = 8{,}944\ \mu$, Spaltbreite 0,8 mm, Klappenkorrektion 2,97 mm (gemessen).

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	$C' = \frac{C}{1+\alpha}$	$\delta C'$
104*	377	4,241	68,48	10,72	73,41	− 56	1,058	69,39	− 153
203*	476	3,359	27,76	26,62	73,90	− 7	1,067	69,21	− 171
304*	577	2,771	14,97	49,62	74,28	+ 31	1,071	69,36	− 156
362	635	2,518	11,37	65,68	74,70	+ 73	1,072	69,69	− 123
405*	678	2,358	9,572	78,07	74,73	+ 76	1,071	69,78	− 114
467	740	2,161	7,677	96,54	74,12	+ 15	1,066	69,53	− 139
571	844	1,894	5,648	130,51	73,71	− 26	1,054	69,93	− 99
650	923	1,732	4,653	158,49	73,75	− 22	1,045	70,57	+ 35
761	1034	1,546	3,694	201,08	74,28	+ 31	1,036	71,70	+ 78
853	1126	1,420	3,137	235,51	73,88	− 9	1,030	71,73	+ 81
962	1235	1,295	2,659	279,56	74,32	+ 35	1,025	72,51	+ 159
1059	1332	1,200	2,321	318,25	73,87	− 10	1,021	73,31	+ 239
1164	1437	1,113	2,043	359,08	73,36	− 61	1,018	72,06	+ 114
1260	1533	1,043	1,838	402,13	73,91	− 6	1,016	72,75	+ 183
1380	1653	0,9673	1,631	449,41	73,30	− 67	1,014	72,29	+ 137
				Mittel:	73,97	44,1	Mittel:	70,92	

beobachtet“ bezeichneten Ausschläge und in der sechsten das Produkt $C = (e^x - 1)E$, multipliziert mit einer passenden Zehnerpotenz, dessen Konstanz für alle Temperaturen als Kriterium für die Richtigkeit der Planckschen Isochromaten dient. Die siebente Spalte liefert die Abweichungen der einzelnen C-Werte von ihrem Mittelwert in Einheiten der zweiten Dezimalstelle. Die am Fuße der Kolonne stehende Zahl ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung. Die drei letzten Spalten der Tabellen dienen zu dem Vergleich unserer Beobachtungen mit der von den Herren Nernst und Wulf vorgeschlagenen Korrektion. Die achte Spalte enthält den Korrektionsfaktor $(1 + \alpha)$, die neunte $C' = \frac{C}{1 + \alpha}$, eine Größe, welche, die Richtigkeit jener Korrektion vorausgesetzt, konstant sein müßte. In der letzten

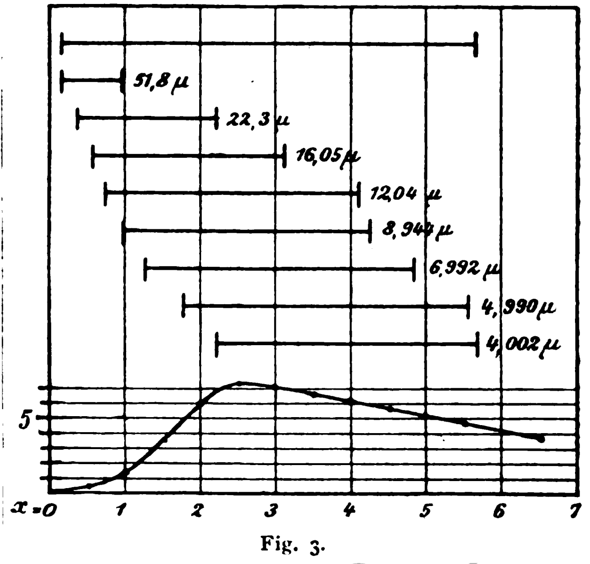


Fig. 3.

Tabelle V.

$\lambda = 12{,}04\ \mu$, Spaltbreite 1,0 mm, $\delta = 0$.

Cels.°	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	C'	$\delta C'$
16**	289	4,110	59,93	1,93	11,57	− 4	1,060	10,90	− 32
119*	392	3,030	19,69	6,03	11,87	+ 26	1,070	11,09	− 13
233*	506	2,347	9,460	12,33	11,66	+ 5	1,071	10,89	− 33
319*	592	2,006	6,436	17,95	11,55	− 6	1,060	10,90	− 32
345	618	1,922	5,834	20,01	11,67	+ 6	1,055	11,07	− 15
409*	682	1,742	4,706	24,55	11,55	− 6	1,045	11,05	− 17
453	726	1,636	4,135	28,23	11,67	+ 6	1,040	11,22	± 0
522*	795	1,494	3,455	33,65	11,63	+ 2	1,035	11,23	+ 1
555	828	1,434	3,197	36,15	11,56	− 5	1,031	11,21	− 1
636	929	1,278	2,591	44,38	11,51	− 10	1,024	11,24	+ 2
755	1028	1,155	2,175	53,49	11,63	+ 2	1,020	11,40	+ 18
854	1127	1,054	1,869	62,63	11,71	+ 10	1,017	11,51	+ 29
961	1234	0,962	1,618	71,62	11,59	− 2	1,014	11,43	+ 21
1058	1331	0,892	1,441	80,07	11,54	− 7	1,012	11,40	+ 18
1166	1439	0,825	1,283	89,73	11,51	− 10	1,011	11,40	+ 18
1269	1542	0,770	1,160	99,63	11,56	− 5	1,009	11,45	+ 23
1370	1643	0,723	1,060	108,67	11,52	− 9	1,008	11,43	+ 21
					Mittel: 11,61	9,2		Mittel: 11,22	

Tabelle VI.

$\lambda = 16{,}05\ \mu$, Spaltbreite 1,2 mm, $\delta = 0$.

Cels.°	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	C'	$\delta C'$
16**	289	3,083	20,82	2,44	50,80	+ 11	1,069	47,52	− 206
122*	395	2,256	8,541	5,94	50,73	+ 4	1,069	47,46	− 212
243*	516	1,727	4,622	10,90	50,38	− 31	1,044	48,26	− 132
349*	622	1,432	3,189	15,93	50,80	+ 11	1,031	49,27	− 31
363	636	1,401	3,059	16,69	51,06	+ 37	1,030	49,57	− 1
459*	732	1,217	2,378	21,24	50,51	− 18	1,021	49,47	− 11
459	732	1,217	2,378	21,28	50,60	− 9	1,021	49,56	− 2
540*	813	1,095	1,990	25,29	50,33	− 36	1,018	49,44	− 14
562	835	1,067	1,907	26,56	50,65	− 4	1,017	49,80	+ 22
661	934	0,9528	1,593	31,81	50,67	− 2	1,014	49,97	+ 39
760	1033	0,8625	1,369	37,18	50,90	+ 21	1,011	50,34	+ 76
863	1136	0,7843	1,191	42,34	50,43	− 26	1,010	49,93	+ 35
959	1232	0,7232	1,061	48,12	51,06	+ 37	1,008	50,65	+ 107
1063	1336	0,6669	0,948	53,47	50,69	± 0	1,007	50,34	+ 76
1169	1442	0,6179	0,855	59,12	50,55	− 14	1,006	50,25	+ 67
1269	1542	0,5778	0,782	65,09	50,90	+ 21	1,006	50,60	+ 102
1383	1656	0,5380	0,713	71,04	50,65	− 4	1,005	50,40	82
					Mittel: 50,69	21,6		Mittel: 49,58	

Spalte endlich sind wiederum die Abweichungen $\delta C'$ von dem Mittelwert aller C' aufgeführt.

Fig. 3 zeigt für jeden der acht Isochromaten in übersichtlicher Weise, welches Gebiet der x-Werte dieselbe umfaßt. In dem unteren Teile der Figur ist die von den Herren Nernst und Wulf eingeführte Korrektionsgröße α als Funktion von x in Prozenten aufgetragen. Man erkennt den schnellen Anstieg der Kurve bis zu dem bei $x = 2{,}5$ gelegenen Maximum (7,2 Proz.) und den langsamen Abstieg mit wachsenden x. Die über der Kurve gezeichneten horizontalen Linien kennzeichnen die einzelnen Versuchsreihen bezüglich des Umfangs der darin vorkommenden x-Werte. Die oberste Horizontale zeigt das gesamte durchmessene Gebiet. Man sieht, daß die kurzwelligste Isochromate ($\lambda = 4\ \mu$) fast nur solche x-Werte enthält, welche auf dem absteigenden Aste liegen. Die Isochromaten von 5 μ, 7 μ, 9 μ und 12 μ umfassen beide Äste der Kurve. Die langwelligen Isochromaten von 16 μ, 22 μ und 52 μ endlich sind ausschließlich oder vorwiegend auf den aufsteigenden Ast der α-Kurve beschränkt. Ferner übersieht man, daß sich die α-Korrektion besonders stark bei den Isochromaten für $\lambda = 9\ \mu$, 12 μ und 16 μ bemerkbar machen muß.

Die Zahlen der Tabellen I bis VIII lassen jedoch erkennen, daß die Berechtigung für eine solche Korrektion, wenigstens in der von den Herren Nernst und Wulf angenommenen

Tabelle VII.

Reststrahlen von Flußspat (22,3 μ), $\delta = 0{,}1$ mm (berechnet).

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	C'	$\delta C'$
19**	292	2,196	7,991	24,11	19,27	+ 16	1,067	18,06	— 82
104*	377	1,701	4,480	42,7	19,13	+ 2	1,043	18,34	— 54
200*	473	1,359	2,892	66,7	19,28	+ 17	1,027	18,77	— 11
300*	573	1,119	2,062	93,4	19,26	+ 15	1,018	18,92	+ 4
352	625	1,026	1,790	106,4	19,05	— 6	1,016	18,75	— 13
405*	678	0,946	1,575	121,6	19,15	+ 4	1,014	18,89	+ 1
419	692	0,927	1,526	124,5	19,00	— 11	1,013	18,76	— 12
502*	775	0,827	1,288	147,9	19,05	— 6	1,011	18,84	— 4
551·	824	0,780	1,182	161,3	19,05	— 4	1,010	18,88	± 0
552	825	0,777	1,176	161,5	18,99	— 12	1,010	18,82	— 6
694	967	0,663	0,9409	202,2	19,01	— 10	1,007	18,88	± 0
804	1077	0,595	0,8138	233,6	19,01	— 10	1,006	18,90	+ 2
952	1225	0,523	0,6879	278,3	19,14	+ 3	1,005	19,04	+ 16
1045	1318	0,487	0,6267	305,7	19,16	+ 5	1,005	19,06	+ 18
1049·	1322	0,485	0,6243	305,6	19,08	— 3	1,005	18,99	+ 11
1051	1324	0,484	0,6231	306,6	19,10	— 1	1,005	19,00	+ 12
1152	1425	0,450	0,5683	337,5	19,19	+ 8	1,004	19,11	+ 23
1245·	1518	0,422	0,5257	363,5	19,11	± 0	1,004	19,03	+ 15
1246	1519	0,422	0,5253	363,0	19,07	— 4	1,004	18,99	+ 11
1343	1616	0,397	0,4871	391,0	19,05	— 6	1,004	18,97	+ 9
1425·	1698	0,378	0,4589	417,2	19,15	+ 4	1,003	19,09	+ 21
1439	1712	0,375	0,4544	421,1	19,14	+ 3	1,003	19,08	+ 20
1558·	1831	0,350	0,4194	456,6	19,15	+ 4	1,003	19,09	+ 21
				Mittel:	19,11	8,4	Mittel:	18,88	

Tabelle VIII.

Reststrahlen von Steinsalz (51,8 μ), $\delta = 0{,}73$ mm (berechnet).

Cels. ⁰	T abs.	$x = \frac{c}{\lambda T}$	$e^x - 1$	E beob.	C	δC	$1 + \alpha$	C'	$\delta C'$
17**	290	0,9519	1,596	11,41	18,21	+ 11	1,013	17,98	— 7
150*	423	0,6526	0,9206	19,65	18,10	± 0	1,007	17,97	— 8
245*	518	0,5321	0,7030	25,84	18,17	+ 7	1,006	18,06	+ 1
347*	620	0,4453	0,5610	32,28	18,11	+ 1	1,004	18,04	— 1
352·	625	0,4417	0,5554	32,74	18,08	— 2	1,004	18,01	— 4
399*	672	0,4108	0,5080	35,73	18,15	+ 5	1,003	18,10	+ 5
443·	716	0,3856	0,4704	38,38	18,07	— 3	1,003	18,02	— 3
463*	736	0,3751	0,4551	39,91	18,16	+ 6	1,003	18,11	+ 6
524*	797	0,3463	0,4139	43,59	18,04	— 6	1,003	17,99	— 6
638·	911	0,3030	0,3540	51,27	18,15	+ 5	1,002	18,11	+ 6
748·	1021	0,2703	0,3105	58,21	18,07	— 3	1,002	18,03	— 2
850·	1123	0,2458	0,2787	64,85	18,07	— 3	1,002	18,03	— 2
949·	1222	0,2259	0,2535	71,35	18,09	— 1	1,002	18,05	± 0
1050·	1323	0,2087	0,2321	78,15	18,14	+ 4	1,001	18,12	+ 7
1054·	1327	0,2080	0,2313	78,34	18,12	+ 2	1,001	18,10	+ 5
1148·	1421	0,1943	0,2144	84,43	18,10	± 0	1,001	18,08	+ 3
1250·	1523	0,1813	0,1987	91,02	18,09	— 1	1,001	18,07	+ 2
1349·	1622	0,1702	0,1856	96,98	18,00	— 10	1,001	17,98	— 7
1446·	1719	0,1606	0,1742	103,30	18,00	— 10	1,001	17,98	— 7
				Mittel:	18,10	5,5	Mittel:	18,05	

Größe in dem hier durchmessenen Gebiet nicht besteht. Vielmehr gibt die Plancksche Formel unsere Messungen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler, d. h. innerhalb ± 1 Proz. richtig wieder, während die Nernst-Wulfsche Korrektion zu systematischen Abweichungen führt, welche einen Gang bis zu 6 Proz. in den C'-Werten erkennen lassen. Wie zu erwarten war, tritt dieser Gang besonders deutlich bei den Isochromaten von 9, 12 und 16 μ hervor, aber er ist auch bei den übrigen unverkennbar.

Freilich kommen in einzelnen Fällen, besonders bei kleinen Ausschlägen, auch Schwankungen der Größe C vor, welche ± 1 Proz. übersteigen (7 mal unter 130 Beobachtungen), aber die mittleren Fehler sind in den einzelnen Reihen meist kleiner als 0,6 Proz., und die Abweichungen sind hier nicht systematischer Art.

Die Übereinstimmung unserer Beobachtungen mit der Planckschen Formel wird noch etwas besser, wenn man für c den Wert 14260 einsetzt, welcher sich für diese Konstante aus unseren Messungen ergibt[1]).

Weiterhin wird durch unsere Versuche eine Kontrolle der Temperaturskala geliefert, welche die Reichsanstalt ihren Eichungen zugrunde legt. Zu einer solchen Kontrolle eignen sich in erster Linie die langwelligen Isochromaten im Reststrahlengebiet, weil hier, wo das Rayleighsche Gesetz fast streng erfüllt ist, die Konstante c nur noch als Korrektionsglied von untergeordneter Bedeutung in die Gleichung der Isochromate eingeht, wenn man sich auf Temperaturgebiete beschränkt, welche oberhalb 500^0 liegen. Auch die Wellenlänge der Strahlung braucht dann nur angenähert bekannt zu sein. Die zahlreichsten und sorgfältigsten Messungen wurden mit Reststrahlen von Flußspat ausgeführt, weil hier die Strahlungsintensität sehr groß und daher die Ausschlagsmessung selbst bei Benutzung kleiner Diaphragmen und enger Strahlenkegel, auf welche wir im Bereich der höheren Temperaturen wegen des eigenartigen Baues der schwarzen Körper III und IV angewiesen waren, sehr genau ist. Die in Tabelle VII wiedergegebene Versuchsreihe ist auch insofern die vollständigste, weil hier alle vier schwarzen Körper zur Verwendung gelangten und weil sie bis zur Temperatur des Palladiumschmelzpunktes hinauf reicht. Die sehr befriedigende Konstanz des Produktes C innerhalb des gesamten Temperaturbereichs zeigt, daß Fehler, welche 5^0 übersteigen, in der Temperaturskala der Reichsanstalt bis zum Palladiumschmelzpunkt jedenfalls nicht vorhanden sind, sofern man die Eichung des Thermoelements bei dem Goldschmelzpunkt als richtig anerkennt. Die Abweichung des C-Wertes bei 1558^0 von dem Mittelwert dieser Konstanten für alle Temperaturen entspricht einer Temperaturdifferenz von $3,3^0$ gegenüber den Angaben des geeichten Thermoelements, und zwar in dem Sinne, daß die in der Eichtabelle des Elements angegebenen Temperaturen etwas zu tief sind. Eine zweite Versuchsreihe ergab für die Eichung des Thermoelements bei dem Palladiumschmelzpunkt eine Abweichung um 2^0 in demselben Sinne, so daß nach unseren Messungen der Palladiumschmelzpunkt um etwa 2^0 bis 3^0 höher liegen würde, als er von der Reichsanstalt angenommen wird. Diese Differenz liegt jedoch noch innerhalb der Fehlergrenzen unserer Messung.

1) Die genaue Berechnung dieses Wertes aus dem hier veröffentlichten Zahlenmaterial wird den Gegenstand einer besonderen Mitteilung bilden.

Die Isochromate der Reststrahlen von Steinsalz ist für die Kontrolle der Temperaturskala trotz der größeren Wellenlänge der Strahlung weniger geeignet, weil die Ausschläge erheblich kleiner sind und weil wir infolge Deformation des Magnesiakörpers gezwungen waren, die Reihe bei 1446^0 abzubrechen. Bei weiterer Erwärmung wurde der Körper weich und sank merklich in sich zusammen.

Die neuen Messungen zeigen den von dem Rayleigh-Jeansschen Gesetz geforderten geradlinigen Verlauf der langwelligen Isochromaten im Bereich der höheren Temperaturen in noch vollkommenerer Weise als die früheren Versuche[1]). Dagegen tritt der Einfluß der Konstanten c bzw. die Quantenwirkung wiederum mit voller Schärfe im Gebiet der tieferen Temperaturen hervor. Setzen wir wie bisher den Wert der Konstanten $c = 14300$, so können wir leicht aus dem gemessenen Verhältnis der Ausschläge, welche einer tiefen und hohen Temperatur des schwarzen Körpers, z. B. -190^0 und $+400^0$, entsprechen, die mittlere Wellenlänge der Reststrahlenart berechnen. Wir erhalten auf diese Weise für die Reststrahlen von Flußspat $22,4\,\mu$, für diejenigen von Steinsalz $52,3\,\mu$, was mit den direkt gemessenen Wellenlängen $22,3\,\mu$ bzw. $51,8\,\mu$ in hinreichend guter Übereinstimmung ist.

Dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, welches uns durch Gewährung von Mitteln unterstützt hat, sprechen wir unseren Dank aus.

Diskussion.

Wien: Ich möchte fragen, ob der Herr Vortragende Anhaltspunkte hat, wie die Abweichungen, die Herr Nernst aus den alten Beobachtungen abgeleitet hat, sich erklären.

Rubens: Die Beobachtungen, die Herr Kurlbaum und ich vor 22 Jahren angestellt haben, waren nicht so genau. Wir waren ganz zufrieden, daß das Rayleigh-Jeanssche Gesetz, dessen Prüfung den Hauptgegenstand unserer Versuche bildete, bis auf einige Prozent genau herauskam. Auch bei den anderen älteren Beobachtungen ist anzunehmen, daß kleine systematische Fehler durch die Temperaturskala, in einzelnen Fällen auch durch Unvollkommenheit des schwarzen Körpers hervorgerufen wurden. Auch geringe spektrale Verunreinigungen können Abweichungen in dem Sinne der Nernst-Wulfschen Korrektion vortäuschen. Eine einheitliche Deutung der Abweichungen vermag ich nicht zu geben.

1) H. Rubens u. F. Kurlbaum, l. c. S. 659.



George Jaffé (Leipzig), Zur Theorie der Beugung.

Im folgenden soll an einem einzelnen Beispiel eine Methode dargelegt werden, durch welche das Problem der Beugung an einem beliebig gestalteten, ebenen, vollkommen leitenden Schirm auf eine lineare Integralgleichung erster Art zurückgeführt wird. Als Beispiel werde ein zweidimensionaler Fall gewählt, nämlich ein Gitter, das aus unendlich vielen parallelen, gleich breiten und gleich weit voneinander entfernten Spalten besteht. Auf dieses Gitter soll eine ebene Welle von der Amplitude 1 normal auffallen, und hier soll auch nur der Fall behandelt werden, daß die Schwingungen parallel zu den Spalten polarisiert sind.

Das einfallende Licht habe die Richtung der positiven x-Achse; das Gitter bilde die Ebene $x = 0$ und zwar derart, daß die z-Achse mit der Richtung der Spalte übereinstimmt. Der Nullpunkt des Koordinatensystems falle in die Mitte eines der Spalte; d sei die Gitterkonstante und δ die Spaltbreite.

Unter diesen Umständen hängt die Aufgabe nicht von der z-Koordinate ab. Spalten wir in der üblichen Weise den Zeitfaktor $e^{i\nu t}$ ab, so erfordert das Beugungsproblem in dem betrachteten Fall die Bildung einer Funktion s, welche der Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + k^2 s = 0; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \qquad (1)$$

(a = Phasengeschwindigkeit und λ = Wellenlänge im umgebenden Medium), und außerdem folgenden Bedingungen genügt: sie muß mit ihren ersten Ableitungen überall endlich und stetig sein, außer daß sie für $x = 0$ beim Durchgang durch die Gitterwand unstetig werden darf, es muß $\frac{\partial s}{\partial x}$ an der Gitterwand auf beiden Seiten verschwinden, und endlich muß s der „Ausstrahlungsbedingung" genügen. Letztere Bedingung besagt, daß die Lösung außer der einfallenden Welle nur auslaufende Wellen enthalten darf[1]).

Nach der Methode der partikulären Lösungen läßt sich leicht ableiten, daß die Funktion

$$s = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{ik\alpha_m x} \cdot A_m e^{im\frac{2\pi y}{d}} \qquad (2)$$

der Gleichung (1) genügt, wenn die A_m Konstanten bedeuten und

$$\alpha_m^2 = 1 - \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2 \qquad (3)$$

gesetzt wird. Diese Formeln sind (mit Beschränkung auf gerade Funktionen) schon von J. J. Thomson[2]) in die Gittertheorie eingeführt und seitdem wiederholt benutzt worden[3]).

Führt man für die A_m die Fourier-Koeffizienten einer willkürlichen Funktion $f(y)$ von der Periode d ein, so bedeutet also

$$s = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{ik\alpha_m x} \cdot \frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} f(\eta) e^{i\frac{2\pi m(y-\eta)}{d}} d\eta \qquad (4)$$

eine Funktion, welche der Gleichung (1) genügt und sich für $x = 0$ auf $f(y)$ reduziert.

Ganz entsprechend stellt

$$s' = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{ik\alpha_m x}}{ik\alpha_m} \cdot \frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} g(\eta) e^{i\frac{2\pi m(y-\eta)}{d}} d\eta \qquad (5)$$

eine Lösung von (1) dar, deren Ableitung $\frac{\partial s}{\partial x}$ für $x = 0$ den Wert

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial x}\right)_{x=0} = g(y) \qquad (5a)$$

annimmt, wo $g(y)$ periodisch mit der Periode d ist.

Danach machen wir nun für die Lösung unseres Problems folgenden Ansatz: auf der Seite der negativen x setzen wir

$$s_- = e^{-ikx} + e^{ikx} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{ik\alpha_m x}}{ik\alpha_m} \cdot \frac{1}{d}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} g(\eta) e^{\frac{i2\pi m(y-\eta)}{d}} d\eta; \quad x < 0 \qquad (6)$$

und auf der Seite der positiven x

$$s_+ = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{-ik\alpha_m x}}{ik\alpha_m} \cdot \frac{1}{d}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} g(\eta) e^{\frac{i2\pi m(y-\eta)}{d}} d\eta; \quad x > 0. \qquad (7)$$

1) Man vgl. zu letzterem Punkte: A. Sommerfeld, Jahresberichte der deutsch. Math. Ver. **21**, 326ff., 1912.
2) J. J. Thomson, Recent Researches, Oxford 1893, § 359.
3) Man vgl. z. B. W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **44**, 369—436, 1914, § 5.

Dabei ist $g(\eta)$ eine noch zu bestimmende Funktion. Der Ausstrahlungsbedingung wird durch geeignete Verfügung über das Vorzeichen von α_m genügt. Setzt man nämlich fest

$$\alpha_m = +\left|\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}\right| \quad \text{für} \quad 1 > \frac{m\lambda}{d} \quad (8a)$$

$$\alpha_m = -i\left|\sqrt{\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2 - 1}\right| \quad \text{für} \quad 1 < \frac{m\lambda}{d}, \quad (8b),$$

so treten in (6) und (7) außer der einfallenden Welle e^{-ikx} nur auslaufende Wellen auf.

Die Bedingungen, denen $\frac{\partial s}{\partial x}$ zu genügen hat, sind durch den Ansatz (6) (7) schon erfüllt, welches auch der Wert von $g(\eta)$ sei, denn man hat für $x = 0$

$$\left(\frac{\partial s_-}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial s_+}{\partial x}\right)_0 = g(y) \quad \text{für} \quad 0 < |y| < \frac{\delta}{2} \quad (9a)$$

$$\left(\frac{\partial s_-}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial s_+}{\partial x}\right)_0 = 0 \quad \text{für} \quad \frac{\delta}{2} < |y| < \frac{d}{2} \quad (9b).$$

Damit auch s und $\frac{\partial s}{\partial y}$ an den Gitteröffnungen stetig werden, müssen die Ausdrücke (6) und (7) für $x = 0$ einander gleichgesetzt werden Das liefert — nach Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration —

$$-ikd = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{\frac{i2\pi m(y-\eta)}{d}}}{\alpha_m} \cdot g(\eta)d\eta \quad (10)$$

und das ist eine lineare Integralgleichung erster Art, aus der $g(\eta)$ im Intervall $-\frac{\delta}{2}$ bis $+\frac{\delta}{2}$ bestimmt werden muß. Was nun diese Integralgleichung betrifft, so kann sie nach der Hilbertschen Methode auf ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen zurückgeführt werden und ist demnach — wenigstens im Prinzip — der Behandlung zugänglich; es dürfte aber schwierig sein, auf diesem Wege die Rechnung durchzuführen. Dagegen kann man das Problem — ähnlich wie es Schwarzschild für den einzelnen Spalt getan hat — mit Hilfe der Formeln (4) und (5) durch sukzessive Annäherung behandeln; dabei muß allerdings dahingestellt bleiben, ob es gelingen wird, die Konvergenz des Verfahrens zu erweisen.

An dieser Stelle möge es genügen, zwei Grenzfälle zu betrachten, die sich ohne alle Rechnung erledigen lassen. Man erkennt nämlich leicht, daß die Gleichung (10) sowohl für sehr große, wie für sehr kleine Werte von λ die asymptotische Lösung

$$g(\eta) = \text{const} \quad (11)$$

zuläßt. Ist λ sehr groß gegen die Gitterkonstante d, so sind alle α_m außer α_0 sehr große Zahlen, die Summen in (6), (7) und (10) reduzieren sich auf das Glied mit dem Index 0 und man findet

$$s_- = s_+ = e^{-ikx}; \quad \lambda >> d. \quad (12)$$

Es ergibt sich so die bekannte Tatsache, daß in dem charakterisierten Grenzfall nur die ungebeugte Welle nullter Ordnung auftritt und (bei parallel polarisiertem Licht) die auffallende Schwingung mit näherungsweise ungeschwächter Intensität durch das Gitter geht[1]).

Ist andererseits $\lambda << d$, so kann man in erster Annäherung in (10) $\lambda = 0$, d. h. $\alpha_m = 1$ setzen und findet

$$g(\eta) = -ik; \quad \text{für} \quad 0 < |y| < \frac{\delta}{2}. \quad (13)$$

Setzt man diesen Wert in (7) ein, so ergibt sich als Amplitude der Beugungswelle $m$ter Ordnung

$$A_m = \frac{1}{\alpha_m \pi m} \sin \frac{\pi m \delta}{d}. \quad (14)$$

Das ist bis auf den Faktor α_m im Nenner die bekannte Formel von Rayleigh[2]), die v. Ignatowsky[3]) auch für Stabgitter als erste Näherung bei kleinem λ/d abgeleitet hat. Die Tatsache, daß hier und in allen Fällen, in denen die vorliegende Methode anwendbar ist, $g(\eta) = \text{const}$ eine Näherungslösung der Integralgleichung für $\lambda << d$ ist, kann in diesem Grenzfall als Rechtfertigung der entsprechenden Annahme angesehen werden, die bei der Anwendung der Kirchhoffschen Form des Huygensschen Prinzips stets gemacht wird.

Will man vom Gitter zu einem einzelnen Spalt übergehen, so braucht man d nur ins Unendliche wachsen zu lassen, oder mit anderen Worten, man muß statt von den Summen (4) und (5) von den entsprechenden Integralen ausgehen. An Stelle von (10) erhält man dann als Integralgleichung

$$-2i = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} H_0{}^2(k|y-\eta|)g(\eta)d\eta, \quad (15)$$

wo $H_0{}^2(x)$ die Hankelsche Funktion zweiter Art und nullter Ordnung bedeutet[4]).

1) H. Lamb, Proc. London math. Soc. **29**, 523, 1898; Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel, Leipzig u. Berlin 1907, § 300.

2) Man vgl. H. Kayser, „Handbuch der Spektroskopie" **1**, S. 427 oder Lord Rayleigh, Scientific Papers **1**, S. 213, Art. 30.

3) W. v. Ignatowsky, loc. cit. § 6.

4) Man vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909, S. 94.

Handelt es sich um das Problem der Beugung an mehreren Spalten, so ändert sich an dieser Formel gar nichts, als daß die Integration über alle Spaltöffnungen zu erstrecken ist. Analoges gilt für die Formeln (6), (7) und (10), wenn das Gitter aus einer Gruppe von Spalten besteht, die sich im Abstande d periodisch wiederholen.

Bei dreidimensionalen Problemen müssen an Stelle von (2), (4) und (5) Doppelsummen oder die entsprechenden mehrfachen Integrale treten. Die Methode ist auch nicht auf ebene Schirme beschränkt, sondern kann mit Hilfe krummliniger Koordinaten auf gewisse Fälle von vollkommen leitenden, nicht-ebenen Schirmen ausgedehnt werden.

H. Seemann, Ein Präzisions-Röntgenspektrograph, vorgeführt auf dem Deutschen Physikertag in Jena 1921.

Der vorgeführte Röntgenspektrograph ist ein Präzisionsinstrument, dessen charakteristische langgestreckte Form und Konstruktionseinzelheiten durch seinen besonderen Verwendungszweck, die Untersuchung des härtesten Spektralbereiches, bedingt ist. Sein Meßbereich erstreckt sich bei Benutzung von Steinsalz als reflektierendem Kristall bis über 1 Ångström, also bis ins weichste technische Röntgenspektrum, und bei Gips entsprechend bis über 3 Ångström.

Er ist sowohl für die Lochkamera und Fenstermethode eingerichtet, die wegen der Vermeidung fehlerhafter Linienverbreiterung für die härtesten Strahlen allein in Frage kommen, als auch für die Schneidenmethode, die nur bei mäßig harten und weichen Strahlen ihre Vorzüge fehlerfrei zur Geltung bringt[1]), falls nicht sehr dünne Kristallplatten oder schwerere Kristalle benützt werden. Die Umstellung des Apparates von einer Methode auf die andere sowie die Auswechselbarkeit der Kristalle ist dadurch auf ein Höchstmaß von Einfachheit und Sicherheit gebracht worden, daß die Kristalle nebst der einen Spaltschneide in gemeinsame Fassungen eingekittet sind, die mit optisch eben geschliffenen 12 cm langen Flächen an ebensolchen des Apparatekopfes Anschlag haben und an diesen entlang verschoben werden können. Die genaue Gegenüberstellung der Spaltschneiden kann mit besonderen beigegebenen optischen Hilfsmitteln auf mindestens 0,1 mm genau leicht und schnell geprüft werden.

Der größte Wert wurde auf die genaue Meßbarkeit der beiden einzigen Konstanten des Apparates gelegt, des Abstandes Spalt—Platte und der Neigung der Platte gegen die reflektierende Strukturfläche. Ersteres ist dadurch ermöglicht worden, daß die am Apparat festsitzende, jedoch mit Feinverstellung versehene Spaltschneide bei herausgenommenem Kristall frei liegt und andererseits die Platte die photographische Platte oder ihre Anschlagfläche von außen her durch eine gewöhnlich mit Blei verschlossene Öffnung im Gehäuse und in der Kassette mit dem Fernrohr eines Kathetometers anvisiert werden kann, und zwar an der Stelle des Nullpunktes des Spektrums. Letzteres wird optisch durch Reflexion eines Lichtstrahls geprüft, der durch den Spalt hindurch auf eine an die Stelle der Platte gebrachte Spiegelglasplatte fällt und wieder durch ihn zurück ins beobachtende Auge gelangt. Die Anschlagfläche wird so justiert, daß der Reflexionspunkt dieses Strahlenbündels mit dem Nullpunkt des Spektrums zusammenfällt.

Um die Durchlässigkeit der Schneiden auf ein Minimum herabzudrücken, sind außer den Schneiden von 150°, die bei Benutzung des gesamten Meßbereiches notwendig sind, auch solche von 170° beigegeben, und zwar aus Wismut—Blei und aus Wolfram. Letztere sind für die Pt-$K\beta$-Linien ganz erheblich undurchlässiger als Wismut oder Blei, für die $K\alpha$-Linien dagegen nur wenig durchlässiger. Sämtliche Schneiden sind leicht auswechselbar.

Es ist sorgfältig vermieden worden, daß außer den Spaltscheiden noch andere Schwermetallflächen des Apparates von den direkt einfallenden Strahlen getroffen werden, die gleichzeitig von der Platte aus gesehen werden können, da die sehr kräftige Fluoreszenzstrahlung der Schwermetalle unter dem Einfluß härtester Röntgenstrahlen sonst eine erhebliche Verschleierung der Platte bewirken würde.

Zum Einstellen des Brennfleckes in die Nulllinie der Kamera (streifend über die Kristalloberfläche gelangendes Röntgenstrahlbündel) dienen zwei Visiervorrichtungen mit Neigungs- und seitlicher Schwenkungsvorrichtung des ganzen Apparates. Auch auf vorgegebene Spektralbereiche kann mittels einer Teilung eingestellt werden, so daß das Spektrum nicht vom Nullpunkt, sondern von jedem beliebigen anderen Reflexionswinkel beginnend entworfen werden kann. Das Uhrwerk, das die Kamera mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in etwa 1 Minute hin und her dreht, läßt sich auf 6 verschiedene Schwenkbereiche einstellen. Es hat Arretierung, die genau in der Umkehrstellung arretiert, in der der Reflexionswinkel 0° oder das eingestellte Minimum beträgt.

Eine Reihe von Blenden und Filterhaltern ermöglicht es, feste und flüssige Filter an ver-

1) H. Seemann, diese Zeitschr. **18**, 242—249, 1917 u. **20**, 51—54, 1919; Ann. d. Phys. **49**, 470—480, 1916 u. **51**, 391—412, 1917 u. **53**, 461—491, 1918; W. Friedrich u. H. Seemann, diese Zeitschr. **20**, 55—58, 1919.

schiedenen Stellen in der Kamera derart anzubringen, daß sie nur die untere oder obere Hälfte der photographischen Platte bedecken, so daß man zwei Filter miteinander vergleichen oder die Wirkung der Filter auf das ungefilterte Spektrum unmittelbar auf derselben Platte durch Schwärzungsmessung feststellen kann. Halbierungsblenden ermöglichen es, entweder die obere oder die untere Hälfte der Platte ganz abzudecken, so daß man zwei verschiedene Spektren nacheinander auf dieselbe Platte bringen und so einen von den Entwicklungsfaktoren unabhängigen Vergleich anstellen kann.

Eine kräftig durchexponierte Spektralaufnahme innerhalb der Grenzen 0,08—0,4 Ångström mit Steinsalz und Lochkamerамethode bei 0,5 mm weitem Spalt auf Müller-Kurzzeit-Platten ohne Verstärkungsschirm bei einem Abstand Spalt—Platte von 42 cm, dauert bei Benutzung des Radiosilex-Instrumentariums von Koch und Sterzel in Dresden mit Lilienfeldröhre nur 10 Minuten. Bei dieser Einstellung werden die *Pt-K*-Linien in erster Ordnung soeben aufgelöst.

Die technische Ausgestaltung des Apparates ist in der Hauptsache das Resultat zweijähriger Arbeit in der Medizinischen Klinik in Freiburg i. Br. Die Vorarbeiten wurden im Kriege im Würzburger Physikalischen Institut ausgeführt, zum Teil auch mit Mitteln des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik. Sämtlichen beteiligten Stellen sei hiermit der gebührende Dank ausgesprochen.

H. Seemann, Die lineare Polarisation des blauen Brennflecklichtes der Lilienfeld-Röntgenröhre, vorgeführt auf dem Deutschen Physikertag in Jena 1921.

Im vorigen Jahre publizierte J. E. Lilienfeld und F. Rother in dieser Zeitschr. **21**, 249 u. 360, 1920, daß das Brennflecklicht der Lilienfeld-Röntgenröhre fast vollkommen linear polarisiert sei und zwar auffallenderweise derart, daß die Schwingungen, der elektrische Vektor, senkrecht zur Ebene des Antikathodenspiegels erfolgen, der unter etwa 45^0 gegen die allgemeine Richtung der Kathodenstrahlen geneigt ist.

Bei flüchtigem Lesen der Arbeiten konnte man leicht den Eindruck gewinnen, als ob es sich um eine Erscheinung handelte, die man nur mit besonderen Hilfsmitteln, vor allem nur mit einer Spezialröhre beobachten könne, bei der das weiße Licht des Glühdrahtes sorgfältig abgeblendet ist. Dies ist vielleicht der Grund, weshalb der Polarisationseffekt nicht schon von anderer Seite weiter verfolgt worden ist, obwohl es sich doch zweifelsohne um ein theoretisch viel versprechendes Phänomen handelt.

Der Zweck meiner Ausführungen soll es nicht sein, eine Erklärung des Lichtanregungsmechanismus zu geben, sondern nur der, auf die Erscheinung eindringlich hinzuweisen und darauf aufmerksam zu machen, daß ihre experimentelle Vorführung mit besonders großen Mitteln während der Tagung jederzeit im Technisch-Physikalischen Institut stattfindet. Die Polarisation kann bei hellem Tageslicht mittels eines vor das Auge gehaltenen Nicols an einer gewöhnlichen käuflichen Lilienfeldröhre bei beliebiger Betriebsspannung wahrgenommen werden.

Besonderer Erwähnung bedarf der Umstand, daß wohl keine elektrisch erregte Lichtquelle bekannt ist, die fast vollkommen linear polarisiertes Licht einer einzigen Schwingungsrichtung frei nach allen Seiten emittiert.

Einige Anhaltspunkte zur Diskussion der Erscheinung mögen jedoch erwähnt werden. Der nächstliegende dürfte der sein, daß eine Lilienfeldröhre durchaus kein extrem hohes Vakuum zu haben braucht, um ordnungsmäßig zu arbeiten. Das Vakuum einer sehr harten Gas-Röntgenröhre genügt vollkommen bei nicht zu hohen Betriebsspannungen. Bei manchen noch brauchbaren Exemplaren ist bei hoher Strombelastung kräftige grüne Fluoreszenz der Glaswände rings um die ganze Antikathode und einen Teil der Kathode und sogar eine violette Lichterscheinung an der Spitze der Antikathode sichtbar.

Es ist demnach die Möglichkeit gegeben, das blaue Brennflecklicht mit austretenden Dämpfen oder Gasen in Verbindung zu bringen. Für diese Auffassung spricht auch der Umstand, daß sämtliche Gas-Röntgenröhren mit *Pt*, *Ir*, *W*, *Mo*, *Pd* und *R*-Antikathoden genau dasselbe blaßblaue Licht des Brennflecks zeigen bei genügender Stromdichte, nur mit dem Unterschiede, daß dieses nicht nachweisbar linear polarisiert ist, wie ich mich überzeugt habe.

In Glühkathoden-Röntgenröhren (Coolidge- und Müller-Elektronenröhre) kann ein etwa vorhandenes blaues Leuchten wegen der intensiven Bestrahlung des Brennflecks mit weißem Licht nicht wahrgenommen werden.

Das Fehlen der Lichtpolarisation bei Gas-Röntgenröhren könnte in ursächlichem Zusammenhang mit der Tatsache stehen, daß bei diesen Röhren der größte Teil des Spannungsgefälles unmittelbar vor der Kathode liegt, während bei Glühelektronenröhren ein starkes Feld bis unmittelbar an die Anode heranreicht. Es ist demnach nicht ausgeschlossen, daß dieses Feld das Zustandekommen scharfer Spektrallinien oder scharf begrenzter Banden verhindert,

wenn es sich um ein Gas- oder Dampfleuchten handelt. Lilienfeld und Rother neigen allerdings der Ansicht zu, daß eine Bremsstrahlung nach Art der Röntgenbremsstrahlung vorliegt, da das Spektrum des blauen Brennflecklichtes bei ihren Spektralaufnahmen kontinuierlich erscheint.

Die Frage, ob das blaue Leuchten seinen Sitz in der Metalloberfläche oder in einer Schicht von merklicher Dicke unmittelbar vor dem Antikathodenspiegel hat, läßt sich vorläufig nur so beantworten, daß mit bloßem Auge bei fast streifender Beobachtung keine merklich dicke Lichthaut wahrnehmbar ist. Beim langsamen Übergang von fast streifender zur streifenden Inzidenz verschwindet das Licht sprungartig. Nach den neueren Beobachtungen eines kontinuierlichen Bandenspektrums von Blaugrün bis Ultraviolett in der positiven Säule des Joddampfes durch Steubing (Ann. d. Phys. IV, **64**, 677, 1921) dürfte die volle Aufklärung der ganzen Erscheinung keine allzu großen Schwierigkeiten mehr bieten.

Was nun die Beobachtung der Erscheinung betrifft, wie sie hier vorgeführt wird, ist die Möglichkeit geboten, den Brennfleck einmal in der Richtung senkrecht zur allgemeinen Richtung der Kathodenstrahlen (Röhrenachse) in der Symmetrieebene der Antikathode, zweitens streifend über den Antikathodenspiegel senkrecht zu dieser Symmetrieebene und drittens in der Lotlinie des Brennfleckes auf der Antikathodenfläche zu betrachten. In den beiden ersten Fällen erkennt man klar, daß die Sehwingungsrichtung, der elektrische Vektor, ziemlich genau senkrecht zum Antikathodenspiegel steht, also etwa 45^0 gegen die Kathodenstrahlrichtung geneigt, wenn man als solche den größten Teil der Kathodenstrahlbahn bezeichnet. Demnach scheinen die Kathodenstrahlen kurz vor der Antikathode in der Weise umzubiegen, wie Schinz und Schwarz (Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstrahlen **27**, 1—23, 1919) es aus der kreisringförmigen Projektionsfigur des hohlzylindrischen Kathodenbündels und anderen Einzelheiten, die sie gut illustrieren, schließen. Die Polemik Lilienfelds (ebenda **27**, 151—158, 1920) gegen diese Auffassung hat bei Berücksichtigung seiner hier behandelten neueren Resultate keine Überzeugungskraft mehr.

Im letzteren Falle müßte mit dem Nicol, der hierbei genau mit seiner Achse in die Richtung des Lotes gehalten werden muß, keinerlei Auslöschungs- oder Schwächungsrichtung feststellbar sein und außerdem die Helligkeit des Brennfleckes bei Betrachtung ohne Nicol stark herabgesetzt erscheinen. Tatsächlich ist eine weitgehende Annäherung an diese Erscheinungsformen leicht zu beobachten.

Eine Abhängigkeit von der Spannung ist nicht erkennbar, wohl aber eine Farbänderung bei verschiedener Strombelastung des Brennfleckes. Bei 4 Milliamp. erscheint er blauviolett, bei 8 Milliamp. weißlich blau, letzteres nur in den erstgenannten Beobachtungsrichtungen. In der letztgenannten Richtung ist er auch bei 8 Milliamp. blauviolett, wobei möglicherweise aber auch die örtlich verschiedene Violettfärbung der Glaswand und die schiefe Strahlenrichtung eine Rolle spielt.

Das im Technisch-Physikalischen Institut aufgestellte Röntgeninstrumentarium einschließlich der Röhren ist auf meine Bitte von der Firma Koch & Sterzel in Dresden eigens für die Vorführungen bereitwilligst und kostenlos zur Verfügung gestellt worden. Da es einen sehr hohen Wert besitzt und allein der Transport und die Aufstellung der schweren Maschinen ganz erhebliche Kosten verursacht, so gebührt der Firma wärmster Dank. Es handelt sich um einen sogenannten Radiosilex-Apparat, der mit 500-Perioden-Wechselstrom ohne Gleichrichter oder Ventilröhre arbeitet und die Lilienfeldröhre im Dauerbetrieb 3—4 mal höher zu belasten vermag als es mit 50-Perioden-Wechselstrom möglich ist, ohne daß ein vorzeitiges Rauhwerden oder gar Anschmelzen des Antikathodenmaterials eintritt. Der 5—10 qmm große Brennfleck nimmt nahezu 800 Watt auf, eine bisher auch nicht annähernd erreichte Leistung. Die kürzeste Wellenlänge, die ich bei derartiger Belastung mit meinem Spektrographen ohne photometrische Auswertung hier feststellen konnte, beträgt 0,09 Ångström, entsprechend fast 140000 Volt-Kathodenstrahlen.

Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß die ganze Erscheinung sehr gut auch mit einem einfachen Induktor nebst der zugehörigen Hilfsvorrichtung für die Spannungsteilung beobachtet werden kann, sofern der Induktor 4—5 Milliamp. bei geringer Spannung hergibt.

Die Firma Schott & Gen. hier hat in entgegenkommender Weise zwei große gleichfalls sehr kostbare farblose und schlierenfreie Bleiglasscheiben von fast 2 cm Dicke zur Verfügung gestellt, die einen sicheren Schutz der Beobachter gegen die Röntgenstrahlen bieten. Auch ihr möchte ich hier meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

G. Meyer (Freiburg i. B.), Zur Spektroskopie des Urans und einiger seltenen Erden nach Versuchen von Dr. Greulich.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigte sich mit den Spektren von Cer, Lanthan, Didym, Thor, Uran und ermittelt 1. den Metallgehalt derjenigen Lösungen, welche den spektralanalytischen Nachweis eben noch gestatten, die Minimalkonzentration, 2. den Einfluß, den die Anwesenheit fremder Metalle auf das Erscheinen der Spektrallinien der untersuchten Metalle ausübt.

Die zur Untersuchung erforderlichen Metalldämpfe wurden auf dreierlei Weise erzeugt:

1. Die zu prüfende Lösung befand sich in einer halbkugelförmigen Schale nach Demarçay, in deren Mitte ein mit einem Bündel dünner Platindrähte gefülltes Glasrohr vertikal stand, so daß sich die Lösung in dem Drahtbündel wie in einem Docht aufwärts zog. Zwischen diesem Drahtbündel und einem Platinstift ließ man Funken überschlagen, welche ein Transformator mit 10000 Volt Spannung lieferte, wenn als Selbstinduktion die Sekundärspule eines Funkeninduktors von 15 cm Schlagweite eingeschaltet war, und der Funkenstrecke parallel 4 Leydener Flaschen lagen, von denen jede eine Kapazität von rund 4500 cm besaß. Die Primärwickelung des Transformators wurde mit zweiphasigem Wechselstrom von 50 Perioden, 50 Volt Spannung und 15 Amp. Stromstärke gespeist.

2. Auf die Platinelektroden eines Extrastromapparates nach Miethe wurden die zu untersuchenden Salzgemische aufgebracht, nachdem sie mit sirupöser Phosphorsäure zu einem dicken Brei angerührt waren.

3. Zwei Homogenkohlen erhielten Längsbohrungen, in welche die scharf getrockneten Salzgemische eingestopft wurden. Zwischen den Kohlen ließ man einen galvanischen Lichtbogen von 72 Volt Spannung übergehen.

Zur Beobachtung der Spektren diente ein nach Abney aufgestelltes Rowlandsches Konkavgitter von 1,52 m Krümmungsradius, dessen 4×3 cm große Fläche auf 1 mm 568 Striche enthielt. Von der Lichtquelle wurde mittels zweier Quarzlinsen ein reelles Bild auf den Spalt entworfen und das entstandene Spektrum auf einer photographischen Platte von 16×2 cm fixiert. Der größte Teil der Aufnahmen enthielt die Wellenlängen von 4800 bis 3300 A.-E., ein kleinerer die von 6497 bis 5665 A.-E. Die Ausmessung der Spektren geschah, indem man nach Goldstein[1]) die Negative auf eine in $^1/_{10}$ mm geteilte Glasskala legte und die Lage der Linien mit der Lupe ablas. Die Wellenlängen folgten aus der Beobachtung eines gleichzeitig photographierten Eisenspektrums oder der in fast allen Spektren vorkommenden *Ca*-Linien.

Zunächst wurden die Minimalkonzentrationen ermittelt, indem man den Transformatorfunken der Reihe nach in Lösungen der Metallsalze von abnehmender Konzentration schlagen ließ und die Spektren untersuchte. Die persistenten (bis zuletzt bleibenden) Linien[1]) und die Minimalkonzentrationen sind in Tab. I zusammengestellt.

Tabelle I.

	λ		$\frac{\text{mgr}}{\text{cm}^3}$
Ce	3940,89	4166,75	0,01
La	3949,22		0,006
Di {*Nd*	4061,27	4325,80	0,01
Di {*Pr*	4206,81	4429,41	
Th	4391,30	4382,10	0,01
U	4090,28	5919,61	5

Eine Verlängerung der Exposition änderte an den Resultaten nichts. Aus den Zahlen ist ersichtlich, daß die Minimalkonzentration des *U* rund 500 mal größer ist als die der übrigen Metalle.

Um den Einfluß zu untersuchen, den die gleichzeitige Anwesenheit fremder Metalle auf die Sichtbarkeit der *U*-Linien ausübt, mischte man Uran- und Metallsalzlösungen so, daß 1 ccm stets 10 mg *U* enthielt, also für sich allein mit Sicherheit Uranlinien lieferte. Solche Lösungen wurden zunächst direkt mittels des Transformatorfunkens untersucht, dann zur Trockne eingedampft und das Spektrum eines Teiles des Rückstandes nach Befeuchtung mit sirupöser Phosphorsäure unter Benutzung des Extrastromapparates hervorgerufen, während der Rest im galvanischen Flammenbogen verdampft wurde. Die Resultate enthält Tab. II, welche für alle 3 Verdampfungsarten neben der Bezeichnung der Metalle M den Quotienten $G = \frac{U}{U+M} 100$ aufführt, wo U und M die in den Salzgemischen vorhandenen Gewichtmengen von Uran und Metall bedeuten, welche eben noch die persistenten Uranlinien erkennen lassen.

Die dem Uran zugesetzten Metalle lassen sich in 3 Gruppen teilen. Die Anwesenheit der seltenen Erden *Ce, La, Di, Th*, Gruppe III, beeinflußt die Sichtbarkeit der Uranlinien sehr

1) E. Goldstein, Zur Orientierung von Spektrogrammen. Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 419, 1911.

1) Beobachtungen über das Auftreten der *N*- und *O*-Linien und einen Vergleich mit den von Pollok (Scientific Proceedings of Royal Dublin Society **11**, 331, 1905/08) erhaltenen Minimalkonzentrationen findet man in der Dissertation von Greulich, Freiburg 1914.

Tabelle II.

Metall	λ 4800 bis 3300 A.-E. $G=\frac{U}{U+M}100$			λ 6497 bis 5665 A.-E. $G=\frac{U}{U+M}100$	
	Transformator	Extrastromapparat	Lichtbogen	Lichtbogen	
Fe	9	7	8	9	
Ti	—	4	4	—	
Ni	11	10	10	10	
Cr	9	5	7,5	—	I
Mn	12	8	8	—	
K	11	8	8	—	
Ba	5,5	—	—	—	
Sr	5,5	—	—	—	
Pb	0,8	—	—	—	
Ca	8,5	0,8	7	—	
Co	6,5	0,3	3,5	—	
Na	18	17	7,5	—	
Li	18	15	7	—	II
Al	8	0,8	3,5	—	
Mg	18	2	4	—	
Ce	1	0,5	0,5	—	
La	1	0,5	0,5	—	
Di	1	0,5	0,5	—	III
Th	1	0,5	0,5	—	

wenig. Der Quotient G ist nahezu gleich 1 und hat für alle drei Verdampfungsarten denselben Wert. Für alle übrigen Metalle übertrifft G schon der Größenordnung nach den für die seltenen Erden geltenden Wert. Die zur Gruppe I zusammengefaßten *Fe, Ti, Ni, Cr, Mn* liefern im Transformatorfunken, Extrastromapparat und Lichtbogen denselben Wert von G, während für die Gruppe II *Li, Al, Na, Mg, Co, Ca* im Transformatorfunken G einen erheblich größeren Wert besitzt als im Funken des Extrastromapparates und im Lichtbogen.

Diese Erscheinungen lassen sich durch die folgenden Annahmen erklären: Aus Mischungen von Uran- und Metallsalzen im festen oder gelösten Zustande wird durch die elektrischen Entladungen ein Gemisch von Uran- und Metalldampf gebildet. Die Sichtbarkeit der U-Linien hängt ab von dem Werte des Verhältnisses $G=\frac{U}{U+M}100$ im Entladungsraum. Die Konstanz von G für alle drei Entladungsarten, wenn M den Gruppen I und III angehört, macht es wahrscheinlich, daß G im Entladungsraum denselben Wert hat wie in dem festen oder gelösten Gemisch von Uran- und Metallsalzen. Aus Lösungen, welche Metalle der Gruppe II enthalten, bilden sich, wenn der Transformatorfunke zwischen der Lösung und dem Platinstift überschlägt, auf dem letzteren Beschläge von festem Salz, und auf den Elektroden des Extrastromapparates bilden sich aus dem aufgetragenen Brei kleine Erhöhungen von festem Salz. Diese aus der Lösung und dem Brei hervorgegangenen Salzabscheidungen enthalten kein Uransalz. Diese Tatsache folgt daraus, daß die Salzabscheidungen im ultravioletten Lichte keine von Uran herrührende Fluoreszenz zeigen, während diese an den Verdampfungsrückständen der Ausgangslösungen lebhaft auftritt. Diese von Uran freien Salze liegen in der Funkenbahn, so daß der Dampf des zugesetzten Metalles im Funkenraum überwiegt. Man muß daher der Lösung mehr Uransalz geben, als ohne diese Abscheidungen erforderlich wäre und erhält damit die hohen Werte von G in Tab. II.

Die Kenntnis des Verhältnisses G z. B. für Eisen $\frac{U}{Fe+U}100=7$ gibt die Möglichkeit den Gehalt der Lösung eines Uransalzes an Uran zu ermitteln, indem man dieser Lösung so lange Eisensalz zusetzt, bis die persistenten Linien des U eben verschwinden. Ein mit den Sulfaten ausgeführter Versuch ergab spektralanalytisch einen Gehalt von 15,4 mg in 1 ccm, während 15,8 mg eingewogen waren. In der gleichen Weise wurde der U-Gehalt einer in HNO_3 gelösten Pechblende zu 50,1 Proz. gefunden, während die gewichtsanalytische Bestimmung 51,0 Proz. ergab. Es läßt sich also auf diesem Wege eine Schätzung des U-Gehaltes einer Lösung von Uransalz gewinnen.

In derselben Weise, wie dies beim Uran geschehen war, wurde untersucht, welchen Einfluß der Zusatz der Salze von *Fe, Ni, Cr, Mn, K,* Na, *Ca, Co, Li, Al, Mg, U, Ce, Di, Th* zu Lösungen von *Ce-, La-, Di-, Th*-Salzen auf die Sichtbarkeit der Spektrallinien der seltenen Erden ausübt. Die Werte von $\frac{Ce}{Ce+M}100$, $\frac{La}{La+M}100$, $\frac{Di}{Di+M}100$, $\frac{Th}{Th+M}100$, wo M eines der zuerst genannten Metalle bedeutet, schwanken je nach dem zugesetzten Metall zwischen 1 und 0,05 und erreichen nur bei Zusatz von *Na* und *Ca* zu *Ce* Lösungen im Transformatorfunken den Wert 2, d. h. von dieser Ausnahme abgesehen gelten die Zahlen für alle drei angewandten Verdampfungsmethoden der Salze, so daß wir also auch hier annehmen können, daß das Verhältnis G im Dampfraum denselben Betrag hat wie in den Gemischen der festen Salze oder der Lösungen.

Die Metalle der seltenen Erden sind also abweichend vom Verhalten des Uran in sehr geringen Mengen in Gemischen mit Salzen von Schwermetallen, Erdalkalien und Alkalien nachweisbar. So läßt sich z. B. aus einem Gemisch von Salzen, welches 4000 mg *Fe*, 17 mg *La*, 230 mg *U* enthält, *La* nachweisen, während die

Linien des in 13 mal größerer Menge vorhandenen U nicht auftreten.

Diese Beobachtungen lassen sich verwerten, um das von Hasselberg und Rowland festgestellte Fehlen von U-Linien im Sonnenspektrum zu erklären. Doch darf nach Hasselberg[1]) daraus „nicht auf das vollständige Fehlen dieses Metalles auf der Sonne geschlossen werden". Denn es ist „wahrscheinlich, daß innerhalb der umkehrenden Schicht die spezifisch schwereren von Metallen von hohem Atomgewicht herrührenden Dämpfe tiefer lokalisiert sind als die spezifisch leichteren, welche Metallen mit geringem oder mittlerem Atomgewicht entsprechen, so daß die ersteren einer höheren Temperatur ausgesetzt sind als die letzteren und demzufolge auch durch eigene Strahlung ganz oder teilweise die Absorption kompensieren können, welche sie auf die photosphärische Strahlung auszuüben imstande sind". Das Auftreten der Pb-Linien und das Fehlen der Li-Linien im Sonnenspektrum macht es aber „wahrscheinlich, daß die allgemeine Verteilung der verschiedenen Metalle innerhalb der absorbierenden Schicht nicht durch die Atomgewichte allein bedingt ist, sondern daß außerdem noch andere Faktoren dabei mitwirken, derart, daß die Art und Weise, auf welche einzelne Metalle sich im allgemeinen Sonnenspektrum kundgeben, wesentlich anders ausfällt als es nach ihrem Atomgewicht zu erwarten wäre". Einer dieser von Hasselberg erwähnten Faktoren ist darin zu erblicken, daß die Sonne uns das Absorptionsspektrum eines Gemisches von Dämpfen liefert, in dem neben den andern in der Gruppe I vereinigten Metallen Eisendampf vorkommt. Wenn wir nur diesen berücksichtigen, so zeigt nach den im Laboratorium gemachten Erfahrungen ein Gemisch von Uran- und Eisendämpfen nur dann das Uranspektrum, wenn der Bruch $\frac{U}{U+Fe}\,100$ mindestens gleich 7 ist. Es kann daher in dem spektroskopisch erforschten Teile der Sonne bis zu 7 Proz. des dort vorhandenen Eisens vorhanden sein, ohne daß sich dies im Spektrum bemerkbar machte. Es bedingt also das Fehlen der Uranlinien nicht notwendig die Abwesenheit des Urans, und das Auftreten der Linien der auf der Erde spärlicher als das Uran vorkommenden seltenen Erden läßt sich nicht zugunsten der Abwesenheit von Uran ausdeuten, da man weiß, daß aus einem Gemisch von Eisensalz mit viel Uransalz und wenigen seltenen Erden die Spektrallinien der letzteren erhalten werden, die des Urans nicht. Es lassen sich ferner nicht aufrecht erhalten die weitgehenden Schlüsse, welche aus dem Fehlen der Uranlinien auf der Sonne und dem Vorkommen dieses Elementes auf der Erde eine Entstehung des Urans durch rückläufige radioaktive Prozesse mutmaßen. Die Erfahrungen über die Spektren von Dampfgemischen stehen im Einklang mit Beobachtungen des Spektrums der Nova Geminorum 2 (12. März 1912 entdeckt von Enebo), indem man neben Fe- und Ti-Linien Uranlinien gefunden zu haben glaubte. Die oben mitgeteilten Versuche würden auf einen unwahrscheinlich hohen Urangehalt schließen lassen, und in der Tat zeigten die Untersuchungen von Furuhjelm, daß U-Linien nicht vorhanden sind, und daß die im Spektrum der Nova Geminorum 2 beobachteten Absorptionslinien neben dem Fe und Ti dem Y, Sc, Sr, Ca angehören. Dem Y und Sc kann man ohne Bedenken dasselbe Verhalten zuschreiben wie dem Ce, La, Di, Th.

1) B. Hasselberg, Untersuchungen über die Spektra der Metalle im elektrischen Flammenbogen. Kongl. Svenska Vet. Akad, Handl. **45**/5, 69, 63, 64, 1910.

Diskussion.

Swinne: Die geringe Empfindlichkeit des spektroskopischen Nachweises von Uran dürfte auf einer viel höheren Anregungs- und Ionisierungsspannung dieses Stoffes im Vergleich mit Eisen und den seltenen Erden beruhen. Zum Vergleich diene der spektroskopische Nachweis von Edelgasen in Mischung mit Wasserstoff (alte Versuche von Ramsay).

H. Geiger und W. Bothe (Charlottenburg), Über Zerstreuung von β-Strahlen in dünnen Metallfolien. (Vorgetragen von H. Geiger.)

Die durch dünne Metallfolien bewirkte Zerstreuung von β-Strahlen wurde gemessen

a) im Bereich kleiner Ablenkungswinkel (φ ca. 15° und darunter),

b) im Bereich großer Winkel (φ ca. 60° und darüber).

Zwischen beiden Bereichen besteht ein prinzipieller Unterschied. Bleibt man im Bereich kleiner Winkel, so sind die beobachteten Ablenkungen durch Superposition aus den vielen kleinen Einzelablenkungen entstanden, die das β-Teilchen beim Vorbeifliegen an den einzelnen Atomen der Zerstreuungsfolie erleidet (Mehrfachstreuung). Im Bereich der großen Ablenkungen spielt dagegen die Superposition eine untergeordnete Rolle; jede Ablenkung entsteht vielmehr im wesentlichen durch einen einzigen besonders wirksamen Zusammenstoß des β-Teilchens mit nur einem Atom. Ein solcher wirksamer Zusammenstoß ist sehr selten. Er kommt

dadurch zustande, daß die Bahn des Elektrons außerordentlich dicht an einem Atomkern vorbeiführt (Einzelstreuung).

Mehrfach- und Einzelstreuung folgen sehr verschiedenen Gesetzen. Ein besonders charakteristischer Unterschied liegt darin, daß bei Einzelstreuung die Zunahme proportional mit der Schichtdicke erfolgt, während bei Mehrfachstreuung die Zunahme nach einem komplizierten, von der Proportionalität stark abweichenden Gesetz vor sich geht. Außerdem ist die Verteilungsfunktion, durch die die Abhängigkeit der in Richtung φ gestreuten Intensität von φ selbst bestimmt wird, in beiden Fällen sehr verschieden. Bei der Mehrfachstreuung ist die Verteilung durch die normale Gaußsche Verteilungsfunktion, bei der Einzelstreuung durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}$$

gegeben.

Bei den α-Strahlen ist Mehrfachstreuung und Einzelstreuung in allen quantitativen Einzelheiten untersucht[1]). Wichtige theoretische Folgerungen für die Konstitution des Atoms haben sich bekanntlich namentlich aus der Einzelstreuung ergeben. Bei den β-Strahlen liegen nur Messungen über Mehrfachstreuung vor und auch diese beziehen sich nur auf dickere Schichten.

Zu a): Die von einem Radium $B+C$-Präparat ausgehenden, verschieden schnellen β-Strahlen werden durch ein Magnetfeld in homogene Strahlengruppen zerlegt und an diesen die Zerstreuung in den dünnsten verfügbaren Metallfolien auf photographischem Wege gemessen. Folgende Resultate wurden gefunden:

1. Für die kleinsten Schichtdicken (unter 0,01 mm) ist die Zerstreuung kleiner als dem von der Theorie geforderten Quadratwurzelgesetz entspricht. Für größere Schichtdicken ist der Anschluß an die Crowtherschen Messungen[2]) hergestellt, die das Quadratwurzelgesetz bestätigt hatten.

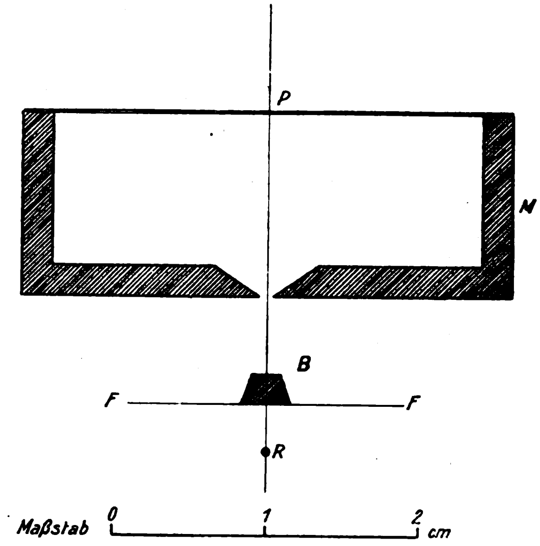
2. Sieht man von den ziemlich unsicheren Messungen bei hohen Geschwindigkeiten, ab, so findet man umgekehrte Proportionalität zwischen mv^2 und wahrscheinlichstem Ablenkungswinkel. Dies entspricht der Theorie.

3. Vergleicht man die Zerstreuung in verschiedenen Elementen bei ganz geringen Schichtdicken, so ergeben die schweratomigen Elemente eine größere Zerstreuung als die theoretisch geforderte Proportionalität mit der Ordnungszahl bedingen würde.

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 21, 669, 1911; H. Geiger, Proc. Roy. Soc. 83, 492, 1910; 86, 235, 1912; H. Geiger u. E. Marsden, Wien. Ber. 121, 2361, 1912; W. Bothe, Zeitschr. f. Phys. 4, 300, 1921; 5, 63, 1921.

2) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. 84, 226, 1910.

Zu b): Alle Versuche, die Zerstreuung der β-Strahlen unter Benutzung von Radium $B+C$-Präparaten in sehr dünnen Folien und bei großen Winkeln messend zu verfolgen, scheiterten an der γ-Strahlung, die trotz eingeschalteter Absorptionsschirme stets die Platte verschleierte. Positive Resultate wurden erst erreicht, als es gelang, starke Radium-E-Niederschläge auf Nickeldrähten von nur 2,5 mm Länge und 0,4 mm Durchmesser herzustellen. Die in sehr kleinen Dimensionen gehaltene Versuchsanordnung ist aus beistehender Figur zu ersehen. Die von dem aktivierten Draht R ausgehenden Strahlen fallen auf die beiderseits des Bleistreifens B vor-



stehende Zerstreuungsfolie F. Durch das in den Messingkasten M konisch gebohrte Loch von 0,75 mm Durchmesser wird eine Abbildung der Zerstreuungsfolie auf dem photographischen Film P vermittelt. Es entstehen beiderseits der Symmetrieachse Schwärzungsstreifen, bei denen die Schwärzung von desto stärker abgelenkten Strahlen herrührt, je weiter man sich von der Symmetrieachse entfernt. Auch sehr dünne Aluminiumfolien bis herab zu 0,01 mm gaben bei mehrtägiger Expositionszeit deutliche Abbilder auf vollkommen klarem Untergrund. Wenn andererseits keine Zerstreuungsfolie vorhanden war, war auch von Schwärzung keine Spur zu bemerken. Selbstverständlich befand sich die ganze Anordnung bei allen Versuchen in einem evakuierten Gefäß.

Die Schwärzungsstreifen wurden quantitativ ausgewertet, indem als Vergleichsnormale eine mit demselben Radium-E-Präparat hergestellte Schwärzungsskala benutzt wurde. Aus dieser Skala war die von einer gegebenen Zahl von β-Teilchen in einer bestimmten Zeit hervorgerufene Schwärzung unmittelbar zu entnehmen.

Die bisherigen mit der letzten Versuchsanordnung erzielten Ergebnisse lassen darauf schließen, daß die Stärke der Zerstreuung auch bei großen Winkeln wenigstens der Größenordnung nach die von der Theorie geforderte ist, wenn man der Berechnung dieselben Gesichtspunkte zugrunde legt, die bei den α-Strahlen sich bewährt haben.

Diskussion.

Lenard: Der Nachweis der von Rutherford schon lange angenommenen Gleichartigkeit der Diffusion bei α-Strahlen und bei schnellen Kathodenstrahlen wäre von großem Interesse, wenn er möglich ist. Er kann durch die Versuche des Herrn Vortragenden angebahnt erscheinen, ist aber noch immer nicht übergenügend durchgeführt.

Geiger: Das wird sich noch entscheiden lassen. Die Streuung, die durch einen einzigen Stoß entsteht, muß proportional der Schichtdicke sein. Wenn aber verschiedene Ablenkungen eintreten, dann ist das nicht mehr der Fall. Denn die Streuung ist dann proportional der Quadratwurzel. Im 1. Fall haben wir einen statistischen, im 2. Fall einen Masseneffekt.

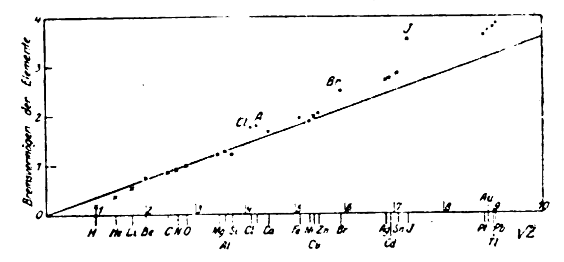
H. Rausch v. Traubenberg (Göttingen), Über den Durchgang von α-Strahlen durch Materie.

(Da die betreffenden Arbeiten bereits in der Zeitschr. f. Phys. **5**, 396 u. 404, 1921 ausführlich publiziert wurden, möge hier nur eine kurze Zusammenfassung der Resultate gegeben werden.)

Zunächst wurden zwei einfache direkte Methoden (nach gemeinsam mit Herrn K. Philipp ausgeführten Versuchen) beschrieben, um die Reichweite von α-Strahlen in Flüssigkeiten und Gasen zu bestimmen. Bei der ersteren wird ein kugelförmiger $RaC\,\alpha$-Strahler dicht unter der Flüssigkeitsoberfläche befestigt und das Flüssigkeitsniveau durch Eintauchen von fein verstellbaren Stiften solange verschoben, bis ein dicht über der Flüssigkeitsoberfläche angebrachter Sidotschirm durch die noch gerade durchkommenden α-Teilchen zum Leuchten angeregt wird. Die so erhaltene Dicke der Flüssigkeitsschicht über der Kugel entspricht der Reichweite der α-Strahlen in der betreffenden Flüssigkeit. Die Dicke der Flüssigkeitsschicht wurde nachträglich mit einem Mikroskop durch seitliches Anvisieren im durchsichtigen Glastrog ausgemessen, indem man den Abstand zwischen der Kugeloberfläche und ihrem an der total reflektierenden Flüssigkeitsoberfläche zustande kommenden Spiegelbild bestimmt. Mit diesem Apparat wurde zunächst die Reichweite in Wasser zu $60{,}0\,\mu$ gemessen und in guter Übereinstimmung mit dem Michlschen Wert (Photographische Methode) gefunden. Die Ausdehnung der Versuche auf andere Flüssigkeiten ist im Gange.

Um die Reichweite in Gasen zu messen, wurde eine Art Keilverfahren benutzt. Der stabförmige intensive Strahler läßt sich parallel zur Horizontalkante eines schräg gestellten mit zwei Marken versehenen Sidotschirmes demselben annähern[1]. Man erkennt auf dem Schirm eine deutliche Trennungslinie hell—dunkel, die man gerade auf die Marken verlegt. Der Abstand Strahler—Marken entspricht dann der Reichweite. Durch Einbau dieser einfachen Vorrichtung in ein Glasgefäß läßt sich der Apparat zu Reichweitemessungen in verschiedenen Gasen bei verschiedenen Drucken verwenden. Es wurden bis jetzt die Gase CO, CO_2, CH_3Br, CH_3J, Cl_2, HCl und NH_3 untersucht und in guter Übereinstimmung mit den Braggschen nach der Ionisationsmethode erhaltenen Werten gefunden.

Mit der früher vom Verfasser beschriebenen Keilmethode für feste Körper und mit Hilfe dieser beiden Methoden wurde die Reichweite der RaC—α-Strahlen bei einer größeren Zahl von Elementen und Verbindungen gemessen. Aus der Reichweite wurde nach dem Vorgang von H. W. Bragg das Bremsvermögen ermittelt und dasselbe als Funktion der Stellenzahl Z des betreffenden Elementes im periodischen System ausgedrückt. Die Resultate finden sich in Fig. 1 graphisch dargestellt. (Die Werte einiger Elemente sind Taylorschen und Braggschen Messungen entnommen.)



Wie man sieht, wächst das auf Sauerstoff als Normalsubstanz bezogene Bremsvermögen ungefähr mit $\sqrt{Z}$; die 3 leichtesten Elemente H, He und Li zeigen jedoch erhebliche Abweichungen nach unten, die schweren Elemente bedeutende Abweichungen nach oben von dieser Beziehung. Auffällig große Bremsvermögen besitzen die Elemente mit hohem Atomvolumen. Nach einer Theorie von Bohr wurde das Bremsvermögen für die leichtesten Elemente berechenbar und zeigte gute Übereinstimmung mit den

1) Eine ähnliche Vorrichtung war von B. Gudden schon früher im Praktikum benutzt worden.

Taylorschen Beobachtungen für H und He. Der jetzt gemessene Lithiumwert befindet sich ebenfalls in sehr guter Übereinstimmung mit der Bohrschen Theorie. Für Elemente höherer Stellenzahl bedarf die Theorie noch eines weiteren Ausbaues.

Für das Bremsvermögen von Verbindungen hatte Bragg strenge Additivität aus den Komponenten gefolgert[1]). Eine genauere Durchmusterung des früher vorliegenden und durch unsere Messungen neu ergänzten Materials zeigt jedoch, daß diese Regel nicht allgemein gültig ist. Da die Bremsung des α-Teilchens hauptsächlich durch Energieübertragung auf die Elektronen der getroffenen Atome und Moleküle erfolgt, war von vornherein ein Einfluß der Bindung dieser Elektronen zu erwarten. Tatsächlich zeigte sich zum Beispiel ein verschieden großes Bremsvermögen des H-Atoms in verschiedenen H-Verbindungen:

Verbindung	Bremsvermögen des H-Atoms	Beobachter
H_2	0,200	Taylor
C_2H_2, C_2H_4, C_2H_6, CH_4	0,187	Bragg
NH_3	0,173	Traubenberg u. Philipp
HCl	0,16	Traubenberg u. Philipp

Die Abnahme des Bremsvermögens in Beziehung zur steigenden Heteropolarität der Verbindung zu bringen, erscheint vielleicht aussichtsvoll. Für CO und CO_2 folgt Gültigkeit des Additionsgesetzes. Für Wasser ergab sich mit 1,53 ein wesentlich höheres Bremsvermögen als der Additionsregel entspricht. Vielleicht hat diese Abweichung in der Assoziation der Wassermoleküle ihre Begründung. Die Untersuchung des Bremsvermögens erscheint somit aussichtsvolle Wege zur Untersuchung der Elektronenbindung in Elementen und Verbindungen zu eröffnen.

1) Die von mir (diese Zeitschr. **21**, 588—590, 1920) angegebene empirische Formel (IV) für die Reichweite in Verbindungen führt nur unter gewissen Bedingungen zur Braggschen (richtigen) Formel und ist deswegen nur beschränkt anwendbar, der dort angegebene Beryllium-Wert wurde deswegen neu berechnet.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1921/22.

Universität Bern. **Forster**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme; Theoretische Optik; Repetitorium der Physik; Physikalisches Praktikum; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerückte. — **Gruner**: Theorie der Elektrizität, Elektronentheorie; Vektor- und Tensoranalysis; Mechanik deformierbarer Körper; Seminar für theoretische Physik. — **Luterbacher**: Dynamik; Fortschritte der drahtlosen Telegraphie und ihre physikalischen Grundlagen. — **Blattner**: Die theoretischen Grundlagen der Wechselstromtechnik. — **Köstler**: Elektrische Schwingungen (ausgewählte Kapitel); Der elektrische Kondensator; Allgemeine Mechanik; Höhere Statik; Anwendung der höheren Mathematik auf die Naturwissenschaften. —

Technische Hochschule Braunschweig. **Diesselhorst**: Experimentalphysik I: Elektrizität und Magnetismus; Einführung in die Theorie der Elektrizität; Physikalisches Praktikum I und II; Physikalisches Kolloquium. — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik. — **Bergwitz**: Radioaktivität, mit Versuchen; Radioaktivität der Erde und Atmosphäre; Elektronisch-radiologisches Praktikum. — **Witte**: Einführung in das Relativitätsprinzip. —

Universität Breslau. **Lummer**: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Waetzmann, Ladenburg und Buchwald), für Mediziner (mit Waetzmann und Ladenburg), für Pharmazeuten (mit Waetzmann und Buchwald), für Fortgeschrittene (mit Waetzmann, Ladenburg und Buchwald); Physikalisches Kolloquium (mit Waetzmann, Schrödinger und Ladenburg). — **Schrödinger**: Theorie der Elektrizität I; Kinetisch-statistische Thermodynamik; Proseminar für theoretische Physik; Seminar für theoretische Physik. — **Waetzmann**: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik; Spezialfragen der drahtlosen Telegraphie und Telephonie. — **Ladenburg**: Kathoden-, Kanal- und Radiumstrahlen: Aufbau der Atome I, mit Experimenten; Physikalisches Praktikum für Geübtere. — **Buchwald**: Kristalloptik, einschließlich Kristalloptik der Röntgenstrahlen. — **Jüttner**: Spezielle Relativitätstheorie. —

Universität Bonn. **Konen**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre; Laboratorium für Anfänger; Praktikum für Fortgeschrittene; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Eversheim, Grebe). — **Pflüger**: Mechanik: Elastizität, Hydrodynamik. — **Bucherer**: Die neueste Entwicklung der Physik. — **Eversheim**: Grundzüge der Elektrotechnik; Angewandte Elektrizitätslehre mit Übungen. — **Grebe**: Einführung in die Gedankengänge der theoretischen Physik; Seminar über Fortschritte der Röntgenphysik (mit Martius). —

Technische Hochschule Danzig. **Ramsauer**: Experimentalphysik I, Ergänzungen; Kleines physikalisches Praktikum (mit Kalähne); Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene; Großes physikalisches und photophysikalisches Praktikum (mit Kalähne); Physikalisches Kolloquium. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum; Theoretische Optik mit praktischen Anwendungen; Strahlungs- und Quantentheorie; Photographie einschl. Reproduktionsverfahren und Röntgenologie; Übungen in Photographie und Reproduktionsverfahren I, für Anfänger, für Fortgeschrittene. — **v. Brunn**: Himmelsmechanik; Elemente der Meteorologie. —

Technische Hochschule Darmstadt. **Schering**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Geometrische Optik, Wellenlehre des Lichtes, Akustik; Physikalische Übungen (mit Zeissig); Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeissig); Mechanische Wärmetheorie; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Zeissig). — **Zeissig**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, Optik; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde; Seismometrie und Anwendungen; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik. — **Baerwald**: Allgemeine Elektrotechnik II: Der Aufbau des Atoms und der Materie; Relativitätstheorie. — **Limmer**: Photographische Übungen A und B; Photographisches Kolloquium; Grundlagen der Photographie; Photographische Optik und Projektionskunde. —

Technische Hochschule Dresden. **Hallwachs**: Experimentalphysik I; Physikalisches Praktikum I, II, einschließlich Laboratoriumstechnik; Praktikum für größere physikalische Arbeiten; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm, Toepler und Dember). — **Dember**: Analyse empirischer Kurven. — **Helm**: Die Entwicklung des Kraftbegriffs bis zur Relativität. — **Hugershoff**: Photogrammetrie. — **Luther**: Photographie; Photographisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschrittene; Selbständige Arbeiten; Spezielle Sensitometrie (mit Goldberg); Physikalisch-chemisches und anorganisch-chemisches Kolloquium (mit Foerster, Lottermoser und Müller). — **Erich Müller**: Elektrochemie; Physikalische Chemie; Praktikum für Elektrochemie; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie. — **Toepler**: Theoretische Physik II: Wärmelehre, mit Übungen; Elektron und Atom. —

Universität Erlangen. **Wiedemann**: Experimentalphysik; Physikalisches Anfänger-Halb- und Vollpraktikum. — **Reiger**: Theoretische Physik: Elektrizität, mit Übungen; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik; Physikalisches Kolloquium (mit Hauser und Frank). — **Hauser**: Angewandte Physik I: Mechanik und Wärme; Physikalische und medizinische Einführung in die Röntgentherapie (mit Wintz). — **Frank**: Thermodynamik; Politische Arithmetik für Juristen, mit Übungen.

Universität Frankfurt a. M. **Wachsmuth**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik; Interferenz und Polarisation; Physikalisches Kolloquium (mit Madelung); Physikalisches Praktikum für Anfänger; Großes physikalisches Praktikum; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten (mit Gerlach); Physikalisches Praktikum für Mediziner. — **Madelung**: Prinzipien der Mechanik und Mechanik der Kontinua; Neuere Theorien und Erkenntnisse der Physik; Übungen in anwendbarer Mathematik (mit Hellinger, Stern und Landé); Selbständige wissenschaftliche Arbeiten. — **Bestelmeyer**: Einführung in die Maxwellsche Theorie. — **Gerlach**: Höhere Experimentalphysik II: Magnetismus, Spektroskopie, einschließlich Röntgenstrahlen und chemische Konstitution; Moderne physikalische Literatur mit Übungen. — **Seddig**: Photographisches Praktikum; Leitung selbständiger Arbeiten auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie; Übungen im Projizieren und Anstellen von Vorlesungsversuchen. — **Stern**: Theorie der Elektrizität. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom; Gleichstrom-Messungen; Drahtlose Telegraphie, mit Versuchen; Die Wechselstrom-Maschine; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik (mit Dessauer); Kleines elektrotechnisches Praktikum; Großes elektrotechnisches Praktikum; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Dessauer**: Einführung in die physikalischen Grundlagen der Medizin II; Medizinische Elektrizitätslehre; Einführung in die Hochspannungstechnik; Seminar für medizinische Physik: Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten (mit Bachem). — **Bachem**: Röntgenspektrographie für Physiker und Mediziner. — **Gramberg**: Maschinenkunde für Chemiker. — **Linke**: Sonnen- und Himmelstrahlung; Meteorologische Zeit- und Streitfragen; Meteorologisch-geophysikalisches Kolloquium. — **Georgii**: Allgemeine Meteorologie; Experimentelle und mathematische Ergänzungen zur allgemeinen Meteorologie. — **Lorenz**: Physikalische Chemie; Spezielle Elektrochemie; Kolloquium der physikalischen Chemie; Praktikum der physikalischen Chemie (mit Fraenkel); Kleiner Einführungskurs für physikalische Chemie (mit Fraenkel); Wissenschaftliche Arbeiten (mit Fraenkel); Metallographisches Praktikum (mit Fraenkel). — **Fraenkel**: Methoden der physikalischen Chemie; Eisenhüttenkunde. —

Bergakademie Freiberg. **Brion**: Elektrotechnik; Elektrotechnisches Praktikum; Experimentalphysik; Physikalisches Praktikum (mit Ludewig). — **Ludewig**: Radiumkunde; Radioaktives Praktikum; Einführung in das physikalische Praktikum; Physikalisches Repetitorium. — **Rosin**: Verwendung chemisch-physikalischer Daten in der Hüttenkunde. —

Universität Freiburg i. Br. **Himstedt**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme; Übungen aus der theoretischen Physik; Physikalisches Praktikum; Physikalisches Kolloquium (mit Cohn, Friedrich, Meyer); Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Cohn**: Elektrizitätslehre; Übungen aus der theoretischen Physik. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik: Optik, mit Übungen; Berücksichtigung der Fortschritte der mathematischen Physik im Schulunterricht; Kinetische Gastheorie; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Friedrich**: Ausgewählte Kapitel der Optik: Interferenz, Beugung, Interferenzspektroskopie, mit Vorführungen; Physik der Elektro- und Strahlen-Therapie, mit Demonstrationen und Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Radiologischen Institut. — **Meyer**: Elektrochemie und Photochemie; Physikalische Chemie für Mediziner; Photographie mit Übungen und Demonstrationen; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten. —

Universität Gießen. **König**: Experimentalphysik I: Elektrizität, Optik; Physikalisches Praktikum (mit Uller und Cermak); Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben für Lehramtskandidaten (mit Cermak); Physikalisches Kolloquium (mit Fromme). — **Fromme**: Theoretische Elektrizitätslehre; Theoretisch-physikalische Übungen; Meteorologie. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum; Über Kathodenstrahlen und die elektrische Leitung in Gasen; Physikalische Grundlagen der Musik: Experimentelle Akustik. — **Uller**: Einführung in die Technik der Wärmekraftmaschinen. — **Jentzsch**: Ausgewählte Kapitel der Spektroskopie. —

Universität Göttingen. **Franck**: Atomphysik II: Physikalisches Praktikum (mit Rausch v. Traubenberg; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten; Physikalisches Proseminar (mit Born); Physikalisches Kolloquium (mit Born, Pohl, Reich). — **Born**: Elektronentheorie und Optik; Kinetische Theorie der festen Körper II; Physikalisches Seminar über Struktur der Materie (mit Hilbert). — **Pohl**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Ausgewählte Kapitel aus der Optik mit Experimenten; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten. — **Reich**: Höhere Elektrizität mit Experimenten II; Elektrotechnisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Physik; Seminar über Elektrizität und ihre Anwendungen. — **Prandtl**: Mechanik, insbesondere technische Mechanik, mit Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Mechanik, einschließlich Aerodynamik; Besprechung von Fragen der angewandten Mechanik. — **Gudden**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, IV: Einzelfragen aus Elektrizität und Optik. — **Grotrian**: Gesetzmäßigkeiten in den Spektren. — **Hertz**: Statistische Mechanik. — **Rausch v. Traubenberg**: Praktikum der Atomistik und Radioaktivität; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten. — **Winkler**: Physikalisch-technische Handfertigkeitsübungen; Übungen im Glasblasen. —

Universität Graz. **Benndorf**: Experimentalphysik I: Einleitung in die Physik und Mechanik: Physikalische Übungen für Anfänger; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene; Besprechungen neuerer Arbeiten über den Aufbau der Materie (mit Radakovič). — **Hess**: Experimentalphysik I. — **Streintz**: Der Bleiakkumulator und das Akkumulatorproblem. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche. — **Wassmuth**: Kennzeichen der Richtigkeit von Lösungen elastischer Probleme (mit einer kurzen Einleitung in die Elastizitätstheorie und Beispielen). — **Radakovič**: Mechanik; Seminar für theoretische Physik.

— **Brell**: Vektorenrechnung mit Übungen. — **Ficker**: Thermodynamik der Atmosphäre; Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Kremann**: Elektrochemie; Physikalisch-chemisches Praktikum. —

Universität Greifswald. **Krüger**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik; Kinetische Gastheorie; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler, Mediziner und Pharmazeuten; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (Kolloquium) (mit Seeliger). — **Seeliger**: Thermodynamik, mit Ergänzungen und Übungen; Anleitung zu selbständigen theoretischen Untersuchungen. — **Reinkober**: Röntgenstrahlen; Übungen in der Herstellung und Handhabung einfacher Demonstrationsapparate: Handfertigkeitspraktikum. —

Universität Halle. **Mie**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik, Mathematische Ergänzungen; Kleines physikalisches Praktikum; Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten; Physikalische Übungen; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten. — **K. Schmidt**: Einleitung in die theoretische Physik; Elektrische Wechselströme und Schwingungen; Physikalisches Kolloquium; Übungen für angewandte Physik; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Herweg**: Radioaktivität und Photoelektrizität; Praktische Übungen aus den modernen Forschungsgebieten. — **Wigand**: Neuere Methoden der Wettervorhersage; Strahlungsgesetz und Quantentheorie; Aerophysikalisches Praktikum: Meteorologie, Aerologie, atmosphärische Elektrizität und Strahlung. —

Universität Hamburg. **Koch**: Experimentalphysik II: Wärme, Elektrizität; Physikalisches Praktikum (mit Goos und Müller); Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen. — **Lenz**: Einleitung in die theoretische Physik, Übungen; Atombau. — **Möller**: Kinetische Gastheorie; Drahtlose Telegraphie mit Vorführungen. — **Goos**: Einführung in die Spektroskopie. — **Voege**: Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Elektrizitätslehre. — **Schorr**: Mechanik des Himmels; Übungen in astronomischen Beobachtungen für Fortgeschrittene (mit Dolberg). — **Schwassmann**: Astrophysikalische Forschungen im Fixsternsystem. — **Dolberg**: Höhere Geodäsie. — **Wegener**: Klimatologie. — **Jensen**: Moderne Probleme der kosmischen Physik: Einwirkung kosmischer Vorgänge auf die Erde; Zur Frage der Wechselbeziehungen zwischen Polarlichtern, erdmagnetischen Erscheinungen, Erdströmen, luftelektrischen Phänomenen. — **Tams**: Einführung in die Erdbebenforschung. —

Universität Heidelberg. **Lenard**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre; Physikalisches Praktikum (mit Becker); Physikalisches Seminar: Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker). — **Becker**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Radiologie; Wellenstrahlung; Theoretisch-physikalische Urtextstudien. — **Rasch**: Aus dem Anwendungsgebiet der Elektrizitätslehre: Gleichstromfragen. —

Universität Innsbruck. **Schweidler**: Experimentalphysik I; Physikalische Meßmethoden; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene; Besprechung neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der Geophysik und Astrophysik (mit Scheller und Defant). — **Lerch**: Physik für Pharmazeuten; Radioaktivität. — **Tumlirz**: Theoretische Mechanik; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2. — **Defant**: Theoretische Meteorologie, insbesondere Dynamik der Atmosphäre; Erdbeben: Seismologie. — **March**: Physik der Röntgenstrahlen. — **Hammerl**: Elektrische Energieverteilung: Licht und Kraft, Niederspannungs- und Hochspannungsanlagen. — **Scheller**: Stellarastronomie; Theorie der Finsternisse. —

Universität Jena. **Wien**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik; Physikalisches Praktikum (mit Busch und Försterling), für Fortgeschrittene (mit Schumann, Försterling und Busch); Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel, Busch und Försterling); Physikalisches Kolloquium. — **Busch**: Experimentalphysik IV, Elektrizität, Magnetismus, Optik, für Fortgeschrittene. — **Auerbach**: Einführung in die theoretische Physik: Begriffe, Prinzipien, Methoden; Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper: Der physikalische Schulunterricht; Grundzüge der Wetterkunde. — **Försterling**: Quantentheorie. — **Schumann**: Hochfrequenztechnik; Grundlagen der elektrischen Kraftübertragung; Kleines technisch-physikalisches Praktikum; Großes technisch-physikalisches Praktikum. —

Technische Hochschule Karlsruhe. **Gaede**: Physik I, III; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier); Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Institut. — **Lehmann**: Flüssige Kristalle. — **Peppler**: Praktische Witterungskunde. — **Schachenmeier**: Mathematische Physik; Repetitorium der Physik. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, Übungen; Einführung in die Elektrotechnik. —

Universität Kiel. **Dieterici**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum für Anfänger, für Doktoranden (mit Kossel). — **Kossel**: Optik und Wärmestrahlung; Bau des Atoms. — **Zahn**: Elektromagnetische Schwingungen und ihre Anwendungen: Drahtlose Telegraphie, Telephonie usw. — **Martienssen**: Radiologie und ihre technische Anwendung. — **Schmidt**: Wellenlehre des Lichts, mit Experimenten. —

Universität Köln. **Rinkel**: Experimentalphysik: Mechanik, Wärmelehre; Funkentelegraphie; Kleines physikalisches Praktikum; Großes physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene und Forschungsarbeiten. — **Druxes**: Einführung in die Einsteinsche Relativitätstheorie. —

Universität Königsberg i. Pr. **Kaufmann**: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizitätslehre; Praktische Übungen; Seminaristische Übungen; Kolloquium. — **Volkmann**: Theorie des Lichts; Physikalisch-theoretische Übungen und Arbeiten. Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte. — **Hoffmann**: Experimentalphysik II; Physikalische Übungen. — **Kretschmann**: Die drei Hauptsätze der Wärmelehre; Grundriß der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie. —

Universität Leipzig. **Wiener**: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität; Höhere Physik, experimentelle und mathematische Ergänzungen zur allgemeinen Experimentalphysik; Physikalische Übungen (mit Jaffé, Möbius Kaempf und Schiller) für Mediziner und Pharmazeuten (mit Scholl, Jaffé, Möbius, Kaempf und Schiller); Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Jaffé, Möbius, Kaempf und Schiller); Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres). — **Des Coudres**: Einleitung in die theoretische Physik: Wellen, Strömung masseloser Fluida, Potentialtheoretisches; Übungen zur Sommervorlesung; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen). — **Scholl**: Maschinenelemente; Maschinenzeichnen, mit Übungen. — **Wenger**: Allgemeine Meteorologie; Arbeiten im Geophysikalischen Institut; Übungen zur Einführung in synoptisch-meteorologische Arbeiten; Geophysikalisches Seminar: Übungen zur Thermodynamik der Atmosphäre und des Meeres. — **Marx**: Theorie der Kathoden- und Röntgenstrahlen; Radiophysikalisches Praktikum. — **Fredenhagen**: Thermodynamik. — **Lilienfeld**: Hochvakuumentladung und Erzeugung von Röntgenstrahlen. — **Jaffé**: Einführung in die Relativitätstheorie. — **Möbius**: Physikalische Schulversuche (Übungen). — **Kaempf**: Repetitorium der Physik für Mediziner, Pharmazeuten und Zahnärzte. — **Schiller**: Grundlagen der Luftschiffahrt und Flugtechnik. —

Universität Marburg. **Schaefer**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Ausgewählte Kapitel

der höheren Dynamik; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schulze, Take und Stuchtey), für Mediziner (mit Take); Übungen im Physikalischen Laboratorium für Fortgeschrittene: Leitung wissenschaftlicher Arbeiten (mit Schulze, Take und Stuchtey). — **Schulze**: Mechanik II: Elastizitätstheorie und Hydrodynamik; Theoretisch-physikalisches Seminar. — **Feußner**: Die Optik des Auges, Fernrohrs und Mikroskops. — **Take**: Theorie der hochfrequenten Wechselströme, mit Anwendung auf drahtlose Telegraphie und Telephonie, mit Versuchen; Physikalische Technologie I: Wärme- und Wasserkraftmaschinen, mit Versuchen. — **Stuchtey**: Über Radioaktivität; Die Photographie und ihre Technik; Praktikum der wissenschaftlichen Photographie für Anfänger und Fortgeschrittene. —

Universität München. **Wien**: Experimentalphysik I: Mechanik, Schallehre, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik; Physikalische Übungen; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **v. Groth**: Physikalische und chemische Kristallographie; Kristallographisches Praktikum (mit Steinmetz und Mieleitner); Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiete der Kristallographie und Mineralogie (mit Steinmetz). — **v. Seeliger**: Mechanik des Himmels: Theorie der planetaren Störungen; Astronomisches Kolloquium. — **Sommerfeld**: Maxwellsche Theorie und Elektronentheorie, Übungen; Randwertaufgaben aus der Maxwellschen Theorie; Seminar, Vorträge der Mitglieder. — **Graetz**: Experimentalphysik, Wärme, Elektrizität; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen; Selbständige Arbeiten aus der Physik. — **Großmann**: Sphärische Astronomie; Übungen im numerischen Rechnen (mit Kienle). — **Schmauss**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie; Klimaschwankungen; Anleitung zu meteorologischen Arbeiten. — **N. N.**: Spektralanalyse der Röntgenstrahlen (gemeinverständlich). — **Fajans**: Physikalische Chemie II: Thermodynamik, homogene Gleichgewichte, Elektrochemie; Kolloidchemie; Kolloquium für physikalische und anorganische Chemie (mit Hoenigschmid, Prandtl und Herzfeld). — **Dingler**: Elementargeometrie vom höheren Standpunkte aus; Kolloquium zur Philosophie der exakten Wissenschaften und der Mathematik: Ausgewählte Stücke und Probleme aus Kants Prolegomena. — **Donle**: Absolute Masse und Meßmethoden. — **Herzfeld**: Quantenmechanik der Atommodelle; Einführung in die kinetische Gastheorie. — **Zinner**: Der Aufbau der Sonne. — **Kienle**: Bahnbestimmung der Himmelskörper II. — **Steinmetz**: Über Mineralbildung. — **Mieleitner**: Die Verbreitung der Elemente in der anorganischen Natur. —

Technische Hochschule München. **Zenneck**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, Magnetostatik, Elektrostatik; Physikalisches Praktikum; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik. — **v. Angerer**: Physikalische Vakuumtechnik: Luftpumpen, Absorptionsmethoden, Meßinstrumente für hohe Vakua. — **Knoblauch**: Ausgewählte Kapitel der technischen Thermodynamik: Technisch-physikalisches Praktikum: Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik. — **Emden**: Meteorologie und Klimatologie; Kristalloptik. — **Dieckmann**: Drahtlose Telegraphie und Telephonie; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie. —

Universität Münster. **Schmidt**: Experimentalphysik: Optik und Elektrizität; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), für Fortgeschrittene; Physikalisches Seminar. — **N. N.**: Theorie der Wärme; Theoretisch-physikalisches Seminar. — **Szivessy**: Einführung in die Relativitätstheorie und die Theorie der Materie; Ergebnisse und Probleme der neueren Physik (in elementarer Darstellung). —

Universität Prag. **Frank**: Allgemeine Relativitätstheorie; Theoretische Akustik; Besprechung der erkenntnistheoretischen Literatur zur Relativitätstheorie; Seminar für theoretische Physik: Physikalisches Kolloquium (mit Fürth). — **Fürth**: Drahtlose Telegraphie und Telephonie, Theorie und Experimente. — **Rothmund**: Physikalische Chemie I; Radioaktivität und das System der Elemente; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Spitaler**: Kosmische Physik; Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen. —

Technische Hochschule Prag. **Tuma**: Experimentalphysik; Technische Physik; Physikalisches Praktikum. — **Koerner**: Thermodynamik. —

Universität Rostock. **Wagner**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik; Physikalische Übungen (mit Falckenberg); Physikalisches Seminar (mit Lenz); Wissenschaftliche Arbeiten. — **Lenz**: Wärmelehre (klassisch und statistisch); Relativitätstheorie II (allgemeine); Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Kümmell**: Ausgewählte Kapitel der chemischen Statik, Kinetik und Thermochemie; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum. — **Falckenberg**: Vorführung und Besprechung der Apparate des Physikalischen Praktikums. —

Technische Hochschule Stuttgart. **Regener**: Experimentalmechanik, einschließlich Akustik; Übungen; Physik II: Schluß der Elektrizitätslehre, Optik und Wärme; Übungen; Physikalisches Praktikum für Anfänger, für Fortgeschrittene; Wissenschaftliche Arbeiten; Physikalisches Kolloquium. — **Ewald**: Thermodynamik und kinetische Gastheorie; Ausgewählte Kapitel aus der Quantentheorie. — **Glocker**: Physikalische Messungen; Röntgentechnik. — **Reichenbach**: Ausgewählte Kapitel aus der drahtlosen Telegraphie. — **Grammel**: Technische Wärmelehre. —

Universität Tübingen. **Paschen**: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität; Physikalische Anfängerübungen; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Füchtbauer**: Theorie des Lichtes, Übungen. —

Universität Würzburg. **N. N.**: Experimentalphysik II: Elektrodynamik, Optik, Thermodynamik; Anleitung zu selbständigen Arbeiten; Physikalische Besprechungen; Physikalische Übungen für Naturwissenschafter und Mediziner (mit Glaser). — **Harms**: Theorie der Wärme; Strahlungstheorie; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Schottky**: Elektromagnetische Theorie I: Elektrostatik, Magnetostatik, Stationäre Ströme. — **Glaser**: Technische Physik I: Technische Mechanik, mechanische Technologie, technische Elastizitätslehre, Aeromechanik, technische Hydrodynamik und Thermodynamik, Übungen: Einführung in das technische Zeichnen, Herstellungsverfahren, Anleitung im Entwerfen einfacher Apparate. —

Universität Zürich. **E. Meyer**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme; Ausgewählte Kapitel der Physik; Repetitorium der Physik; Physikalisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere; Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten; Physikalisches Kolloquium. — **N. N.**: Mechanik starrer Körper, mit Übungen; Theoretische Physik. — **Greinacher**: Ionen- und Elektronenlehre der Gase, mit Experimenten; Radiologisches Praktikum. — **Ratnowsky**: Vektor- und Tensoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. — **Tank**: Drahtlose Telegraphie; Grundlagen der Atomistik. — **Meißner**: Experimentelle Strahlungslehre; Übungen im Demonstrieren von Schulexperimenten. —

Technische Hochschule Zürich. **Debye**: Physik: Mechanik, Akustik, Elektrizität; Repetitorium; Kine-



tische Theorie der Aggregatzustände; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Piccard und Scherrer); Wissenschaftliche Arbeiten in Physik; Seminar über Struktur der Materie (mit Scherrer); Physikalisches Kolloquium (mit Piccard und Scherrer). — **Piccard**: Experimentalphysik; Repetitorium; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik. — **Scherrer**: Physik I, Übungen; Optik, Thermodynamik. — **Amberg**: Didaktik des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts der Mittelschulen. — **Barbieri**: Photographie I; Photographisches Praktikum. — **Baur**: Physikalische Chemie II, Repetitorium; Allgemeine Elektrochemie; Repetitorium; Physikalisch-chemisches Praktikum; Elektrochemisches Praktikum; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium für Vorgerücktere. — **Früh**: Meteorologie und Klimatologie. — **de Quervain**: Einführung in die Meteorologie: Wetter- und Klimakunde. — **Wolfer**: Einleitung in die Astronomie, Übungen; Theorie der Finsternisse. —

Tagesereignisse.

In **Pasadena (Californien)** ist soeben unter dem Namen **„Normann Bridge Laboratory of Physics“** ein neues Forschungsinstitut eröffnet worden, dessen Direktion R. A. Millikan übernommen hat. Gemeinsam mit dem „Mount Wilson Observatory“ und dem „California Institution of technology“, die ihren Sitz gleichfalls in Pasadena haben, veranstaltet das neue Institut Gastvorträge europäischer Forscher, die in längeren oder kürzeren Vorlesungszyklen über die Fortschritte ihrer Wissenschaft berichten sollen. In dem jetzt beginnenden akademischen Jahr werden Prof. H. A. Lorentz (dreimonatlich) und Privatdozent Dr. P. S. Epstein (ganzjährig) Vorlesungen in Pasadena halten.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. Arthur Haas für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität München Professor Dr. Karl Freudenberg zum etatsmäßigen a. o. Professor der organischen Chemie an der Universität Freiburg i. Br., zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität (nicht an der Technischen Hochschule, wie S. 520 vermerkt) Zürich Professor Dr. Erwin Schrödinger, der Privatdozent an der Universität Königsberg Dr. Franz Lehmann zum ord. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Greifswald, der Privatdozent für Physik und Elektrizitätslehre an der Technischen Hochschule Berlin Dr. phil. Dr. Ing. Dr. Friedrich Kock zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Wien Dr. Friedrich Bäck zum ord. Professor für organische Chemie ebenda, Dr. A. W. Davison zum Professor der Chemie am Rensselaer Polytechnikum, der a. o. Professor für allgemeine Chemie an der Universität Cagliari Maurizio Padoa in gleicher Eigenschaft an der Universität Parma, der a. o. Professor für Versicherungsmathematik und mathematischer Statistik an der Universität Göttingen Dr. Felix Bernstein zum ord. Professor ebenda, W. B. Tuck zum Professor für Chemie an der Universität London, der a. o. Professor der Chemie und Vorsteher der anorganisch-chemischen Abteilung an der Technischen Hochschule Budapest Dr Ing. Ladislaus v. Putnoky zum ord. Professor ebendaselbst.

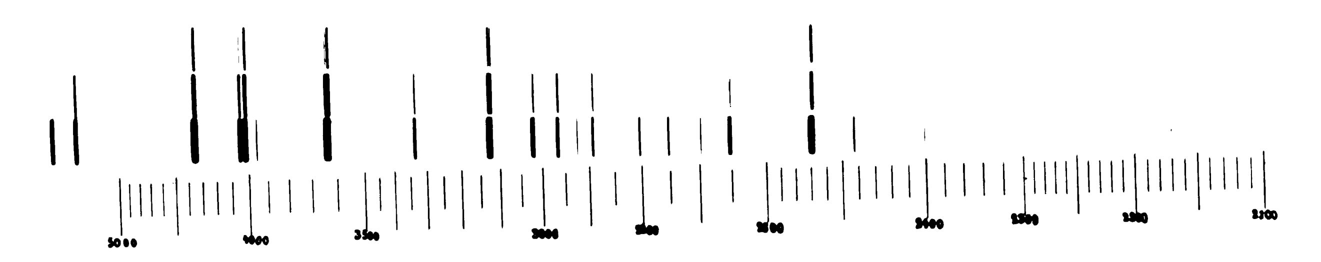
Berufung: Der ord Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Rud. Seeliger hat einen Ruf an die deutsche Universität Prag als ord. Professor der Experimentalphysik und Direktor des Physikalischen Instituts abgelehnt.

Verliehen: Den Privatdozenten an der Universität Wien Dr. Jean Billiter (physikalische Chemie), Dr. Ernst Philippi (organische Chemie), Dr. Julius Zellner (Experimentalchemie) und Dr. Ernst Zerner (organische und unorganische Chemie) den Titel a. o Professor.

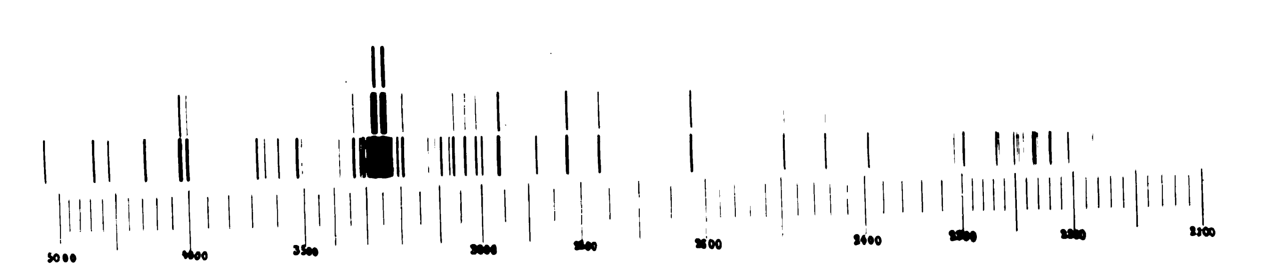
Gestorben: Der Herausgeber des Archivs für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik und frühere Honorarprofessor für Geschichte der Naturwissenschaften an der Technischen Hochschule München Oberstudiendirektor am humanistischen Gymnasium in Freising Dr. Hermann Stadler, der frühere Direktor der Zentralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien und emeritierter ord. Professor für kosmische Physik an der dortigen Universität Hofrat Dr. Julius v. Hann, der Professor für Astronomie an der Universität von Aix-Marseille und Direktor des Observatoriums daselbst Henri Bourget, der ord. Professor für Mathematik und Mechanik an der Abteilung für Bergbau der Technischen Hochschule Berlin und bisherige Schatzmeister der Deutschen Physikalischen Gesellschaft Geh. Bergrat Dr. Eugen Jahnke, der frühere Direktor und ord. Professor der Chemie und Technologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Bonn-Poppelsdorf Geh. Regierungsrat Dr. Ulrich Kreusler, der emeritierte ord. Professor für Chemie an der Universität Zürich Dr. Haruthiun Abeljanz, der Professor für Psychophysik Alfred Lehmann in Kopenhagen.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.





Figur 1. Quecksilber-Quarzlampe.



Figur 2. Kupfer-Bogen.



Figur 3. Kupfer-Bogen durch U-V Filter.

Verlag von S. Hirzel, Leipzig.

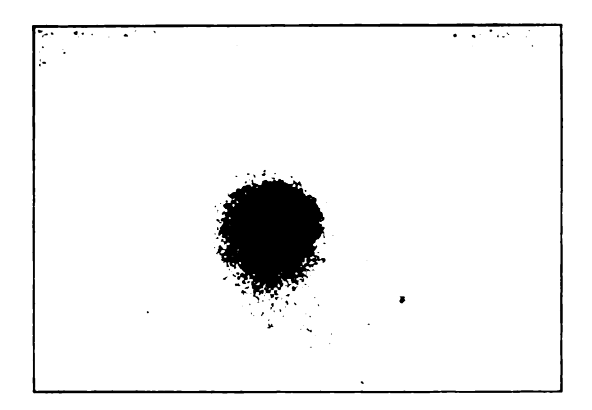


Fig. 1. Aluminiumfolie ohne Substanz.

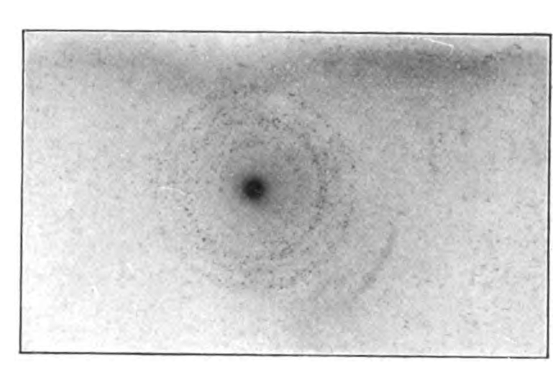


Fig. 2. *p*-Azoxyanisol, fest.

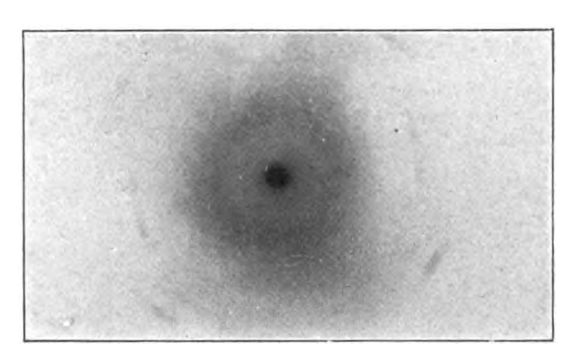


Fig. 3. *p*-Azoxyanisol, trübflüssig.

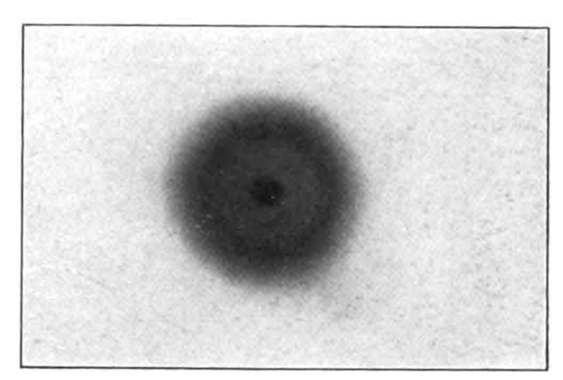


Fig. 4. *p*-Azoxyanisol, klarflüssig.

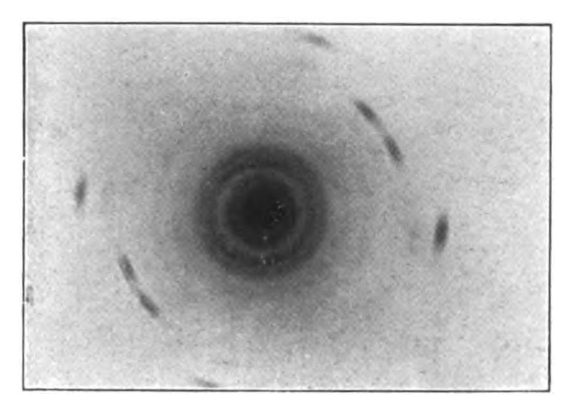


Fig. 5. Cholesterylpropionat, fest

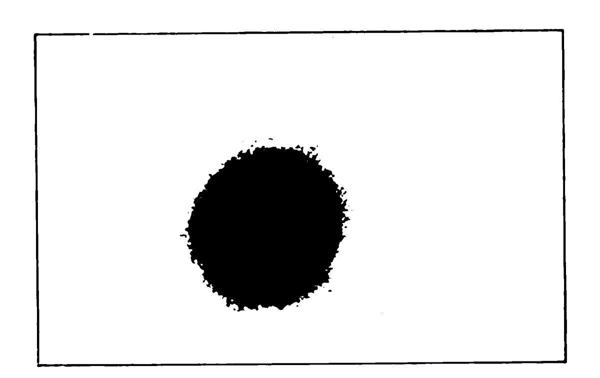


Fig. 6. Cholesterylpropionat, trübflüssig.

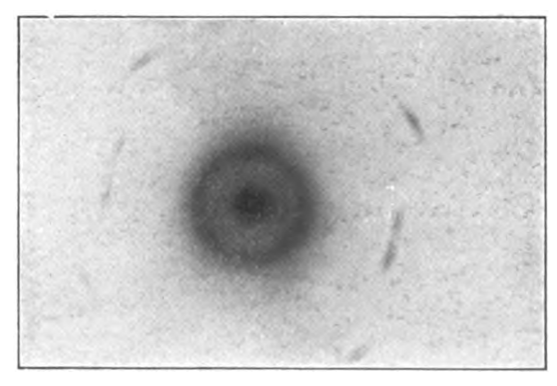


Fig. 7. Cholesterylpropionat, klarflüssig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21/22. 1./15. November 1921. 22. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 23 am 25. November 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Elektrodynamik im schwachen Gravitationsfelde.

Von W. Alexandrow.

In einer vorhergehenden Arbeit[1]) ist vom Verf. die Elektrostatik im schwachen nichtstatischen Gravitationsfelde allgemein untersucht und auf einige wirkliche und „spezielle" Gravitationsfelder angewendet worden. In der vorliegenden Arbeit soll nun das allgemeinste Problem der Elektrodynamik in einem schwachen Gravitationsfelde behandelt werden. In Vektorform umgeschrieben, erhalten die elektrodynamischen Feldgleichungen im schwachen Gravitationsfelde eine besonders durchsichtige und bemerkenswerte Gestalt, welche die in der vorhergehenden Arbeit eingeführten Ströme als „Polarisations"- und „Magnetisierungsströme" (im Sinne von H. A. Lorentz) im gravitationsfreien Raum erscheinen läßt. Die Ergebnisse sollten dann insbesondere auf die Ausbreitung der ebenen elektromagnetischen Wellen auf einem im Galileischen Raum rotierenden Bezugssystem und im Gravitationsfelde einer rotierenden Massenkugel angewendet werden. Es sei jedoch die Lösung dieser rein mathematischen Aufgabe einer späteren Mitteilung vorbehalten. Hier soll nur eine Bemerkung über den Fall des statischen Gravitationsfeldes Platz finden. Es ergibt sich in diesem Falle die rein elektrodynamische Ableitung der Einsteinschen Strahlenablenkung.

1) W. Alexandrow, Ann. d. Phys. **65**, 675, 1921.

Dies liefert folgende physikalische Auffassung der „Strahlenkrümmung" im Gravitationsfelde:

der leere Raum („Äther") ist nicht nur des Faraday-Maxwellschen Spannungszustandes fähig (wie im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie), sondern auch der Polarisation und der Magnetisierung (das Ergebnis der Gravitationstheorie auf dem Boden der allgemeinen Relativität!). Als elektrischer bzw. magnetischer Suszeptibilitätsfaktor tritt dabei im wesentlichen das Newtonsche Gravitationspotential auf.

Zunächst seien hier die Resultate der erwähnten Arbeit, an die die weitere Entwicklung anknüpft, in vereinfachter Form zusammengestellt und durch einige Nachträge ergänzt.

§ 1. Nachträge.

Ist in einem beliebigen schwachen Gravitationsfelde die Verteilung der ruhenden Ladung durch die Ladungsdichte $\mathfrak{s}^0 = \varrho$ gegeben und bestimmt man das gewöhnliche elektrostatische Feld aus dem Potential

$$\varphi = \int \frac{\varrho \, dV}{r}$$

durch

$$E^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i};$$

führt man ferner, in Rücksicht auf die Analogie zu „speziellen" Gravitationsfeldern ein:

die „Geschwindigkeit"

$$u^i = -g^{0i}, \quad u_i = g^{0i},$$

den „Verzerrungstensor"

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{i0}}{\partial x_k} + \frac{\partial g^{k0}}{\partial x_i}\right)$$

und die „Leistung"

$$L = -(\mathsf{E}^k u_k)$$

und außerdem die Bezeichnung

$$\Phi = 1 + \sqrt{g g^{00} g^{11}},$$

so lauten die Maxwellschen Gleichungen (f_{ik} ist das Feld):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^0 = \varrho(1+\Phi) + \mathsf{E}^k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \\ &\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = \varrho u^i + (2\mathsf{E}^k u^i_k - \mathsf{E}^i u^k_k) - \\ &-\frac{\partial L}{\partial x_i} - \mathsf{E}^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2\, 3)^{1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_{1,2})$$

(Die Summation nach griechischen Buchstaben durchläuft die Werte 0, 1, 2, 3; die nach den lateinischen die Werte 1, 2, 3.) Die Elektrostatik im schwachen Gravitationsfelde läßt sich also als eine Elektrodynamik im gravitationslosen Raum auffassen. Die Ladungsdichte ϱ erhält Zusatzglieder, die schon im statischen Gravitationsfelde auftreten. Ganz neu erscheint dagegen der „Strom" s^i, der nur im nicht-statischen (stationären oder veränderlichen) Gravitationsfelde hervorgerufen wird. Seine Bestandteile wurden, in Rücksicht auf die Analogie zu den „speziellen" Gravitationsfeldern, in der erwähnten Arbeit der Reihe nach als „Konvektionsstrom", „Verzerrungsstrom", „Leistungsstrom" und „masseninduzierter Strom" bezeichnet. Der erste tritt nur dort auf, wo die Ladung sitzt; die drei letzten Bestandteile sind dagegen „Ätherströme", wie der Maxwellsche Verschiebungsstrom. Der Gesamtstrom genügt, wie man durch direkte Rechnung verifizieren kann, der Kontinuitätsgleichung. Als einige Folgerungen dieser Gleichungen seien erwähnt:

1. In einem veränderlichen Gravitationsfelde (speziell im Felde eines punktförmigen Senders der Gravitationswellen) strahlt im allgemeinen auch die ruhende Elektrizität. Es sei hier dieser Punkt etwas näher erörtert. Da im Falle des Gravitationspunktsenders hauptsächlich auf den „Konvektionsstrom" geachtet wurde und die Bilanz der „Ätherströme" nicht vollständig war, könnte man denken, daß immer, wie es in dem von G. Mie[1]) untersuchten Falle des um ein Elektron umlaufenden Massenkernes zutrifft, eine im Raume stehende elektromagnetische Welle und keine eigentliche Strahlung entsteht. Es sollen deshalb einige Gegenbeispiele gegeben werden.

Nehmen wir ein im Galileischen Raum um die x_3-Achse hin und her schwingendes (pendelndes) Bezugssystem, so daß die Winkelgeschwindigkeit etwa $\omega \sin \nu t$ beträgt (ω = const). Das Induktionsglied verschwindet allgemein für „spezielle" Gravitationsfelder. Hier ist aber auch der Verzerrungstensor identisch = 0. Wir betrachten nun eine ruhende, homogen geladene Kugel auf dem beschriebenen System. Dann ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{3}\varrho r \mathfrak{r}_1 \quad \text{innerhalb und}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4\pi r^2}\mathfrak{r}_1 \quad \text{außerhalb der Kugel.}$$

Es ist aber $(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1) = 0$, so daß die „Leistung" $(\mathfrak{E}\mathfrak{u}) = 0$ ist. Es bleibt also nur der „Konvektionsstrom" und die Maxwellschen Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho, \\ &\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho u^i \qquad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}\right\}$$

wo ϱu^i vom Betrage $\varrho \bar{r} \omega \sin \nu t$ ($\bar{r}^2 = x_1^2 + x_2^2$) die Richtung des Pendelns hat. Hier muß die ruhende geladene Kugel offenbar strahlen.

Betrachten wir noch ein im Galileischen Raum schwingendes Bezugssystem und eine ruhende homogen geladene Kugel vom Radius a in diesem. Der Verzerrungstensor verschwindet, da $\mathfrak{u} = \mathfrak{a} \sin \nu t$ ($\mathfrak{a}$ = const) räumlich konstant ist. Die „Leistung" $L = (\mathfrak{E}\mathfrak{u})$ ist:

$$L = \tfrac{1}{3}\varrho r(\mathfrak{r}_1\mathfrak{u}) \qquad \text{innerhalb,}$$

$$= \frac{e}{4\pi r^2}(\mathfrak{r}_1\mathfrak{u}) \quad \text{außerhalb der Kugel;}$$

der „Leitungsstrom":

$$-\operatorname{grad} L = -\tfrac{1}{3}\varrho\mathfrak{u} \quad \text{innen,}$$

$$= \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(-\tfrac{1}{3}\varrho\mathfrak{u} + \varrho(\mathfrak{r}_1\mathfrak{u})\mathfrak{r}_1\right) \quad \text{außen.}$$

Nimmt man noch den „Konvektionsstrom" hinzu, so tritt als der „Strom" auf:

$$\left.\begin{aligned} &\text{innerhalb der Kugel} \\ &\tfrac{2}{3}\varrho\mathfrak{u} \\ &\text{außerhalb der Kugel} \\ &\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(-\tfrac{1}{3}\varrho\mathfrak{u} + \varrho(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_1)\mathfrak{r}_1\right) \end{aligned}\right\} \mathfrak{u} = \mathfrak{a}\sin\nu t.$$

1) Dabei wurde, lediglich zur Vereinfachung der Rechnung, die in vielen Anwendungsfällen zutreffende Annahme gemacht: $g^{11} = g^{22} = g^{33}$, $g^{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3$; $i \neq k$), die übrigens nur unwesentliche Modifikationen der Formeln bedingt.

1) Diese Zeitschr. **21**, 651, 1920.

Man hat also folgendes Bild:

Innerhalb der Kugel ist vom gewöhnlichen Konvektionsstrom $\frac{2}{3}$ zu nehmen. In einer gewissen „Atmosphäre" um die Kugel ist der Strom — wie wenn von der Dichte ϱ herrührend — entgegengesetzt, aber nur vom Betrage $< \frac{1}{3}$ des Konvektionsstromes. Außerdem schwingt noch die „Atmosphäre" radial mit der Geschwindigkeit = Projektion von $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{r}$, als ob sie dabei die Dichte $\left(\frac{a}{r}\right)^3 \varrho < \varrho$ besäße. Auch in diesem Falle ist wohl die Welle nicht stehend.

2. Rotiert eine Massenkugel vom Radius l und „Gravitationsradius" m innerhalb eines elektrisch geladenen Ringes, so ist dieser mit einem Magnetfeld umgeben, als wenn der Ring entgegengesetzt um die Kugel rotieren würde, und zwar so, daß der „Strom" (in hinreichender Entfernung r von der Kugel, in der Äquatorebene)

$$\frac{4}{5} \varrho m \omega \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

beträgt. Dieser Strom ist infolge des Faktors m (statt der gewöhnlichen Länge) ein $\frac{1}{c^2}$ Bruchteil des gewöhnlichen Konvektionsstromes und deshalb für die irdischen Verhältnisse wohl verschwindend. (In der vorliegenden Arbeit wird ein etwas günstigerer Effekt abgeleitet.)

3. Ein rotierender geladener Ring ist auch für den mitbewegten Beobachter mit einem Magnetfeld umgeben.

Dabei treten noch „Ätherströme" auf, die durch die Kontinuität des Stromes bedingt sind.

Es sei hier noch der Fall einer rotierenden hohlen Massenkugel vom Radius a und dem Gravitationsradius m hinzugefügt[1]). Ein innerhalb einer solchen Kugel (in der Nähe des Mittelpunktes, im Abstand r, in der Äquatorebene) sich befindender elektrisch geladener Ring stellt einen Strom vom Betrage

$$\frac{4}{3} \varrho m \omega \frac{r}{a}$$

dar, der entgegengesetzt der Kugelrotation gerichtet ist.

§ 2. Das elektromagnetische Feld des stationären Leitungsstromes im schwachen Gravitationsfelde.

1. Der Übergang von der Elektrostatik zur Elektrodynamik gestaltet sich besonders übersichtlich, wenn man zunächst das zweite stationäre Grundproblem, das der stationären Ströme, erledigt. Wir gehen also von den Maxwellschen Gleichungen im beliebigen Gravitationsfelde aus ($\mathfrak{f}^{ik}$ Felddichte, $\mathfrak{s}^i$ Stromdichte, φ_i Potentiale):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} &= \mathfrak{s}^i, \\ f_{ik} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und nehmen an, daß der Strom nur als reiner Leitungsstrom auftritt, so daß keine statischen Ladungen vorhanden sind, also

$$\mathfrak{s}^0 = \varrho = 0.$$

Für die Komponenten der Leitungsstromdichte, die von der Zeit unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{s}^i = J^i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ein. Sie genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial J^i}{\partial x_i} = 0.$$

Das nach der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie bei aufgehobener Gravitation aus J^i durch das Vektorpotential

$$\psi^i = \int \frac{J^i dV}{r}$$

auf Grund

$$H_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

bestimmte stationäre Magnetfeld sei mit H_{ik} bezeichnet.

Wir setzen nun das Gravitationsfeld als schwach voraus, d. h.

$$g_{ik} = \overset{\circ}{g}_{ik} + \varepsilon \gamma_{ik},$$

wo $\overset{\circ}{g}_{ik}$ die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform der speziellen Relativitätstheorie sind und ε eine kleine Zahl ist, wobei wir nur die Glieder der ersten (und nullten) Ordnung in ε berücksichtigen. (Wir machen also genau das, was man mit den Gravitationsgleichungen macht, um zur Einsteinschen Näherungslösung zu gelangen.) Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir das Gravitationsfeld als so beschaffen an, daß

$$g^{11} = g^{22} = g^{33}, \quad g^{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; \; i \neq k) \quad (2)$$

ist. Diese Bedingung ist bei vielen Anwendungen erfüllt, und darüber hinaus ist bei der Behandlung der Elektrostatik gezeigt worden, daß alle wesentlichen Züge schon bei dieser Annahme zum Vorschein kommen, indem im allgemeinen Falle nur unwesentliche Modifikationen hinzutreten.

1) Das Gravitationsfeld einer solchen Kugel ist von H. Thirring (diese Zeitschr. **19**, 33—39, 1918 und **22**, 29—30, 1921) berechnet worden. Es ist hier zwar die früher erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, dadurch wird aber keine Modifikation bedingt.

Über die Größenordnungen der verschiedenen Komponenten wäre noch zu sagen, daß

$$g^{0i} (i = 1, 2, 3)$$

von der Größenordnung ε sind; andere Gravitationsglieder aber von der Form $\pm 1 + \varepsilon (\cdots)$, so daß ihre Ableitungen wieder von der Größenordnung ε sind. Von den elektromagnetischen Potentialen ist φ_0 und seine Ableitungen hier von der Größenordnung ε; dagegen $\varphi_i (i = 1, 2, 3)$ von der Form $\psi_i + \varepsilon (\ldots)$, so daß $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ und f_{0i} die Größenordnung ε haben; f_{ik} sind von der Form $H_{ik} + \varepsilon (\cdots)$.

2. In den Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial (\sqrt{g} g^{i\alpha} g^{k\beta} f_{\alpha\beta})}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i$$

spalten wir, um die Glieder der 0ten und 1. Ordnung in ε auszuwählen, den Index 0 ab und schreiben sie so, daß die Indizes bei den Summationen nach k, α, die überall vollzogen sein müssen, nur die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. Läßt man die Glieder höherer Ordnung fort, so bleibt in der nullten Gleichung:

$$\frac{\partial (\sqrt{g} g^{00} g^{11} f_{0k})}{\partial x_k} + \frac{\partial (\sqrt{g} g^{0\alpha} g^{11} f_{\alpha k})}{\partial x_k} = 0$$

übrig. Da f_{0k} und $g^{0\alpha}$ von der Größenordnung ε sind, kann man die Faktoren $\sqrt{g} g^{00} g^{11}$, $\sqrt{g} g^{11}$ durch -1 ersetzen. Deuten wir nun die Summationen nach 0, 1, 2, 3 mit griechischen, die nach 1, 2, 3 mit lateinischen Buchstaben an, so ist:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial (f^{ik} u_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} u_i + f^{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Hier ist u_i von der Größenordnung ε; also darf im zweiten Gliede f^{ik} durch H^{ik} ersetzt werden; im ersten Gliede aber $\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}$ durch $\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$, was — wie wir sogleich sehen werden — bis auf einen Unterschied von der Größenordnung ε gleich J^i ist. Das letzte Glied formen wir noch so um:

$$H^{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = H^{ik} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Führen wir noch analog der „Rotation"

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{3}$$

ein, so lautet die nullte Gleichung endgültig:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^0 = (J_k u^k) + (H^{ik} v_{ik}). \tag{II$_1$}$$

3. Ebenso behandeln wir auch die Gleichungen $i = 1, 2, 3$.

Beachten wir, daß f_{0i} die Größenordnung ε hat, so haben wir zunächst nur folgende Glieder zu behalten (bei den Summationen nach k, β durchlaufen die Indizes nur die Werte 1, 2, 3):

$$\frac{\partial (\sqrt{g} g^{00} g^{11} f_{i0})}{\partial x_0} + \frac{\partial [\sqrt{g} (g^{11})^2 f_{ik}]}{\partial x_k} + \frac{\partial (\sqrt{g} g^{11} g^{0\beta} f_{i\beta})}{\partial x_0} = J^i.$$

Da f_{i0}, $g^{0\beta}$ von der Größenordnung ε sind, kann man wieder die Faktoren $\sqrt{g} g^{00} g^{11}$, $\sqrt{g} g^{11} f_{i\beta}$ durch -1 bzw. $-H_{i\beta}$ ersetzen:

$$\frac{\partial f^{i0}}{\partial x_0} + \sqrt{g} (g^{11})^2 \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} + f^{ik} \frac{\partial [\sqrt{g} (g^{11})^2]}{\partial x_k} - H^{ik} \frac{\partial u_k}{\partial t} = J^i.$$

Da ferner der Differentialkoeffizient im dritten Glied von der Größenordnung ε ist, kann man dort f^{ik} durch H^{ik} ersetzen; die ersten zwei Glieder aber, analog 2., durch

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - (1 - \sqrt{g} (g^{11})^2) J^i.$$

Führen wir noch die Bezeichnung

$$\Psi = 1 - \sqrt{g} (g^{11})^2 \tag{4}$$

ein, so lauten die Gleichungen $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = J^i (1 + \Psi) + H^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + H^{ik} \frac{\partial u_k}{\partial t} \tag{II$_2$}$$

(α durchläuft die Werte 0, 1, 2, 3; lateinische Indizes — 1, 2, 3).

4. Man kann sich durch Rechnung überzeugen, daß der in den Gleichungen (II$_{1,2}$) rechts auftretende Viererstrom s^i der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ genügt. In (II$_1$) ist ganz neu eine statische Ladungsdichte erschienen. Vergleicht man die Gleichungen (II) mit (I), so würde man die beiden Bestandteile der Ladungsdichte in (II$_1$):

$$(J_k u^k)$$

als „Konvektionsladung" und

$$(H^{ik} v_{ik})$$

als „Rotationsladung" bezeichnen. Die erste ist nur dort vorhanden, wo der Strom J^i fließt, die zweite dagegen auch im „Äther". Wir sehen, daß die „Rotation" ebenso zum Magnetfeld gehört, wie der „Verzerrungstensor" zum elektrischen Felde. Das „Leistungsglied" fehlt hier, da es keine magnetische „Leistung" gibt. Die gravitationsstatischen Glieder in (II$_2$) sind ganz analog denen in (I$_1$). Ebenso entspricht das „Induktionsglied"

$$H^{ik} \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

dem $-\mathrm{E}^i \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ in (I$_2$), wobei u_k zu H^{ik} so gehört, wie Φ zu E^i.

5. Wir wenden zunächst diese Gleichungen an auf den eine rotierende Massenkugel umfließenden stationären Strom. Das Gravitationsfeld einer solchen Kugel ist von J. Lense und H. Thirring[1]) berechnet worden.

Ist $$\varepsilon = \tfrac{4}{5}\, m l^2 \omega$$
(l Radius, m „Gravitationsradius", ω Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel), so ist hier

$$u^1 = -g^{01} = \varepsilon \frac{x_2}{r^3},\ u^2 = -g^{02} = -\varepsilon \frac{x_1}{r^3},\ u^3 = 0.$$

Die „Konvektionsladung" beträgt also

$$\frac{\varepsilon}{r^2}\left(J_1 \frac{x_2}{r} - J_2 \frac{x_1}{r}\right) = \frac{4}{5}\, m\omega \left(\frac{l}{r}\right)^2 [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{S}]_z$$

($\mathfrak{S}$ der Strom $[J_1, J_2, J_3]$, $\mathfrak{r}_1$ Einheitsvektor). Umfließt der Strom die rotierende Kugel in der Äquatorebene, so ist (beim kreisförmigen Strom):

$$J_1 = J\frac{x_2}{r} = -J^1,\ J_2 = -J\frac{x_1}{r} = -J^2,$$

wo $J \gtrless 0$ ist, je nachdem der Strom im Sinne der Kugelrotation oder ihr entgegengesetzt fließt. Die „Konvektionsladung" ist dann

$$\frac{4}{5} J m\omega \left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

Die Rotation einer Massenkugel innerhalb eines Kreisstromes bedingt also das Entstehen einer statischen Ladung von dieser Größe; sie ist positiv, wenn die Kugel im Sinne des Stromes rotiert. Dieser Effekt ist etwas günstiger als der entsprechende Stromeffekt (§ 1) infolge der großen Elektronengeschwindigkeit, die in J steckt. Für die „Rotationsladung" würde man den Wert

$$\frac{\varepsilon}{r^3}\left(H^z - 3\frac{z}{r} H^r\right)$$

erhalten (H^z die z-Komponente, H^r die Radialkomponente des Magnetfeldes; $H^1 = H_{23}$, $H^2 = H_{31}$, $H^3 = H_{12}$).

6. Auf einem relativ zu einem Galileischen Bezugsraum um die $x_3 = z$-Achse rotierenden System ist

$$u^1 = -\omega x_2,\ u^2 = \omega x_1,\ u^3 = 0,$$

also die „Konvektionsladung"

$$r\omega\left(J_2 \frac{x_1}{r} - J_1 \frac{x_2}{r}\right) = r\omega [\mathfrak{S}, \mathfrak{r}_1]_z.$$

Fließt der Strom in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene, so ist (bei Kreisform):

$$J_1 = J\frac{x_2}{r} = -J^1,\ J_2 = -J\frac{x_1}{r} = -J^2,$$

wo $J \gtrless 0$ ist, je nachdem er im Sinne der Rotation oder entgegengesetzt fließt; und die „Konvektionsladung" wird

$$-Jr\omega;$$

sie ist positiv, wenn der Strom entgegengesetzt der Rotation des Systems fließt. Die „Rotationsladung" ist

$$2\omega H^z.$$

§. 3. Das elektromagnetische Feld beliebiger Ströme und Ladungen im schwachen Gravitationsfelde.

1. Es ist nun nicht schwer, die allgemeinen Maxwellschen Gleichungen im schwachen Gravitationsfelde abzuleiten. Denn bis auf die „Induktionsglieder" elektromagnetischen Ursprungs hat man hier einfach die Zusammensetzung der beiden stationären Spezialfälle.

Wir bezeichnen das nach der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie bei Aufhebung der Gravitation aus $\mathfrak{s}^i$ durch das Viererpotential

$$\psi^i = \int \frac{\mathfrak{s}^i dV}{r} \qquad (\mathfrak{s}^0 = \varrho;\ \mathfrak{s}^i = J^i,\ i = 1, 2, 3)$$

gemäß

$$F_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$$

berechnete Feld mit F_{ik}. Es zerfällt in das elektrische Feld und das Magnetfeld:

$$\left.\begin{array}{l} F^{0i} = \mathrm{E}^i \\ F^{ik} = H^{ik} \end{array}\right\} \quad (i, k = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

$$H^1 = H_{23},\ H^2 = H_{31},\ H^3 = H_{12}.$$

Während die Größenordnungen der Gravitationsglieder durch die früheren Festsetzungen charakterisiert werden, sind die elektromagnetischen Potentiale von der Form

$$\varphi_i = \psi_i + \varepsilon(\cdots);$$

für das Feld gilt $f_{ik} = F_{ik} + \varepsilon(\cdots)$.

2. Bei der nullten Gleichung haben wir zunächst wie vorhin

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{00} g^{11} f_{0k})}{\partial x_k} + \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{0i} g^{11} f_{ik})}{\partial x_k} = \varrho.$$

Hier kann bei g^{0i} der Faktor $\sqrt{g}\, g^{11}$ durch -1 ersetzt werden. Ferner kann man schreiben:

$$\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = \varrho + \Phi \frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} + f^{0k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial (f^{ik} u_i)}{\partial x_k}.$$

Bei den mit ε schon behafteten Gliedern ist $\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha}$ durch ϱ, f^{0k} durch E^k zu ersetzen. Das letzte Glied berechnet sich wie vorhin. Nur ist hier $\frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}$ nicht durch J^i, sondern durch $J^i - \frac{\partial f^{i0}}{\partial x_0}$ oder $J^i + \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial t}$ zu ersetzen. Man kommt

1) Diese Zeitschr. 19, 158, 1918.

so zu der endgültigen Form der nullten Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f^{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = s_0 = \varrho(1+\Phi) + \mathrm{E}^k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \\ + (J^k u_k) + (H^{ik} v_{ik}) \\ + \left(u^k \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}_1)$$

(Summation nach griechischen Buchstaben über 0, 1, 2, 3, nach lateinischen — über 1, 2, 3).

3. Bei den Gleichungen $i = 1, 2, 3$ haben wir mehr Glieder zu berücksichtigen:

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{11} g^{00} f_{i0})}{\partial x_0} + \frac{\partial[\sqrt{g}\,(g^{11})^2 f_{ik}]}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{i0} g^{11} f_{0k})}{\partial x_k} + \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{11} g^{0k} f_{i0})}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{11} g^{0k} f_{ik})}{\partial x_0} = J^i.$$

In den drei letzten Gliedern, die g^{i0} enthalten, oder auch sonst in den Gliedern, die mit ε behaftet sind, kann man den Faktor $\sqrt{g}\, g^{11}$ durch -1 ersetzen, außerdem eventuell f^{ik} durch H^{ik}, f^{0i} durch E^i. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \Phi \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial t} + \mathrm{E}^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} - H^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} -$$

$$- u^i \frac{\partial f^{0k}}{\partial x_k} - \mathrm{E}^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} - \frac{\partial(u_k F_{i0})}{\partial x_k} - \frac{\partial(H^{ik} u_k)}{\partial t} = J^i.$$

Im 4. Glied kann man ferner $J^i + \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial t}$ statt $\frac{\partial f^{ik}}{\partial k_k}$ schreiben, im sechsten ϱ statt $\frac{\partial f^{0k}}{\partial x_k}$. Endlich formen wir das vorletzte Glied so um:

$$\frac{\partial(u_k F_{i0})}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial F_{i0}}{\partial x_k} - F^{0i} \frac{\partial u^k}{\partial x_k},$$

und wegen

$$\frac{\partial F_{i0}}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial F_{k0}}{\partial x_i}:$$

$$\frac{\partial(u_k F_{i0})}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{E}^k u_k)}{\partial x_i} - \mathrm{E}^k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \mathrm{E}^i u_k^k.$$

Endgültig erhalten wir also für die Gleichungen $i = 1, 2, 3$:

Φ und Ψ genügen dabei der Relation:

$$\frac{\Phi g^{11} + \Psi g^{00}}{g^{11} + g^{00}} = 1.$$

4. Die Gleichungen ($\mathrm{III}_{1,2}$) sind von der Form der Maxwellschen Gleichungen bei aufgehobener Gravitation. Wir sehen aber, daß die ursprünglich gegebenen Strom und Ladung durcheinandergemischt sind. Wir haben Beispiele (im Felde einer rotierenden Massenkugel) gesehen, wo

$$\frac{4}{5} \varrho m \omega \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

als Strom und

$$\frac{4}{5} J m \omega \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

als statische Ladung auftritt. Rechts in ($\mathrm{III}_{1,2}$) stehen lauter bekannte Größen. Denn das äußere Gravitationsfeld ist gegeben. E^i und H^{ik} werden aber aus gegebenen $\mathfrak{s}^0 = \varrho$ und $\mathfrak{s}^i = J^i$ ($i = 1, 2, 3$) auf Grund der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen bestimmt. Es müssen also zunächst die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen gelöst werden; dann geben die Gleichungen ($\mathrm{III}_{1,2}$) das wirkliche Feld[1]). (Wegen der vektoriellen Form der Gleichungen $\mathrm{III}_{1,2}$ vgl. unten.)

Vergleichen wir die Gleichungen (III) mit den (I) und (II), so sehen wir, daß die rechten Seiten von (III) sich aus den rechten Seiten von (I) und (II) additiv zusammensetzen. Es treten nur die letzten Zeilen hinzu, die elektromagnetische „Induktionsglieder" vereinigen. Auch sonst ist der Bau von (III_1) und (III_2) analog. In erster Zeile stehen die analog gebauten „gravitationsstatischen" Glieder. Dem „Konvektionsstrom" entspricht die „Konvektionsladung", dem „Verzerrungsstrom" — die „Rotationsladung" (wobei rot so zum Magnetfeld gehört, wie der „Verzerrungstensor" zum elektrischen Feld).

In (III_1) fehlt das „Leistungsglied" (keine magnetische „Leistung"!), ebenso die „Masseninduktionsglieder". In (III_2) ist bei diesen das elektrische Feld so mit Φ verknüpft, wie das Magnetfeld mit u^i.

5. Wir wollen noch zum Schlusse dieses

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = s^i = J^i(1+\Psi) + H^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \\ + \varrho u^i + (2\mathrm{E}^k u_k^i - \mathrm{E}^i u_k^k) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \mathrm{E}^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H^{ik} \frac{\partial u_k}{\partial t} \\ + (\Psi - \Phi) \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial t} + 2\left(u_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial t}\right).\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}_2)$$

1) Die weitere Verfolgung dieses Gedankens würde zu einer Methode sukzessiver Approxmixationen führen.

Paragraphen direkt durch Rechnung verifizieren, daß der in (III.,2) rechts auftretende Viererstrom s^α tatsächlich identisch der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Es ist zunächst:

$$\frac{\partial s^0}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{E}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial (J^k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial (H^{ik} v_{ik})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(u_k \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t}\right).$$

Ferner:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x_i} = \frac{\partial J^i}{\partial x_i} + \Psi \frac{\partial J^i}{\partial x_i} + J^i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \left(J^k + \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + H^{ik} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} + \\ + \varrho u_k^k + u^i \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \left(2 \mathrm{E}^k \frac{\partial u_k^i}{\partial x_i} - \mathrm{E}^i \frac{\partial u_k^k}{\partial x_i}\right) + \left(2 \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial x_i} u_k^i - \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial x_i} u_k^k\right) - \triangle L - \\ - \mathrm{E}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial t}\left(J^k + \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t}\right) - H^{ik} \frac{\partial v_{ik}}{\partial t} + \\ + (\Psi - \Phi) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) - 2 \frac{\partial H^{ik}}{\partial t} v_{ik} - 2 u_k \frac{\partial}{\partial t}\left(J^k + \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial t}\right).$$

Man benutze die auch hier gültige Beziehung $\frac{\partial \mathrm{E}^i}{\partial x_i} = \varrho$, und auch $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial J^i}{\partial x_i} = 0$. Ferner:

$$-\triangle L = \triangle \mathrm{E}^k u_k + 2 \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \mathrm{E}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

(auch nach i summiert!).

Das zweite Glied ist hier

$$= \frac{\partial F^{0k}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F^{0i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

und wegen

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x_k} = \frac{\partial F^{0k}}{\partial x_i} + \frac{\partial F^{ik}}{\partial t}$$
$$= -2 \frac{\partial \mathrm{E}^k}{\partial x_i} u_k^i + \frac{\partial H^{ik}}{\partial t} v_{ik};$$

das erste wegen $\Box \psi^0 = \varrho$, $\Box \psi^i = J^i$

$$\triangle \mathrm{E}^k u_k = u_k \frac{\partial^2 \mathrm{E}^k}{\partial t^2} + u_k \frac{\partial J^k}{\partial t} - u^k \frac{\partial \varrho}{\partial x_k}.$$

Setzt man alles ein, so sieht man, daß sich alle Glieder paarweise aufheben.

§ 4. Vektorielle Form der elektromagnetischen Gleichungen im schwachen Gravitationsfelde. Vakuum.

1. Wir wollen nun die Maxwellschen Gleichungen (III) im schwachen Gravitationsfelde in Vektorform umschreiben. Dadurch gewinnen sie eine besonders übersichtliche und sozusagen endgültige Gestalt. Es seien $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{B}_0$ die Lösungen der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen mit gegebener Ladungsdichte ϱ und Stromdichte $\mathfrak{i}$, bei aufgehobener Gravitation; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ der wirkliche Feldverlauf im schwachen Gravitationsfelde. Ferner sei:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{u} = (u^1, u^2, u^3),\ \mathfrak{E}_0 = (\mathrm{E}^1, \mathrm{E}^2, \mathrm{E}^3), \\ \mathfrak{B}_0 = (H^1, H^2, H^3) = (H^{23}, H^{31}, H^{12}). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wir benutzen die Beziehungen

$$(H^{ik} v_{ik}) = (\mathfrak{B}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{u}),$$
$$(H^{ik} a_k) = [\mathfrak{B}_0, \mathfrak{a}] \quad \text{mit } \mathfrak{a} = (a^1, a^2, a^3),$$
$$\left(H^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) = [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0];$$

ferner die Formel:

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{u}) = [\mathfrak{E}_0, \operatorname{rot} \mathfrak{u}] + [\mathfrak{u}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}_0] + \\ + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{u} + (\mathfrak{u} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0$$

und die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}_0 = -\frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial t}.$$

Wir bezeichnen noch den Vektor

$$\mathrm{E}^1 \operatorname{grad} u^1 + \mathrm{E}^2 \operatorname{grad} u^2 + \mathrm{E}^3 \operatorname{grad} u^3$$

mit

$$(\mathfrak{E}_0\, \mathfrak{u}) \operatorname{grad}.$$

Dann lauten die Gleichungen (III) ($\mathfrak{i}$ sei der Vektor J^i):

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho(1 + \Phi) - (\mathfrak{i}\mathfrak{u}) + (\operatorname{grad} \Phi, \mathfrak{E}_0) + (\operatorname{rot} \mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0) - \left(\mathfrak{u} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}\right),$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{i}(1 + \Psi) + \varrho \mathfrak{u} + [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0] + [\operatorname{rot} \mathfrak{u}, \mathfrak{E}_0] \\ + (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{u}) \operatorname{grad} - (\mathfrak{u} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div} \mathfrak{u} \\ - \mathfrak{E}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0] + (\Psi - \Phi) \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}.$$

Nun ersetzen wir in der ersten Gleichung, auf Grund der Maxwellschen Gleichungen für $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{B}_0, \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}$ durch $\operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{i}$, $(\operatorname{grad} \Phi, \mathfrak{E}_0)$ durch $\operatorname{div}(\Phi \mathfrak{E}_0) - \Phi \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = \operatorname{div}(\Phi \mathfrak{E}_0) - \Phi \varrho$ und benutzen die Formel:

$$\operatorname{div}[\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0] = (\mathfrak{B}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{u}) - (\mathfrak{u} \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0).$$

In der zweiten Gleichung benutzen wir die Formeln:

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathfrak{B}_0) = [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0] + \Psi \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 = [\operatorname{grad} \Psi, \mathfrak{B}_0] + \Psi \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + \mathfrak{i} \Psi,$$

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{u}, \mathfrak{E}_0] = \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div} \mathfrak{u} + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{u} - (\mathfrak{u} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0$$
$$= \varrho \mathfrak{u} - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div} \mathfrak{u} + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{u} - (\mathfrak{u} \operatorname{grad}) \mathfrak{E}_0,$$

$$((\mathfrak{E}_0 \mathfrak{u}) \operatorname{grad} - (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{u} = [\mathfrak{E}_0, \operatorname{rot} \mathfrak{u}].$$

Dann haben wir die Gleichungen:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{E} - \Phi \mathfrak{E}_0 - [\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0]) = \varrho,$$
$$\operatorname{rot}(\mathfrak{B} - \Psi \mathfrak{B}_0 - [\mathfrak{u}, \mathfrak{E}_0])$$
$$- \frac{\partial(\mathfrak{E} - \Phi \mathfrak{E}_0 - [\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0])}{\partial t} = \mathfrak{i},$$
$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0.$$

Wir erklären Φ und Ψ nunmehr lieber durch:

$$\Phi = -1 - \sqrt{g}\, g^{00} g^{11}, \quad \Psi = 1 - \sqrt{g}\, (g^{11})^2. \quad (2)$$

Die erhaltenen Gleichungen laden nun ein, die „Polarisation" und die „Magnetisierung" im gravitationsfreien Raume einzuführen, gemäß:

$$\mathfrak{P} = \Phi \mathfrak{E}_0 - [\mathfrak{u}, \mathfrak{B}_0]$$
$$\mathfrak{M} = \Psi \mathfrak{B}_0 + [\mathfrak{u}, \mathfrak{E}_0] \quad \text{(IVa)}$$

und

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \; \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \quad \text{(IVb)}$$

zu setzen. Dann gelten im schwachen Gravitationsfelde die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen des inhomogenen Mediums:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{i}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \quad \text{(IVc)}$$

2. Aus der Form (IV) der Maxwellschen Gleichungen sehen wir nun ein, daß der Einfluß des schwachen Gravitationsfeldes auf den Ablauf der elektromagnetischen Erscheinungen sich so auffassen läßt: der leere gravitationsfreie Raum erhält die durch (IVa) definierte „Polarisation" und „Magnetisierung", wodurch er im allgemeinen zu einem inhomogenen polarisierten und magnetisierten Medium wird. Man kann auch sagen: der leere Raum („Äther") ist nicht nur des Faraday-Maxwellschen Spannungszustandes fähig (der durch das elektromagnetische Feld bestimmt ist), sondern auch der Polarisation und der Magnetisierung (die durch das Zusammenwirken mit dem Gravitationsfelde, in welchem sich elektromagnetische Vorgänge abspielen, zustandekommen). Alle bisher eingeführten Strom- und Ladungsgattungen lassen sich also auch als „Polarisations"- und „Magnetisierungsströme" und „Polarisationsladung" (im Sinne von H. A. Lorentz) im gravitationsfreien Raum auffassen[1]).

3. Für das Vakuum wäre in unseren Gleichungen (IV) $\varrho = \mathfrak{i} = 0$ zu setzen. Zu jeder Lösung der elektromagnetischen Vakuumgleichungen im gravitationslosen Raum, d. h. zu jeder Möglichkeit der Wellenausbreitung in einem solchen, geben diese Gleichungen ihre Modifikation durch das schwache Gravitationsfeld. Als naheliegende Aufgaben würden sich hier bieten: die Ausbreitung der aus dem Unendlichen kommenden elektromagnetischen ebenen Wellen auf einem im Galileischen Raum rotierenden Bezugssystem oder im Gravitationsfelde einer rotierenden Massenkugel. (Das zweite dieser Probleme würde etwa durch die von den Fixsternen kommenden an der rotierenden Sonne vorübereilenden elektromagnetischen Planwellen realisiert; das erste — durch die auf die Erde zueilenden Wellen). Es sei jedoch die Behandlung dieser rein mathematischen Aufgabe einer späteren Mitteilung vorbehalten.

Hier soll nur eine Bemerkung über das schwache statische Gravitationsfeld Platz finden. In diesem Falle ist $\mathfrak{u} = 0$, so daß nur Φ und Ψ zu berechnen sind. Man kann nun im statischen kugelsymmetrischen Fall immer streng ein solches Koordinatensystem einführen, daß das

1) Die Ausdrücke (IVa), sowie die in den Zwischenrechnungen auftretenden „Konvektionsstrom" $\varrho \mathfrak{u}$ und „Konvektionsladung" — $(\mathfrak{i}\mathfrak{u})$, erinnern an die in der Elektrodynamik bewegter Körper auftretenden Verbindungen. Vgl. H. Weyl, R. Z. M. (4. Aufl.), S. 175.

Linienelement des Raumes eine konform-euklidische Gestalt bekommt[1]). Im schwachen Feld wird insbesondere[2]):

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right);$$

$$g^{00} = 1 + \frac{2m}{r}, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right);$$

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{2m}{r}.$$

Es ist dann

$$\Phi = -1 - \sqrt{g}\, g^{00} g^{11} = \frac{2m}{r},$$

$$\Psi = 1 - \sqrt{g}\,(g^{11})^2 = \frac{2m}{r} = \Phi,$$

und man erhält für „Polarisation" und „Magnetisierung" nach (IVa):

$$\mathfrak{P} = \Phi \mathfrak{E}_0 \sim \Phi \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{M} = \Phi \mathfrak{B}_0 \sim \Phi \mathfrak{B} \sim \Phi \mathfrak{H}.$$

Wenn man nunmehr unter Φ das Newtonsche Potential $-\frac{m}{r}$ versteht, so gilt:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P} = -2\Phi\mathfrak{E}, & \mathfrak{D} = (1-2\Phi)\mathfrak{E} \\ \mathfrak{M} = -2\Phi\mathfrak{H}, & \mathfrak{B} = (1-2\Phi)\mathfrak{H} \end{array} \qquad (V)$$

-2Φ spielt also die Rolle des (elektrischen und magnetischen) Suszeptibilitätsfaktors, $1-2\Phi$ die des räumlich variablen Dielektrizitäts- oder Permeabilitätsfaktors.

Diese Ergebnisse enthalten folgende physikalische Auffassung der Einsteinschen Strahlenablenkung im statischen Gravitationsfelde. Als ihr Ursprung ergibt sich sozusagen die inhomogene Polarisation und Magnetisierung des Vakuums durch das Zusammenwirken des Gravitationsfeldes mit dem elektromagnetischen Felde; es ist, als wenn der leere Raum dadurch zu einem inhomogenen polarisierten und magnetisierten Medium würde. Es geht hier ebenso, wie mit den elastischen Spannungen. Vor Maxwell hat man sie nur einem elastischen Stoffe zugeschrieben. Faraday ist zunächst zu der Vorstellung der elektromagnetischen Spannungen in einem Dielektrikum gelangt. Faraday-Maxwell haben sie dann auch dem leeren Raum (Äther) zuschreiben müssen. Vom Standpunkte der hier sich ergebenden Auffassung müßte man sagen, daß der leere Raum („Äther") nicht nur des Spannungszustandes, sondern — unter Berücksichtigung der Gravitation — auch der Polarisation und Magnetisierung fähig ist.

Es würde sich hier die rein elektrodynamische Ableitung der Einsteinschen „Strahlenkrümmung" ergeben. Die sonstigen Ableitungen benutzen immer die geodätische Nullinie, also eine weltgeometrische Tatsache; es sollte dann eigentlich dieser Satz über die Nullinie auch aus den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden, da das Licht eine elektromagnetische Erscheinung ist.

4. Es mag hier nur die folgende Andeutung Platz finden. Unsere Formeln liefern für die Dielektrizitäts- und Permeabilitätsfaktoren

$$\varepsilon = \mu = 1 - 2\Phi$$

(wo Φ das Newtonsche Potential ist). Wendet man die klassische Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen an, so hat man für diese

$$c^* = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c(1 + 2\Phi),$$

also die vollständige Einsteinsche Formel für die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Gravitationspotential (Die „speziellen" Felder liefern bekanntlich $c^* = c(1 + \Phi)$). Man pflegt zu sagen, daß die „Strahlenkrümmung" im Gravitationsfeld zur Hälfte schon in der Newtonschen Theorie sich einordnen ließe; zur Hälfte rühre sie aber von der Nichteuklidizität der Geometrie her. Vom Standpunkte der sich hier ergebenden Auffassung müßte man sagen, daß die Strahlenablenkung zur Hälfte durch die „Polarisation", zur Hälfte durch die „Magnetisierung" des Raumes im Gravitationsfelde zustandekommt.

(Eingegangen 25. September 1921.)

1) H. Weyl, „Zur Gravitationstheorie". Ann. d. Phys. **54**, 132, 1917.

2) T. Levi-Civitá, „ds^2 einsteiniani in campi newtoniani", I. Acc. dei Linc. **26**, 317, 1917, oder A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 692.

Die Magnetisierbarkeit der Zink-Eisenlegierungen niederen Eisengehaltes.

Von Ernst Lehmann.

Untersuchungen von K. Honda[1]) haben einen engen Zusammenhang zwischen dem magnetischen Verhalten und der strukturellen Beschaffenheit von Legierungen mit ferromagnetischer Komponente ergeben. Es wurde das Diagramm der Suszeptibilität in Abhängigkeit vom Prozentgehalt jeweils verglichen mit dem aus der Erkaltungskurve der betreffenden Legierung gewonnenen Bild ihrer kristallographi-

1) K. Honda, Ann. d. Phys. **32**, 1003, 1910.

schen Beschaffenheit. In der gegenwärtigen Untersuchung soll dieses Verfahren auf die Zink-Eisenlegierungen angewendet werden. In thermisch-kristallographischer Hinsicht sind diese Legierungen bis zu 24 Proz. Eisen von v. Vegesack[1]) eingehend studiert. Obwohl wegen entgegenstehender äußerer Umstände nur der Bereich von 0—8,5 Proz. *Fe* von mir auf sein magnetisches Verhalten hin untersucht werden konnte, ergaben sich in diesem Gebiet doch sehr bemerkenswerte Aufschlüsse. Hierdurch dürfte ein kurzer Bericht über die an anderem Ort[2]) ausführlicher dargelegten Untersuchungen gerechtfertigt erscheinen.

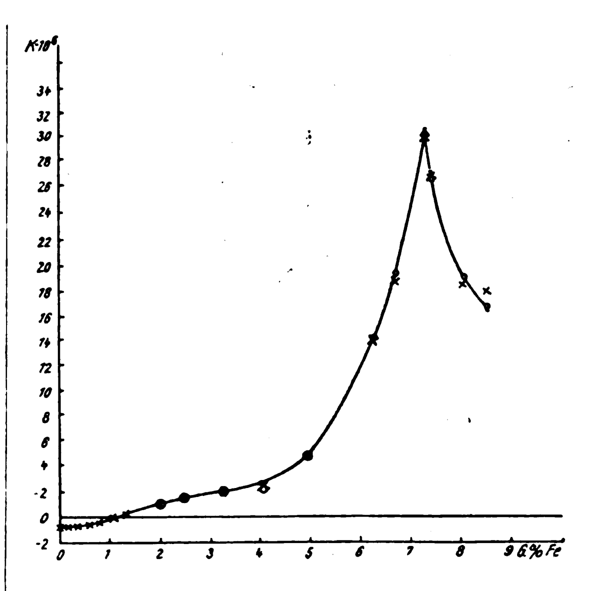
1. Experimentelle Einzelheiten.

Die Herstellung der Legierungen geschah anfangs durch Beigabe von Eisenpulver zu geschmolzenem Zink. Damit gelangt man wegen lebhafter Oxydationsprozesse bei vermehrter Eisenzugabe jedoch nur bis zu 4 Proz. Eisengehalt. Durch Beigabe von dünnem Eisendraht an Stelle des Pulvers gelangte man dagegen mit den verfügbaren Hilfsmitteln bis zu 8,5 Proz. *Fe*.

Zur Bestimmung der Suszeptibilität wurde die von K. Overbeck[3]) beschriebene Methode verwendet, d. h. es wurde die Kraft gemessen, die ein inhomogenes Feld auf die bifilar aufgehängte Legierung ausübte. Bei den niederen Eisengehalten konnte aus der Größe der Ablenkung die rücktreibende Kraft des bifilaren Systems ermittelt werden. Bei den höherprozentigen, stärker magnetischen Legierungen erwies es sich wegen zu großen Ausschlags als vorteilhaft, die Lage der Legierung unverändert zu halten und die auf sie wirkende magnetische Kraft durch Gewichte zu kompensieren. Am feldfreien Ende der Legierung war ein langes Haar befestigt, das im oberen Teil horizontal verlief, über ein Röllchen führte und am vertikalen Ende eine Wagschale für Gewichtauflage trug.

2. Ergebnisse und Diskussion.

Die Ergebnisse der Messungen sind in der beigegebenen Figur enthalten. Die Ordinaten bedeuten die mit 10^6 multiplizierten Suszeptibilitäten, die Abszissen den Prozentgehalt. Bei den eingezeichneten Meßpunkten beziehen sich die Kreuze auf 3000 Gauß, die Punkte auf 6000 Gauß, und die Kreise auf 9000 Gauß. Wie aus der unregelmäßigen Lagerung von Kreuzen, Punkten und Kreisen gegeneinander



zu ersehen ist, war keine Feldabhängigkeit, also auch kein Ferromagnetismus in dem beobachteten Konzentrationsbereich vorhanden. Das Bemerkenswerteste an der Figur ist die Spitze bei 7,29 Proz. Eisen, wo die Suszeptibilität auf den beträchtlichen Wert von $30 \cdot 10^{-6}$ steigt.

Zur Diskussion unsrer Kurve haben wir das Erstarrungsdiagramm v. Vegesacks heranzuziehen. Er findet, daß im Bereich 0,7—7,3 Proz. *Fe* ein Gemenge zweier gesättigter Mischkristalle vorliegt und von 7,3 Proz. ab ein Gebiet ungesättigter Mischkristalle beginnt, bestehend aus $FeZn_7$ und reinem Zink. In unserer Spitze prägt sich diese Strukturänderung mit einer Deutlichkeit aus, wie sie in Hondas den Prozentgehalt mehr in großen Stufen ändernden Untersuchungen nirgends hervortritt. Für die Beurteilung des Kurvenverlaufs beiderseits der Spitze ist die folgende von Honda gefundene Gesetzmäßigkeit von Wichtigkeit:

„Der Paramagnetismus ist, ebenso wie der Ferromagnetismus, bestimmten Kristallarten eigentümlich. Infolgedessen ändert sich der Paramagnetismus der Legierungen linear mit der Konzentration, wenn diese aus zwei Kristallarten bestehen; beim Ersetzen einer der beiden Kristallarten durch eine neue wird die lineare Abhängigkeit von der Konzentration eine andere.“

Darnach sollte im Gebiet 0,7—7,3 Proz. *Fe*, wo v. Vegesack zwei gesättigte Mischkristalle findet, der Verlauf der Suszeptibilität geradlinig sein; im Bereich jenseits 7,3 Proz. wäre dagegen ein gekrümmter Verlauf zu erwarten. Tatsächlich ist unsere Kurve aber beiderseits der Spitze stark gekrümmt; und wenn man der Hondaschen Regel Vertrauen schenkt, erscheint es

1) v. Vegesack, Zeitschr. f. anorg. Ch. **52**, 30, 1907.
2) E. Lehmann, Die Magnetisierbark. d. Zink-Eisenlegierungen nied. Eisengehaltes, Diss. Rostock 1921.
3) K. Overbeck, Über metamagnet. Legierungen. Sitzb. u. Abh. der naturf. Ges. zu Rostock, **6**, 141, 1914.

zweifelhaft, ob das Strukturbild wirklich so einfach ist, wie aus der thermischen Analyse erschlossen wurde.

Schließlich wurden noch orientierende Beobachtungen der Suszeptibilität im (Glyzerin-) Temperaturbad gemacht, mit dem Ergebnis, daß eine Temperaturerhöhung bis 160° den Charakter der oben für 18° gegebenen Kurve nicht ändert.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung meines verstorbenen Lehrers Prof. R. H. Weber begonnen, dessen ich hier in Verehrung und Dankbarkeit gedenken möchte. Zugleich gestatte ich mir, auch an dieser Stelle meinen hochverehrten Lehrern Herrn Prof. Heydweiller und Herrn Prof. Lenz für die mir zuteil gewordene Förderung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Rostock, Physikalisches Institut der Universität, September 1921.

(Eingegangen 30. September 1921.)

Elektrostriktion in Gasen, nebst Bestimmung von elektrischen Momenten fertiger Dipole.

Von O. E. Frivold.

Einleitung.

1. Die bei Herleitung der von der Waalsschen Zustandsgleichung eingeführten anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen haben in einer vor kurzem erschienenen Arbeit von Herrn Debye[1]) ihre Deutung gefunden. Es wird in jener Arbeit gezeigt, daß eine gegenseitige Anziehung der Moleküle und dadurch ein dem äußeren zusätzlicher innerer Druck durch die elektrischen Felder zwischen den Molekülen zustande kommt, wenn man beachtet, daß die Moleküle polarisierbare Systeme elektrischer Ladungen sind.

Durch äußere elektrische Felder wird man versuchen können, diesen „inneren Druck" um einen allerdings äußerst kleinen Betrag zu vermehren. Die dadurch bedingte Kontraktion des Gasvolumens im elektrischen Felde (Elektrostriktion genannt) kann man dann durch eine geschickte Versuchsanordnung messen und in der Weise entscheiden, ob die der Theorie nach berechnete Volumenänderung mit der experimentell gefundenen übereinstimmt. Auch läßt sich aus der beobachteten Volumenänderung für Dipolgase das elektrische Moment der Dipole ermitteln. Diese molekuläre Größe hat man früher aus der anomalen Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante der betreffenden Gase berechnet[1]). Schließlich gibt dieses Verfahren auch prinzipiell eine Methode, die Dielektrizitätskonstante der Gase (und Flüssigkeiten) zu bestimmen.

Obgleich Herr Quincke[2]) schon im Jahre 1880 die ersten orientierenden Elektrostriktionsversuche mit Luft und Kohlendioxyd ausgeführt hat, ist es noch nicht gelungen, quantitative Messungen auszuführen. Herr Gans[3]) hat zwar die Apparatur von Quincke verbessert und Fehlerquellen beseitigt. Seine Messungen sind aber mehr qualitativer Natur. Quantitative Versuche sind auch schwer auszuführen, besonders wegen der sehr kleinen Kontraktionen, des großen Temperaturkoeffizienten der Gase und der Schwierigkeit, ein für Gase geeignetes Manometer zu konstruieren.

In dem experimentellen Teil werden diese Fragen näher erörtert. Hier sei nur noch erwähnt, daß die Versuchsanordnung, welche für die in dieser Arbeit beschriebenen Versuche Verwendung fand, noch einer Verbesserung bedarf, weshalb diese Mitteilung nur als eine vorläufige zu betrachten ist.

Zunächst ist nur ein einziges Gas, nämlich Schwefeldioxyd (ein Dipolgas) quantitativ untersucht worden. Da die Dipolgase der Theorie nach die größten Volumenänderungen geben dürften, ist absichtlich ein Dipolgas bei diesen orientierenden Versuchen verwendet. Wenn die Verbesserungen der Apparatur vorgenommen sind, werden diese Versuche auch mit anderen Gasen und möglicherweise auch mit Flüssigkeiten fortgesetzt.

Theoretisches.

2. Wir betrachten ein Gas unter Einwirkung eines elektrischen Feldes E. Bezeichnet U die potentielle Energie eines Moleküls in bezug auf das äußere Feld, so ist die Druckänderung $p - p_0$, welche das Gas bei Erregung des Feldes erfährt, durch die erweiterte Barometerformel bestimmt.

$$p = p_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \tag{1}$$

Hier bedeutet k die Boltzmannsche Konstante ($k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg.) und T die absolute Temperatur.

Die potentielle Energie eines polarisierbaren Moleküls im Felde E, dessen Moment

$$m = \alpha \cdot E \tag{2}$$

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Jona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.
2) G. Quincke, Wied. Ann. **10**, 513, 1880.
3) R. Gans, Ann. d. Phys. **11**, 797, 1903.



(α eine Konstante) gesetzt werden kann, hat den Wert

$$U_1 = -\tfrac{1}{2}\alpha E^2. \qquad (3)$$

Die Konstante α läßt sich aus dem Ausdrucke der Molekularrefraktion P entnehmen:

$$P = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\varrho} = \frac{4\pi}{3} N \cdot \alpha. \qquad (4)$$

Hier geben n den Brechungsexponent auf die Schwingungszahl o extrapoliert, M, ϱ und N das Molekülargewicht, die Dichte und die Loschmidtsche Zahl ($N = 6{,}06 \cdot 10^{-23}$) an.

Will man die Gleichung (1) auf Dipolgase anwenden, muß man dem Ausdruck (3) noch ein additives Glied hinzufügen. Dieses rührt von der potentiellen Energie der Dipole im Felde E her. Ganz analog wie Langevin für ein paramagnetisches Gas mit Hilfe der statistischen Mechanik einen Ausdruck für das mittlere magnetische Moment eines Moleküls ableitet, so kann man zeigen, daß das mittlere elektrische Moment μ eines Dipols bei „schwachen" Feldstärken E durch folgenden Ausdruck bestimmt ist:

$$\mu = \beta \cdot E, \qquad (5)$$

wo

$$\beta = \frac{\mu^2}{3kT} \qquad (6)$$

ist.

μ gibt den absoluten Betrag des Moments an.

Die potentielle Energie, die von dem Dipole herrührt, wird dann:

$$U_2 = -\tfrac{1}{2}\mu \cdot E = -\tfrac{1}{2}\beta \cdot E^2. \qquad (7)$$

Die Gesamtenergie eines Dipolmoleküls ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$U = U_1 + U_2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot E^2. \qquad (8)$$

Für ein Dipolgas wird also:

$$p = p_0 e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}}. \qquad (9)$$

Da α und β, wie wir später sehen werden, sehr kleine Größen sind, entwickeln wir die Exponentialfunktion in Gleichung (9) nach Potenzen von $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}$ und brechen mit dem zweiten Gliede ab. Dann wird:

$$p = p_0\left[1 + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{E^2}{kT}\right] \qquad (10)$$

oder

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \left|\frac{\triangle p}{p_0}\right| = \left|\frac{\triangle v}{v_0}\right| = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \cdot \frac{E^2}{kT}. \qquad (11)$$

Hier gibt v_0 das ursprüngliche Volumen und $\triangle v$ die Volumenänderung an.

Die entsprechende von Lippmann[1]), Gans[2]) u. a. abgeleitete Formel lautet:

$$\left|\frac{\triangle v}{v_0}\right| = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \frac{E^2}{p}, \qquad (12)$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante und p der Druck ist.

Diese Formel ist leicht aus Gleichung (11) abzuleiten, wenn man die von Debye erweiterte Lorenz-Lorentzsche Formel

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{M}{\varrho} = \frac{4\pi}{3} N(\alpha + \beta)$$

in Gleichung (11) substituiert.

3. Im Ausdrucke (11) stecken zwei Unbekannte: das optische Glied α und das Dipolmoment μ. Da Messungen nur in einem kleinen Temperaturbereich ausgeführt sind, kann allein eine der Konstanten bestimmt werden. Wie aus den Zahlenwerten später hervorgehen wird, ist α etwa $^1/_{10}$ der Größe β. Da übrigens α aus der Dispersionskurve leicht zu extrapolieren ist, wollen wir uns die Aufgabe stellen, das Dipolmoment für SO_2, durch Bestimmung der Kontraktion in einem Zylinderkondensator bei einer bestimmten Temperatur zu ermitteln.

Die Feldstärke E im Raume zwischen den zwei Zylindern läßt sich durch folgenden Ausdruck berechnen:

$$E = \frac{V_2 - V_1}{\operatorname{logn.} \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}. \qquad (13)$$

Hier bedeuten $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz in C. G. S., R_1 und R_2 die Radien der Zylinder und r den Abstand von der Achse bis zum Aufpunkte. Da die Feldstärke nach dem Ausdrucke (13) nicht konstant ist, müssen wir erst die Kontraktion für eine unendlich kleine Zylinderschale vom Radius r und der Dicke dr berechnen und durch Integration die gesamte Kontraktion bestimmen.

Die unendlich kleine Volumenänderung ist nach den Ausdrücken (11) und (13):

$$\triangle dv = \pi L\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right)\frac{1}{kT}\frac{(V_2 - V_1)^2}{\left(\operatorname{logn.}\frac{R_2}{R_1}\right)^2}\frac{1}{r}dr$$

und

$$\triangle v = \int \triangle dv = 0{,}4343\,\pi L\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right)\frac{1}{kT}\frac{(V_2 - V_1)^2}{\log\frac{R_2}{R_1}},$$

wo L die Länge des Zylinders bedeutet.

1) G. Lippmann, Ann. de Chem. et Phys. **24**, 145, 1881.

2) R. Gans, loc. cit.; Gans leitet Formel (12) auf Grund der Maxwellschen Theorie ab.

Daraus ergibt sich das elektrische Moment μ zu:

$$\mu = \left[\frac{kT \log \frac{R_2}{R_1}}{0{,}4343\, \pi L} \cdot \frac{\triangle v}{(V_2 - V_1)^2} - \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{3kT}. \quad (14)$$

Der entsprechende Ausdruck für einen Doppelkondensator, mit den Radien R_1, R_2, R_3 und R_4 ($R_1 < R_2 < R_3 < R_4$) (s. Fig. 2) wird:

$$\mu = \left[\frac{kT}{0{,}4343\, \pi L \left(\frac{1}{\log \frac{R_4}{R_3}} + \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}} \right)} \cdot \frac{\triangle v}{(V_2 - V_1)^2} - \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3kT}. \quad (14')$$

Das Potential des mittleren Zylinders (Radien R_2 und R_3) ist hier mit V_2, das des inneren und äußeren Zylinders mit V_1 bezeichnet. Bei den quantitativen Versuchen fand ein Doppelkondensator Verwendung.

Auf der rechten Seite im Ausdrucke (14') sind alles meßbare oder bekannte Größen.

Experimentelles.

4. Das Mikromanometer.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Versuchen, welche an dieser Stelle beschrieben werden sollen, und denjenigen, welche von Quincke und Gans ausgeführt sind, besteht in den verwendeten Mikromanometern.

Die zwei erwähnten Forscher haben die Volumenänderungen durch Beobachtung der Verschiebung einer Flüssigkeitssäule oder eines Tropfens in einer engen, dem Kugelkondensator angesetzten Kapillare gemessen. Da die Reibung sich in diesem Manometer stark bemerkbar macht, kann man dieses nur verwenden, wenn man es mittels bekannten Überdruckes eicht. Diese Schwierigkeit kann man jedoch folgendermaßen überwinden. Ist es möglich, suspendierte Teilchen im Gase sichtbar zu machen und halten sich diese Partikel genügend lange Zeit schwebend, so wird es möglich sein, eine Volumenänderung durch Beobachtung der Verschiebung der Partikel in einer Kapillare zu bestimmen. Ein nach diesem Prinzip von Herrn A. Piccard konstruiertes Mikromanometer wurde verwendet, um kleine Dichteunterschiede in Flüssigkeiten zu bestimmen[1]).

Für Gase hat dieses Mikromanometer mit einigen Abänderungen bei diesen Versuchen auch Verwendung gefunden.

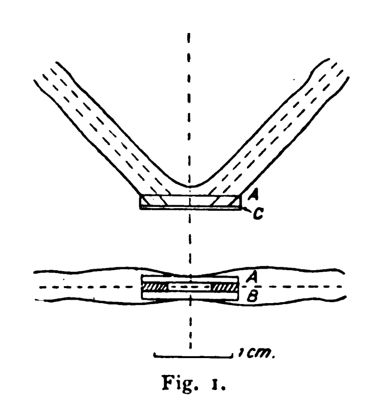


Fig. 1.

Ein umgebogenes Messingrohr (Fig. 1) ist vorn, oben und unten bis zum Lumen plan abgeschliffen. Die zwei Glasplatten A und B und ein Deckgläschen C vorn grenzen eine kleine Kapillare mit rechteckigem Querschnitt ab. Die Glasplatten A und B sind mit Picein an das Metall, das Deckgläschen C ist mit schwarzem Schellack (in etwas Alkohol aufgelöst) an den Glasplatten A und B befestigt. Der Querschnitt betrug etwa 0,4 mm^2.

Diese kleine Kapillare wurde von oben mit einem engen scharfen Lichtbündel beleuchtet. Bringt man Tabaksrauch in diese Kapillare ein, so sind die einzelnen Teilchen in einem vorn aufgestellten Mikroskop erkennbar.

Es sei noch bemerkt, daß die Teilchen nur dann leicht erkennbar sind, wenn man stark reflektierende Flächen, wie Metallflächen, gut schwärzt[1]).

5. Erste Form der Versuchsanordnung.

Die orientierenden Versuche wurden mit einem kleinen Plattenkondensator ausgeführt. (Drei Platten: Durchmesser 12 cm, Abstand 0,8 cm.) Der Kondensator befindet sich in einem Exsikkator (etwa 2000 cm^3), welcher durch ein enges Glasrohr mit einem ungefähr gleich großen Exsikkator (Schutzgefäß) in Verbindung steht. Das Mikromanometer ist in dem Glasrohre eingeschaltet. Es ist notwendig, das System von der Atmosphäre in der angegebenen Weise zu isolieren. Ohne Schutzgefäß wird es wegen der Druckschwankungen in der Atmosphäre nicht möglich sein, quantitative Versuche auszuführen. Dadurch wird allerdings das Mikromanometer

1) A. Piccard et E. Cherbuliez, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, **42**, 324, 1916; O. E. Frivold, diese Zeitschr. **21**, 529, 1920.

1) Die Rauchteilchen sind von der Größenordnung, daß man leicht Brownsche Bewegungen wahrnimmt. Diese unregelmäßigen Bewegungen veranlassen bei den quantitativen Messungen jedoch keine systematischen Fehler.

unempfindlicher, denn durch die Druckänderung im Schutzgefäß wird die Verschiebung der Partikeln verkleinert.

Bezeichnet v_i das Volumen des Exsikkators, in dem sich der Kondensator befindet und v_a das Volumen des Schutzgefäßes, so werden alle Verschiebungen wegen der Druckänderungen im Schutzgefäße bei gegebener einseitiger Druckänderung im Kondensator im Verhältnis $= \frac{v_a}{v_a + v_i}$ verkleinert.

Auch wenn das System gut thermisch geschützt wird (die Exsikkatoren sind gut mit Filz geschützt; das ganze System befindet sich in einem Holzkasten mit Baumwolle), ist der Temperaturunterschied zwischen den zwei Gefäßen zu groß, um Messungen ausführen zu können. Ohne Anlegung des elektrischen Feldes sind die Partikel in starker Bewegung.

Um thermisches Gleichgewicht herzustellen, ist eine Widerstandsspirale in jedem der Exsikkatoren angebracht. Mittels eines regulierbaren elektrischen Stromes in einer der Spulen wird es möglich, die Partikeln zum Stillstand zu bringen, wenn es nicht notwendig ist, größere Energiemengen als etwa 0,5 Watt anzuwenden. Andernfalls treten leicht Schwankungen in der Gasmenge ein.

Mit dieser Versuchsanordnung wurden einige Versuche mit Luft und Schwefeldioxyd[1]) gemacht.

Bei Anlegung einer Spannung von 10900 Volt an die mittlere Kondensatorplatte (die zwei anderen Platten des Kondensators sind geerdet) wurden für Luft kaum meßbare Kontraktionen im Mikromanometer beobachtet, für Schwefeldioxyd betrug die Verschiebung etwa 5 Skalateile.

Unter Anwendung von Zahlenangaben für α, β und den Querschnitt des Mikromanometers, welche unten angegeben werden sollen, lassen sich nach Gleichung (11) die Verschiebungen in den zwei Fällen zu 0,2 Skt. bzw. 4 Skt. berechnen. Der Größenordnung nach ist die Übereinstimmung befriedigend.

Diese Versuche zeigten, daß die Dimensionen des Kondensators zu klein sind und die Temperaturdifferenz zwischen den zwei Gefäßen zu groß wird, um quantitative Versuche ausführen zu können. Die Apparatur wurde deshalb umgebaut.

6. Verbesserung der bisherigen Anordnung.

Um das ganze System auf möglichst gleiche Temperatur zu bringen, wurde der Kondensator (k) in einen größeren Glaszylinder (N) eingebaut (Fig. 2 und 3).

Der vom Kondensator nicht verdrängte Raum des Glaszylinders dient als Schutzgefäß. Ein umgebogenes Glasrohr, in welchem das Mikromanometer M eingeschaltet ist, bringt den Zylinderkondensator mit dem Glaszylinder in Verbindung. Der Tabaksrauch wird von einem Behälter mit Hilfe eines Druckballons durch die Röhre c und d in das Mikromanometer eingeblasen. Beim Einblasen des Rauches sind die Hähne f und g geschlossen.

Der thermische Schutz ist mit Hilfe des Zinkkastens Z (bis h mit Wasser und oben mit

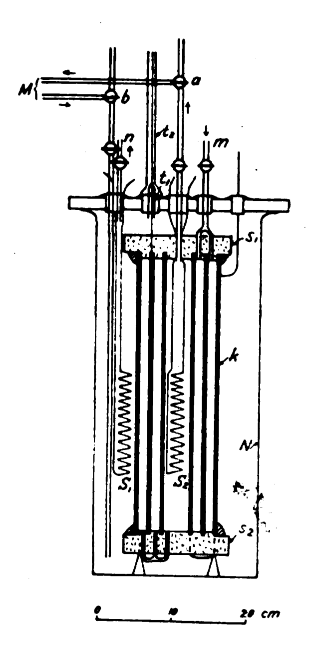


Fig. 2.

Baumwolle gefüllt) und der drei Holzgefäße G_1, G_2 und G_3 bewerkstelligt. Das äußere System ist bis H mit Wasser gefüllt. Strömungen im Wasser werden durch die Wände G_1 und G_2 vermindert. Die Glasröhren außerhalb der Gefäße sind mit Baumwolle (im Holzkasten) gut geschützt. Vor jedem Versuch wurde der Rührer R in Bewegung gesetzt.

Mit dieser Anordnung zeigte es sich, daß der Temperatureffekt sich viel geringer bemerkbar machte als früher. Um Gleichgewicht im Gase herzustellen, ist es jedoch auch jetzt notwendig, mittels eines ganz schwachen elektrischen Stromes in einer der Spiralen S_1 oder S_2 zu kompensieren. Maximal wurden etwa $5 \cdot 10^{-3}$ Watt verwendet.

1) Das Schwefeldioxyd wurde durch Zutröpfeln von Schwefelsäure 50 Proz. in Natriumbisulfit hergestellt. Als Trockenmittel wurde konz. H_2SO_4 verwendet.



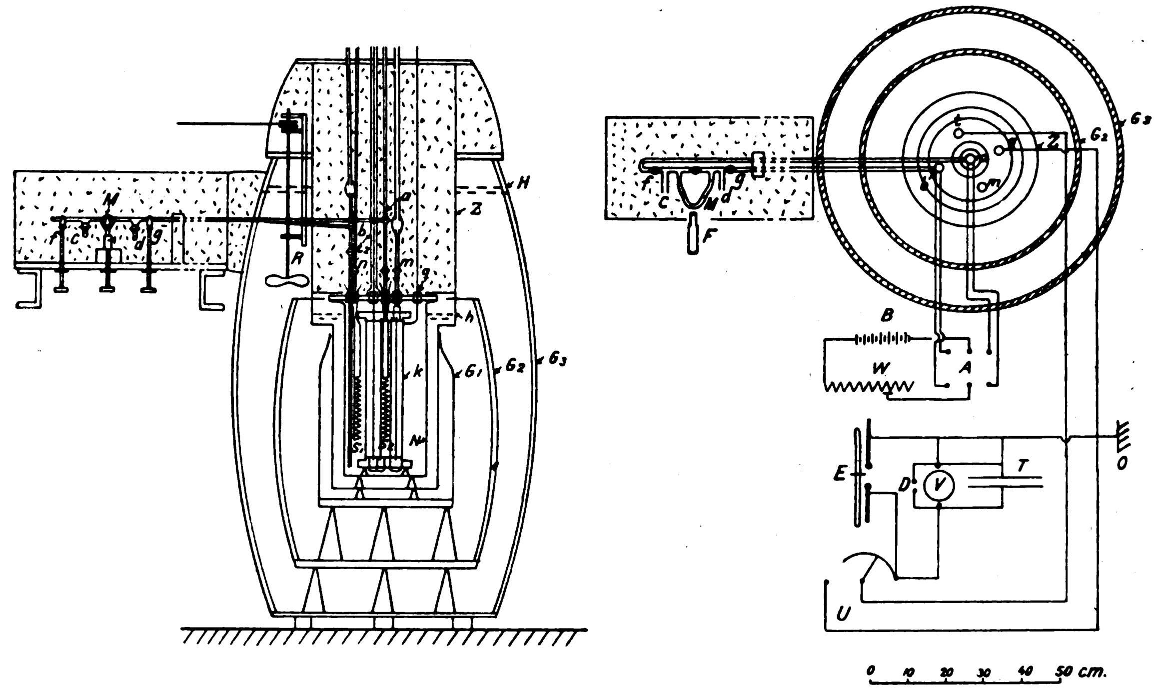


Fig. 3.

7. Der Zylinderkondensator und die übrige Apparatur.

Es wurde ein Zylinderkondensator k (Fig. 2 und 3) mit drei Zylindern verwendet[1]). Eine Influenzmaschine (E) dient als Spannungsquelle. Mittels des Hochspannungsumschalters U kann der mittlere Zylinder bei der Beobachtungsstelle F schnell aufgeladen und geerdet werden. Der äußere und innere Zylinder sind stets geerdet.

Die übrige Apparatur ist aus Fig. 3 ersichtlich. B ist eine Akkumulatorenbatterie, W ein Regulierwiderstand, A ein Umschalter der Widerstandsspiralen S_1 und S_2, E die Influenzmaschine, T eine große Leydener Flasche, V ein Kelvinelektrometer (2 Quadranten; für Spannungen bis 13000 Volt konstruiert) und D ein Funkenmikrometer.

8. Ausmessung des Mikrometerquerschnittes und Eichung des Elektrometers.

Die Verschiebung eines Rauchpartikels im Mikromanometer M wird in einem Mikroskop F mit Okularmikrometer beobachtet. Kennt man die Mikrometervergrößerung und den Querschnitt des Mikromanometers, so kann man die Volumenänderung, die durch ein gegebenes elektrisches Feld zustande kommt, berechnen.

Der quadratische Querschnitt wurde in der Weise bestimmt: Die Breite des quadratischen Raumes (Fig. 1) wurde (nachdem das Deckgläschen entfernt war) direkt in Skalateilchen auf dem Okularmikrometer abgelesen. Stellt man dann das Mikroskop einmal auf die hintere Seite des Deckgläschens und dann auf den Boden des Mikromanometers ein, so gibt die Verschiebung des Mikroskops direkt die Tiefe der Kapillare an[1]). Die Verschiebung des Mikroskops wurde mit Hilfe eines zweiten mit Okularmikrometer versehenen Mikroskops bestimmt. Das erste Mikroskop trägt einen Zeiger, an dem eine Glasplatte mit einem feinen Riß befestigt ist. Dieser Riß wurde im zweiten Mikroskop beobachtet. Die Verschiebung des ersten Mikroskops konnte dann direkt auf dem Okularmikrometer des zweiten Mikroskops abgelesen werden.

Da das Deckgläschen vor jeder Meßserie entfernt werden mußte, um gereinigt zu werden, ist bei jeder Meßserie der Querschnitt aufs neue bestimmt. Die unten angegebenen Zahlen sind Mittelwerte aus einer Reihe von Messungen. Der Querschnitt war auf einer Strecke von etwa 2 mm auf etwa 3 Proz. konstant.

1) s_1 und s_2 sind Schwefelstücke. Alle Dichtungen sind mit Picein und Schellack bewerkstelligt. Mittels eines Quecksilbermanometers wurde es mehrmals konstatiert, daß die verschiedenen Teile des Systems dicht waren. Die für die Hochspannung verwendete Isolation, nämlich Schwefel, Picein und Glas, erwiesen sich bei trockenem Wetter ausgezeichnet.

1) Dieses Verfahren gibt nur dann ein richtiges Resultat, wenn das Deckgläschen planparallel ist. Daß dieses hinreichend der Fall war, wurde experimentell geprüft.

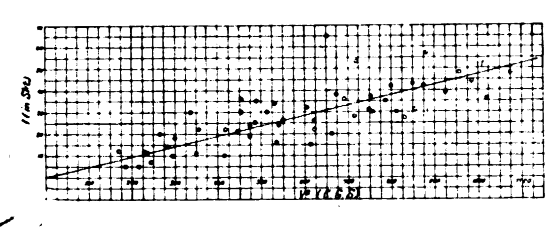


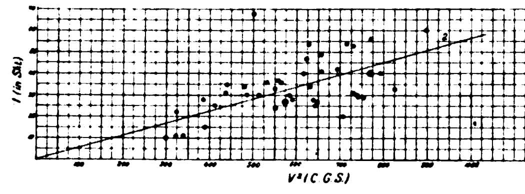
Das Elektrometer wurde mit Hilfe des Funkenmikrometers D geeicht.

9. Die Meßresultate.

Die Resultate von drei Meßserien sind in Fig. 4 wiedergegeben.

Die Ordinaten stellen die Verschiebungen der Rauchpartikeln im Okularmikrometer in Skalateilen, die Abszissen das Quadrat der Feldstärke (C. G. S.) dar. Die Kurven 1, 2 und 3 sind mittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese Kurven sollen der Theorie nach Graden durch den Nullpunkt darstellen. Da die Punkte, welche die Kurven 1, 2 und 3 bestimmen, unregelmäßig verteilt sind, ist eine Proportionalität zwischen l und $(V_2 - V_1)^2$ aus Fig. 4 nicht leicht zu erblicken. Diese Proportionalität geht aber deutlich hervor, wenn man Mittelwerte von l und $(V_2 - V_1)^2$ für Intervalle auf je 100 Einheiten der Abszisse berechnet. Die Punkte, welche die Kurve 4 (Fig. 5) bestimmen, sind aus der ersten Meßserie berechnet. Die Proportionalität geht hier deutlich hervor.





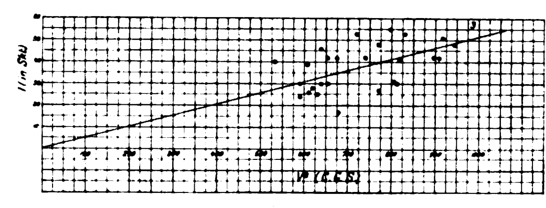


Fig. 4.

Die Ausgleichsrechnung gibt als Resultat das Verhältnis $\frac{l}{(V_2 - V_1)^2}$. In der Tabelle unten ist daraus l für $(V_2 - V_1)^2 = 1000$ berechnet.

Die optische Konstante α berechnet sich aus Gleichung (4). Dabei ist der Wert von $n^2 = 1{,}00137$ gesetzt (aus den Angaben in Lora: Lichtbrechung in Gasen, extrapoliert). $M = 64{,}07$ und $\varrho = 0{,}002731$.

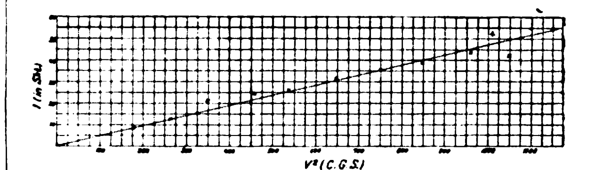


Fig. 5.

Unten und in der Tabelle I sind die für die Berechnung von μ (aus Gleichung 14′) nötigen Angaben zusammengestellt.

Volumen des Kondensators $v_i = 2475 \text{ cm}^3$

Volumen des Schutzgefäßes $v_a = 12324 \text{ cm}^3$.

Reduktionsfaktor $\gamma = \frac{v_a}{v_a + v_i} = 0{,}8325$.

Mikrometervergrößerung $= 1{,}333 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm.}}{\text{Skt.}}$

$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg., $\alpha = 4{,}22 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$.

Länge der Zylinder: $L = 37{,}11$ cm.

Radien der Zylinder: $R_4 = 4{,}77$ cm, $R_3 = 3{,}18$ cm.
$R_2 = 2{,}96$ „ $R_1 = 1{,}485$ „

$$(V_2 - V_1)^2 = 1000 \text{ C. G. S.} \quad \triangle v_{\text{korr.}} = \frac{\triangle v}{\gamma}.$$

Um einen Mittelwert von μ aus diesen drei Meßserien zu berechnen, wählen wir das „Gewicht" jedes der drei in der Tabelle berechneten μ der Anzahl der Einzelbeobachtungen in der Meßserie proportional. Legt man „das Gewicht" des ersten Wertes von μ 10 bei, so werden die „Gewichte" bzw. des zweiten und dritten μ 9 und 5. Der in der Weise berechnete Mittelwert von μ wird

$$\mu = 1{,}83 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^{\frac{5}{2}} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

Tabelle I.

	Temperatur T (abs.)	Querschnitt des Manometers q cm²	Verschiebung l Skt.	Kontraktion $\triangle v$ cm³	$\triangle v_{\text{korr.}}$ cm³	Anzahl der Beobachtungen	μ $\text{cm}^{\frac{5}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$
Erste Meßserie	292	$4{,}42 \cdot 10^{-3}$	47,4	$2{,}79 \cdot 10^{-4}$	$3{,}35 \cdot 10^{-4}$	53	$1{,}74 \cdot 10^{-18}$
Zweite „	292,8	$4{,}315 \cdot 10^{-3}$	56,6	$3{,}26 \cdot 10^{-4}$	$3{,}91 \cdot 10^{-4}$	45	$1{,}90 \cdot 10^{-18}$
Dritte „	292,8	$4{,}50 \cdot 10^{-3}$	51,9	$3{,}12 \cdot 10^{-4}$	$3{,}75 \cdot 10^{-4}$	26	$1{,}86 \cdot 10^{-18}$

Der nach einer ganz anderen Methode von Jona[1]) (aus der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante) bestimmte Wert ist

$$\mu = 1,76 \cdot 10^{-18}.$$

Nach Messungen von Bädecker[2]) läßt sich berechnen

$$\mu = 1,60 \cdot 10^{-18}.$$

Ein Überschlag zeigt, daß der in dieser Arbeit bestimmte Wert $\mu = 1,83 \cdot 10^{-18}$ mit einem mittleren Fehler von etwa 2,7 Proz. behaftet ist. Der Unterschied zwischen dem hier bestimmten Wert und demjenigen von Jona läßt sich also erklären.

Wir wollen schließlich die Verschiebung l nach Gleichung (12) berechnen (indem wir wie früher berücksichtigen, daß E eine variable Größe ist) unter Anwendung folgender Zahlenwerte: $(V_2 - V_1)^2 = 1000$ C. G. S., Querschnitt des Mikromanometers $q = 4,42 \cdot 10^{-3}$ cm² (siehe Tabelle I, erste Meßserie), die während der drei Meßserien gemessenen Atmosphärendrucke bzw. $p = 1,012 \cdot 10^6$, $1,019 \cdot 10^6$ und $0,999 \cdot 10^6$ dyn/cm² und $\varepsilon_{292^0,5} = 1,00886$ (nach Messungen von Jona, loc. cit.). Wir bekommen in den drei Fällen $l = 45,1$, $44,8$ und $45,8$ Skt.

Reduziert man andererseits die in Tabelle I angegebenen, aus den Messungen abgeleiteten Zahlenwerte für l, so daß diese dem gleichen Querschnitt wie oben ($q = 4,42 \cdot 10^{-3}$ cm²) entsprechen, so bekommt man bzw. $l = 47,4$, $55,4$ und $52,9$ Skt. Unter Anwendung der oben angegebenen „Gewichte" läßt sich daraus der Mittelwert $l = 51,5$ Skt. berechnen.

Wir stellen diese Resultate in einer Tabelle zusammen:

Tabelle II.

	„Beobachtete" Werte von l in Skt.	Berechnete Werte von l in Skt.
Erste Meßserie	47,4	45,1
Zweite „	55,4	44,8
Dritte „	52,9	45,8
Mittelwerte	51,5 + 2,7	45,2

Aus Tabelle II geht hervor, daß der „beobachtete" Mittelwert von l etwa 12,5 Proz. größer ist als derjenige, welcher sich der Theorie nach berechnen läßt.

Die Tabelle gibt zugleich an, daß die einzelnen „beobachteten" Werte ohne Ausnahme merklich größer als die berechneten sind. Es fragt sich, ob dieser Unterschied sich erklären läßt. Aus den drei „beobachteten" Werten in Tabelle II berechnet man einen mittleren Fehler von etwa 5,4 Proz. Rechnet man auch mit einem ähnlichen mittleren Fehler[1]) für den berechneten Wert von l, so läßt sich der Unterschied zwischen dem „beobachteten" und dem aus der Theorie berechneten Wert erklären.

Es wurden auch einige Versuche mit Luft ausgeführt. Da mir kein Spannungsmesser zur Verfügung stand, der höhere Spannungen als etwa 12000 Volt maß, und die Verschiebung bei Luft viel kleiner ist als bei Schwefeldioxyd, so konnten vorläufig nur qualitative Messungen ausgeführt werden. Es wurde jedenfalls konstatiert, daß die Verschiebung die richtige Richtung und Größenordnung (für $[V_2 - V_1] = 11000$ Volt eine Verschiebung auf etwa 4 Skt.) ergab.

Zusammenfassung.

Um die äußerst kleinen Kontraktionen zu messen, welche bei Elektrostriktionsversuchen in Gasen auftreten, wurde ein speziell für Gase konstruiertes Mikromanometer verwendet.

Thermische Störungen, welche sich auch unter Anwendung eines sehr guten thermischen Schutzes bemerkbar machten, wurden mittels elektrischer Ströme kompensiert.

Quantitative Messungen sind vorläufig nur mit Schwefeldioxyd angestellt.

Die nach der Theorie berechneten Verschiebungen im Mikromanometer stimmen innerhalb der erreichten Genauigkeit mit den beobachteten überein.

Auch ist auf Grund der Messungen das Dipolmoment für SO_2 berechnet worden.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. P. Debye für die Anregung zu dieser Arbeit bestens zu danken.

Christiania, Phys. Inst. d. Univ., 7. Juli 1921.

Zusatz bei der Korrektur.

Die Entwickelungen im theoretischen Teil setzen voraus, daß das betreffende Gas aus Einzelmolekülen besteht. Daß diese Voraussetzung für leicht kondensierbare Gase wie SO_2 in der Nähe des Kondensationspunktes (für SO_2 bis 70° C) nicht zutrifft, stellte sich heraus bei Auswertung der Resultate von Jona[2]). Die Diskrepanzen zwischen den Versuchen und der Theorie ließen sich aber nach Jona unter der Annahme beseitigen, daß das Gas bei niedrigen

1) Jona, loc. cit.
2) Bädecker, Zeitschr. f. phys. Chemie **36**, 305, 1901.

1) Bei dieser Berechnung kommen besonders die Fehler bei Bestimmung der Dielekrizitätskonstante (ε) und des Querschnittes (q) in Betracht.
2) Jona, loc. cit.



Temperaturen aus zwei Molekülarten — Einzel- und Doppelmoleküle — besteht, also Assoziationserscheinungen zeigt.

Da die Elektrostriktionsversuche bei einer Temperatur ausgeführt wurden, bei welcher sich die Assoziation bemerkbar macht, sind deshalb die im experimentellen Teil benutzten Ausdrücke (12) und (14') nur von beschränkter Gültigkeit. Die Korrektionen, welche wegen der Assoziation in Betracht kommen, sollen in einer anderen Arbeit erörtert werden, in Zusammenhang mit denjenigen Versuchen, die zurzeit für andere Gase unter Ausführung sind.

Christiania, den 9. Nov. 1921.

(Eingegangen 30. September 1921.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

R. Seeliger, Anregung der Atome zur Lichtemission durch Elektronenstoß. IV. Verhalten der einzelnen Glieder einer Serie.

Eine Verfeinerung der in vorhergehenden Mitteilungen[1]) beschriebenen Beobachtungen über die Anregung zur Lichtemission durch den Stoß schneller Elektronen hat zu interessanten Ergebnissen über das Verhalten der aufeinanderfolgenden Glieder jeweils einer Serie geführt, die im Folgenden mitgeteilt sind. Den Herren Dr. Mierdel und Schramm bin ich für eifrige Mitarbeit, der Jagor-Stiftung für die Mittel zur Beschaffung eines Teiles der benutzten Apparate zu Dank verpflichtet.

Wie die frühereu Untersuchungen gezeigt hatten, liegt das Maximum der Anregungsfunktion, d. h. die optimale Geschwindigkeit der emissionserregenden Elektronen, bei um so größeren Werten, je höherwertiger der Träger einer Linie oder Bande ist oder, was damit, soweit darüber Erfahrungen vorliegen, übereinstimmt, je höher die Anregungsspannung ist; an einem bereits recht ausgedehnten Beobachtungsmaterial hat sich dieser Zusammenhang bisher stets bestätigt. Eine willkommene Ergänzung der Aussagen über die Lage des Maximums der Anregungsfunktion läßt sich ferner entnehmen aus Beobachtungen am sogenannten Glimmsaum einer regulären Glimmentladung, wo sich gezeigt hatte, daß das Maximum der Intensität um so näher an der Kathode liegt, je höher die Optimalgeschwindigkeit (oder Anregungsgeschwindigkeit) bei Anregung durch Elektronen ist (Glimmsaumregel); wenn diese Regel auch bisher nur rein empirisch begründet werden konnte und der ganzen Sachlage nach Ausnahmen durchaus nicht unmöglich sind, geben doch auch derartige Beobachtungen jedenfalls ein bequemes und leistungsfähiges Mittel zum Studium der Anregungsverhältnisse ab[1]). Es lag nun nahe, Linien derselben Serie miteinander zu vergleichen, die sich also energetisch gesprochen nur durch den Energieinhalt, nicht durch den variablen oder konstanten Term selbst voneinander unterscheiden. Nach dem oben Gesagten sollte man erwarten, daß die Optimalgeschwindigkeit der Anregung mit steigender Gliednummer zunimmt und daß der Glimmsaum eine „Feinstruktur" zeigt, derart, daß die maximalen Intensitäten sich mit steigender Gliednummer näher an die Kathode heranschieben. Es ergab sich jedoch, um das Ergebnis gleich vorwegzunehmen, daß es zwei Arten von Serien gibt. Bei denen der ersten Art, die im Sinne der obigen Regeln ein reguläres Verhalten zeigen, nimmt die Optimalgeschwindigkeit mit steigender Gliednummer zu und es rückt das Maximum der Intensität im Glimmsaum mit steigender Gliednummer näher an die Kathode. Zu diesen gehören die Balmerserie des Wasserstoffs und die beiden Triplettnebenserien des Quecksilbers. Bei den Serien der zweiten Art dagegen zeigte sich gerade das umgekehrte Verhalten, und zwar — und dies ist wesentlich und zeigt zugleich den innigen Zusammenhang zwischen Anregungsfunktion und Glimmsaumregel — in beiden Fällen, also sowohl bei der Anregung der Elektronen wie im Glimmsaum. Serien dieser Art sind die des Heliums und die des Neons.

Die Untersuchungsmethoden sind in früheren Arbeiten bereits eingehend beschrieben; ergänzend ist nur noch hinzuzufügen, daß bei den geringen Unterschieden im Verhalten der ein-

1) Diese sind veröffentlicht in der Zeitschr. f. Phys. **1**, 355, 1920; **5**, 182, 1921; **7**, 93, 1921; dort auch Angabe der übrigen hier benutzten Arbeiten über Anregungsfunktion und Glimmsaum.

1) Vgl. dazu J. Franck, diese Zeitschr. **22**, 444 1921.

zelnen Serienglieder die Konvergenz des prismatischen Spektrums nach dem Violett zu hier nun besonders sorgfältig zu beachten und zu eliminieren ist und ferner, daß es wünschenswert schien, Gemische von Gasen, die Serien der ersten und zweiten Art liefern, zu untersuchen. Dadurch kann man ev. noch unbekannte, in Feldverzerrungen liegende Fehlerquellen, sowie Fehler bei der Durchmessung der Spektrophotogramme von vornherein ausschließen. Beschränkt durch die Unzulänglichkeit der zur Verfügung stehenden Mittel konnten von den in Betracht kommenden Gasen Wasserstoff, Quecksilber, Helium, Neon nicht alle im Glimmsaum und bei Elektronenanregung untersucht werden; die folgenden, unseren Mitteln zugänglichen Einzeluntersuchungen und Kombinationen scheinen mir aber die erhaltenen Resultate bereits sicherzustellen:

Elektronenstrahl	Glimmsaum
Wasserstoff	Wasserstoff
Helium	Helium
$(H_2 + He)$-Gemisch	$(H_2 + He)$-Gemisch
	Quecksilber
	$(H_2 + Hg)$-Gemisch
	$(He + Hg)$-Gemisch
	Neon
	$(Ne + He)$-Gemisch

Wie die Tabelle zeigt, war damit ein Anschluß der einzelnen Gase aneinander gewährleistet. Im einzelnen wurden die folgenden Serienglieder untersucht, die in Rücksicht auf die relativen Intensitäten so ausgewählt werden mußten, daß die vergleichenden Linien auch zugleich, also auf derselben Platte, im Gebiet brauchbarer Schwärzung lagen.

Wasserstoff:	H_α H_β H_γ H_δ
Helium:	HS 5, 6 Glied
	$1NS$ 3, 4, 5, 6 Glied
	$2NS$ 3, 4, 5 Glied
Parhelium:	HS 3, 4 Glied
	$1NS$ 4, 5, 6 Glied
	$2NS$ 4, 5, 6 Glied
Quecksilber:	1 Tr. NS 3, 4, 5 Glied
	2 Tr. NS 1, 2, 3 Glied
Neon:	$1NS$ $2p_8 - md_4$ 2, 4, 5 Glied
	$1NS$ $2p_9 - md_4'$ 2, 3, 4, 5 Glied
	$2NS$ $2p_{10} - ms_5$ 2, 3, 4 Glied
	$2NS$ $2p_{10} - ms_4$ 1, 3, 5 Glied

Aus dem umfangreichen Beobachtungsmaterial sollen als Beleg nur einige der Schwärzungskurven reproduziert werden. Für den Glimmsaum sind stets die Entfernungen von der Kathodenoberfläche in mm angegeben. Für den Verlauf der Anregungsfunktion geben die Abszissen den Abstand von der positiven Platte des verzögernden Feldes (Anode der Hauptentladung); beigegeben ist die Potentialdifferenz V_0 im ganzen verzögernden Feld, dessen Länge stets 3,6 cm betrug. Man kann daraus unter der Annahme linearen Feldverlaufs die zu den Abszissenwerten gehörenden Geschwindigkeiten der Elektronen in Volt angeben. Mehr als die Größenordnung wird man aus diesen Werten jedoch nicht entnehmen dürfen, da ohne Zweifel beträchtliche Feldverzerrungen durch Raumladungen auftreten[1]).

Wasserstoff. Als Beispiel diene die in Fig. 1 wiedergegebene Aufnahme der Anregungs-

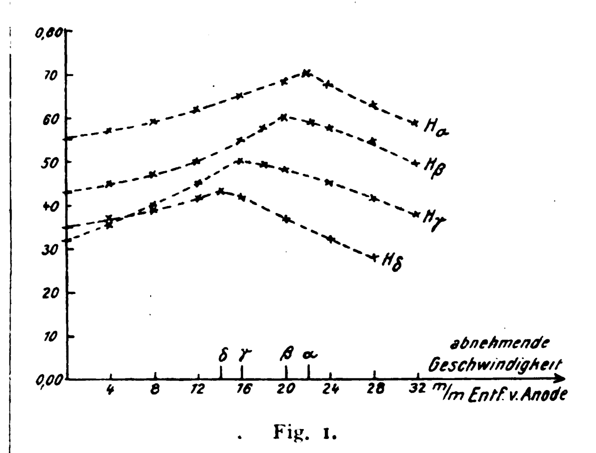


Fig. 1.

funktion. Geschwindigkeit der Elektronen bei Eintritt in das Feld 200 Volt, Gegenkathode verbunden mit der Kathode, also $V_0 = 200$ Volt, 1 mm im Feld $= 5{,}6$ Volt. Ein Beispiel für die Verhältnisse im Glimmsaum gibt Fig. 2 für ein

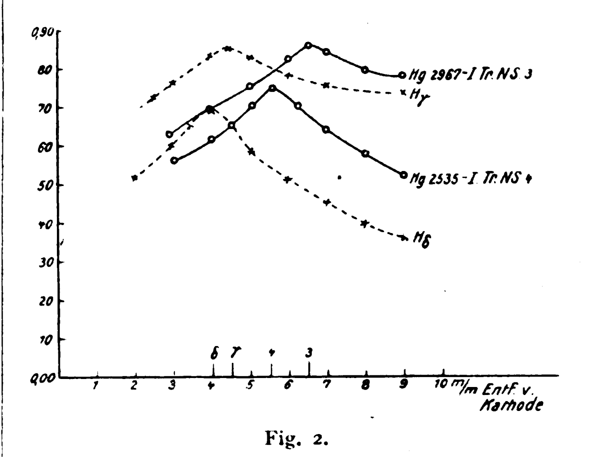


Fig. 2.

Gemisch von Hg und H_2. Spannung an der Röhre etwa 3000 Volt. Nebenbei sei noch hingewiesen auf die Erfüllung der Glimmsaumregel

1) Vgl. dazu Mitteilung III a. a. O.

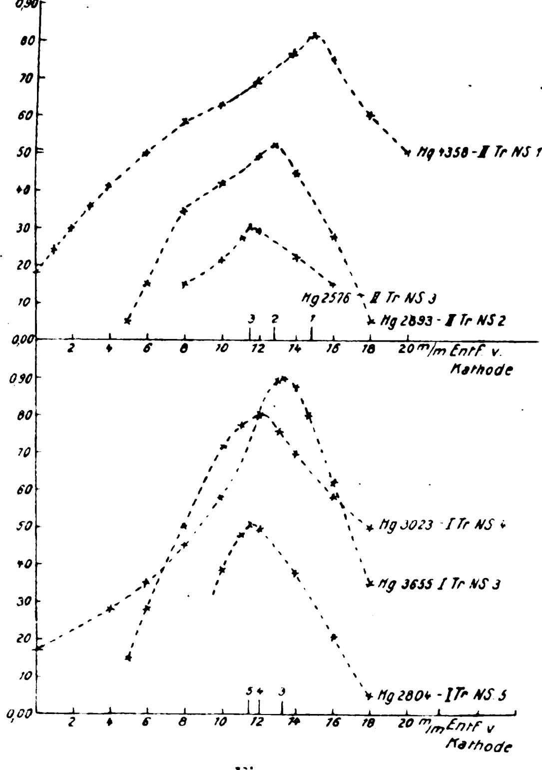


Fig. 3.

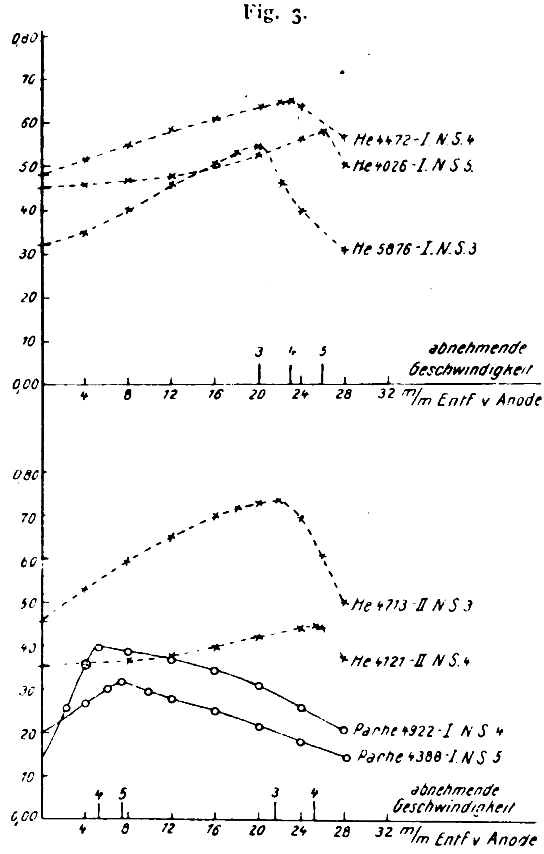


Fig. 4.

bezüglich der Grobstruktur, wie sie in der verschiedenen Lage der Maxima der H- und Hg-Linien zum Ausdruck kommt.

Quecksilber. Außer den Fig. 2 und 6 seien noch zwei in reinem Hg erhaltene Aufnahmen des Glimmsaums gegeben (Fig. 3); bemerkt sei dazu, daß die Maxima der Komponenten jeweils eines Gliedes an derselben Stelle zu liegen scheinen.

Helium. Helium zeigt, wie bereits oben bemerkt, nun gerade das umgekehrte Verhalten, und zwar sowohl in der Anregungsfunktion wie im Glimmsaum. Als Beispiele dafür seien von den Aufnahmen im reinen Gas die in Fig. 4 gegeben, die sich auf die Anregungsfunktion bezieht. Geschwindigkeit der Elektronen beim Eintritt in das Feld 400 Volt, Gegenkathode verbunden mit Kathode, also $V_0 = 400$ Volt, 1 mm im Feld = 11 Volt. Überzeugender sind noch die Ergebnisse an Gasgemischen, von denen die Fig. 5 und 6 eine Auswahl geben. Fig. 5

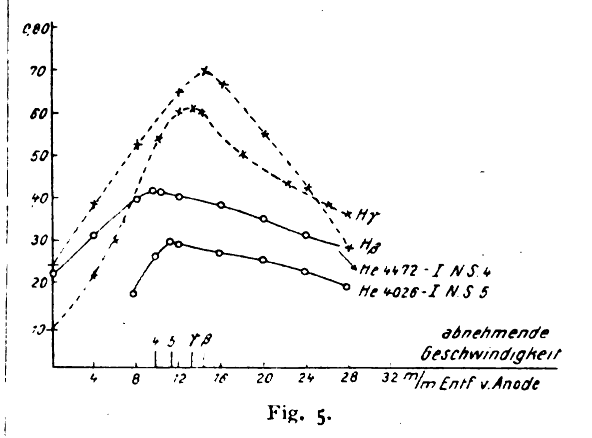


Fig. 5.

bezieht sich auf die Anregungsfunktion in einem Gemisch von He und H_2 unter denselben Bedingungen wie bei Fig. 4. Die Fig. 6 zeigt

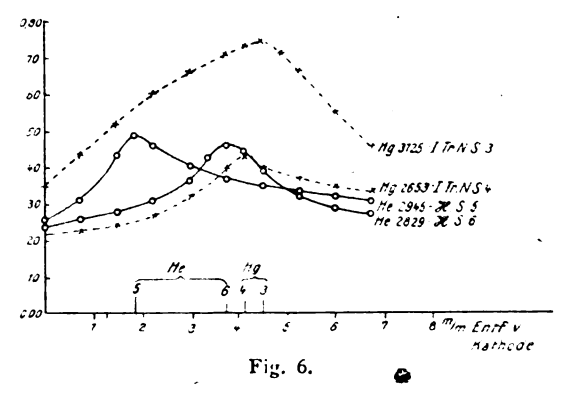


Fig. 6.

den Intensitätsverlauf im Glimmsaum, und zwar in einem He—Hg-Gemisch bei einem Kathodenfall von 3000 Volt.



Neon. Die Verhältnisse in Neon konnten nur im Glimmsaum untersucht werden und sind in einem Beispiel in Fig. 7 gegeben.

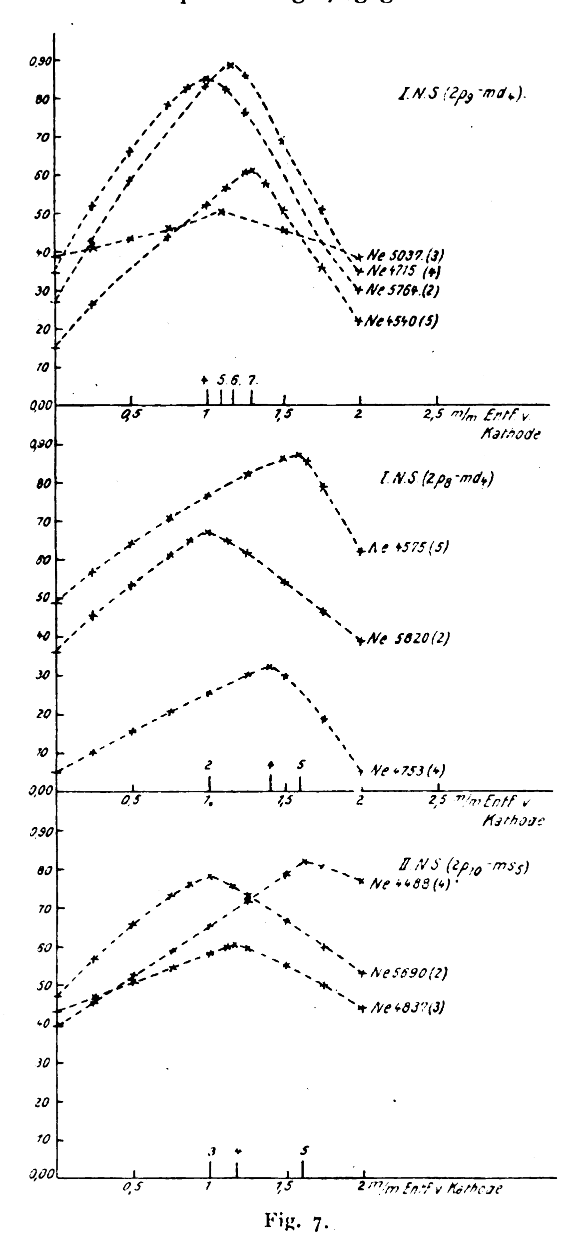


Fig. 7.

Mit der Feststellung, daß es hinsichtlich der Lage des Maximums der Anregungsfunktion, d. h. der optimalen Anregungsgeschwindigkeit, zwei Arten von Serien gibt, ist für die Beurteilung der ganzen Verhältnisse ein neuer Gesichtspunkt gewonnen, der in den vorhergehenden Arbeiten noch nicht berücksichtigt werden konnte. Die Regel, daß mit der Anregungsspannung einer Frequenz die optimale Anregungsgeschwindigkeit steigt und im Glimmsaum das Maximum der Intensität näher an die Kathode rückt, wurde stets gewonnen an Frequenzen mit verschiedenen Trägern bzw. mit verschiedenen Niveaus der Terme in der graphischen Darstellung von Bohr[1]). Sie gilt nach den obigen Feststellungen nicht mehr allgemein für Frequenzen derselben Serie, also desselben Trägers bzw. desselben Termniveaus; wieweit dadurch auch ihre erstgenannte Fassung einzuschränken ist, können erst neue Versuche zeigen, die diese Komplikation berücksichtigen in der Auswahl der miteinander zu vergleichenden Frequenzen verschiedener Serien. Von besonderem theoretischen Interesse wird es aber sein, Linien miteinander zu vergleichen, die in der quantentheoretischen Deutung zu derselben Anfangsbahn, jedoch zu verschiedenen Endbahnen gehören. Für alle zu einer solchen Gruppe gehörenden Linien müßte die Anregungsfunktion das Maximum an derselben Stelle haben.

Diskussion.

Es fand eine Diskussion zwischen den Herren Franck, Hertz und Seeliger statt, die zu folgendem Ergebnis führte: Die nach der Methode des Elektronenstoßes gewonnenen Ergebnisse zusammen mit den Resultaten dieser Arbeit sprechen für einen Verlauf der Anregungsfunktion derart, daß an der Stelle der Anregungsspannung ein erstes Maximum liegt, wonach die Ausbeute herabsinkt, um später zu einem zweiten Maximum bei der beobachteten Optimalspannung wieder anzusteigen.

1) N. Bohr, Zeitschr. f. Phys. **2**, 434, 1920.

C. Ramsauer (Danzig), Über den Wirkungsquerschnitt der Edelgase gegenüber langsamen Elektronen[1]).

Bei dem Vergleich zwischen dem gesamten Wirkungsquerschnitt und dem absorbierenden Querschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen[2]) hatte ich gefunden, daß der Wirkungsquerschnitt des Argonatoms bei 1,1 Volt Elektronengeschwindigkeit außerordentlich klein ist und mit abnehmender Geschwindigkeit noch weiter sinkt. Diese Tatsache ist so überraschend und andererseits so wichtig, daß eine gründliche Nachprüfung erforderlich erschien.

Die Versuchsanordnung entspricht im Prinzip der bisher benutzten Anordnung mit dem

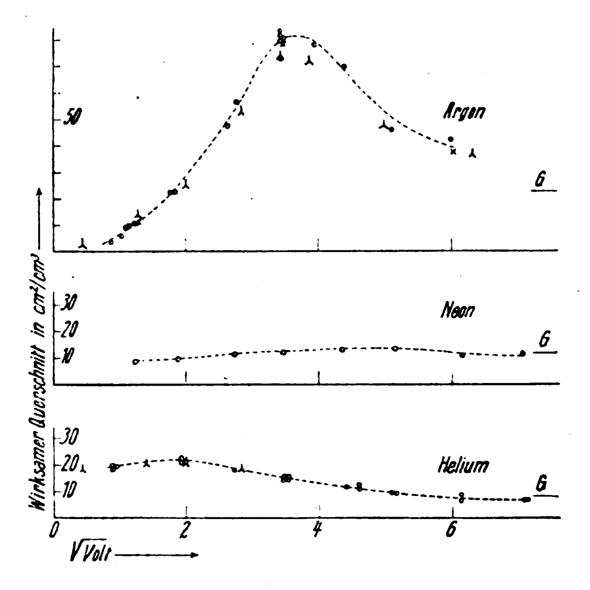
1) Die ausführliche Darstellung dieser Arbeit wird in den Annalen der Physik erscheinen, worauf betreffs der Versuchsanordnung, der Literaturangaben usw. hiermit verwiesen sei.

2) Vgl. den vorjährigen Vortrag. Diese Zeitschr. **21**, 576—578, 1920.



Unterschied, daß die Elektronen durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden können, und daß sie unter dem Einfluß der magnetischen Kraftlinien sich alle auf ein und demselben Kreisbogen bewegen, wobei der Wegunterschied dadurch erzeugt wird, daß die Elektronen bis zu ihrer Auffangung entweder $^1/_2$ Kreisumfang oder $^3/_4$ Kreisumfang zurücklegen müssen. Die Versuche wurden auf die drei Edelgase Helium, Neon und Argon ausgedehnt.

Die erhaltenen Resultate lassen sich in folgende Hauptsätze zusammenfassen (vgl. Figur):



1. Geht man von höheren Werten der Elektronengeschwindigkeit, z. B. 50 Volt, zu immer kleineren und kleineren Werten über, so steigt zuerst der Wirkungsquerschnitt, erreicht ein Maximum und sinkt dann wieder ab. Dies gilt für alle drei Gase, tritt aber bei Argon bei weitem am stärksten hervor, indem hier dem sehr hohen Maximum eine sich dem Nullwert nähernde Abnahme gegenübersteht. Dies bedeutet, daß ein Elektron kleinster Geschwindigkeit das Argonatom fast überall frei passieren kann, ohne absorbiert oder reflektiert zu werden und ohne eine für die benutzte Versuchsanordnung meßbare Änderung in Richtung oder Geschwindigkeit zu erleiden.

2. Die Versuchswerte bei Argon werden nicht geändert, wenn dem Argon Sauerstoff in erheblicher Menge beigemischt wird: vgl. die drei mit einem × bezeichneten Werte.

3. Die Versuchswerte bei Argon werden nicht geändert, wenn man die Gasdrucke aufs äußerste variiert. Die oberen vier Punkte bei 12 Volt entsprechen einer Mengenverminderung der Elektronen auf dem $^3/_4$-Kreis zwischen 2/3 und 269/270. Selbst im letzten Falle behält die magnetische Verteilungskurve (die aufgefangene Menge der Elektronen als Funktion des Magnetfeldes) vollständig ihre Form, d. h. die schließlich aufgefangenen Elektronen sind ohne jede Beeinflussung durch die große Anzahl der Gasmoleküle hindurchgegangen.

4. Der Vergleich mit dem absorbierenden Querschnitt (siehe ⅄ bei Argon und Helium) nach Herrn H. F. Mayer zeigt, daß der Wirkungsquerschnitt und der absorbierende Querschnitt einander bei diesen kleinsten Geschwindigkeiten gleich sind, was bekanntlich bei höheren Geschwindigkeiten durchaus nicht der Fall ist. Das Elektron wird also bei einem Zusammenstoß entweder völlig aus dem Strahle ausgeschieden, nämlich echt oder unecht absorbiert (reflektiert), oder es erleidet überhaupt keine für diese Versuchsanordnung merkliche Einwirkung, nämlich keine Richtungsänderung und keine Geschwindigkeitsänderung, von welch' beiden die erstere bei höheren Strahlgeschwindigkeiten sich in ganz überwiegendem Maße bemerkbar machen würde. Die Übereinstimmung mit den Mayerschen Werten kann gleichzeitig in gewissem Maße als Bestätigung des hier gefundenen experimentellen Verlaufs selbst dienen.

5. Der Vergleich mit den gaskinetischen Querschnitten (vgl. die mit G bezeichneten Marken) zeigt bei den drei Gasen ein individuelles Verhalten.

In dieser Beziehung werde noch kurz auf die vorjährige Diskussion eingegangen. Herr Franck wies damals betreffs Wasserstoff und Helium auf seine früheren Versuche hin, bei welchen der absorbierende Querschnitt durchaus dem gaskinetischen entsprochen hatte, so daß die von mir gefundenen mehr als drei- und zweimal so großen Werte als bedenklich erscheinen mußten. Demgegenüber seien in der folgenden Tabelle alle bisher bekannten Verhältnisse des absorbierenden Querschnitts zum gaskinetischen Querschnitt zusammengestellt.

	H_2 (< 6 Volt)	H_2 (= 6 Volt)
Lenard	3,8	—
Robinson	3,4	2,3
H. F. Mayer	3,8	2,3
Ramsauer	3,6	2,5
Franck u. Hertz	1,2	0,7

Eine Erklärungsmöglichkeit für das Herausfallen des letzten Wertes scheint mir darin zu liegen (wie an der Tafel näher erläutert wurde), daß bei der Franck-Hertzschen Anordnung die Elektronenwege im Vergleich zum Radius der Auffangeplatte außerordentlich viel kleiner sind als beispielsweise bei Herrn Mayer. Hieraus folgt aber, daß auch reflektierte Elektronen mit

zur Messung gelangen, während dies bei Herrn Mayer nicht der Fall ist und nach der Lenardschen Definition auch nicht der Fall sein darf.

Diskussion.

Hertz: Der Herr Vortragende hat bei seiner Erklärung die Wirkung des Gegenfeldes am Empfänger des von Herrn Franck und mir benutzten Apparates nicht berücksichtigt, welches bewirkte, daß solche Elektronen, deren Bewegungsrichtung durch Zusammenstöße geändert war, nicht auf die Auffangeplatte gelangen konnten.

Ramsauer: Wenn ich auch zugeben muß, daß hiernach einmalige Reflexion nicht in Betracht kommt, so halte ich doch bei der Kleinheit der Strahllänge und bei der Höhe des Gasdrucks, wie sie aus den Einzelheiten der Veröffentlichungen von Franck und Hertz hervorgehen, auch mehrmalige Reflexionen für genügend wahrscheinlich, um das Resultat ganz wesentlich zu beeinflussen. Im übrigen kam es mir bei diesen letzten Bemerkungen in der Hauptsache darauf an, zu zeigen, daß meine Werte durchaus nicht aus den bisherigen Beobachtungen herausfallen.

Lenard: Es ist sehr bemerkenswert, daß die Messungen wohldefinierter Absorptionskoeffizienten von Lenard, Robinson, Franz Mayer und Ramsauer, obgleich letztere nach gänzlich veränderter Methode ausgeführt sind, so gut übereinstimmen, während die Messungen von Franck uud Hertz, welche keine strenge Definition des zu Messenden zugrunde legen, davon gänzlich abweichen.

R. Bär (Zürich), Über die scheinbaren Unterschreitungen des elektrischen Elementarquantums.

§ 1. Ich möchte über einige neue Ergebnisse meiner Arbeit berichten, die zum Ziel hat, aufzuklären, welche Ursachen die scheinbaren Unterschreitungen der Elektronenladung bei den Ehrenhaftschen Ladungsmessungen veranlassen.

In einer kürzlich erschienenen Notiz[1]) konnten Herr F. Luchsinger und ich zeigen, daß die Ehrenhaftsche Methode so lange richtige Werte für die Elektronenladung ergibt, als ihre Voraussetzungen richtig sind. Von diesen Voraussetzungen geben namentlich zwei zu Bedenken Anlaß: 1. die Gültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetzes und 2. die Annahme, daß die untersuchten Partikeln dieselbe Dichte σ haben wie das Material, aus dem sie hergestellt wurden.

1) Diese Zeitschr. **22**, 225, 1921.

Das erwähnte Fallgesetz postuliert zwischen der Fallgeschwindigkeit v des Teilchens im Gase und der mittleren freien Weglänge l der Gasmoleküle eine lineare Beziehung

$$v = \alpha + \beta l. \qquad (1)$$

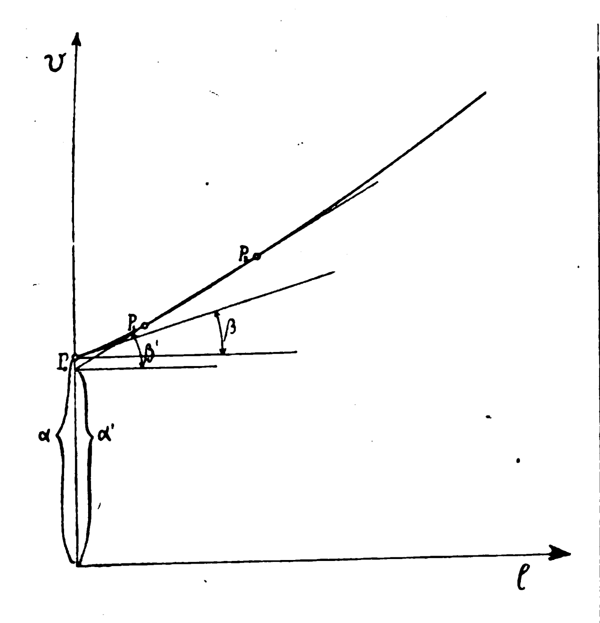
Die Konstanten α und β, die von uns durch Messung der Fallgeschwindigkeit des Teilchens bei zwei verschiedenen Gasdrucken bestimmt wurden, sind unter anderm auch vom Teilchenradius abhängig, dagegen ist die Kombination $\frac{\beta^2}{\alpha}$ davon unabhängig, und zwar wird, falls in Stickstoff beobachtet wird,

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = 1{,}20 \cdot 10^6 \sigma A^2, \qquad (2)$$

worin Ehrenhaft für A den Wert 0,815 annimmt.

Es müßte also bei Versuchen mit Teilchen aus einem und demselben Material die Größe $\frac{\beta^2}{\alpha}$ eine Konstante C sein. Wird das aus dem Versuch ermittelte $\frac{\beta^2}{\alpha} < C$, so kann man annehmen, daß die Dichte um so viel kleiner ist. Dieser Fall trat bei unsern Experimenten, die mit durch Verdampfung erzeugten Se-Partikeln ausgeführt wurden, bei den größeren Teilchen hin und wieder ein. Die kleineren Teilchen zeigten aber gerade das entgegengesetzte Verhalten. Je kleiner das untersuchte Teilchen war, desto größer wurde der Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$. Da man nicht wohl annehmen kann, daß die Dichte dieser kleinen Partikeln wesentlich größer sei als die des Ausgangsmaterials, so mußte der Grund für das Größerwerden des $\frac{\beta^2}{\alpha}$ in dem Nichtzutreffen des verwendeten Widerstandsgesetzes für diese kleinen Teilchen gesucht werden.

§ 2. Ich habe daher das Widerstandsgesetz an diesen kleinen Partikeln nochmals experimentell geprüft, indem ich die Fallgeschwindigkeit desselben Teilchens bei möglichst vielen Gasdrucken bestimmte. Dabei zeigte sich in der Tat, daß der Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und freier Weglänge kein linearer mehr war, sondern ein solcher, wie er vom Knudsen-Weberschen Fallgesetz gefordert wird und wie ihn die Kurve in der Figur darstellt. Bestimmt man aus dieser Kurve die Konstanten α und β, indem man das Stokes-



Cunninghamsche Gesetz als erste Näherung des Knudsen-Weberschen auffaßt, d. h. indem man die Tangente an die Kurve im Punkt P_0 legt, so erhält man die richtigen Werte α und β. Bestimmt man die Konstanten aber dadurch, daß man das Stokes-Cunninghamsche Gesetz durchaus und nicht nur in erster Näherung als gültig voraussetzt und dementsprechend durch die Punkte P_1 und P_2 — in denen die Fallgeschwindigkeit experimentell bestimmt wurde — eine Gerade legt, wie es Luchsinger und ich zur Prüfung der Ehrenhaftschen Voraussetzungen tun mußten, so erhält man die falschen Werte $\alpha' < \alpha$ und $\beta' > \beta$, also wird erst recht $\frac{\beta'^2}{\alpha'} > \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Berechnet man nun Größe und Ladung der *Se*-Partikeln mit den richtigen Werten von α und β, so zeigt sich auch bei den kleinsten Teilchen mit einem Radius von ca. $5 \cdot 10^{-6}$ cm keine wesentliche Ladungsunterschreitung, trotzdem zur Messung immer die Partikeln mit den kleinsten Ladungen ausgesucht wurden. Dieses Resultat steht in voller Übereinstimmung mit einer neuen Untersuchung von E. Schmid[1]), die im Ehrenhaftschen Institute ausgeführt wurde und bei der unter Anwendung des Knudsen-Weberschen Widerstandsgesetzes auch keine Subelektronen an Selen-Partikeln aufgefunden werden konnten.

§ 3. Weitere Versuche wurden an Platinteilchen angestellt, die durch einen Wechselstromfunken zwischen *Pt*-Elektroden erzeugt wurden. Diese Teilchen zeigen nun ein ganz anderes Verhalten. Sie haben, wenn man annimmt, daß ihre Dichte die des *Pt* ist, einen Radius bis herab zu $2 \cdot 10^{-6}$ cm und sie zeigen Ladungen bis herab zu $6 \cdot 10^{-12}$ elst. E. Bei diesen Teilchen nimmt aber $\frac{\beta^2}{\alpha}$ mit abnehmendem Teilchenradius nicht zu wie bei den *Se*-Teilchen, sondern ab bis auf den 100 ten Teil des theoretischen Wertes. Man muß also annehmen, daß die Dichte dieser Partikeln sehr viel kleiner ist als die des *Pt* (bis herab zu 0,2 statt 21,4). Infolge dieser kleinen Dichte wird der wirkliche Teilchenradius so groß, daß das Stokes-Cunninghamsche Widerstandsgesetz angenähert gültig bleibt, so daß der Umstand, der die Vergrößerung von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ bei den *Se*-Partikeln bewirkte, hier keine wesentliche Rolle spielt. Ich glaube, daß diese kleine Dichte nicht zu erklären ist durch eine adsorbierte Gasschicht, wie dies verschiedentlich vermutet wurde, sondern eher durch eine schwammartige Struktur der Teilchen. Dafür spricht unter anderm auch die große Unregelmäßigkeit des Phänomens.

Rechnet man nun die Ladung der Teilchen aus mit den experimentell ermittelten Dichten, statt mit dem Wert 21,4, so erhält man bei allen untersuchten Teilchen Werte für die Elektronenladung, die nur noch zwischen $2-6 \cdot 10^{-10}$ elst. E. schwanken. Insbesondere zeigt sich bei dieser Berechnungsweise der Ladung keine Spur mehr von jener unerklärlichen Erscheinung, daß die Partikeln umso kleinere Ladungen tragen sollen, je kleiner ihr Radius ist.

§ 4. Um an möglichst verschiedenartigem Material Ladungsmessungen durchzuführen, habe ich nach Platin (Dichte 21,4) Paraffinteilchen (Dichte des verwendeten Paraffins 0,879), die durch vorsichtiges Verdampfen von Paraffin erzeugt wurden, untersucht. Bei diesen Partikeln ergaben sich für die Ladungen Werte, die beträchtlich größer waren als die Elektronenladung, gleichzeitig war aber der Wert von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ größer, als er der Theorie nach sein sollte. Da der Grund, der bei den kleinsten *Se*-Teilchen diese Vergrößerung von $\frac{\beta^2}{\alpha}$ bewirkte, nämlich die Ungültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes, hier noch nicht wirksam sein konnte (diese Teilchen hatten einen Radius von $2-3 \cdot 10^{-5}$ cm), so muß man schließen, daß die Konstante A in (2) hier einen größeren Wert als 0,815 hat. Dadurch wird dann auch die Ladung ungefähr auf den richtigen Wert verringert. Ich glaube, daß dieser zu kleine

1) Wien. Akad. Ber. IIa, **129**, 813, 1920 und Zeitschr. f. Phys. **5**, 27, 1921.

Wert von A auch bei den Ehrenhaftschen Messungen an Ölpartikeln zu große Werte für die Ladung vortäuscht und daß dies mit ein Grund ist, warum Ehrenhaft findet, daß sich aus der Brownschen Bewegung bei Ölteilchen kleinere Ladungen ergeben als aus dem Widerstandsgesetz.

§ 5. Alle erwähnten Versuche wurden in einem Kondensator von 16 mm Plattendurchmesser ausgeführt. Um aber die Verhältnisse bei den Ehrenhaftschen Ladungsmessungen möglichst vollkommen zu reproduzieren, verwende ich jetzt einen Kondensator von nur 9 mm Plattendurchmesser. Über diese Versuche möchte ich einstweilen nur zwei Bemerkungen machen:

1. In diesem Kondensator kann man natürlich noch viel kleinere Teilchen sehen als in dem zuerst verwendeten, aber alle diejenigen, die infolge ihrer Kleinheit nur im zweiten Kondensator zu sehen sind, haben eine so große Brownsche Bewegung, daß Ladungsmessungen an ihnen nicht ausführbar sind. Infolgedessen scheint mir die Verwendung eines solchen Kondensators für Ladungsmessungen keine Vorteile zu bieten.

2. Die Tatsache, daß die Ladungen der Partikeln nicht kleiner werden, wenn man immer kleinere Teilchen beobachtet, findet hier eine weitere, wenigstens qualitative Bestätigung. Es zeigt sich nämlich, daß die erwähnten kleinsten Partikeln immer entweder gar keine Ladung tragen oder dann eine so große, daß sie durch ein elektrisches Feld, das die größeren Teilchen nur langsam bewegt, mit großer Geschwindigkeit an die Kondensatorplatten gezogen werden.

Diskussion.

R. Fürth: Die Frage ist nach den Ausführungen des Herrn Bär derzeit die, ob die Dichte, oder das Fallgesetz der Teilchen unrichtig ist, wenn man eine reinliche Scheidung dieser beiden Möglichkeiten vornehmen will. Es scheint mir nun durchaus möglich, diese Scheidung vorzunehmen einerseits durch genaue experimentelle Ermittlung des Fallgesetzes durch Wiederholung der Versuche von Herrn Roux, andererseits durch eine gesonderte Bestimmung der Dichte der Partikel, Versuche, die von Herrn Bär und mir in der nächsten Zeit angestellt werden sollen.

Ehrenhaft: Ich habe schon vor einem Jahre darauf hingewiesen, daß das Ergebnis solcher Versuche, wie sie Herr Bär ausführt, nicht die Dichte der Probekörper, sondern das Produkt des Quadrates des Cunninghamschen Faktors A in die Dichte der Probekörper, also $A^2 s$ ist. Demnach schlagen geringe Änderungen des A in der Dichte außerordentlich aus.

Es scheint mir nun prinzipiell höchst gewagt, das Korrektionsglied des Stokesschen Gesetzes überhaupt zu einer Dichtebestimmung heranzuziehen, da eine präzise experimentelle Festlegung des Korrektionsgliedes des Widerstandsgesetzes für den Fall kleiner Kugeln im Gase wegen der außerordentlichen experimentellen Schwierigkeiten bisher noch nicht ausgeführt werden konnte. Ich habe mich deshalb stets mit der Konstatierung der Tatsache begnügt, — wie aus meinen Abhandlungen in den Jahren 1910, 1914 und 1918 entnommen werden kann, — daß unter Verwendung jedes der Widerstandsgesetze, die man zur Begründung der Elektronentheorie heranzog (Stokes, Stokes-Cunningham, Knudsen-Weber usw.) und unter Voraussetzung der Dichte des molaren Materiales der Probekörper sich bei allen Substanzen weitgehende Unterschreitungen des Elektronenwertes ergeben. Seit der ausführlichen Diskussion über die Elektronenfrage am Nauheimer Naturforschertag 1920 anläßlich meines Vortrages über die Arbeit von mir und Konstantinowsky „Über die Atomistik der Elektrizität und die Erscheinungen an einzelnen radioaktiven Probekörpern der Größenordnung 10^{-5} cm" hat sich in diesen Fragen nichts mehr geändert.

Das Stokessche Gesetz setzt voraus, daß das Gas an der Kugel haftet, das Cunninghamsche setzt voraus, daß das Gas an der Oberfläche zum Teil gleitet. Die Arbeit, die jetzt noch zu leisten ist, ist die rein experimentelle Ermittlung eines Widerstandsgesetzes, das jedoch von jeder Annahme über die atomistische Konstitution der Elektrizität unabhängig gewonnen werden muß und für die zur Zeit die Vorarbeiten in Wien geleistet werden. Dieses experimentell ergründete Widerstandsgesetz dürfte sich in Konsequenz der Untersuchungen ergeben, über die Konstaninowsky voriges Jahr in Nauheim berichtete. Dabei ist experimentell zu ermitteln, ob überhaupt beziehungsweise wieviel verdichtete Gasschichten betragen können. An Edelmetallen in inerten Gasen (z. B. Gold in Argon) werden dieselben wohl überhaupt nicht ins Gewicht fallen. Gleichwohl gibt es Unterschreitungen des Elementarquantes an solchen Kugeln.

Schon 1910 habe ich darauf hingewiesen, daß man für Goldkugeln die Dichte $1/2$ einsetzen müßte, um wieder zum Werte des Elementarquantums zu gelangen. Annahmen jedoch, daß Platinkugeln tatsächlich $1/5$ der Dichte des Wassers haben sollen, damit man wieder zum Werte des Elementarquantes gelangt,

scheinen mir unhaltbar. Wesentliche Abweichungen von der Dichte des kompakten Materiales auch an kleinen Kugeln scheinen mir, wie ich mehrfach hervorgehoben habe, schon deshalb ausgeschlossen, weil die optische Größenbestimmung bei einer Reihe von Materialien zu sehr schönen Übereinstimmungen geführt hat und weil das lichtpositive photophoretische Maximum an Silberkugeln, wofern die lichtpositive Photophorese an Silber durch den Lufdtruck bedingt ist, zur richtigen Dichte der Silberkugel führt.

Lenard bemerkt, daß nach seiner in den Ann. d. Phys. 1919 u. 1920 veröffentlichten zusammenfassenden theoretischen Untersuchung der Widerstandsgesetze (aller Partikelgrößen) diese Gesetze in guter Annäherung als genügend bekannt und durch die Erfahrung kontrolliert angesehen werden können. Die vom Vortragenden auf Anfrage angegebenen, von ihm angenommenen Unsicherheiten der Konstante A erscheinen danach nicht allzu groß. Verringerte Dichten können natürlich bei hohlen Partikeln stets vorkommen. Ein Widerspruch gegen die Erklärungen des Vortragenden scheint also nach keiner Richtung hin zu bestehen.

Ehrenhaft: Im übrigen begrüße ich es als wesentlichen Fortschritt, daß nunmehr der experimentelle Tatbestand zugegeben und die Unterschreitungen — immer berechnet unter Zugrundelegung des Widerstandsgesetzes — auch von anderen Autoren angegeben werden.

Gerlach: Edgar Meyer und ich haben 1915 bereits ausführlich auf den Zusammenhang zwischen Widerstandsgesetz und Größe des Elementarquantums hingewiesen. Dies zur Berichtigung der Worte des Herrn Ehrenhaft, daß bisher Subelektronen noch nicht als Versuchsergebnisse von anderen zugegeben worden seien.

Ehrenhaft: Sie haben dies zugegeben, aber viele andere Autoren nicht; so z. B. wurden die Unterschreitungen an Hg-Kügelchen, die durch Verdampfung hergestellt waren, negiert.

G. Borelius (Lund), Die thermoelektrischen Temperaturfunktionen.

Während in den letzten Jahrzehnten die Temperaturfunktionen einer Reihe thermischer und elektrischer Erscheinungen in ihren allgemeinen Zügen aufgeklärt worden sind, ist eine allgemeinere Aufklärung der thermoelektrischen Temperaturfunktionen gänzlich zurückgeblieben. Ich möchte hier über einen Vorstoß in der Richtung, wo ich glaube, daß die beste Übersichtlichkeit zu gewinnen ist, kurz mitteilen.

Ich schicke voraus, daß ich die von der Thomsonschen Theorie geforderten thermodynamischen Beziehungen zwischen zwei und zwei der thermoelektrischen Größen, Thermokraft, Peltierwärme und Thomsonwärme als sehr angenähert gültig ansehen muß, wobei ich mich teils auf eigene Messungen stützen kann.

Es genügt also, einen der Effekte näher zu untersuchen, um auch über die Temperaturfunktionen der übrigen klar zu werden. Dabei empfiehlt sich aus mehreren Gründen in erster Linie der Thomsoneffekt. Dieser ist z. B. der einzige Effekt, der direkt für ein einziges Metall und nicht für ein Thermopaar beobachtet wird.

Besonders interessant ist natürlich das tiefe Temperaturgebiet. Für die Messung der Thomsonwärme bei tiefen Temperaturen war es aber notwendig, eine neue Meßmethode zu entwickeln, denn die gewöhnliche bekannte Differentialmethode, mit der fast das ganze von früher vorliegende Zahlenmaterial betreffend Thomsonwärme gewonnen ist, ist hier kaum verwendbar und auch sonst wegen gefährlicher Fehlerquellen unbequem.

Bei der neuen Methode, die ich benutzt habe, wird durch einen Metalldraht ein Strom von solcher Stärke gesandt, daß die Temperatur der Drahtmitte um einige Zehner Grad über die konstant gehaltene Temperatur der Enden ansteigt. Mit einem Thermoelemente, das etwa 0,2 der Drahtlänge von dem einen Ende angebracht ist, wird teils die Temperaturerhöhung t in diesem Punkte, teils die bei Stromumkehrung auftretende, vom Thomsoneffekt herrührende, Temperaturänderung τ beobachtet. Der Thomsoneffekt berechnet sich dann von Korrektionsgrößen abgesehen, aus

$$\sigma = \frac{3q}{y} \cdot \frac{\lambda}{\sigma} \cdot \frac{\tau}{t},$$

wo q Drahtquerschnitt, y Abstand des Thermoelementes von der Drahtmitte und s Stromstärke bedeutet. λ ist die spezifische Wärmeleitfähigkeit, die jetzt für eine Reihe von Metallen für unseren Zweck mit hinreichender Genauigkeit bekannt ist.

Bei der experimentellen Anordnung, mit der ich zusammen mit Herrn Gunnesson gearbeitet habe, wird der Draht auf eine Kupferscheibe montiert. Die Scheibe wird unten an einem Kupferzylinder angeschraubt, der mit einem den Draht umgebenden Kupfermantel versehen ist. In einer Ausbohrung in diesem Zylinder endet ein langes dünnes Messingrohr, worin flüssige Luft, Kohlensäureschnee, Eis oder Wasserdampf eingeführt werden. Die inneren Teile sind durch ein Vakuumgefäß umgeben.

Die Messungen sind teils bei konstanten Temperaturen, teils unter Gang der Temperaturen

vorgenommen. Für nähere Beschreibung von Anordnungen und Messungen muß auf eine in diesen Tagen erschienene Arbeit in den Annalen der Physik verwiesen werden.

Die Resultate sind für Metalle, die zu derselben Gruppe des periodischen Systemes gehören, sehr ähnlich. Bei *Cu*, *Ag* und *Au* in der ersten Gruppe des Systems steigen die Kurven von, jedenfalls bei *Cu* und *Ag*, negativen Werten bei den tiefsten Temperaturen erst schnell in dem Temperaturgebiete, wo auch z. B. spezifische Wärme und Ausdehnungskoeffizient stark zunehmen, um bei höheren Temperaturen linear mit der Temperatur zu wachsen. Die Pfeile der Figur geben die aus der spezifischen Wärme berechneten charakteristischen Temperaturen an.

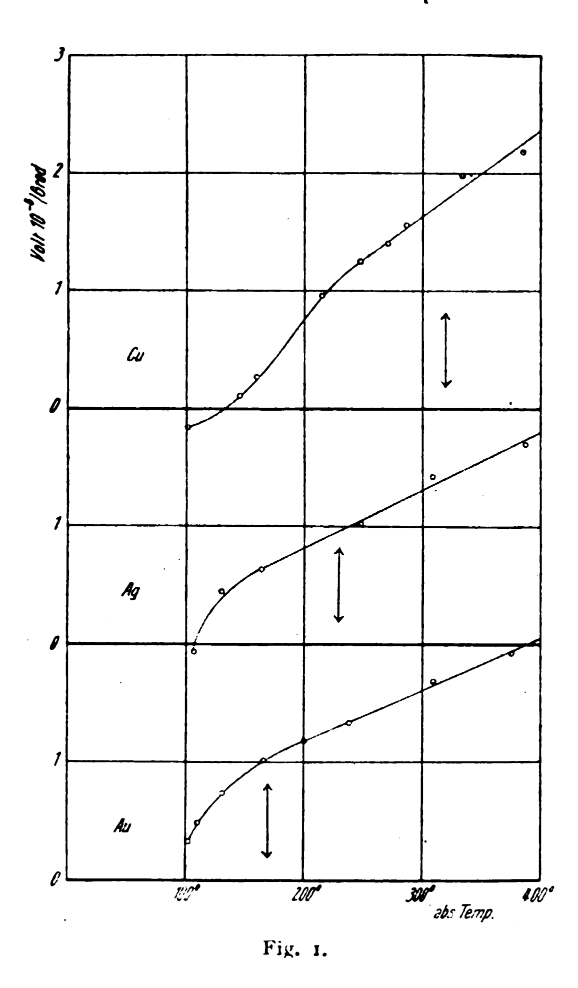


Fig. 1.

Bei *Zn* und *Cd* findet man oberhalb der charakteristischen Temperaturen einen sehr starken Gang nach dem Positiven hin. Die Messungen reichen noch nicht aus, um die für ganz tiefe Temperaturen gültigen Gesetzmäßigkeiten zu entschleiern.

Bei *Sn* und *Pb* in der vierten Gruppe des

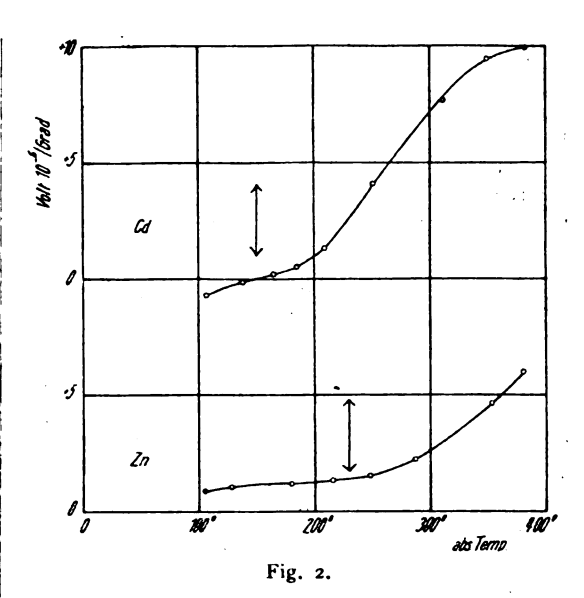


Fig. 2.

Systemes sind die charakteristischen Temperaturen so klein, daß die Messungen nur die Verhältnisse bei relativ hohen Temperaturen zeigen. Beide Kurven gehen in ähnlicher Weise nach dem Negativen hin.

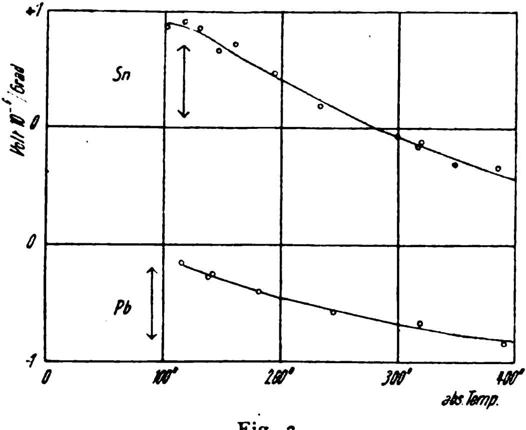


Fig. 3.

Die Resultate für Blei sind besonders interessant. Der Thomsoneffekt des Bleis wird nämlich immer in der Literatur als bei Zimmertemperatur sehr klein angegeben und das Blei ist deshalb oft als thermoelektrisches Bezugsmetall benutzt worden. Cermak fand eine von Null bei Zimmertemperatur bis + 1 Mikrovolt pro Grad bei 300° C steigende Kurve. Unsere Resultate sind damit unverträglich. Wir haben bei drei verschiedenen sehr reinen Bleisorten übereinstimmende Resultate bekommen.



Erich Kretschmann, Zur Theorie der elektrischen Leitung und der Wärmestrahlung[1].

1. Allgemeiner Ausdruck der elektrischen Leitfähigkeit eines homogenen isotropen Leiters erster Klasse, unabhängig von Voraussetzungen über die Dynamik der Leitungselektronen.

Es seien Anzahl und Geschwindigkeitsverteilung der Leitungselektronen in der Raumeinheit gegeben durch:

$$N = \int f d\sigma = 4\pi \int_0^\infty f \cdot v^2 \cdot dv. \tag{1}$$

Betrachte den Schwarm von $f d\sigma$ Elektronen, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ im bestimmten Anfangsaugenblicke im Bereich $d\sigma$ liegt. Dann ist wegen der makroskopischen Isotropie die mittlere Schwarmgeschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$ nach der Zeit τ:

$$\bar{\mathfrak{v}} = \lambda(v, \tau) \cdot \mathfrak{v}, \tag{2}$$

wo λ ein — mit wachsendem τ von 1 zu Null abfallender — Skalar ist.

Der mittlere vom Schwarm zurückgelegte Weg ist:

$$\int_0^\infty \bar{\mathfrak{v}} d\tau = \mathfrak{v} \int_0^\infty \lambda d\tau = \mathfrak{v} \cdot \Lambda(v). \tag{3}$$

$\Lambda(v)$ = Weg durch Geschwindigkeit heiße „Beharrungszeit“.

Es wirke ein äußeres elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}_z$. Es erzeugt während der Zeit $t - (\tau + d\tau)$ bis $t - \tau$ bei allen Elektronen (e, m) den Geschwindigkeitszuwachs:

$$d\mathfrak{v}_z = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m} d\tau.$$

Nach Ablauf der Zeit τ mögen der Elektronenschwarm mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die mittlere Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}'$ haben. Aus $d\mathfrak{v}_z$ ist dann

$$d\bar{\mathfrak{v}}_z' = \frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_z'}{\partial \mathfrak{v}_z} \cdot \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m} d\tau$$

geworden. Gemittelt über alle Elektronen und integriert über alle $d\tau$ ergibt sich die von $\mathfrak{E}_z$ erzeugte Geschwindigkeit

$$V_z = \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{N' \cdot m} \int_0^\infty d\tau \int f' \cdot \frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}_z'}{\partial \mathfrak{v}_z} d\sigma =$$

$$= \frac{e \cdot \mathfrak{E}_z}{m \cdot N'} \int d\sigma f' \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}_z} \int_0^\infty \bar{\mathfrak{v}}_z' d\tau$$

und die Stromdichte $i_z = V_z \cdot e \cdot N'$. Die Striche bei $\bar{\mathfrak{v}}_z'$, N' und f' sollen die durch $\mathfrak{E}_z$ bewirkten Änderungen dieser Größen bezeichnen.

Für $\mathfrak{E}_z = 0$ dürfen die Werte aus (1) und (2) eingesetzt werden, und man erhält mittels (3) die Leitfähigkeit:

$$\varkappa = \left(\frac{\partial i_z}{\partial \mathfrak{E}_z}\right)_{\mathfrak{E}_z = 0} =$$

$$= 4\pi \frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv v^2 \cdot f \cdot \left(\Lambda + \frac{v}{3} \frac{\partial \Lambda}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv f \frac{\partial}{\partial v}(v^3 \cdot \Lambda), \tag{4}$$

die, wie das Ohmsche Gesetz zeigt, auch für $\mathfrak{E}_z \neq 0$ gilt.

Die Anwendung auf die bekannte Vorstellung einer zickzackförmigen Bewegung aller Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit v zwischen vollkommen elastischen kugelförmigen Atomen ergibt:

$$\Lambda = l/2v \quad (l = \text{mittlere freie Weglänge})$$

$$\varkappa = \frac{e^2}{m} N \left(1 + \frac{v}{3} \frac{\partial \Lambda}{\partial v}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 \cdot l \cdot N}{2m \cdot v}$$

statt des bekannten Drudeschen Wertes $\varkappa = e^2 \cdot l \cdot N / 2mv$. Dieser erweist sich auch unmittelbar als falsch, wenn man berücksichtigt, daß die von $\mathfrak{E}_z$ beschleunigten Elektronen zwischen zwei Stößen im Mittel kürzere Zeit unterwegs und darum in jedem Augenblicke in geringerer Anzahl vorhanden sind als die verzögerten[1].

1) Gekürzt, da ausführlich in den Ann. d. Phys.

1) Das hat E. Riecke bereits 1898, Wied. Ann. **66**, S. 1200, d. h. zwei Jahre vor der Drudeschen Arbeit, Ann. d. Phys. **1**, 566, 1900, als Bemerkung eines Hrn. van Everdingen mitgeteilt. Der dort nicht mitgeteilte Beweis geht einfach so. Ist $V_z' \ll v$ die mittlere Zusatzgeschwindigkeit der einzelnen Elektronen zwischen zwei Stößen und ϑ der Winkel zwischen v und der z-Richtung, so haben die Elektronen des Richtungsbereichs ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ die absolute Geschwindigkeit

$$v\left(1 + \frac{V_z'}{v} \cos\vartheta\right)$$

und die relative Häufigkeit:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{4\pi\left(1 + \frac{V_z'}{v}\cos\vartheta\right)}.$$

Die z-Komponente der Geschwindigkeit ist für ein Elektron $(v\cos\vartheta + V_z')$ und im Mittel:

$$V_z = \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin\vartheta(v\cos\vartheta + V_z')}{2\left(1 + \frac{V_z'}{v}\cos\vartheta\right)} =$$

$$= \frac{V_z'}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta(1 - \cos^2\vartheta) = \frac{2}{3} V_z'$$

statt V_z' wie Drude einfach annimmt.

Gültigkeitsbedingung des Rayleighschen Strahlungsgesetzes.

Bei seiner Ableitung des Rayleighschen Strahlungsgesetzes durch elektronentheoretische Bestimmung des Absorptions- und des Emissionsvermögens einer unendlich dünnen Metallschicht (Dicke dx) hat H. A. Lorentz[1]) seiner Berechnung des Absorptionsvermögens

$$a = \frac{4\pi}{c} \varkappa \cdot dx$$

den falschen Drudeschen Wert der Leitfähigkeit zugrunde gelegt und ist trotzdem zu dem richtigen Rayleighschen Strahlungsgesetz gelangt, ebenso wie nach ihm andere Forscher[2]) die einen — wenigstens in sich — richtigen Wert für $\varkappa$ benutzten[3]).

Der Widerspruch löst sich, wenn man auch das Emissionsvermögen einer Metallschicht durch den oben eingeführten allgemeinen Begriff der Beharrungszeit ausdrückt[4]), der dabei ganz ungezwungen eingeht.

Das Rayleighsche Strahlungsgesetz ergibt sich nämlich nur dann, wenn man für die Leitungselektronen die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$$f = f_0 \cdot e^{-\frac{m v^2}{2 \varkappa T}}$$

annimmt. Setzt man mit H. A. Lorentz für alle Leitungselektronen die gleiche Geschwindigkeit an, so wird das Emissionsvermögen im Verhältnis 2 : 3 zu klein. Durch den im gleichen Verhältnis zu kleinen Drudeschen Wert von K und a wird dieser Fehler bei H. A. Lorentz zufällig gerade ausgeglichen.

Diskussion.

Lenard: Ich bedaure, daß der Vortragende keinen Anschluß gab an die schon vorliegenden, sehr weitgehenden Untersuchungen über die Wanderungsgeschwindigkeiten kraftgetriebener Partikel (Ann. d. Phys.); man verliert so die Übersicht über Gültigkeitsbereich und Feinheitsgrad der Berechnungen verschiedener Autoren.

1) H. A. Lorentz, Akad. Amsterdam 1903, XI, S. 787.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. **14**, 217, 1907; J. H. Jeans, Phil. Mag. **17**, 773, 1909; Mc Laren, Phil. Mag. **21**, 66, 1911; **25**, 43, 1913; Niels Bohr: „Studier over Metallernes Elektronteori", Diss. Kopenhagen 1911.

3) Sie setzen durchweg die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung voraus, für die Gleichung (4) mit $\Lambda = l/2v$ zu dem bekannten Lorentzschen Ausdruck für $\varkappa$ führt.

4) Dabei wird noch $\lambda > 0$ und gleichmäßige Konvergenz des Integrals (3) für alle v vorausgesetzt.

P. Lertes (Frankfurt a. M.), Der Dipolrotationseffekt bei dielektrischen Flüssigkeiten[1]).

Durch Verallgemeinerung der Debyeschen Dipoltheorie und unter Heranziehung der Gesetze, welche für die Bewegungen von reibenden Flüssigkeiten gelten, hat M. Born[2]) eine neue Theorie der Beweglichkeit der elektrolytischen Ionen aufgestellt. Diese Theorie gibt zum mindesten eine gute qualitative Erklärung für die bekannte Tatsache, daß die Atomionen der Alkalimetalle und der Halogene von der sonst allgemein gültigen Regel abweichen, nach der die Ionenbeweglichkeit mit abnehmendem Atomvolumen wächst. Der Bornschen Theorie liegt die Vorstellung zugrunde, daß beim Durchgang eines Ions durch eine Dipolflüssigkeit die Dipole dem Ion ihre entgegengesetzte Ladung zukehren. Da jedoch die Dipole der Feldrichtung des geladenen Ions infolge der inneren Reibung nicht momentan folgen können, sondern etwas dagegen zurückbleiben, wird die Bewegung des Ions verzögert und gebremst, wodurch die eingangs erwähnte Anomalie bei den Alkalimetallen und den Halogenen bedingt sein soll. Um auch experimentell festzustellen, daß tatsächlich ein solcher Richteffekt der Dipole vorliegt, kann man nach einem Vorschlage von M. Born eine Dipolflüssigkeit in ein elektrostatisches Drehfeld hineinbringen. Auch hier werden die Dipole dem rotierenden Felde zu folgen versuchen, aber infolge der inneren Reibung gegen die Feldrichtung etwas zurückbleiben, wodurch eine Rotation der Flüssigkeit entstehen muß. Es wurden nun eine Reihe von Flüssigkeiten auf diesen von M. Born vorausgesagten Rotationseffekt hin untersucht. Für die Größe des Drehmomentes einer Dipolflüssigkeitskugel, welches abhängig ist von der Feldstärke E, dem Volumen und damit dem Radius R der Kugel, der Drehfeldfrequenz ω, der Reibungskonstanten η, dem Dipolmoment M, und dem Produkt aus Boltzmannscher Konstante k und der absoluten Temperatur T gilt der Ausdruck

$$L = E^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \omega \cdot \eta \cdot \left(\frac{M}{kT}\right)^2.$$

Bei der Untersuchung zeigte es sich, daß dieser Rotationseffekt namentlich bei den niederen Frequenzen von einem ähnlichen Rotationseffekt überlagert wird, der auf die Leitfähigkeit der Flüssigkeit zurückzuführen ist. Dieser Effekt war in einer früheren Arbeit[3]) eingehend untersucht worden. Entsprechend der Lampaschen

1) Die Originalarbeit ist erschienen in der Zeitschr. f. Phys. **6**, 56, 1921.

2) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **1**, 22, 1920.

3) P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. **4**, 315, 1920.

Theorie nimmt er zuerst mit steigender Frequenz zu, um nach Erreichen eines Maximums wieder abzunehmen, während der Bornsche Effekt mit wachsender Frequenz immer zunehmen muß. Um den Bornschen Effekt zu untersuchen, war es deshalb nötig, zu sehr hohen Drehfeldfrequenzen überzugehen, da nur in diesem Falle der Bornsche Effekt den Leitfähigkeitseffekt überwiegt.

Zur Erzeugung des elektrostatischen Drehfeldes wurden zwei um 90^0 in der Phase gegeneinander verschobene Wechselspannungen zu zwei zueinander rechtwinklig stehenden Plattenpaaren geführt. In die Mitte dieses Drehfeldes wurde an einem 105 cm langen und 0,06 mm dicken Phosphorbronzedraht eine dünnwandige Glaskugel von 103 ccm Inhalt zur Aufnahme der Flüssigkeiten hineingehängt. Zur Messung der Drehwinkel war mit der Kugel ein kleiner Spiegel starr verbunden, um die Messung mit Fernrohr und Skala zu ermöglichen. Zur Erzeugung der nötigen hochfrequenten Wechselspannungen wurden Elektronenröhren benutzt. Da bei zwei magnetisch gekoppelten Schwingungskreisen, die in Resonanz miteinander sind, die Spannungen um 90^0 in der Phase gegeneinander verschoben sind, so war dadurch die benötigte Phasenverschiebung leicht zu erreichen.

Zur Spannungsmessung und Prüfung des Drehfeldes auf seine Kreisförmigkeit diente eine Braunsche Röhre, die ebenfalls zwei rechtwinklig zueinander stehende Plattenpaare enthielt. Beim Anlegen des Drehfeldes an diese Platten beschrieb der durchtretende Kathodenstrahl auf dem Auffangschirm einen Kreis, aus dessen Durchmesser die Spannung ermittelt werden konnte. Lag keine Phasenverschiebung um 90^0 vor, oder waren die Spannungen an den Platten nicht gleich, so beschrieb der Kathodenstrahl eine Ellipse oder eine andere Figur.

Untersucht wurden die Flüssigkeiten Methylalkohol, Äthylalkohol, Amylalkahol, destilliertes Wasser, Leitungswasser, Äthyläther, Aceton, Toluol, Nitrobenzol, Glyzerin, Benzol und Petroleum, und zwar bei den Drehfeldfrequenzen $4{,}62 \cdot 10^7$, $1{,}75 \cdot 10^8$ und $4{,}48 \cdot 10^8$. Während bei den erstgenannten Flüssigkeiten bis einschließlich Glyzerin ein mit steigender Frequenz größer werdendes Drehmoment beobachtet wurde, zeigten Benzol und Petroleum keinen Rotationseffekt. Dadurch ergibt sich ein grundlegender Unterschied zwischen Dipolflüssigkeiten und solchen, die keine Dipole haben. Ferner zeigte es sich, daß die Drehmomente um so größer waren, je größer die Reibungskonstante der betreffenden Dipolflüssigkeit ist. Der zu erwartende Rotationseffekt auf Grund der Leitfähigkeit liegt bei den hier benutzten Drehfeldfrequenzen zum größten Teil in einer ganz anderen Größenordnung, so daß er bei der Empfindlichkeit der Apparatur nicht gemessen werden konnte. Mithin ist der von Born vorausgesagte Rotationseffekt tatsächlich vorhanden, was der ganzen Theorie und ihrer Anwendung auf die Ionenbeweglichkeit eine sichere Grundlage gibt. Da die Rotationseffekte auch quantitativ gemessen wurden, so ließen sich hieraus unter der Annahme, daß für die molekulare Reibungskonstante die gewöhnliche Reibungskonstante maßgebend ist, die Dipolmomente von einigen Flüssigkeiten bestimmen. Es ergaben sich beispielsweise als Dipolmomente für

Äthylalkohol . . .	$5{,}3 \cdot 10^{-19}$,
Dest. Wasser . . .	$7{,}4 \cdot 10^{-19}$,
Äthyläther	$12{,}7 \cdot 10^{-19}$,
Toluol	$6{,}3 \cdot 10^{-19}$,
Amylalkohol . . .	$8{,}9 \cdot 10^{-19}$,
Nitrobenzol . . .	$7{,}1 \cdot 10^{-19}$,
Glyzerin	$2{,}8 \cdot 10^{-19}$.

Die Fehlergrenze beträgt etwa 20 Proz. Bezüglich weiterer Einzelheiten wird auf die ausführliche Arbeit in der Zeitschr. f. Phys. **6**, 56, 1921 verwiesen.

Diskussion.

Debye: Der Herr Vortragende hat gesagt, daß das Drehmoment mit steigender Frequenz wachse. Das kommt mir merkwürdig vor und es scheint mir, als ob bei hohen Frequenzen, bei denen die Dielektrizitätskonstante von ihrem statischen auf den optischen Wert fällt, ein Abfall des Drehmomentes eintreten müßte.

Lertes: Die ganze Untersuchung bezieht sich nur auf Frequenzen und Flüssigkeiten, bei denen eine Absorption und anormale Dispersion noch nicht vorliegt. Nur bei Glyzerin zeigte es sich, daß bei 10,2 m Wellenlänge kein Dreheffekt beobachtet wurde, während bei 40,8 m und 4,2 m ein Dreheffekt vorlag. Bei Glyzerin liegt bei etwa 10 m Wellenlänge das Absorptionsgebiet. Es ist nun wahrscheinlich, daß in diesem Falle das Feld nicht in das Innere der Flüssigkeit eindringt und nur die Oberflächenschicht in Rotation kommt, die so gering ist, daß mit der Empfindlichkeit der Anordnung eln solcher Effekt nicht gemessen werden konnte.

Born: Ich halte die Erklärung des Herrn Vortragenden für das Ausbleiben des Drehmoments bei Glyzerin in der Gegend von 10 m Wellenlänge für wichtig; das Feld kann wegen der starken Absorption nicht in die Flüssigkeit eindringen. Die Methode des Herrn Lertes ist darum wichtig, weil sie in Verbindung mit einer Messung der Temperaturabhängigkeit der

Dielektrizitätskonstanten ermöglichen wird, gleichzeitig mit dem Dipolmoment die molekulare Reibungskonstante zu bestimmen, die für eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten von Bedeutung sein wird.

Lenard bemerkt, daß mit Berücksichtigung der Dipole die Durchmesser der elektrolytischen Ionen kleiner sich ergeben würden als von ihm berechnet (Ann. d. Phys. 1920). Das H-Ion wäre dann z. B. um so mehr kleiner, als das H_2O-Molekül, an welches es angelagert ist. Die von ihm berechnete merkwürdige Schrumpfung der H_2O-Moleküle bei Zusammenlegung mit dem positiv geladenen H-Atom ist also um so mehr als vorhanden zu betrachten.

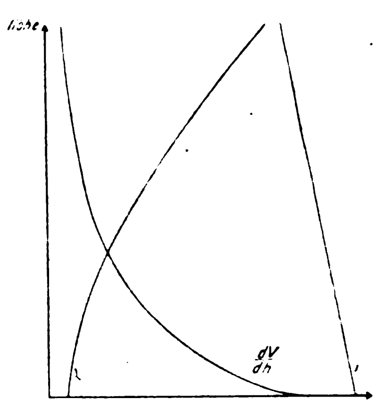
Albert Wigand (Halle a. S.), Der vertikale Leitungsstrom in der Atmosphäre und die Erhaltung des elektrostatischen Erdfeldes.

1. Problemstellung. Bereits in einer früheren Epoche der luftelektrischen Forschung hat man erkannt, daß der Ursprung und die Aufrechterhaltung des elektrostatischen Erdfeldes das Grundproblem ist. In letzter Zeit wurde diese Frage von neuem erörtert[2]), ohne daß man sie jedoch gelöst hätte. Unbekannt bleibt nach wie vor die physikalische Natur jenes Vorgangs in der Atmosphäre, der es bewirkt, daß das elektrostatische Erdfeld, von meteorologisch bedingten Schwankungen abgesehen, dauernd bestehen bleibt und nicht etwa in kurzer Zeit verschwindet infolge des auf Ionenwanderung beruhenden Ausgleichs der positiven Luftladung mit der negativen Entladung durch den normalen vertikalen Leitungsstrom. Immerhin sind die Möglichkeiten für die Natur jenes felderhaltenden Vorganges mit Rücksicht auf die neuen Ergebnisse der Strahlungslehre und Elektronik auf einige wenige eingeschränkt, so daß sich einfache experimentelle Fragestellungen ergeben, die eine baldige Lösung des Grundproblems erhoffen lassen. Zunächst ist die genaue Kenntnis der Änderung des Spannungsgefälles und des vertikalen Leitungsstroms mit der Höhe erforderlich.

2. Messungsergebnisse für die Änderung des Spannungsgefälles und des vertikalen Leitungsstroms mit der Höhe. Neue Beiträge hierzu bis zur Höhe von 9 km haben die Messungen gebracht, die ich bei Freiballonfahrten vor und nach dem Kriege gemeinsam mit Herrn Everling und anderen Mitarbeitern ausführte und jetzt abschließend veröffentliche[1]). Wegen der Meßmethodik verweise ich auf diese Arbeiten. Die vertikale Leitungsstromdichte wurde als Produkt gleichzeitig für dieselbe Höhe gemessener Werte des Spannungsgefälles und der Leitfähigkeit berechnet.

Der Vertikalverlauf des Spannungsgefälles hat nach Herrn Everlings Beobachtungen unter normalen meteorologischen Verhältnissen den bereits von früher her bis etwa 6 km Höhe bekannten Typus verzögerter Abnahme mit zunehmender Höhe bis zu einem Minimalwerte von rund 4 Volt/m in 9 km Höhe, während am Boden 100—200 Volt/m als Normalwert gefunden wird. Daraus ergibt sich nach der Poissonschen Gleichung der Potentialtheorie das Vorhandensein einer positiven Raumladung in der Atmosphäre mit nach oben abnehmender Dichte, so daß jedoch nahe der oberen Grenze der Troposphäre noch endliche Werte auftreten.

Die Änderung der Leitfähigkeit mit der Höhe ist nun zwar nach unseren Messungen in roher Annäherung reziprok der Höhenänderung des Spannungsgefälles, jedoch nicht genau reziprok (vgl. die schematische Figur). Der vertikale Leitungsstrom zeigt vielmehr in seinem allgemeinen Vertikalverlauf deutlich eine Abnahme mit zunehmender Höhe, hat also nicht, wie vielfach angenommen worden ist, eine von der Höhe unabhängige Größe. Zwar treten erhebliche Schwankungen in der Kurve auf, die teils wie auch beim Spannungsgefälle durch die meteorologische Schichtung der Atmosphäre bedingt sind, teils darauf beruhen, daß nicht immer ganz streng gleichzeitige Werte des Spannungs-



Schema des Höhenverlaufs von Leitfähigkeit λ, Spannungsgefälle $\frac{dV}{dh}$ und vertikaler Leitungsstromdichte i.

1) W. F. S. Swann, Terr. Magn. **20**, 105, 1915; Journ. Franclin Inst., November 1919, S. 597; R. Seeliger, Ann. d. Phys. **62**, 464, 1920; E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **63**, 726, 1920; K. Kähler, Meteor. Zeitschr. **36**, 199, 1921.

1) A. Wigand, Ann. d. Phys. **66**, 81, 1921; E. Everling und A. Wigand, Ann. d. Phys. (im Druck).

gefälles und der Leitfähigkeit zur Verfügung standen. Die Tendenz zur Abnahme mit zunehmender Höhe glauben wir aber als reell und für den stationären Zustand des vertikalen Leitungsstroms als typisch ansehen zu dürfen. Die Potsdamer Bodenwerte während der zwei Hochfahrten betrugen im Mittel $5-6 \cdot 10^{-7}$ E.S.E., in 3—4 km Höhe fanden wir rund $4 \cdot 10^{-7}$ und in 6—9 km Höhe Werte von $2,2 \cdot 10^{-7}$ für die vertikale Leitungsstromdichte.

Die Annahme einer Vertikalkonstanz der Stromdichte wäre schon nicht vereinbar mit den tatsächlichen örtlichen und zeitlichen Schwankungen, weder mit den an Schichtgrenzen auftretenden Diskontinuitäten der Höhenkurve des Vertikalstroms, noch auch mit den täglichen periodischen Änderungen der Bodenwerte. Denn da man diese letzteren Schwankungen dem Einfluß der Sonnenstrahlung auf den Erdboden und die bodennahen Luftschichten zuzuschreiben hat[1]), darf man vermuten, daß in bodenferneren Schichten, wo dieser Einfluß verschwindet, die periodischen Schwankungen fehlen werden; in der Höhe wird also ein Vertikalstrom fließen, dessen Größe von dem gleichzeitigen am Boden verschieden ist.

3. Folgerungen für die Erklärung der Erhaltung des elektrostatischen Erdfeldes. Aus der gefundenen Höhenkurve des vertikalen Leitungsstroms ist zu folgern, daß sich nicht nur in großen Höhen, sondern ebenso in den unteren Schichten der Atmosphäre ein nicht auf Ionenleitung beruhender Vorgang abspielt, der die betreffenden Schichten dauernd zu Quellen eines von oben nach unten gerichteten Vertikalstroms macht. Und dieser Vorgang wird in engem Zusammenhang mit den Eigenschaften der Luftschichten eine diskontinuierliche Verteilung besitzen, da erfahrungsgemäß an den Schichtgrenzen sprungweise Änderungen der vertikalen Stromdichte auftreten.

Ein solcher zur Erzeugung der Stromquellen angenommener Vorgang gibt dann auch die Möglichkeit zur Erklärung der Tatsache, daß das normale elektrostatische Erdfeld längere Zeit in einem Gleichgewichtszustande beharren kann, obgleich die das Erdfeld bewirkenden freien Ladungen dauernd schnell ausgeglichen werden. Der Vorgang, der das Erdfeld aufrecht erhält, würde sich danach in derselben Luftmasse abspielen, in der die ihn kompensierende vertikale Ionenwanderung des Leitungsstromes stattfindet.

Ohne vorläufig näher auf die physikalische Natur und Theorie dieses Vorganges, auf den man aus der Höhenänderung des vertikalen Leitungsstroms zu schließen hat, einzugehen, will ich nur die dafür in Frage kommenden Möglichkeiten nennen. Der in den höheren wie in den tieferen Schichten der Atmosphäre auftretende Vorgang kann darin bestehen, daß der Luft positive Ladung zugeführt oder negative Ladung entzogen wird, oder aber daß eine vertikal gerichtete Ionisierung stattfindet, bei der die entstehenden negativen Ionen relativ zu den zugehörigen positiven Ionen nach unten verschoben werden.

Diese letztere Vorstellung würde im wesentlichen mit der Hypothese von Swann[1]) übereinstimmen, nach der man die von oben kommende, sehr durchdringende γ-Strahlung in der Atmosphäre als wirksames Agens für den Ursprung uud die Aufrechterhaltung des Erdfeldes anzusehen hat, indem diese Strahlung in der Luft eine nach unten gerichtete, aus negativen Elektronen bestehende Dornsche Sekundärstrahlung erzeugen soll.

Die weiteren experimentellen Untersuchungen zur Klärung des luftelektrischen Grundproblems haben sich nun zu beziehen einmal auf die Feinstruktur des Vertikalverlaufs von Spannungsgefälle und vertikalem Leitungsstrom bis zu möglichst großer Höhe, und sodann besonders auf die noch recht rätselhaften Eigenschaften der physikalisch überaus interessanten durchdringenden Höhenstrahlung.

Diskussion.

Seeliger: Von den beiden Erklärungsmöglichkeiten für die Erhaltung des Erdfeldes, die sich aus der vom Vortragenden gefundenen Inkonstanz des vertikalen Leitungsstromes ergeben, ist die Einstrahlung positiver Ladung von außen nicht ausreichend, die gerichtete Elektronenstrahlung nach dem Schweidlerschen Versuch zunächst abgeschnitten. Wünschenswert und sehr wichtig wäre eine Wiederholung dieses Versuches in größeren Höhen.

Wigand: Eine positive Einstrahlung allein wäre zwar zur Erklärung der Höhenänderung des Vertikalstroms ausreichend, nicht jedoch zur Erklärung der Erhaltung des Erdfeldes. Die vertikal gerichtete Ionisierung ist nach den γ-Strahlenuntersuchungen durchaus möglich, in der Atmosphäre aber noch nachzuweisen.

Becker: Sie erklären die Aufrechterhaltung des Potentialgefälles der Atmosphäre, wenn ich richtig verstand, durch eine einseitige Elektronenemission aus der Atmosphäre durch harte γ-Strahlen von oben und eine dadurch veranlaßte

1) K. Kähler, diese Zeitschr. 13, 1216, 1912.

1) W. F. G. Swann, l. c.



räumliche Trennung der entstehenden Elektrizitätsträger. Dieser Deutung kann ich nicht zustimmen. Denn selbst wenn man die gerichtete lichtelektrische Wirkung an den Gasmolekülen zuläßt, was bis jetzt nicht zwingend erscheint, so ist doch zu beachten, daß die Trägerbildung überwiegend Folge der Elektronendurchquerung der Gasmoleküle ist, und daß in diesem Fall eine ungleichförmige Trägerverteilung nicht einzusehen wäre.

Wigand: Die von mir angeführte Swannsche Hypothese, deren Verifizierung noch aussteht, fußt auf der Tatsache, daß die von harten γ-Strahlen ausgelösten, sehr schnellen Elektronen vorzugsweise in gleicher Richtung wie die erregende γ-Strahlung emittiert werden. Und sehr schnelle Elektronen ionisieren erfahrungsgemäß die Luft weniger als langsamere. Versuche darüber in der Atmosphäre sind noch nicht gemacht.

Reinhold Fürth, Das Auftreten systematischer Fehler bei numerischer Auswertung physikalisch-statistischer Aufgaben.

I.

Hat man es mit der Messung irgendeiner physikalischen Schwankungserscheinung zu tun (etwa der Brownschen Bewegung), so hat man im Grunde genommen immer die Aufgabe, aus einer Serie von Messungen der schwankenden Größe nach irgendeiner Rechenvorschrift gewisse Mittelwertsbildungen vorzunehmen.

Dieses Rechengesetz ist nach physikalischen Ansätzen aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen gewonnen und hat demgemäß folgenden Sinn: Ich bekomme die zu messende Schwankungsgröße absolut genau, wenn ich nach dieser Vorschrift mit Benützung eines unendlich großen Beobachtungsmaterials rechne, und einen mit Fehlern behafteten Näherungswert, wenn, wie ja in der Praxis immer der Fall, diese Serie aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungen besteht. Obzwar ich also in der Praxis kein genaues Resultat erhalten kann, kann ich mich doch mit dieser Näherung begnügen, weil ich beweisen kann, daß der mutmaßliche Fehler gegen den wirklichen Wert bei genügender Vermehrung der Beobachtungen unter jeden angebbaren Wert herabgedrückt werden kann. Was aber nicht allgemein bewiesen werden kann, ist die bisher immer als selbstverständlich angesehene Annahme, daß der nach der besagten Rechenvorschrift aus einem endlichen Material errechnete Wert unter allen zu mindest der „wahrscheinlichste" ist. Ich werde im folgenden zeigen, daß diese Annahme allgemein keineswegs zutrifft, sondern daß man Fälle angeben kann, wo der aus der Rechenvorschrift errechnete Wert gegen den „wahrscheinlichsten" systematische Abweichungen bei endlicher Beobachtungszahl aufweist, die einseitig gegen Null gehen, wenn man diese Zahl der Beobachtungen unbeschränkt zunehmen läßt.

Ein zweiter Punkt, der auch bei statistisch physikalischen Messungen nicht beachtet zu sein scheint, ist der folgende: Ich hätte aus einer endlichen Zahl n von Beobachtungen nach einer gewissen Rechenvorschrift eine Größe D zu berechnen. Ich würde diese Größe ganz genau bekommen, wenn n unbegrenzt zunimmt, da ich aber nur eine endliche Zahl n habe, werde ich nicht den wahren Wert D bekommen, sondern ein gewisses Δ, derart, daß jedem Wert Δ eine gewisse Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ zukommt. Ich habe oben bereits angedeutet, daß das Maximum von $\varphi(\Delta)$ keineswegs mit D zusammenfallen muß. Dazu kommt aber nun noch eine andere Frage. Nämlich, ist es gestattet, aus einer einzigen Serie von n Beobachtungen überhaupt irgendeinen Schluß über D zu ziehen und welchen? Gewöhnlich scheint man hier wiederum als selbstverständlich anzunehmen, daß man, wenn überhaupt, am ehesten behaupten kann, der aus einer einzigen Serie berechnete Δ-Wert sei der „wahrscheinlichste", d. h. jener, der dem Maximum der Wahrscheinlichkeit von Δ entspricht. Das halte ich nun für prinzipiell verfehlt.

Wir sind bei physikalischen Messungen in den weitaus meisten Fällen gewöhnt, mit Gaußschen Fehlerverteilungen oder doch zumindest mit symmetrischen zu operieren, bei denen die Wahrscheinlichkeit von Fehlern nach der positiven und negativen Seite gleich groß ist. Nun werden wir doch sagen, eine Messung sei frei von systematischen Fehlern, wenn es ebenso häufig vorkommt, daß die Messung größer ausfällt als die wahre Größe, als umgekehrt. Oder als „wahrer" Wert der zu messenden Größe wird gemäß Definition der Freiheit von systematischen Fehlern jener Wert angesehen, der definiert ist durch die Gleichung

$$\int_0^{\Delta_g} \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{1}{2}. \tag{I}$$

Im Falle symmetrischer Fehlerverteilung nun fällt dieser Wert selbstverständlich mit dem wahrscheinlichsten zusammen, nicht aber im Falle unsymmetrischer Verteilung, wie sie in der physikalischen Statistik häufig vorkommt.

Es scheint mir daher, daß man mit dem geringsten zu erwartenden Fehler das aus einer einzigen Serie bestimmte Δ mit diesem Δg zu identifizieren hat und nicht mit den davon verschiedenen Δ_w bzw. D.

Ist man sich über diese beiden Punkte klar geworden, so müssen sie auch berücksichtigt werden und es ergibt sich die Aufgabe, bei der auszuführenden Messung diese drei Größen sauber auseinander zu halten und ihr gegenseitiges Verhältnis in Abhängigkeit von n zu bestimmen. Ich habe speziell für den Fall der Brownschen Bewegung die betreffenden Überlegungen durchgeführt, die ich hier nur in den Hauptresultaten anführe. Die ausführliche Publikation soll an anderer Stelle demnächst erfolgen.

II.

Als erstes Beispiel behandeln wir die Brownsche Verschiebung eines schweren Partikelchens in Richtung der Schwerkraft. Bekanntlich gilt für die Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung zwischen x und $x + dx$ des Teilchens in der Zeit t die Formel

$$w(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}} dx, \qquad (1)$$

wo D den Diffusionskoeffizienten und c die mittlere Fallgeschwindigkeit des Teilchens bedeuten. Aus dieser Formel folgt sofort die Rechenvorschrift zur Bestimmung des D und c

$$\overline{x} = \int_0^\infty w(x)\,dx = ct$$

$$\overline{(x-ct)^2} = \int_0^\infty (x-ct)^2 \cdot w(x)\,dx = 2Dt.$$

Diese Formeln gelten genau für den Fall unbegrenzt vieler Beobachtungen, die zu dem Mittel $\overline{(x-ct)^2}$ vereinigt werden sollen. Wir nehmen nun an, es seien bloß endlich viele Beobachtungen n in einer Serie vereinigt, dann lautet die Rechenvorschrift

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \qquad (2)$$

$$\overline{(x-\overline{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2.$$

Aus letzterer Formel kommt man jedoch nicht zum „wahren" Wert D, sondern zu einem davon im allgemeinen verschiedenen Δ nach der Formel

$$2\Delta = \overline{(x-\overline{x})^2}\,\frac{1}{t}. \qquad (2a)$$

Denken wir uns nun eine sehr große Zahl von Serien, alle mit derselben Beobachtungsanzahl n angestellt und aus jeder dieser Serien Δ nach obiger Rechenvorschrift ausgerechnet, welches ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\varphi(\Delta)$ der erhaltenen Δ-Werte?

Offenbar ist nach Formel (1) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Kombination der x-Werte derart, daß die erste Beobachtung zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ liegt, die zweite zwischen x_2 und $x^2 + dx_2$ usw., die $n$te zwischen x_n und $x_n + dx_n$, gegeben durch

$$w(x_1 \ldots x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \\ = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^n e^{-\frac{1}{4Dt}\Sigma(x-ct)^2} dx_1 \ldots dx_n. \qquad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Δ zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ setzt sich nun aus allen Wahrscheinlichkeiten (3) zusammen, deren $x_1 \ldots . x_n$ nach Formel (2) bzw. (2a) das gleiche Δ ergeben. Wir müssen also (3) über $x_1 \ldots . x_n$ derart integrieren, daß dabei der Ausdruck $\frac{1}{n}\sum x_\nu^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_\nu\right)^2$ konstant bleibt.

Führt man diese Rechnung aus, so gelangt man schließlich zu folgender Formel für $\varphi(\Delta)$:

$$w(\Delta)\,d\Delta = \\ \left(\frac{n}{2D}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{n}{2D}\Delta} \Delta^{\frac{n-3}{2}} d\Delta. \qquad (4)$$

Diese Formel erfüllt zunächst, wie man sich überzeugen kann, die selbstverständliche Forderung

$$\int_0^\infty w(\Delta)\,d\Delta = 1. \qquad (5)$$

Rechnet man sich aus (4) die Größe $\overline{\Delta}$ aus, das heißt den Mittelwert von Δ aus einer sehr großen Zahl von Serien mit der gleichen Beobachtungszahl n, so erhält man nicht etwa, wie man zunächst hätte erwarten sollen D, sondern den davon systematisch verschiedenen Wert

$$\overline{\Delta} = \frac{n-1}{n} D, \qquad (6)$$

oder mit anderen Worten, man darf bei der Mittelwertsbildung in (2) nicht durch n dividieren, sondern durch $n-1$, ein Resultat, das bekanntlich auch in der Fehlerrechnung auftritt und von Herrn Schrödinger auf anderem Wege für diesen Fall bereits abgeleitet worden ist.

Der wahrscheinlichste Wert Δ_w ergibt sich aus (4) zu

$$\Delta_w = \frac{n-3}{n} \cdot D, \qquad (7)$$

also systematisch kleiner als D und auch als

$\overline{\Delta}$, was der eingangs erwähnten Behauptung entspricht.

Schließlich kann man nun auch noch Δ_g gemäß Formel (1) ausrechnen, da sich das Integral immer auf das Fehlerintegral zurückführen läßt. Für die kleinen Werte von n sind die entsprechenden Größen in folgender Tabelle I vereinigt.

Tabelle I.

n	$\overline{\Delta}$	Δ_w	Δ_g
2	0,500 D	0,000 D	0,228 D
3	0,667 „	0,000 „	0,462 „
4	0,750 „	0,250 „	0,601 „
5	0,800 „	0,400 „	0,670 „
9	0,889 „	0,667 „	0,816 „
12	0,916 „	0,750 „	0,859 „

Schließlich kann man auch noch das Präzisionsmaß, das heißt den mittleren relativen Fehler des 2Δ gegen $2D$ aus Formel (4) gemäß

$$4D^2\varepsilon^2 = 4\int_0^\infty \varphi(\Delta)(\Delta - D)^2 d\Delta$$

ausrechnen und kommt so zu

$$\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}, \tag{8}$$

welche Formel von Schrödinger zum erstenmal, allerdings für einen etwas anderen Fall, abgeleitet worden ist, der aber, wie wir gleich sehen werden, dem vorliegenden ganz analog ist. Geht man korrekterweise bei der Berechnung von ε so vor, daß man bei der Mittelbildung durch $n - 1$ dividiert, so ändert sich auch das Präzisionsmaß gemäß

$$4D^2\varepsilon'^2 = 4\overline{\left(\frac{n}{n-1}\Delta - D\right)^2},$$

woraus folgt

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \tag{8a}$$

was formal in der Tat genau den Vorschriften der Fehlerrechnung entspricht.

III.

Ganz analog kann man den für die Ehrenhaft-Millikansche Methode der Ladungsbestimmung wichtige Beobachtungsart der Brownschen Bewegung erledigen, wo die Erstpassagen des fallenden Teilchens durch die Horizontalstriche eines Rasters zeitlich registriert werden. Die Schrödinger-Smoluchowskische Formel für die Wahrscheinlichkeit einer solchen „einseitigen" Erstpassage zwischen t und $t + dt$ über die Strecke x lautet

$$w(t)\,dt = \frac{x}{2\sqrt{\pi D t^3}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}} dt, \tag{9}$$

wenn wieder c die mittlere Fallgeschwindigkeit bedeutet.

Aus (9) folgt sofort

$$\overline{t} = \frac{x}{c}, \quad 2D = x^2 \left\{ \overline{\left(\frac{1}{t}\right)} - \frac{1}{\overline{t}} \right\}$$

für unbeschränkt viele Beobachtungen.

Hat man nun wieder eine Serie mit n Beobachtungen $t_1, \ldots t_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Kombination der t-Werte

$$w(t_1 \ldots t_n)\,dt_1 \ldots dt_n =$$
$$= \left(\frac{x}{2\sqrt{\pi D t^3}}\right)^n e^{-\Sigma\frac{(x-ct)^2}{4Dt}} dt_1 \ldots dt_n, \tag{10}$$

während sich aus den Beobachtungen ein Δ nach der Rechenformel

$$2\Delta = \frac{x^2}{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{t_\nu} - \frac{n^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_\nu}\right) \tag{11}$$

berechnen läßt. Ermittelt man auf analoge Weise wie unter (2) die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ eines bestimmten aus (11) berechneten Δ, so erhält man abermals Formel (4). Daher bleiben alle aus dieser Formel gezogenen Schlußfolgerungen auch in diesem Falle aufrecht.

Man hat also auch in diesem Falle eine systematische Verkleinerung von D gegen den wahren Wert zu erwarten, eine Aussage, die bekanntlich an dem Beobachtungsmaterial bei Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen durchaus bestätigt worden ist. Die seinerzeit von mir vorgeschlagene Erklärung und Korrektionsformel, die damals ausdrücklich als ein Notbehelf bezeichnet wurde, stimmt, wie man zeigen kann, im wesentlichen mit der hier gegebenen vollständigen Theorie überein. Die ausführliche Erörterung an Hand des vorliegenden statistischen Zahlenmaterials soll in der ausführlichen Publikation erfolgen.

4.

Schließlich möchte ich noch zeigen, daß ein anderer Weg zur Messung der Brownschen Bewegung, den ich vor einiger Zeit angegeben und in einigen Untersuchungen verwendet habe, nicht nur durch seine einfache Meßmethodik allen anderen Methoden zur Messung der Brownschen Bewegung vorzuziehen ist, sondern auch deshalb, weil er im Gegensatz zu den hier besprochenen verschwindend kleine systematische Fehler und sehr kleine Fehlerstreuung aufweist. Die Methode, die ich als Messung „doppelseitiger Erstpassagezeiten" bezeichnet habe, beruht darauf, die Passagen des Teilchens in

horizontaler Richtung durch eine Schar vertikaler Rasterstriche nach **beiden Seiten** hin zu beobachten.

Die Formel für die Wahrscheinlichkeit einer Erstpassage zwischen t und $t + dt$ lautet in diesem Falle

$$w(t)\,dt = \frac{\pi D}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{k\pi}{2}\, e^{-D\left(\frac{k\pi}{2x}\right)^2 t}\, dt, \qquad (12)$$

woraus zur Berechnung von D die einfache Formel gefolgert werden kann

$$2D = \frac{x^2}{t}. \qquad (13)$$

Hat man hier wieder eine Serie von n Werten $t_1 \ldots . t_n$, und geht zur Berechnung von D nach (13) vor, indem man

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu$$

setzt, so kann man nach demselben Vorgange wie früher wieder die Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$ bestimmter Δ suchen.

Leider ist es mir in diesem Falle nicht gelungen, allgemein für beliebige n das Problem zu lösen, jedoch ist die sukzessive Lösung für $n = 1, 2, 3 \ldots$ mit keinen prinzipiellen Schwierigkeiten verbunden.

Ohne diese Formeln hier im Detail wiederzugeben, teile ich für $n = 1, 2, 3$ die daraus folgenden Werte von $\bar{\Delta}$, Δ_w, Δ_g und das Präzisionsmaß ε mit.

Auf den ersten Blick überrascht es, daß für alle n $\bar{\Delta} = \infty$ herauskommt. Schaut man sich jedoch Formel (13) genauer an, so sieht man, daß das Resultat durch die einseitige Begrenzung der t und die Stellung des $\bar{t}$ im Nenner hervorgebracht ist. Dagegen ergibt sich für alle n

$$\overline{\left(\frac{1}{\Delta}\right)} = \frac{1}{D},$$

d. h. man erhält den Wert von D genau ohne systematische Fehler, wenn man eine große Anzahl von Serien so verbindet, daß man einfach **alle** t zu einem Generalmittel $\bar{t}$ vereinigt und nach (13) rechnet. Das ist selbstverständlich, da ja die aus verschiedenen Serien gewonnenen t durchaus gleichwertig sind; erfreulich ist aber, daß man hier auch bei endlicher Beobachtungszahl im Gegensatz zu früher keinen systematischen Fehler bekommt.

Man sieht aus Tabelle II die äußerst rasche Abnahme von ε mit n, sowie daß Δ_g bereits für $n = 3$ nur mehr eine sehr geringe systematische Abweichung von D aufweist, so daß man bereits aus recht kurzen Serien ziemlich sichere Schlüsse auf D ziehen kann. Die ausführliche Erläuterung auch dieser Fragen soll, wie bereits erwähnt, an anderer Stelle erfolgen.

Tabelle II.

n	Δ_w	Δ_g	$\overline{(1/\Delta)}$	ε
1	0,62 D	1,31 D	$1/D$	0,817
2	0,79 „	1,13 „	$1/D$	0,595
3	0,85 „	1,08 „	$1/D$	0,472

Prag, September 1921.

Philipp Frank (Prag), Über Entstehung von Periodizitäten durch Zufall.

Der ursprüngliche Anlaß zur Einführung der Quantenhypothese war für Planck das Versagen der klassischen Statistik bei der Berechnung der Häufigkeit, mit der die verschiedenen Frequenzen in der schwarzen Strahlung auftreten. Die Erfahrung zeigte, daß die hohen Frequenzen viel seltener sind als sie nach der klassischen Theorie sein sollten. Jede Strahlungstheorie muß daher die von Ehrenfest sogenannte „Violettforderung" erfüllen, die besagt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Frequenz ν mit wachsendem ν gegen Null gehen muß, wie das etwa beim Wienschen Strahlungsgesetz der Fall ist, das für den Resonator die mittlere Energie $\nu e^{-a\nu}$ ergibt.

Ich möchte nun im folgenden über ein Problem sprechen, bei dem dieses Seltenwerden der Frequenzen mit wachsendem ν nach der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung zustandekommt und das eine gewisse Analogie zum Strahlungsproblem aufweist. Wir denken uns ein Teilchen, das lineare Schwingungen ausführt, die aber nicht durch irgendwelche innere Eigenschaften des schwingenden Systems bedingt sind, sondern nur durch äußere Einflüsse, die nach Zufallsgesetzen auf das Teilchen wirken. Um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, können wir uns etwa einen linearen Resonator von verschwindender Trägheit und Direktionskraft denken, der durch Stöße von Gasmolekülen in Schwingung erhalten wird. Die Schwingung wird natürlich keine periodische sein, doch werden ungefähr jede Sekunde gleichviele (n)-Schwingungen stattfinden. Zufällig könnten diese n-Schwingungen in gleichen Abständen erfolgen, dann würden wir eine periodische Schwingung von der Frequenz n vor uns haben, ein Fall, dessen Eintreten offenbar sehr unwahrscheinlich ist, besonders wenn n, wie wir annehmen wollen, eine große Zahl ist.

Wahrscheinlicher ist es offenbar, daß unter

den n-unregelmäßigen Schwingungen ν sind (wo $\nu < n$), die in gleichen zeitlichen Abständen $\frac{1}{\nu}$ aufeinander folgen. Wir können so jeder Frequenz ν eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuschreiben. Die genaue Berechnung dieser Größe müßte mit Hilfe der Theorie der Brownschen Bewegung durchgeführt werden. Doch genügt es, um den Verlauf dieser Funktion von ν ungefähr kennen zu lernen, ein Urnenschema zu konstruieren, bei dem ein analoges Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftritt.

Wir denken uns N in einer geraden Linie angeordnete Kästchen und werfen n-Kugeln aufs Geratewohl hinein. Wir fragen dann nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine periodische Verteilung der Kugeln von der Frequenz ν entsteht. Darunter verstehen wir eine solche Verteilung, bei der sich unter den n-Kugeln ν befinden, die in gleichen Abständen (in der Länge von $\frac{N}{\nu}$-Kästchen) voneinander liegen. Man sieht sofort, daß $\nu = n$ die größte überhaupt mögliche Frequenz ist und daß ihr die kleinste Wahrscheinlichkeit zukommt. Man kann die allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit der Frequenz ν nach den gewöhnlichen Regeln der Kombinatorik berechnen, indem man abzählt, wie viele von den N^n möglichen individuellen Verteilungen der Kugeln die fragliche Periodizität aufweisen. Doch werden die Formeln sehr kompliziert und wir wollen uns hier darauf beschränken, den Fall zu behandeln, wo n klein gegen N ist. Dann ist die Anzahl der Fälle, wo mehr als eine Kugel in einem Fach ist, verschwindend klein gegen die Gesamtzahl und der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich sehr einfach gewinnen.

Wenn eine bestimmte Verteilung der Kugeln die der Frequenz ν entsprechende Periodizität aufweisen soll, so muß sie sicher eine der folgenden Eigenschaften haben.

Entweder müssen die Kästchen (wenn ich sie fortlaufend numeriere)

$$1, 1+\frac{N}{\nu},\quad 1+\frac{2N}{\nu} \ldots\ldots 1+\frac{(\nu-1)N}{\nu}$$

eine Kugel enthalten oder die Kästchen

$$2, 2+\frac{N}{\nu},\quad 2+\frac{2N}{\nu} \ldots\ldots 2+\frac{(\nu-1)N}{\nu}$$

oder eine mit dem Kästchen $3, 4 \ldots\ldots \frac{N}{\nu}$ beginnende entsprechende Reihe. Natürlich schließen diese Merkmale einander nicht aus, sondern eine Verteilung von Kugeln kann mehrere unter den genannten Merkmalen besitzen. Wegen unserer Voraussetzung ($n \langle N$) wird aber die Anzahl der Verteilungen, die mehreren der genannten $\frac{N}{\nu}$-Gruppen angehören, verschwindend klein sein, so daß wir praktisch so rechnen können, als würden die Verteilungen, die einer Frequenz ν entsprechen, in die aufgezählten $\frac{N}{\nu}$ getrennten Gruppen zerfallen. Jede dieser Gruppen enthält natürlich gleich viele Verteilungen, so daß wir nur die Wahrscheinlichkeit berechnen müssen, daß eine Verteilung einer bestimmten dieser Gruppen angehört.

Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen einer Kugel die Kugel in ein bestimmtes Kästchen fällt, ist $\frac{1}{N}$, die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen mit n-Kugeln mindestens eine in ein bestimmtes Kästchen fällt, ist wegen unserer Voraussetzung ($n \langle\langle N$) dann einfach $\frac{n}{N}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis des Wurfes mit n-Kugeln in einer bestimmten (den der ersten) Gruppe der zur Frequenz N gehörenden Verteilungen enthalten ist, ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesen Würfen ν bestimmte Kästchen eine Kugel erhalten. Diese ist unter unserer Voraussetzung einfach $\left(\frac{n}{N}\right)^\nu$. Die Wahrscheinlichkeit der Frequenz ν überhaupt ist also $\frac{N}{\nu}\left(\frac{n}{N}\right)^\nu$. Setzen wir $\lg\frac{N}{n} = \alpha$, so erhalten wir dafür $\frac{n}{\nu} e^\alpha e^{-\alpha\nu}$. Wir sehen hier tatsächlich das gesetzmäßige Abnehmen der Häufigkeit von Periodizitäten mit wachsendem ν.

Wenn wir uns aber diese Periodizitäten als durch zufällige Stöße erregte Schwingungen vorstellen und wir wie bei harmonischen Schwingungen annehmen, daß die Energie der Schwingung ν^2 proportional ist, erhalten wir das Ergebnis, daß die mittlere Energie der Schwingungen der Frequenz ν dem Ausdruck $\nu e^{-\alpha\nu}$ proportional ist, wie beim Wienschen Strahlungsgesetz. Doch ist auf diese Übereinstimmung wegen des willkürlichen Energiegesetzes nicht allzu großer Wert zu legen und es kam mir im wesentlichen nur darauf an, zu zeigen, wie sich das gesetzmäßige Abnehmen der Häufigkeit hoher Frequenzen in manchen Fällen verstehen läßt.

A. Byk (Berlin), Das Theorem der übereinstimmenden Zustände und die Quantentheorie der Gase und Flüssigkeiten.

Die Sonderstellung der Substanzen mit tiefer kritischer Temperatur gegenüber dem Theorem der übereinstimmenden Zustände bzw. dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit, der molekularmechanischen Grundlage des Theorems, führt zu der Frage, ob das Ähnlichkeitsprinzip mit der Quantentheorie überhaupt verträglich sei. Das ist nicht der Fall, und von der Planckschen Strukturtheorie des Phasenraumes aus kommt man zu einer die Körper mit tiefer kritischer Temperatur berücksichtigenden Verallgemeinerung des klassischen Theorems, einem Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände. Dieses bezieht sich nicht wie das klassische nur auf den Volumkoeffizienten der freien Energie, die Zustandsgleichung, sondern auf die freie Energie selbst und umfaßt daher im Gegensatz zum klassischen Theorem auch die Entropie. Das klassische Theorem erscheint dabei als Grenzfall für Substanzen mit hoher kritischer Temperatur.

Nach dem Quantentheorem der übereinstimmenden Zustände erhält die reduzierte freie Energie die Form einer universellen Funktion f des reduzierten Volumens, der reduzierten Temperatur und des reduzierten Wirkungsquantums:

$$\frac{F/N}{k\mathfrak{b}_0} = (\varphi, \mathfrak{b}, \tau).$$

Dabei ist F die freie Energie pro Mol, N die Anzahl wahrer Moleküle im Mol, k die molekulare Gaskonstante, $\varphi = \frac{v/N}{\varphi_0/N}$ das reduzierte Volumen, v das Molvolumen, φ_0 das kritische Molvolumen, $\mathfrak{b} = \frac{T}{\mathfrak{b}_0}$ die reduzierte, T die absolute, $\mathfrak{b}_0$ die kritische Temperatur.

Als individueller Parameter tritt hier das auf das spezifische Maßsystem der einzelnen Substanz reduzierte Plancksche Wirkungsquantam

$$\tau = \frac{h}{m_0^{1/2}\left(\frac{\varphi_0}{N}\right)^{1/3}(k\mathfrak{b}_0)^{1/2}},$$

(h absolutes Plancksches Wirkungsquantum, m_0 Molekülmasse) auf.

Die Theorie wird zunächst auf die Gleichungen des Sättigungszustandes angewandt. Die Dampfdruckgleichungen von van der Waals und von Nernst, die Regel der geraden Mittellinie der Dampf- und Flüssigkeitsdichten von Cailletet und Mathias sowie der kritische Koeffizient lassen sich in Form universeller Funktionen der reduzierten Temperatur, des reduzierten Volumens und des reduzierten Wirkungsquantums darstellen, in die τ in der Form

$$\alpha + \beta\frac{\delta\tau}{e^{\delta\tau} - 1}$$

eingeht (α, β, δ universelle Konstante). Die erhaltenen Beziehungen werden im einzelnen zur quantentheoretischen Berechnung von Siedepunkten bei Atmosphärendruck sowie der zugehörigen Flüssigkeits- und Dampfvolumina benutzt. Es wird auf eine Reihe weiterer Anwendungen der entwickelten Methode der Quantenthermodynamik hingewiesen.

Léon Schames (Frankfurt a. M.), Allgemeine Verbesserung der Zustandsgleichung; spezielle Zustandsgleichung für Wasserstoff.

Die wesentlichen bisherigen Verbesserungen der van der Waalsschen Zustandsgleichung

$$(v-b)\left(p + \frac{a}{v^2}\right) = RT \tag{1}$$

bestehen darin, daß 1. die Volumkorrektion b, 2. die Attraktionsgröße a als Funktion des Zustands aufgefaßt werden. Die theoretischen Versuche, dies zu tun, beruhen zum größten Teil auf der schon von van der Waals benutzten Voraussetzung, daß die Moleküle vollkommen starre Kugeln sind, d. h. also, daß b nur Volumfunktion ist, und zwar als Reihe entwickelt

$$b = b_A\left[1 + b_1\frac{b_A}{v} + b_2\left(\frac{b_A}{v}\right)^2 + \ldots\right], \tag{2}$$

wobei der Index A den Avogadroschen Zustand kennzeichnet. Die Voraussetzung der Starrheit ist nun sicher in Wirklichkeit nicht streng erfüllt, wie schon das Bild vom elektrischen Aufbau der Materie, als auch die Erfahrung bei den höchsten reduzierten Temperaturen (He) zeigen. Trotzdem darf diese Voraussetzung für das im allgemeinen der Erfahrung zugängliche Zustandsgebiet als genügend realisiert betrachtet werden; wir basieren deshalb im folgenden auf ihr, müssen dann aber die Zustände extrem hoher Temperaturen gesondert diskutieren.

§ 1. Die bisherige Theorie der Stoßfunktion $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \frac{v}{v-b} = 1 + \varphi_1\frac{b_A}{v} + \varphi_2\left(\frac{b_A}{v}\right)^2 + \varphi_3\left(\frac{b_A}{v}\right)^3 + \ldots \tag{2a}$$

ermöglichte es, die angeschriebenen Koeffizienten von (2a) bzw. (2) zu berechnen, und zwar ergab sich

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_1 = 1 & \\ \varphi_2 = \frac{5}{8} & b_1 = -\frac{3}{8} \\ \varphi_3 = 0{,}2868 & b_2 = 0{,}0369 \end{array}\right\} \quad (2\text{b})$$

Weitere Koeffizienten so zu berechnen, stieß auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Wir wollen auf einem anderen Weg zwei weitere Koeffizienten berechnen, wobei wir dann die unendlichen Reihen als nach diesen Gliedern abgebrochen ansehen. Zu diesem Zwecke bedenken wir, daß für die dichtmöglichste Lagerung starrer Kugeln ein Grenzvolumen bei

$$\frac{v}{b_A} = \frac{b}{b_A} = 0{,}338$$

folgt und daß hierbei sein muß

$$\frac{db}{dv} = 1. \qquad (3)$$

Die vervollkommnete Reihe muß diesen beiden Bedingungen genügen, so daß wir hieraus zwei weitere Koeffizienten berechnen können; wir erhalten so

$$\left.\begin{array}{ll} b_3 = 0{,}0144 & \varphi_4 = 0{,}0750, \\ b_4 = -0{,}0032 & \varphi_5 = 0{,}0020. \end{array}\right\} \quad (2\text{c})$$

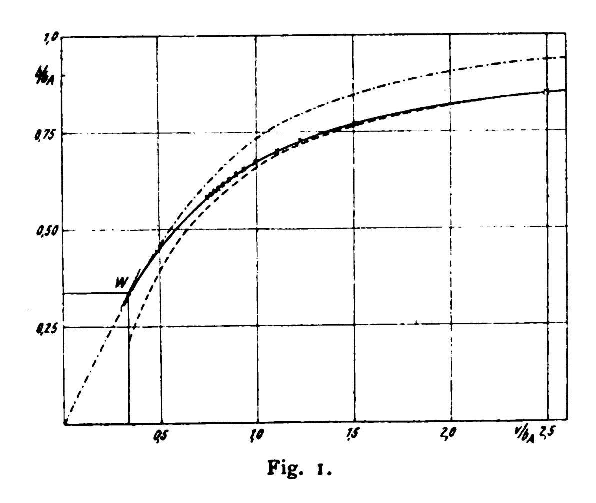


Fig. 1.

In Fig. 1 haben wir gestrichelt die Abhängigkeit $\frac{b}{b_A}$ von $\frac{v}{b_A}$ mit den alten Koeffizienten (2b) gezeichnet und ausgezogen die Kurve, die sich unter Hinzunahme der neuen (2c) ergibt. Für H_2, bei dem die größte bisher erreichte Dichte (Amagat) der Wert $\frac{v}{b_A} \sim 1{,}36$ entspricht, bedingen die neuen Glieder eine nur unwesentliche Differenz; für N_2 hingegen zeigen die aus den Amagatschen Messungen berechneten Werte (Kreuze) deutlich die durch die neuen Glieder erzielte Verbesserung. Becker[1]) hat die gleichen Werte unlängst durch eine empirische Funktion dargestellt. Er setzte für die Stoßfunktion

$$\varphi(v) = 1 + \frac{k}{v} e^{\frac{k}{v}}, \qquad (4)$$

ohne auf die physikalische Bedeutung von k einzugehen. Der Vergleich von (4) mit (2a) zeigt sofort, daß k mit b_A identisch wird, und daß nach Becker die Stoßkoeffizienten wären: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = \frac{1}{2}$, $\varphi_4 = \frac{1}{6}$ usw. Die Beckersche Funktion (in Fig. 1 strichpunktiert) genügt also nicht, sie würde außerdem zum Grenzvolumen Null führen.

§ 2. Wir kommen jetzt zur Behandlung der Attraktionsgröße a und wollen zuerst ihren Zusammenhang mit der inneren Energie U diskutieren. Definieren wir als thermodynamische Attraktion $\hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{\partial U}{\partial v} v^2 = \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right] v^2, \qquad (5)$$

so hatten wir vor kurzem thermodynamisch gezeigt[1]), daß dann

$$a = T \int_\infty \hat{a}\, d\left(\frac{1}{T}\right); \qquad (6)$$

wir müssen nachträglich darauf hinweisen, daß das nur unter Voraussetzung der Starrheit gilt. Dann ist also sowohl für $T = 0$ als auch für $T = \infty$ a mit $\hat{a}$ identisch.

Die Temperaturabhängigkeit von a bzw. $\hat{a}$ im Avogadroschen Zustand steht in einfachem Zusammenhang mit derjenigen des II. Virialkoeffizienten B, nämlich:

$$B = b_A - \frac{a_A}{RT}. \qquad (7)$$

$$\hat{a}_A = -R \frac{\partial B}{\partial 1/T}. \qquad (8)$$

Außer unserer Voraussetzung der mechanischen Starrheit hat Keesom[2]) die weitere gemacht, daß die Moleküle elektrisch starre Quadrupole sind und er hat für solche die Temperaturabhängigkeit von B als Reihe abgeleitet. Die hieraus ermittelten Werte von a_A und $\hat{a}_A$ haben wir in Fig. 2 gestrichelt eingetragen. Für tiefe Temperaturen konvergiert diese Reihe nur sehr langsam. Für hohe Temperaturen wird zuerst die Voraussetzung der elektrischen Starrheit hinfällig, die Quadrupole werden vielmehr, worauf Debye[3]) zuerst hinwies, elektrisch polarisierbar, so daß ihre gegenseitige Anziehung größer als nach Keesom wird. Für höchste Temperaturen wird dann weiter — wir wir einleitend schon bemerkten —

1) Becker, Zeitschr. f. Phys. 4, 393, 1921.

1) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. 3, 255, 1920.

2) Zusammenfassung von W. H. Keesom, diese Zeitschr. 22, 129, 1921.

3) P. Debye, diese Zeitschr. 21, 178, 1920.

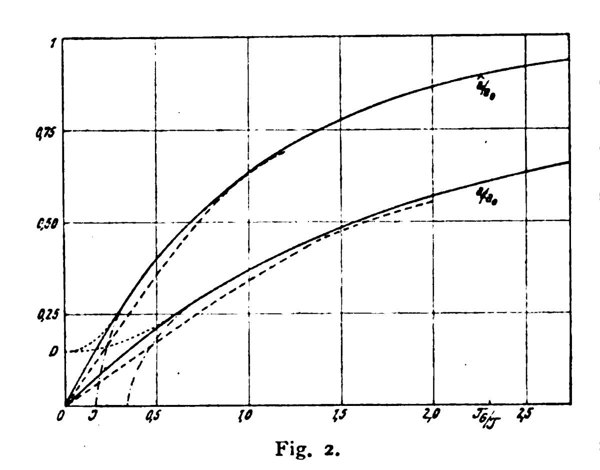


Fig. 2.

auch die Voraussetzung der mechanischen Starrheit hinfällig, so daß der einfache Zusammenhang (6) zwischen a und $\hat{a}$ nicht mehr gilt. Während ersteres im Sinne Debyes einen positiven Grenzwert etwa bei D erreicht, geht letzteres bei der Jouletemperatur J durch Null und wird für noch höhere Temperaturen negativ. Sehen wir von den höchsten Temperaturen ab, bei denen also unsere Voraussetzung nicht mehr gilt, so zeigt sich, daß die ausgezogenen empirischen Funktionen

$$\frac{\hat{a}_A}{a_0} = \hat{a} = 1 - e^{-\frac{T_G}{T}} \tag{9}$$

und daraus nach (6)

$$\frac{a_A}{a_0} = a = 1 - \hat{a}\,\frac{T}{T_G} \tag{10}$$

sich gut zur Darstellung eignen, was wir später an dem mit ihnen berechneten II. Virialkoeffizienten des H_2 bestätigt finden.

Bei der Gay-Lussac-Temperatur gilt thermodynamisch die Bedingung $\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{B}{T}$, also

$$\hat{a}_G = RT_G B_G. \tag{11}$$

Für unsere Funktion folgt dann

$$a_0 = RT_G b_A. \tag{12}$$

§ 3. Die Darstellung von b als Volumfunktion und von a_A als Temperaturfunktion genügt nicht; obwohl das schon lange bekannt[1]) ist, wird es noch häufig übersehen. Man muß vielmehr a auch noch als Volumfunktion darstellen; es ist dafür von verschiedenen Seiten verschiedene theoretische Begründung versucht worden[2]). Wir wollen hier dieser Frage empirisch näher zu kommen suchen und zwar wollen wir von der Funktion für a bzw. $\hat{a}$ verlangen, daß sie 1. die Kurve

$$\hat{a} = 0, \tag{13}$$

das ist die V. charakteristische Kurve[1]), auf der Gleichgewicht besteht zwischen den anziehenden Kräften einerseits und den abstoßenden Kräften und Temperaturbewegung andererseits und 2. eine möglichst ausgedehnte Isotherme für $\hat{a}$ richtig wiedergibt.

Die V. charakteristische Kurve geht allgemein durch den Punkt $p = 0$, $T = 0$, $v = v_0$. Für H_2 ist außerdem der Punkt für 0^0 C aus den Amagatschen Messungen gut bekannt. Beiden genügt die empirische Beziehung

$$\hat{\alpha} - \frac{v_0}{v} = 0 \tag{13a}$$

($\hat{\alpha}$ die durch (9) gegebene Temperaturfunktion).

Die $\hat{a}$-Isotherme für 0^0 C finden wir dann befriedigend dargestellt durch

$$\hat{a} = a_0\left(\hat{\alpha} - \frac{v_0}{v}\right)\varphi(v), \tag{14}$$

wo $\varphi_{(v)}$ nach (2a) gegeben. Fig. 3 zeigt uns die so berechnete Isotherme und die einzelnen von Amagat gegebenen Werte (Kreise). (Die gestrichelten Parallelen stellen (13a) geometrisch dar.) In Fig. 3 haben wir weiter auch die kontinuierliche Isotherme für $T = 0$ nach (14) eingezeichnet; diese muß drei Bedingungen ge-

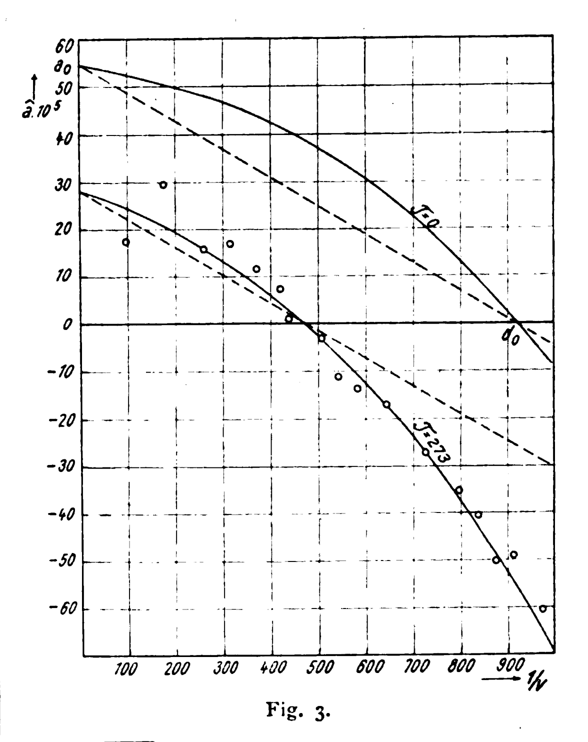


Fig. 3.

1) H. Happel, Ann. d. Phys. **13**, 390, 1904.

2) Ein solch einfacher Zusammenhang zwischen der Volumenfunktion a und den Abstoßungskräften zwischen den Molekülen, wie ich ihn früher (Zeitschr. f. Phys. **2**, 376, 1920) und dann auch Becker (l. c.) annahmen, ist für den gasflüssigen Zustand — im Gegensatz zum Kristall (Born) — nicht aufrecht zu erhalten.

1) L. Schames, Ann. d. Phys. **57**, 321, 1918.

T	T_G/T	$\hat{\alpha}$	α	B. 10^5 ber.	B. 10^5 emp.*)	C. 10^8 ber.	C. 10^8 emp.*)
55,68	3,54	0,971	0,726	— 118,7	— 120,0	180	174
60,29	3,27	0,962	0,706	— 99,0	— 100,8	173	163
68,39	2,88	0,944	0,6725	— 70,7	— 69,2	162	135,5
77,82	2,53	0,921	0,636	— 46,0	— 43,2	150	111
90,28	2,182	0,8875	0,594	— 23,3	— 24,0	141	118
108,95	1,807	0,8855	0,537	2,15	1,84	128,5	104
133,21	1,480	0,772	0,479	22,1	22,9	117	83
169,52	1,162	0,686	0,410	39,6	39,3	104,5	84,5
273	0,721	0,513	0,289	59,9	58,0 61 (A) 62 (H)	82,0	— 99 (A) 70,5 (H)
373	0,5285	0,410	0,224	66,6	63,1 68 (A) 69,3 (H)	72,3	— 85 (A) 52,5 (H)
473	0,416	0,340	0,181	69,9	71 (A)	65,6	78 (A)

*) Die empirischen Daten ohne Bezeichnung sind die von Kamerlingh-Onnes und Braak, (A) bezeichnet diejenigen Amagats, (H) diejenigen Holborns.

nügen: 1. das richtige Grenzvolumen v_0 geben, was ja durch (13) gewährleistet ist, 2. muß das Integral $[\int_0^{d_0} a\,d d]_{T=0} = L_0$ sein, das ist der Fall, denn aus (14) folgt für das Integral 0,646 $a_0 d_0$, während aus dem Dampfdruck[1]) für

$$L_0 = 0{,}640\, a_0 d_0$$

folgt, 3. müßte ihre Neigung im Punkte d_0 die Kompressibilität der Flüssigkeit ergeben. Diese ist aber noch nicht gemessen.

In Anbetracht, daß die a_0-Kurve für die übrigen Substanzen nicht so einfach ist[2]), ist es zweifelhaft, ob die Kompressibilität richtig wiedergegeben wird, immerhin ist es aber möglich, daß für He und H_2 (für die auch v_0 wesentlich kleiner ist, vgl. die Tabelle im folgenden Vortrag) der Verlauf von a_0 wesentlich einfacher als für die übrigen Substanzen ist.

Aus (14) und (6) folgt

$$a = a_0\left(\alpha - \frac{v_0}{v}\right)\varphi(v). \qquad (15)$$

Die Zustandsgleichung für H_2 nimmt dann nach kurzer Rechnung die einfache Form an:

$$pv\left(1 - \frac{b}{v}\right) + \frac{a_0}{v}\left(\alpha - \frac{v_0}{v}\right) = RT, \qquad (16)$$

worin also b Volumen, α Temperaturfunktion ist.

§ 4. Aus (16) folgen für die Virialkoeffizienten der Reihenentwicklung

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^3} + \dots \qquad (17)$$

1) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. 1, 198, 1920.
2) L. Schames, Zeitschr. f. Phys. 2, 376, 1920.

unter Berücksichtigung von (12)

$$\left.\begin{aligned} B &= b_A\left(\varphi_1 - \frac{T_G}{T}\alpha\right), \\ C &= b_A^2\left[\varphi_2 + \left(\frac{v_0}{b_A} - \alpha\varphi_1\right)\frac{T_G}{T}\right], \\ D &= b_A^3\left[\varphi_3 + \left(\varphi_1\frac{v_0}{b_A} - \alpha\varphi_2\right)\frac{T_G}{T}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Für T_G hatte Dalton[1]) 200,6° absolut abgeleitet, ich selbst[2]) hatte 194,5° hauptsächlich aus Obszewskis Messungen berechnet und denselben Wert hat Keesom (l. c.) erhalten. Berücksichtigt man jedoch noch die neuen Isothermenbestimmungen von Holborn[3]), so folgt als Mittelwert ein etwas höherer Wert $T_G \sim 197°$, wobei $B_G = 47{,}8 \cdot 10^{-5}$. Mittels (9), (11) und (12) folgt dann $b_A = 75{,}6 \cdot 10^{-5}$.

Mit diesen Werten haben wir nun die Virialkoeffizienten berechnet; wie die Tabelle zeigt, werden der II. und III. Virialkoeffizient genügend genau wiedergegeben.

Der III. Virialkoeffizient liegt durchschnittlich etwas höher als der — übrigens nicht regelmäßig verlaufende — von Kamerlingh-Onnes und Braak; das hat darin seinen Grund, daß Kamerlingh-Onnes aus rein empirischen Gründen D immer Null setzt. Das nach (18) berechnete D wird allerdings größer als mit den Messungen vereinbar ist. Dies kann in der eventuellen Ungenauigkeit der empirischen Funktion für a begründet sein. Da diese Abweichung bei tieferen Temperaturen zunimmt, könnte man

1) J. P. Dalton, Leiden Comm. Nr. 109a, 1909.
2) L. Schames, Elster- und Geitel-Festschr. 1915, S. 287.
3) L. Holborn, Ann. d. Phys. 63, 674, 1920.

auch daran denken, daß sich hier ein Quanteneffekt bemerkbar macht, dem man durch Einführung einer Variablen an Stelle von R Rechnung tragen könnte. Wir hoffen hierauf später zurückzukommen.

E. Reichenbächer (Wilhelmshaven), Massenunabhängige Schwere-Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die allg. Rel.-Th. hat zuerst den Ausspruch gewagt, daß die Maße des Raumes und der Zeit von der in der Welt vorhandenen Materie und ihrer Bewegung abhängig sind: „Alle Massen der Welt zusammen bestimmen das $g_{\mu\nu}$-Feld" (des Raumzeitkontinuums), „und dieses ist, von einem Weltkörper aus beurteilt, ein anderes als von einem zweiten aus beurteilt, weil ja auch die Bewegungen jener das $g_{\mu\nu}$-Feld erzeugenden Massen, von beiden Systemen aus beschrieben, höchst verschieden sind" (A. Einstein, Naturwiss. **8**, H. 51, S. 1011, 1920). Es liegt nun die Frage nahe, ob wir nicht durch die Annahme, daß „die aus dieser Voraussetzung fließenden $g_{\mu\nu}$ das Gravitationsfeld beschreiben", in Widerspruch gebracht werden mit der bisherigen Auffassung, daß die Gravitationsfelder an sie „erzeugende" Massen geknüpft sind ähnlich wie die elektromagnetischen Felder an elektrisch geladene Teilchen und, wenn dieser Widerspruch bestehen sollte, wofür wir uns zu entscheiden haben.

Zunächst kann es keinem Zweifel unterworfen sein, daß es in Gedanken möglich ist, ein Weltbild im Sinne der allg. Rel.-Th. zu entwerfen, das ein von „erzeugenden" Massen unabhängiges Gravitationsfeld enthält. Das bekannteste Beispiel eines solchen ist das System der gleichförmigen Rotation in der Minkowskiwelt, wie es insbesondere von Kottler aufgestellt und durchgerechnet worden ist (Über d. physik. Grundlagen d. Einsteinschen Gravit.-Th., Ann. d. Phys. 56, S. 401, 1918, Abschn. 37 u. 38. — Rotierende Bezugssyst. in einer Minkowskischen Welt, Phys. Ztschr. 22, S. 274, 1921). In diesem Felde treten völlig massenunabhängige Wirkungen, nämlich die bekannten Coriolisschen und Zentrifugalkräfte auf, wie es ja nach der Rel.-Th. auch nicht anders sein kann. Von deren oben gekennzeichnetem Standpunkte aus aber müssen nun diese Wirkungen als Gravitationswirkungen angesehen werden, obwohl von felderzeugenden Massen gar nicht die Rede ist; die Welt sollte doch gerade rein Minkowskisch bleiben.

Ein noch einfacheres Beispiel eines gedachten massenunabhängigen Gravitationsfeldes innerhalb der Minkowskiwelt bietet aber schon das System der — rein gleichförmigen Bewegung dar, wenn man nur, wie das nach der allg. Rel.-Th. nicht nur zulässig, sondern sogar geboten ist, im Raum ein ganz beliebiges, also nicht notwendig Kartesisches Koordinatensystem zugrunde legt. In einem solchen System verschwinden natürlich die Einsteinschen Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes nicht mehr sämtlich, und es treten dann natürlich auch, wie es die Rel.-Th. verlangen muß, „Kräfte" auf, die auf der Abweichung der Parameterlinien von der Geraden beruhen und selbstverständlich völlig massenunabhängig sind.

Allgemein kann man sagen, daß innerhalb der Minkowskischen oder irgendeiner anderen Raumzeitmannigfaltigkeit die auftretenden Kräfte je nach der Wahl des Koordinatensystems sich ändern, daher notwendigerweise nicht von etwa vorhandenen Massen allein abhängig sind. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, von den nur gedachten Mannigfaltigkeiten zu den Verhältnissen der wirklichen Welt überzugehen. In dieser würde man demnach, wenn man auch einmal annimmt, daß die $g_{\mu\nu}$ durch die in der Welt vorhandenen Massen bestimmt sind, sie doch durch die völlig willkürliche Wahl des Koordinatensystems wieder ändern können. Ist diese Änderung nun nicht auch völlig willkürlich, da infolge der Transformation der Koordinaten nur ein dem ursprünglichen äquivalentes $g_{\mu\nu}$-System zulässig ist, so ist man doch berechtigt zu sagen, daß es durch die in der Welt vorhandenen Massen nicht ausschließlich bestimmt, sondern nur beeinflußt ist.

Worin soll sich nun aber deren Einfluß auf die Raum- und Zeitmaße, also auf die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors äußern? Dieser Einfluß ist die Grundlage der 4-dimensionalen Gravitationstheorie; aber man kann ihn in zweierlei Weise auffassen, und diese Auffassungsmöglichkeiten sind leider nicht immer auseinandergehalten worden.

Einmal kann man das Hauptgewicht auf den Bewegungszustand der Materie legen; diese Auffassung liegt z. B. auch der von Mach übernommenen Ansicht zugrunde, daß die Rotation keine absolute Bewegung sei, sondern nur relativ zu Bezugskörpern in Betracht käme, als welche die Fixsterne, von deren gegenseitiger Bewegung abgesehen wird, angenommen werden. Diese Beziehung auf das Trägheitssystem der Sterne identifiziert man

mit der Gravitation. Das „Gravitationsfeld“ der Fixsterne ist aber im Grunde genommen nichts als ein bevorzugtes Koordinatensystem, in dem diese ruhen (oder sich gleichförmig bewegen). Die Wahl irgendeines anderen Systems hat dann das Auftreten von „Feldkomponenten“ $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ zur Folge und löst demnach „Gravitationswirkungen“ aus, die wenigstens indirekt auf jene „felderzeugenden“ Massen zurückgeführt werden.

Es muß in die Augen fallen, daß damit nach der allg. Rel.-Th. die Existenz der fernen Massen, wohlgemerkt nur die Existenz, nicht die Größe, eine notwendige Voraussetzung für die Bestimmtheit der Gestalt eines flüssigen Weltkörpers wird. Diese würde völlig unbestimmt werden, wenn die fernen Massen fehlen, da in einer solchen Welt jedes Koordinatensystem gleichberechtigt wäre und der Begriff der Rotation vieldeutig würde. Dies Bedenken hat Kopff veranlaßt (Naturwiss. **9**, H. 1, S. 9, 1921), die Einsteinschen Feldgleichungen ohne das kosmologische Glied als mit der Rel.-Th. unverträglich zu verwerfen und die Hinzufügung dieses Gliedes als notwendige Vorbedingung für diese Theorie zu bezeichnen. Das trifft aber nicht den Kernpunkt der Sache, da auch bei Annahme der Gleichungen 2. Art die Existenz ferner Massen nicht notwendig ist, sondern einer besonderen unabhängigen Annahme bedarf genau so wie bei denen 1. Art. Dies Vorhandensein ferner Massen ist demnach die einzige notwendige Voraussetzung für die Existenz von „Gravitationsfeldern“ nach dieser Auffassung; aber diese Felder sind nichts als bevorzugte Koordinatensysteme, d. h. eben Trägheitssysteme. In anderen Systemen, vor allem in denen, die gegenüber den ruhend vorausgesetzten Fixsternen rotieren — eine Voraussetzung, die übrigens in voller Genauigkeit, nicht nur annähernd, erfüllt sein müßte —, treten dann die bekannten Zentrifugalkräfte auf, was ganz natürlich ist, da ihr Nichtvorhandensein der Rel.-Th. widerspräche. Bei der Aufstellung dieser Systeme übersieht man aber meistens, daß es sich nicht um sogenannte Ruhsysteme handeln kann, da die Schar der Weltlinien gleichförmiger Umdrehung mit derselben Winkelgeschwindigkeit keine orthogonalen Trajektorienräume zuläßt, oder aber man sieht von der bloßen Transformation ab, indem man die Raumzeitmannigfaltigkeit selbst mit dem Bezugssystem ändert. Daher kann man dieser ersten Auffassung des Masseneinflusses auf das $g_{\mu\nu}$-Feld nicht ohne schwere Bedenken gegenüberstehen.

Aber hiermit ist auch in der Einsteinschen Theorie der Einfluß der Massen auf das Feld nicht erschöpft; das zeigt die Behandlung des Feldes des ruhenden Massenpunktes, wo ganz wie bei Newton eine massenproportionale Wirkung eintritt. Diese ist aber, was meines Erachtens nicht genug hervorgehoben ist, hervorgebracht von einer durch die Masse erzeugten Veränderung oder Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit. Ohne sie ist es unnötig, das Minkowskikontinuum aufzugeben; ohne sie gäbe es aber auch keine Erklärung des Planetenumlaufs. Auf ihr beruht auch die Mitführung des Feldes in der Thirringschen Lösung des Rotationsproblems, und es würde meiner Ansicht nach irreführend sein, auf diese doch immerhin recht kleine, mit der geringen Vorrückung der Planetenperihele durchaus wesensgleiche Wirkung die Behauptung begründen zu wollen, daß die Fixsterne die Drehungsebene des Foucaultschen Pendels mitnähmen; denn die Winkelgeschwindigkeiten würden zu ungleich.

Nun ist es klar, daß die spezifisch Newtonschen Wirkungen nur auf dieser zweiten Funktion der Massen beruhen, während die erste nur zu den sogenannten Trägheitskräften führt. Die Erklärung der Newtonschen Kräfte ist aber erst möglich, wenn man die Möglichkeit der Abänderung der Raumzeitmannigfaltigkeit durch die Massen zuläßt. Das ist aber ein der Rel.-Th. eigentlich durchaus fremder Begriff, und man kommt zu ihm nur, wenn man den Begriff der allgemeinen Kovarianz weiter auffaßt, als ihm eigentlich zukommt, daß nämlich die $g_{\mu\nu}$ nicht nur in äquivalenter Weise, sondern ganz beliebig geändert werden können, so daß neben die Koordinatentransformation mit ihren Trägheitswirkungen auch die Verzerrung des Kontinuums mit ihren Newtonschen Wirkungen tritt. Weshalb wollen wir nun nicht nur diese, sondern auch jene als Gravitation bezeichnen? Die Behauptung der allg. Rel.-Th., Schwere und Trägheit wären dasselbe, wird nur der einen Seite der Tatsachen gerecht, nämlich dem Verhalten der Massen unter Einwirkung des Feldes; sie verstößt aber gegen die andere Seite, da sie nichts über die Einwirkung der Massen auf das Feld aussagt.

Selbstverständlich setzt der Gedanke, daß die Massen das Feld verzerren, um die Newtonschen Wirkungen hervorzubringen, voraus, daß sie nicht nur passiv den Angriffen des Feldes unterliegen, sondern auch ihrerseits aktiv dieses beeinflussen. Damit geht man aber über die reine Feldtheorie hinaus, wie das auch von Weyl in seiner kürzlichen Veröffentlichung „Feld und Materie“ (Ann. d. Phys. **65**, S. 541, 1921) betont wird. Die Massen können

nicht mehr nur Singularitäten des Feldes sein, sondern müssen etwas neben ihm Bestehendes, gewissermaßen mit ihm völlig Gleichberechtigtes sein. Faßt man sie nur als Stellen des Feldes auf, die sich durch abweichende Eigenschaften, z. B. in der Krümmung, von den anderen unterscheiden, so sieht man nicht recht ein, weshalb ihnen die beherrschende Stellung zukommen soll, die Einstein ihnen in seinen Bezugskörpern zuweist. Vor allem dann nicht, wenn man mit Mie sie von äußerst feinen, sich bis ins Unendliche erstreckenden Atmosphären umgeben sein läßt, in denen die materiellen Eigenschaften, d. h. Masse und Ladung, allmählich abklingen. Wie es möglich ist, die Massen außerhalb des Feldes zu stellen, glaube ich in meiner Arbeit über „Schwere und Trägheit" (Phys. Ztschr. 22, H. 8, S. 234, 1921) gezeigt zu haben, wo ich die Auffassung vertrat, daß gerade der Einsteinsche Ansatz für das Feld eines Massenpunktes uns dazu zwingt, das Feld in einer kleinen endlichen Entfernung von diesem aufhören zu lassen, so daß es also hier seinen einfachen Zusammenhang verliert, also gewissermaßen ein Loch bekommt. Ich freue mich, diese meine Ansicht vom Wesen der Materie von Herrn Weyl aufgegriffen, unterstützt und weitergeführt zu sehen.

Von dem so gekennzeichneten Standpunkt aus sind demnach die beiden Arten von Wirkungen, nämlich die der Trägheit und die der Newtonschen Gravitation, deutlich verschieden. Diesem Unterschiede aber wird die allg. Rel.-Th. nicht gerecht; ja es ist überhaupt nicht recht einzusehen, wie sie dazu kommt, die Newtonschen Felder zu erklären. Sie erfaßt das Wesen der Gravitation nicht bis in die letzten Konsequenzen; trotzdem ist sie natürlich in sich nicht ohne Berechtigung und Wert. Ob allerdings auch alle Einzelheiten der Einsteinschen Theorie aufrecht erhalten werden können, erscheint mir zweifelhaft, da insbesondere auch dann „Feldkomponenten" in ihr auftreten, wenn keine Newtonschen Kräfte vorhanden sind.

Diskussion.

Frank: Massenunabhängige Felder treten auch in der Newtonschen Theorie auf. Das homogene Schwerefeld kann nicht durch im Endlichen liegende Massen erklärt werden.

Reichenbächer: Dies homogene Gravitationsfeld ist zu gleicher Zeit das einzige, das mit einem Trägheitsfeld, nämlich mit dem der gleichmäßig beschleunigten Translation übereinstimmt. Die wirklich vorhandenen Schwerefelder sind sämtlich anderer Art.

H. Fricke (Berlin), Ein neuer Weg zur Aufklärung des Äther- und Schwerkraftproblems.

Der leitende Gedanke meiner Arbeiten über Äther und Schwerkraft war die Überzeugung, daß die vielen in neuerer Zeit gegen einen fühlbaren, substantiellen Äther erhobenen Einwände einer sachlichen Kritik nicht standhalten. Die ausführliche Begründung dieses Standpunktes habe ich in meinen am Schluß angeführten Arbeiten gegeben. Die angeblichen Schwierigkeiten rühren meines Erachtens davon her, daß man im Anschluß an die Elektronentheorie von Lorentz die beiden Begriffe „Kraftfeld" und „Äther" voneinander getrennt hat. Man führte neben den fühlbaren Kraftfeldern, die nach der älteren Theorie als Ätherwirbelfelder verwickelter Bauart aufgefaßt wurden, noch einen „absolut ruhenden" Äther ein. Eine solche Vorstellung lag der alten Äthertheorie durchaus fern und mußte naturgemäß zu Widersprüchen führen, die zu Unrecht dem Äther zur Last gelegt wurden.

Die Vorstellung des substantiellen, fühlbaren und mechanisch wirksamen Äthers erscheint mir als eine für die Physik unentbehrliche Arbeitshypothese. Ob man dabei die atomistische Form einer kinetischen Gastheorie bevorzugt, wie es L. Zehnder tut, oder die Atome nach der Ätherwirbeltheorie wiederum als Wirbelbildungen im kontinuierlichen Äther auffaßt, wie ich es für vorteilhafter halte, ist zunächst von geringerer Bedeutung. Die praktische Bedeutung der Äthervorstellung läßt sich besonders am Schwerkraftproblem zeigen.

Versucht man die abstrakte Theorie Newtons mit anschaulichen Vorstellungen auszufüllen und sich von den Schwerkraftlinien ein Modell zu machen, so ergeben sich dafür zwei Möglichkeiten. Einmal kann man die Kraftlinien als gespannte Federn ansehen, ähnlich wie es Faraday getan hat. Zweitens kann man sie als die Wirkung eines feinen, sehr durchdringenden „Ätherwindes" auffassen. Beide Wege sind vielfach beschritten worden. Die erste Vorstellung sieht in der Schwerkraft eine ruhende, statische Spannung ohne Arbeitsleistung. Sie entspricht den mathematischen Darstellungen Newtons und den Anschauungen, die Faraday und Lorentz über das elektrische Feld entwickelt haben. — Die zweite Vorstellung läßt sich sowohl an die kinetische Gastheorie des Äthers anschließen wie an die Ätherwirbeltheorie; sie liegt der Stoßtheorie des Le Sage (1724—1803) sowie vielen neueren Theorien zugrunde.

Es ist nun bisher wenig beachtet worden, daß die beiden Vorstellungen bei ihrer Durch-

führung zu ganz verschiedenartigen Folgerungen führen, die leicht zu einer Entscheidung benutzt werden können. Wird die Schwerkraft, wie man bei der Vorstellung zweiter Art annimmt, durch einen Ätherwind oder Ätherstoß hervorgerufen, so muß sie mit einer dauernden Energieabsorption durch die schweren Massen verbunden sein. Maxwell glaubte aus dieser Folgerung einen vernichtenden Einwand gegen die Theorie von Le Sage ableiten zu können. Wie jedoch Drude auf dem Braunschweiger Naturforschertage („Über Fernwirkungen", Ann. d. Phys. **62**, XLff., 1897) ausführte, ergibt gerade diese Energieabsorption eine vortreffliche Erklärung für die sonst schwer verständliche Konstanz der Fixsterntemperaturen und die Herkunft der Sonnenwärme. Hierauf hat wohl als erster Leray 1869 hingewiesen (Compt. Rend. **69**, 615). Der Gedanke ist jedoch auch von anderer Seite weiter verfolgt worden, neuerdings auch von E. Wiechert. Es handelt sich hier um ein Problem, dessen Lösung die ganze Astrophysik — vielleicht sogar die ganze Physik — auf eine neue Grundlage stellen würde, das daher wohl eine größere Beachtung verdient, als ihm bisher zuteil geworden ist. Ich glaube nun hier einen neuen Angriffspunkt entdeckt zu haben in der eigentümlichen Proportionalität, die in unserm Planetensystem offensichtlich zwischen der Temperatur und der Schwerkraft besteht. Die Beziehung ergibt sich auf Grund der folgenden Berechnung. Die mittlere Oberflächentemperatur der Erde beträgt etwa 15° C oder 288° abs.; man kann nach Scheiner 88° davon als Wirkung der Sonnenstrahlung auffassen, so daß die Eigentemperatur der Erde mit 200° abs. anzusetzen wäre. Diese Zahl (— 73°) stimmt auch gut mit den in den höchsten Luftschichten gemessenen Temperaturen überein. Auf der Sonne ist die Schwerkraft rund 28 mal so groß, dort müßte also eine Temperatur von 5600° herrschen, eine Zahl, die der auf der Sonne wirklich beobachteten Temperatur (von etwa 6000°) überraschend nahe kommt. Für die Eigenwärme des Mondes ergibt diese Rechnung einen Wert, der dem absoluten Nullpunkt bis auf 32° nahe kommt, was ebenfalls mit der Beobachtung gut im Einklange steht. Auch für die übrigen Planeten ergeben sich plausible Werte, die zum Teil sogar bisher unerklärte Phänomene (wie das schneeweiße Aussehen der Venus) der Aufklärung zuzuführen scheinen.

Die vollständige theoretische Aufklärung der Proportionalität ist vielleicht nicht einfach; doch trifft der Einwand, Temperatur und Schwerkraft seien so verschiedenartige Begriffe, daß eine Beziehung zwischen ihnen ausgeschlossen erschiene, wohl nicht zu. Die Temperatur wird bekanntlich als Stoßenergie der ponderablen Materie aufgefaßt; die Schwerkraft ist vermutlich die Stoßenergie der Ätherteilchen (oder der „ultramundanen Korpuskeln" des Le Sage). Vom Standpunkt der Äthertheorie aus ist eine Beziehung daher recht wohl verständlich. Die Energie scheint im Schwerkraftfelde einen vollständigen Kreislauf auszuführen, indem sie als Schwerkraft vom Äther auf die Massen übertragen wird, von diesen aber als Wärme oder auch als Trägheitsstoß größerer Massen an den Äther zurückgegeben wird. Die Massen würden für die im umgebenden Raume vorhandenen Kräfte also in gleichem Maße „Quellen" wie „Senken" sein. Der Kraftfluß in den Kraftfeldern würde sich dann vermutlich als ein wirklicher Energiefluß auffassen lassen, gleichzeitig würden diese Erscheinungen auch als Strömung und Wirbelbewegung des inkompressiblen Äthers zu deuten sein. Die Kraftlinien wären also wirkliche Strömungslinien des Äthers, wenn auch ihre verwickelte Bauart vorläufig noch nicht erkennbar sein sollte.

Neuerdings sind von O. Wiener (Abh. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. **38**, H. 4) neben den gewöhnlichen Massen, die als „schwerig" oder „barisch" bezeichnet werden, noch „gegenschwerige" oder „antibarische" Massen im Raume angenommen worden. Ähnliche Vorschläge sind schon früher von Pearson und Föppl gemacht worden. Diese Frage scheint nun dadurch eine einfache Lösung zu finden, daß die Wechselwirkungen zwischen Masse und Raum oder Äther nach der hier entwickelten Vorstellung stets in zwei entgegengesetzten Richtungen erfolgt, so daß die gewöhnliche Masse einerseits als schwere, andererseits als träge Masse bereits im positiven und gleichzeitig im negativen Sinne in der Himmelsmechanik zur Wirkung gelangt. Die mittlere Massendichte könnte dann im Weltraum tatsächlich Null sein, und die gegen die Unendlichkeit der Welt erhobenen Einsprüche würden widerlegt sein.

Wenn im vorliegenden Falle die Schwerkraft ganz einfach als eine fühlbare, substantielle Kraftströmung gedeutet wird, so bedarf es einer Erklärung, warum Newtons übersinnliche Darstellung einer zeit- und widerstandslosen Kraft sich in der Rechnung so gut bewährt. Ich suche die Erklärung in dem Umstande, daß Newtons Formel nie allein auf die Schwerkraft, sondern stets nur auf das Zusammenwirken von Schwere und Trägheit angewendet ist. Man kann also ohne erhebliche Änderungen des bewährten mathematischen Gerüstes die unwahrscheinliche Grundanschauung Newtons über die Schwere durch Einführung substantieller

Widerstände ausfüllen, wenn man auch bei der Trägheitsbewegung nicht einen leeren Raum, sondern ein widerstehendes Mittel annimmt, das infolge seiner Eigenbewegung natürlich auch beschleunigend wirken kann.

Ein logischer Widerspruch scheint mir in der Annahme Newtons enthalten zu sein, daß die Schwerkraft Massen beschleunigt, durch die sie widerstandslos hindurchgehen soll. Eine Kraft kann aber nur da wirken, wo sie auf Widerstand stößt. Offenbar treten beim Zusammenwirken von Schwerkraft und Trägheitswiderstand auch fühlbare Widerstände, Spannungen und Reibungen auf, die jedoch von entgegengesetzt gleicher Größe sind und sich daher herausheben. Ein Beweis für diese Auffassung erblicke ich, wie hier nur angedeutet werden kann, in der täglichen Doppelschwingung des Barometers in den Tropen, der sogenannten Ebbe und Flut der Luft. Es handelt sich dabei um Kräfte, die die von den Gezeiten des Meeres her bekannten vielleicht um das hundertfache übertreffen und die Hauptursache von Wind und Wetter, sowie von anderen bisher unerklärten geophysikalischen Erscheinungen sein dürften. Da eine befriedigende Erklärung auf Grund der alten Theorie von Newton bisher nicht gegeben wurde, scheint hier ein zweiter wichtiger Angriffspunkt für eine Reform der Schwerkraftslehre gefunden worden zu sein. (Näher ausgeführt in der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift" 1921, Heft 7.)

Durch die Einführung eines fühlbaren Äthers wird die Schwerkraftslehre wieder mit der älteren Himmelsmechanik und Wirbeltheorie des Descartes verbunden, aus der im Jahre 1732 der Mathematiker Johann Bernoulli die Keplerschen Gesetze abgeleitet hat.

Die Ursache dafür, daß die noch zur Zeit von Hertz in hoher Blüte stehende Wirbeltheorie des Äthers so plötzlich verlassen worden ist, liegt meines Erachtens an einem leicht aufzuklärenden Mißverständnis. Man glaubte im Anschluß an die Theorie von Lorentz den Äther als einen absolut ruhenden festen Körper auffassen zu müssen, der sich an den in ihm stattfindenden Bewegungen der Materie in keiner Weise beteiligte. Eine solche Vorstellung bedeutete natürlich den Tod jeder anschaulichen Äthertheorie. Nach der Ätherwirbeltheorie muß man dagegen eine Beteiligung des Äthers an den Bewegungen der Massen annehmen. Es zeigt sich nun, daß dieselben Erscheinungen, die Lorentz zur Vorstellung vom absolut ruhenden Äther geführt haben, auch im Sinne einer Mitführungstheorie gedeutet werden können. Man braucht nämlich nur anzunehmen, daß die die Massen begleitenden Strömungsfelder sich gegenseitig durchdringen. Dann ist bei der Bewegung einer jeden Masse auf der Erde gleichzeitig noch der zur Erdmasse gehörige Äther (der vielleicht mit dem Schwerkraftfeld identisch ist) zu berücksichtigen, und da die auf der Erde bewegten Massen gegenüber der Erdmasse fast stets unendlich klein ist, scheint der Äther bei irdischen Versuchen zu ruhen. Diese Ruhe ist jedoch im Sinne von Hertz als eine Bestätigung der Mitführung des Äthers durch die ponderable Materie aufzufassen.

Neuerdings haben sich auch Gehrcke (Verh. d. D. Phys. Ges. 1918, S. 165; 1919, S. 67) und Lenard (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 17, H. 4) wieder für eine Mitführung des Äthers durch die Erde ausgesprochen. Danach stehen der Deutung des Michelsonschen Versuchs im Sinne der alten Äthertheorie keine Schwierigkeiten mehr entgegen. In der Zentralzeitung für Optik und Mechanik (42. Jahrg. Nr. 25 vom 1. 9. 1921, S. 337) hat Strehl darauf hingewiesen, daß alle optischen Versuche mit bewegten und ruhenden Lichtquellen sich vortrefflich mit der Ätherwirbeltheorie in Einklang bringen lassen.

Ich glaube daher, daß man zu der von Maxwell, Helmholtz, Hertz, Lord Kelvin u. a. ausgebauten Ätherwirbeltheorie im Prinzip zurückkehren muß. Die Elektronen sowie die Ätheratome der kinetischen Gastheorie lassen sich als Wirbel in einer inkompressiblen Flüssigkeit deuten, so daß die betreffenden Theorien nicht aufgegeben zu werden brauchen, sondern nur umfassenderen Gesichtspunkten untergeordnet werden. Wenn die alte Äthertheorie noch in mancher Hinsicht unbefriedigend war, so scheint mir das an einem Fehler in den Grundlagen zu liegen, nämlich an der Einführung des Begriffs der „reibungslosen" Flüssigkeit, in der sich Schichten widerstandslos gegeneinander verschieben sollen. In Wirklichkeit läßt sich der Begriff der Reibung oder Viskosität aus der Kontinuität ableiten, darf daher nicht vollständig vernachlässigt werden, wie auch Maxwell sein Äthermodell gerade aus Friktionsrädern aufgebaut hat. Man wird die Ursache für die scheinbar atomistische Struktur des Äthers daher nicht in Wirbelgebilden sehen dürfen, die von ihrer Umgebung getrennt sind und reibungslos in ihr gleiten, sondern wird gerade auf den bisher wenig beachteten Zusammenhang in den Strömungsgebilden das Augenmerk richten müssen. An Stelle der theoretischen Betrachtungen über reibungslose Flüssigkeiten wird man die Beobachtung natürlicher Flüssigkeiten setzen, die infolge einer unzerstörbaren inneren Bewegung sich in sich selbst verwälzen. Wirbelgebilde, die den Ätherwirbeln

vermutlich entsprechen, sind nun neuerdings von Th. Rümelin bei Beobachtung des „Normalzustandes des Fließens" in breiten Gerinnen entdeckt worden. („Wie bewegt sich fließendes Wasser? Ein neuer Weg zur Erklärung des Problems." Verlag von v. Zahn & Jaensch, Dresden 1913.) Der Fluß schien sich in kugelartige Gebilde aufzulösen, die abwechselnd im entgegengesetzten Sinne rotierten und dabei rhythmisch pulsierend ihr Volumen vergrößerten und verkleinerten, so als ob sie elastische Schwingungen ausführten. Die scheinbar elastischen positiven und negativen Atome scheinen also ganz regelmäßig als Folge des „Normalzustandes des Fließens" in einer nach verschiedenen Richtungen durcheinanderströmenden unelastischen Flüssigkeit aufzutreten. Lediglich der Umstand, daß Fließbewegungen dieser Art wenig erforscht waren, hat die Vorgänge im Äther bisher widerspruchsvoll und dunkel erscheinen lassen.

Danach wäre also der Äther als eine inkompressible Flüssigkeit mit unzerstörbarer, unveränderlicher Eigenbewegung aufzufassen, deren Geschwindigkeit von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ist. Eine ähnliche Theorie ist neuerdings von O. Wiener unter dem Titel „Das Grundgesetz der Natur und die Erhaltung der absoluten Geschwindigkeiten im Äther" veröffentlicht worden (Abh. d. sächs. Akad. d. Wissensch. **38**, H. 4). Baut man die Theorie Wieners noch weiter aus, indem man die Eigenbewegung der Ätherteilchen überall gleichartig und von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit annimmt, so erhält man ein Grundgesetz, das mit den Grundlagen der Relativitätstheorie eine große formale Ähnlichkeit zeigt. Nur ist das logisch nicht recht haltbare „Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit relativ zu verschiedenartig bewegten Beobachtern" durch das einfachere Gesetz von der Konstanz der inneren Eigenbewegung des Äthers ersetzt. Die Grundlagen der Relativitätstheorie würden durch eine solche Umformulierung wieder in Einklang mit dem gesunden Menschenverstand und der Äthervorstellung gebracht werden. Einstein hat in seinem Leidener Vortrage (Verlag von Springer, 1920) auch bereits nach einer solchen Verbindung gesucht, indem er geprüft hat, wie die Äthertheorie abzuändern wäre, wenn sie mit seiner Relativitätstheorie in Einklang gebracht werden sollte. Er ist dabei aber zu einer begrifflich nicht recht faßbaren Definition des Äthers gekommen. Natürlicher und richtiger wäre es wohl gewesen, zu untersuchen, wie die Grundlagen der Relativitätstheorie abzuändern wären, damit diese sich in eine einfache Äthervorstellung einfügen lassen könnte. Eine solche Verbindung würde die deutsche Wissenschaft voraussichtlich zu großen und unerwarteten Erfolgen führen können. Ein Grund zur Aufgabe der substantiellen Äthertheorie ist meines Erachtens nirgends erkennbar. Diese scheint vielmehr besser als jede andere Vorstellung zur einfachen Lösung physikalischer Probleme berufen zu sein.

Die eingehende Begründung des hier entwickelten Gedankenganges findet sich in den folgenden Schriften des Verfassers:

„Eine neue und einfache Deutung der Schwerkraft." Wolfenbüttel, Heckners Verlag, 1919.

„Der Fehler in Einsteins Relativitätstheorie" und „Die neue Erklärung der Schwerkraft". Ebenda, 1920.

„Eine neue und anschauliche Erklärung der Physik des Äthers." Glasers Annalen für Gewerbe- und Bauwesen, Bd. 86, Nr. 1032, S. 95/96.

„Wind und Wetter als Feldwirkungen der Schwerkraft." Naturwiss. Wochenschrift, 1921, Heft 7, S. 97.

„Klassische Mechanik, Relativitätstheorie oder Ätherphysik? Eine Kritik der Newtonschen Gravitationstheorie." Astronomische Zeitschr. 1921, Heft 3, S. 31.

„Michelson und Einstein." Zentralzeitung für Optik u. Mechanik, 42. Jahrg., Nr. 24, S. 363.

Diskussion.

Gehrcke: Ein Vertreter der vom Herrn Vortragenden vorgebrachten Ansicht, daß die Gravitation eine Strömung im Äther sei, war der große Mathematiker Riemann. Riemann stellte sich vor, daß eine gravitierende Masse den Äther aus ihrer Umgebung ansaugt und daß das Zentrum der Strömung eine Sickerstelle ist. Man kann nun nach der experimentellen Prüfung dieser Ansicht fragen, und da möchte ich auf den Michelsonschen Spiegelversuch hinweisen. Dieser ist bisher stets so angestellt worden, daß die Apparate um eine vertikale Achse gedreht wurden und hierbei fallen natürlich alle Strömungskomponenten in Richtung der Schwerkraft heraus. Wenn man aber den Versuch so wiederholen würde, daß die Apparate um eine horizontale Achse gedreht werden, so könnte man die Ätherströmungstheorie der Gravitation prüfen.

BESPRECHUNGEN.

Harry Schmidt, Probleme der modernen Chemie. 148 Seiten mit 9 Figuren. I. Auflage. Hamburg, L. Friederichsen & Co. 1921. Geheftet 15 M., gebunden 20 M.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die wichtigsten Arbeiten von Aston, Fajans, Kossel, Paneth, Rutherford und Soddy einem weitern Kreise, insbesondere Nichtfachleuten in leichtfaßlicher Form zugänglich zu machen.

Das einleitende Kapitel behandelt etwas romantisch den Gedankenkreis der Alchemisten und leitet über zum Lavoisier-Daltonschen Standpunkt. Es folgt die Entwicklungsgeschichte der Radiologie und die Behandlung ihrer Meßmethoden. Etwas zu kurz gefaßt ist wohl für den Nichtfachmann die Behandlung der natürlichen und künstlichen Corpuscular- und Wellenstrahlung. Der genetische Zusammenhang der aktiven Produkte wird an Hand der Rutherford-Soddyschen Zerfallstheorie klargelegt, unter dem Zweck des Buches angemessener Beschränkung (Doppelzerfall der *C*-Produkte, *Ac*-Genesis). An Hand der Elektrolyse und des Photoeffekts erfolgt der Nachweis, daß das Elektron ein allgemeiner Baustein der Materie ist. Ein kurzer Hinweis auf den Zusammenhang zwischen Energie und Trägheit wird wohl der knappen Fassung wegen unverstanden bleiben. Ein spezielles Kapitel ist der Valenzlehre und dem periodischen System gewidmet. Eine kurze Behandlung des periodischen Systems vom chemischen und hernach mit dem van dem Broekschen Gesetz vom physikalischen Standpunkt leitet über zu der Kossel-Bohrschen Vorstellung vom Aufbau der Elemente zu Perioden und führt zur Deutung der Valenz als der Tendenz zum Edelgaszustand. Im 6. Abschnitt macht uns der Verfasser bekannt mit dem Isotopiebegriff und den Ergebnissen der Astonschen Arbeiten am Massenspektrographen, um dann noch eingehend die Arbeiten Paneths über Mikrosynthese von BiH_3 und PbH_2 zu würdigen. Den Schlußstein bildet die Rutherfordsche N_2-Zerlegung, womit ein harmonischer Abschluß gewonnen ist.

Die letzten Partien des Buches leiden oft etwas unter der Knappheit, so daß hin und wieder an Stelle des Beweises Zitate treten, deren autoritative Wirkung die Kürze kompensieren soll.

P. Frauenfelder.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1921/22.

Technische Hochschule Berlin. Kurlbaum: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Allgemeine Strahlungsenergie (Optik); Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben für Vorgeschrittene. — **Berndt:** Radioaktivität. — **Cranz:** Über mechanische und photographische Messungs- und Registriermethoden der technischen Physik; Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik: Atomphysik und Ätherphysik, Relativitätstheorie, Elektronentheorie, Quantentheorie. — **Felgentraeger:** Maß- und Gewichtswesen I; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente. — **Gehlhoff:** Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik. — **Grunmach:** Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente; Physikalische Übungen für Chemiker; Ausgewählte physikalische Aufgaben für Vorgeschrittene. — **Kalischer:** Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. — **Kassner:** Technische Meteorologie, mit Beispielen aus der Praxis. — **Kock:** Vorkurs zur Physik; Hochspannungserscheinungen und Messungen; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik. — **Krigar-Menzel:** Allgemeine Mechanik I: Gleichgewicht und Bewegung von Massenpunkten und starren Körpern; Theoretische Akustik. — **Luyken:** Der Erdmagnetismus und seine Anwendung in Technik und Bergbau. — **Möller:** Schwingungsprobleme unter besonderer Berücksichtigung der Fernsprechtechnik und drahtlosen Telegraphie. — **Pirani:** Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung graphischer Verfahren I und II. — **Weidert:** Die optischen Instrumente und deren theoretische Grundlagen. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor der Chemie an der Universität Hamburg Dr. Fritz Paneth in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt Dr. Otto Stern in gleicher Eigenschaft an der Universität Rostock, der a. o. Professor an der Universität Heidelberg Dr. Friedrich Pfeiffer zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart, der Privatdozent für Mathematik und Mechanik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe Dr. Heinrich Brandt zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen.

Verliehen: Der Titel außerordentlicher Professor dem Privatdozenten Dr. Andor Fodor (Physiologische Chemie, Universität Halle), Dr. Erwin Ott (Chemie, Universität Münster), Dr. Rudolf Vogel (Chemie, Universität Göttingen).

Nobelpreise: Für Chemie 1920: dem ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Walter Nernst.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 1. Dezember 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 24 am 1. Dezember 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Kolorimetrische Untersuchungen. VIII.

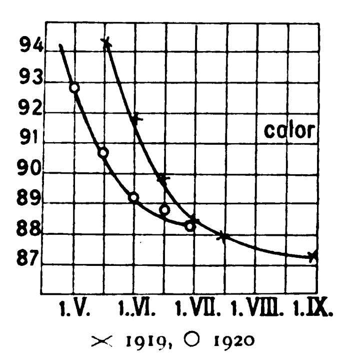
Von Otto Meißner.

1. Einige Bemerkungen

zu Herrn F. W. Kohlrauschs letzter Äußerung mögen mir hier gestattet sein. An Ostwald hat er wesentlich dasselbe wie früher auszuse..en, mir wirft er — indirekt — Literatur- und Sachunkenntnis vor. Da als sicher anzunehmen ist, daß sich Geh.-R. Ostwald nicht selbst äußern wird, will ich auch seine Verteidigung — soweit man sich so ausdrücken will — übernehmen — nicht gegen Herrn F. W. Kohlrausch, der sich nicht wird über-.. ..gen lassen wollen, sondern im allgemeinen.

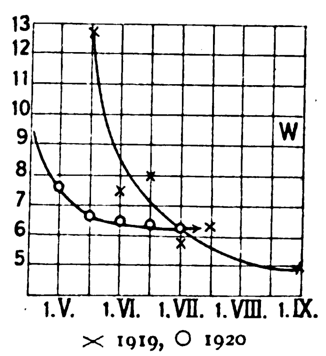
Nach Ostwald ist die Farbenlehre eine psychologische Wissenschaft, steht also in der C..nte-Ostwaldschen Wissenschaftspyramide[1] .öner als die Physik. Nun gelten alle Gesetze der niederen Wissenschaften für die höheren, nicht vice versa. Wenn also nach Kohlrausch die Ostwaldsche Farbenlehre keine Bereicherung der Physik ist (Kohlrausch selbst .. freilich: der „Wissenschaft", kann aber .. seinen sonstigen Ausführungen nur jene ..n), so ist das gar kein Vorwurf gegen ..ald, die Fortschritte liegen auf anderem Gebiete; und deshalb wird Ostwald auch keine Rechtfertigung für nötig halten. Privatbriefe pflegt Ostwald — darf ich wohl sagen, ohne damit indiskret zn werden — nur selten und nur im Lapidarstil zu beantworten, und nur, wenn er sich sachlichen Gewinn davon verspricht.

Da ich mich in meinen Arbeiten ganz an Ostwald halte, ist im Grunde meine Verteidigung bereits im Vorstehenden enthalten. Wenn ich die von Kohlrausch angeführte



× 1919, O 1920

Fig. 1.



× 1919, O 1920

Fig. 2.

1) Beiträge zur Farbenlehre. II. Stück, S. 11.

Tabelle I.

Nr. 1—6.	c	w	s	r
1. 25. April 1920	93,4	05,3	73,8	20,9
2. 2. Mai 1920	92,7 ± 0,5	04,8 ± 0,3	74,7 ± 4,1	20,5 ± 4,1
3. 15. Mai 1920	90,7 ± 0,5	04,1 ± 0,2	81,1 ± 1,9	14,8 ± 1,9
4. 30. Mai 1920	89,2 ± 0,2	03,9 ± 0,2	88,7 ± 1,2	07,4 ± 1,2
5. 29. Juni 1920	88,4 + 0,2	03,7 ± 0,3	90,1 ± 1,0	06,1 ± 0,9
Nr. 7—10.	c	w	s	r
1. 25. April 1920	89,3	04,4	87,1	08,5
2. 2. Mai 1920	88,7 ± 0,1	04,3 ± 0,2	88,0 + 1,2	07,7 ± 1,2
3. 15. Mai 1920	88,3 ± 0,2	04,0 ± 0,5	88.2 ± 0,7	07,8 ± 0,9
4. 30 Mai 1920	88,2 ± 0,4	04,0 ± 0,3	88,1 ± 0,8	07,9 ± 1,5
5. 29. Juni 1920	88,4 ± 0,1	0,40 ± 0,2	90,2 ± 0,9	05,8 ± 0,9

Tabelle II.

Nr. 1—6.	c		w		s		r	
	1919	1920	1919	1920	1919	1920	1919	1920
1. Mai	—	92,9	—	07,5	—	72,0	—	20,5
15. Mai	94,1	90,7	12,5	06,6	61,0	78,6	26,5	14.8
1. Juni	91.4	89,1	07,6	06,4	75,7	86,2	16,7	07,4
15. Juni	89 2	88,8	07,3	06,3	81,7	87,0	11,0	06,7
1. Juli	88,6	88,4	05,8	06,2	85,8	87,5	08,4	06,3
15. Juli	88,0	—	06,0	—	87,0	—	07,0	—
1. August	87,8	—	05,5	—	87,5	—	07,0	—

Literatur nicht zitiert habe, so rührt dies nicht daher, daß ich sie nicht kenne, — vielmehr ist sie mir, von psychologischer Seite her, nebst andrer dahin gehöriger, schon seit etwa 20 Jahren bekannt — sondern weil Ostwald in seiner Farbenlehre über sein Verhältnis zu seinen Vorgängern bereits das Nötige gesagt hat, und ich sonst keine Veranlassung hatte, sie zu zitieren, z. B. Hering nicht, weil seine Lehre nur qualitativ ist, und Helmholtz nicht, weil ich eben nicht die Helmholtzsche, sondern die Ostwaldsche Theorie meinen Untersuchungen zugrunde lege. Das müßte jedem Unbefangenen einleuchten und ist mein letztes Wort in dieser Sache.

2. Die Färbung der Baumblätter im Verlauf des Sommers 1920.

Wie 1919[1]) hatte ich auch 1920 die Färbung einer großen Anzahl von Blättern verschiedener Pflanzen, meist von Bäumen oder Sträuchern, bestimmt. Die ausführlichen Tabellen der Einzelwerte will ich hier, um Platz zu sparen, nicht wiedergeben, sondern nur eine Zusammenfassung für folgende 10 Pflanzenarten[2]): 1. Eiche 2. Buche 3. Linde 4. Rüster 5. Pappel 6. Ahorn; 7. Birke 8. Eberesche 9. Flieder 10. Spiräe (Filipendula hexapetala). Tab. I stellt die Ergebnisse dar, Tab. II die Vergleichung von 1919 und 1920, wobei in Tab. II für die Messungen von 1920, die bei Gasbeleuchtung ausgeführt waren, um sie mit den bei Tageslicht gemachten von 1919 vergleichbar zu machen, dem Weißgehalt von $2^1/_2$ Proz. zugefügt, dem Schwarzgehalt ebensoviel abgezogen sind, während Farbton c und naturgemäß! — Reinheit r unverändert gelassen sind.

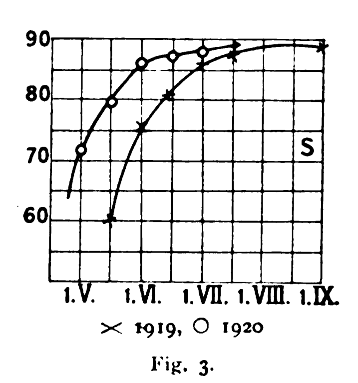


Fig. 3.

Die Figuren stellen den Gang des Farbtons sowie des Weiß- und Schwarzgehaltes dar. Figuren und Tabellen zeigen deutlich den Vorsprung, den die Vegetation 1920 gegenüber 1919 hatte; man kann ihn auf anfänglich 3 Wochen schätzen: eine Wirkung des sehr warmen Frühjahrs 1920.

In Anbetracht dessen, daß Blätter keine

1) Naturw. Wochenschr., N. F. 19, 518ff.

2) Nahe verwandte Arten bei Eiche und Linde zusammen.

„ideal rauhe“ Oberfläche haben, sind insbesondere die 1919er Kurven so typisch, daß ein Unbefangener wohl kaum auf den Gedanken kommen kann, daß die zugrundeliegende Theorie eine „bloße Faustregel“ darstellt.

Potsdam, 30. September 1921.

(Eingegangen 4. Oktober 1921.)

Die elektrischen Momente des Co- und Co_2-Moleküls.

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

Von Hans Weigt.

Auf Veranlassung von Herrn Professor Debye wurden die Dielektrizitätskonstanten von Kohlenoxyd und Kohlendioxyd in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur untersucht, um mit Hilfe der Debyeschen Dipoltheorie die elektrischen Momente der Moleküle der beiden Gase zu bestimmen und dadurch einen Anhalt für ein Molekülmodell wenigstens für das Co-Molekül zu finden.

Die Messungen gingen so vonstatten, daß zuerst Luft, dann Co und Co_2 nacheinander in einen auf die vorgeschriebenen Temperaturen geheizten Kondensator gebracht wurden und die Änderung der Kapazität dieses Kondensators mit Hilfe elektrischer Schwingungen bestimmt wurde. Hierbei wurde von dem Überlagerungsempfang der drahtlosen Telegraphie Gebrauch gemacht in einer Schaltung, wie sie im Verlauf dieser Versuche von Preuner und Pungs[1]) angegeben worden ist. Die Versuche bestätigten die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von der Temperatur in der von der Debyeschen Theorie verlangten Weise innerhalb der Meßfehler, die wesentlich niedriger gehalten werden konnten als die bei einer von Jona[2]) zu demselben Zweck benutzten Methode und ergaben für die elektrischen Momente die Werte

$$\mu_{Co_2} = (0,1420 \mp 0,0017)\ 10^{-18}$$
$$\mu_{Co} = (0,1180 \mp 0,0016)\ 10^{-18}.$$

Ein Vergleich der Meßresultate mit den aus der Lorentz-Lorenzschen Formel folgenden optischen Brechungsindizes zeigt ebenfalls gute Übereinstimmung, obwohl die Brechungsindizes durch das bei Dipolgasen anomale Ultrarot extrapoliert werden mußten.

1) Diese Zeitschr. **20**, 543, 1919.
2) Diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

(Eingegangen 30. September 1921).

Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte. Berichtigung.

Von W. H. Keesom.

Die Bemerkungen, welche Herr Debye in seiner wichtigen Verhandlung über Molekularkräfte und ihre elektrische Deutung[1]) meiner unter obengenanntem Titel publizierten Arbeit[2]) widmet, machen eine weitere Äußerung meinerseits über die Berechnung der Quadrupolmomente der betrachteten Gase nötig. Ich kann mich nämlich mit der Weise, in der Debye von der mittleren reduzierten Zustandsgleichung Gebrauch macht, nicht einverstanden erklären.

Schon beim Aufstellen der mittleren reduzierten Zustandsgleichung wies Kamerlingh Onnes[3]) darauf hin, daß dieselbe für keinen Stoff mit der wirklichen reduzierten Zustandsgleichung zusammenfallen wird. Sie würde dies nur dann tun, falls die Stoffe, welche die Daten für die Ableitung der mittleren reduzierten Zustandsgleichung geliefert haben, bis an den kritischen Punkt dem Gesetz korrespondierender Zustände exakt gehorchen sollten. Bekanntlich ist das aber, besonders was Wasserstoff im Vergleich mit Stickstoff und Sauerstoff betrifft, keineswegs der Fall[4]). Und gerade diese Gase sind es, welche die Daten für die höheren reduzierten Temperaturen geliefert haben. Durch das Aneinanderreihen dieser Daten in der mittleren reduzierten Zustandsgleichung wird der Verlauf der Virialkoeffizienten mit der reduzierten Temperatur modifiziert, was bei der Empfindlichkeit, welche die in Frage stehenden Rechnungen gegenüber kleinen Änderungen in diesem Verlauf aufweisen, einen beträchtlichen Einfluß auf das Endergebnis haben kann.

Indes muß ich ein näheres Eingehen auf dieses Thema zu einer folgenden Abhandlung, in der auch die Resultate einiger weiteren Rechnungen gegeben werden sollen, verschieben. Es liegt mir aber daran schon jetzt zu berichten, daß, wie sich jetzt gezeigt hat, in meine frühere Rechnung des Quadrupolmoments des Wasserstoffs sich im letzten Moment leider ein Rechenfehler eingeschlichen hat, den ich im folgenden berichtigen möchte.

Aus den in meiner obengenannten Arbeit angegebenen Werten für σ und v folgt für das Quadrupolmoment des Wasserstoffs:

$$\mu_2 = 1,17 \times 10^{-26}\ [\text{elektrost. Einh.} \times \text{cm}^2],$$

1) Diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.
2) Diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.
3) Leiden, Communications Nr. 74, § 4, 1901.
4) Vgl. H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Die Zustandsgleichung. Math. Enz. V 10. Leiden, Comm. Suppl. Nr. 23, § 36, und Fußn. 399.

anstatt des von mir dort auf S. 135 gegebenen Wertes[1]). Deshalb verliert auch die Bemerkung auf S. 137 bezüglich der Übereinstimmung zwischen den Werten, welche sich für das Quadrupolmoment aus der Zustandsgleichung und aus dem Bohr-Debyeschen Modell ergeben, ihren Sinn.

Utrecht, 12. September 1921.

(Eingegangen 30. September 1921.)

1) In Fußn. 1 ebendort lese man also $0{,}70 \times 10^{-8}$ anstatt $0{,}92 \times 10^{-8}$.

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

Léon Schames (Frankfurt a. M.), Eine einfache Verbesserung des Gesetzes von den übereinstimmenden Zuständen.

Der Grund dafür, daß das Gesetz von den übereinstimmenden Zuständen nicht streng gilt, liegt darin, daß vor allem die Größe a der Zustandsgleichung individuelle Variable ist. Es ist daher zu erwarten, daß man mit festen Reduktionsgrößen kein strenges Gesetz erhalten kann; daher kann man auch durch die Einfuhrung einer oder mehrerer Zusatzkonstanten nur beschränkte Verbesserung bewirken. Ein wirklich strenges Gesetz wird man erst erhalten, wenn die individuelle Variabilität, vor allem von a, bekannt ist und zur Bildung variabler Reduktionsgrößen angewandt werden kann. Davon sind wir aber noch weit entfernt.

Wir müssen uns deshalb hier mit viel weniger begnügen und unsere Aufgabe folgendermaßen umschreiben. Bisher hat man mit den kritischen Größen $T_\varkappa$, $p_\varkappa$, $v_\varkappa$ als Reduktionsgrößen den kritischen Punkt und seine nächste Umgebung richtig wiedergeben können. Dieses Gebiet ist aber sehr klein im Vergleich zum gesamten der Erfahrung zugänglichen Zustandsgebiet, und es fragt sich nun, ob man nicht etwa mit anderen festen Reduktionsgrößen ein viel größeres Gebiet wiedergeben könne. Wir wollen zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist, müssen aber dabei im Auge behalten, daß dies nach obigem nur als eine erste Näherung zur Lösung des Problems angesehen werden darf.

Als Zustand, den wir darstellen wollen, wählen wir den einfachsten: den Avogadroschen und an ihm anschließend das große Gebiet des verdünnten Gaszustands. Wir werden aber sehen, daß unsere Reduktionsgrößen auch noch für beträchtlich dichte Zustände brauchbar sind und überraschenderweise sogar den ganz dichten Zustand (bei $T = 0$, $p = 0$, $v = v_0$) als übereinstimmenden wiedergeben.

Als korrespondierende Zustände wählen wir diejenigen entlang den charakteristischen Kurven: im Avogadroschen Zustand also Boyle- und Gay-Lussac-Punkt. Die Behandlung der gleichen Aufgabe hatten wir schon vor mehreren Jahren begonnen[1]). Im Avogadroschen Zustand gilt als Grenzgesetz

$$pv = RT.$$

Wenn hierbei die übliche Reduktion mit den kritischen Größen richtig wäre, so müßte in

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{R}\mathfrak{t}$$

die reduzierte Gaskonstante $\mathfrak{R} = \frac{RT_\varkappa}{p_\varkappa v_\varkappa}$ eine Konstante sein. Da dies nicht der Fall ist, hatten wir früher neben $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$, nicht $\mathfrak{t}$ sondern $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ als dritte korrespondierende Größe gewählt. Für die meisten Substanzen ergaben sich so wirklich Boyle- und Gay-Lussac-Punkt als korrespondierende Punkte und auch die charakteristischen Kurven konnten mit Erfolg in ihrem weiteren Verlauf als gut korrespondierend nachgewiesen werden, wie auch Jakob[2]) bestätigte. Es zeigte sich aber bald, daß He und H_2 sich nicht so einfach einordnen ließen, und es erhob sich nun die Frage, ob man die Reduktionsgrößen nicht so verallgemeinern könne, daß sich auch diese Substanzen einfügen. Dabei fiel auf, daß He und H_2 auch insofern von den übrigen Substanzen abweichen, als die empirische van der Waalssche Beziehung:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{d}_0 = \frac{1}{\mathfrak{v}_0}$$

bei ersteren nicht, bei letzteren aber mindestens mit großer Annäherung erfüllt ist.

Wählt man als reduzierte Temperatur nicht wie früher $\mathfrak{R}\mathfrak{t}$ sondern $\mathfrak{d}_0\mathfrak{t}$, so ergibt sich sofort, daß Boyle- und Gay-Lussac-Temperatur

1) L. Schames, Elster- und Geitel-Festschr. 1915, S. 287.

2) M. Jakob, Forschungsarbeiten auf d. Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 202, 1917.

	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{d}_0$	$\mathfrak{R}t_B$	$\mathfrak{R}t_G$	$\mathfrak{d}_0 t_B$	$\mathfrak{d}_0 t_G$
He	3,13	2,15	12,5	23,4	8,3	16,1
H_2	3,27	2,67	10,5	19,5	8,6	15,9
O_2, N_2, Luft, C_2H_4 (A)	3,42	3,35	8,7	(16,3)	8,5	(16,0)
CO_2	3,55	3,45	8,8	(16,3)	8,6	(16,0)

nunmehr auch für He und H_2 mit den übrigen korrespondieren. Das heißt also, es ist zu nehmen

als Reduktionstemperatur $T_x \frac{v_0}{v_x}$,

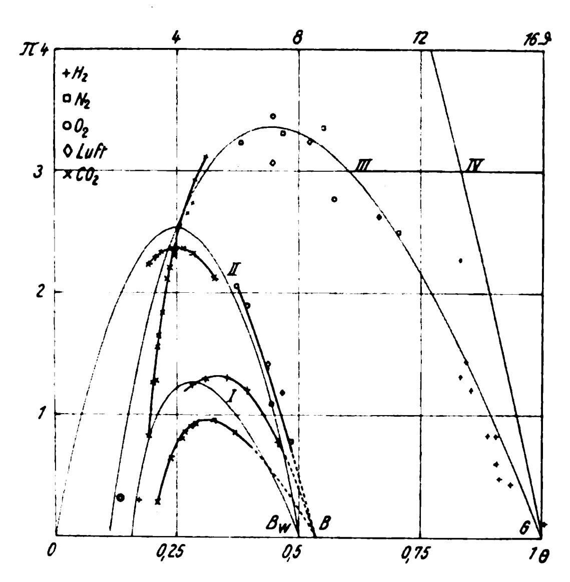
dem entspricht als Reduktionsvolumen v_0,

und als Reduktionsdruck $\frac{RT_x}{v_x}$;

letzteres ist der Druck $p_{x,i} = \mathfrak{R} p_x$, der im kritischen Punkt herrschen würde, wenn hier noch das Idealgasgesetz gültig wäre. Die mit diesen Größen reduzierte Gaskonstante wird 1.

Diese für den Avogadroschen Zustand sich ergebenden Reduktionsgrößen stellen also, wie oben schon erwähnt, auch den Punkt des Kondensats $T = 0$, $p = 0$, $v = v_0$ als korrespondierenden Punkt dar, was die kritischen Größen ja nicht tun.

Um zu zeigen, wie die mittleren Zustandsgebiete mittels unserer Reduktion dargestellt werden, bzw. welche Abweichungen auftreten, haben wir in einem $\pi = \frac{p}{p_{x,i}}$, $\vartheta = \frac{T v_x}{T_x v_0}$-Diagramm die ersten vier charakteristischen Kurven



nach der Erfahrung dargestellt. Um sie mit den van der Waalsschen charakteristischen Kurven vergleichen zu können, sind die letzteren dünn eingezeichnet; für diese gilt aber nicht der ϑ-Maßstab, sondern derjenige in $\Theta = \frac{T}{T_G}$, damit der Gay-Lussac-Punkt nach van der Waals mit dem nach der Erfahrung zusammenfällt. Von ihm aus geht die IV. und die III. charakteristische Kurve. Die IV. charakteristische Kurve stimmt mit der früher von mir dafür gegebenen Graden[1]) für nicht zu große Dichten (in den neuen Einheiten $\Theta = 1 - 0{,}056\,\pi$) genügend überein: bei großen Dichten machen sich auf ihr die individuellen Verschiedenheiten stark bemerkbar (im Zusammenhang mit ihrem Endpunkt[2]) bei $\pi_0 \sim f_0 \mathfrak{d}_0$). Auf der III. charakteristischen Kurve sind in der Nähe des Gay-Lussac-Punkts die Kreuze für H_2, in der Nähe ihres Scheitels die Werte für N_2, O_2 und Luft und schließlich die schrägliegenden Kreuze für CO_2 dem empirischen Material[3]) entnommen. Die Abweichung für CO_2 ist durch die Nähe des kritischen Punktes bedingt.

Die empirischen Werte für die II. charakteristische Kurve für CO_2 liegen etwas unterhalb, für N_2, O_2 und Luft etwas oberhalb der van der Waalsschen Kurve. Beide streben zum Boyle-Punkt B bei $\Theta \sim 0{,}535$, während derselbe nach van der Waals bekanntlich bei $\Theta = 0{,}50$ liegt. In B beginnt auch die I. charakteristische Kurve, die dicht beim kritischen Punkt endet[1]). Der Scheitel der I. charakteristischen Kurve liegt für CO_2 beträchtlich unterhalb, für H_2 unwesentlich oberhalb der van der Waalsschen Kurve. Die kritischen Punkte müssen in unserem Diagramm auseinander fallen, wie an CO_2, H_2 und He gezeigt ist.

Während demnach die bisherige Reduktion mit den kritischen Größen nur die nächste Umgebung des kritischen Punktes richtig wiedergibt, gestattet die neue, für den Avogadroschen Zustand sich ergebende Reduktion die Wiedergabe eines weit größeren Zustandsgebietes.

1) L. Schames, diese Zeitschr. **18**, 32, 1917.
2) L. Schames, Ann. d. Phys. **57**, 328, 1918.
3) Dies ist zusammengestellt bei M. Jakob, diese Zeitschr. **22**, 66, 1921, dabei ist das früher von mir vorgeschlagene $\mathfrak{R}t$-Diagramm benutzt, wobei sich das Herausfallen des H_2 deutlich zeigt.

Hans Vogel (Hamburg), Das Temperaturabhängigkeitsgesetz der Viskosität von Flüssigkeiten.

Es ist dem Vortragenden gelungen, ein Temperaturabhängigkeitsgesetz für die Viskosität von Flüssigkeiten dadurch aufzustellen, daß er folgende drei Größen einführte:

1. den Grenzwert der Zähigkeit η_∞ für $t = \infty$;
2. die Temperatur t_x, für die die Fluidität $\frac{1}{\eta} = 0$ oder die Viskosität $\eta = \infty$ wird;

3. die Temperatur t_1, für die $\eta = 1$ wird. Das Gesetz lautet dann

$$\eta_t = \eta_\infty^{\frac{t-t_1}{t-t_\infty}}.$$

Dasselbe Gesetz gilt auch für den in der Technik oft angewandten Zähigkeitsfaktor Z:

$$Z = Z_\infty^{\frac{t-t_1}{t-t_\infty}}.$$

Die Formeln ergeben für alle Flüssigkeiten, Wasser, Quecksilber, Öl im ganzen Flüssigkeitsgebiet eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Messungen und werden daher vielleicht zu molekulartheoretischen Betrachtungen herangezogen werden können. Vorläufig liegt ihr Anwendungsgebiet hauptsächlich in der Öltechnik, da nun aus drei Viskositätsmessungen die ganze Temperaturkurve konstruiert werden kann.

Diskussion.

Schulz: Ich möchte mir die Frage erlauben, ob der Herr Vortragende vielleicht auch unterkühlte Flüssigkeiten untersucht hat (z. B. Gläser)?

Vogel: Nein.

M. Ettisch, M. Polanyi und K. Weißenberg (Berlin-Dahlem), Röntgenographische Untersuchungen an Metallen.

Der von Becker, Herzog, Jancke, Polanyi gefundene Röntgeneffekt, daß hartgezogener *Cu*-Draht statt voller Debye-Scherrer-Kreise nur einzelne kurze Streifen erzeugt, wird zur quantitativen Bestimmung der Kristallanordnung in hartgezogenen Drähten ausgebaut.

Der Effekt wurde wieder gefunden bei hartgezogenem *Wo*-, *Fe*-, *Mo*-, *Cu*-, *Pd*-, *Al*-, *Ag*-Draht. Die Deutung ergab, daß die Elemente mit raumzentrierten kubischen Gittern (*Wo, Fe, Mo*) einfache Faserstruktur mit Diatropie der $\langle 110 \rangle$-Ebene haben, d. h. im Drahtquerschnitt sich nur Rhombendodekaëderflächen finden. Die Elemente mit flächenzentrierten kubischen Gittern (*Cu, Pd, Al*) zeigten zweifache Faserstruktur bei Diatropie von $\langle 111 \rangle$- und $\langle 100 \rangle$-Ebenen; es liegen also hier im Querschnitt bloß Oktaëder- und Hexaëderflächen.

M. Volmer (Hamburg), Über die Molekülabscheidung an Kristallen und die Bravaissche Regel.

Die Entstehung eines Kristalls aus dem molekulardispersen Zustande geschieht stets durch einen Wachstumsvorgang. Dieses Wachsen erfolgt in verschiedenen Richtungen verschieden schnell und nimmt für einige Richtungen scharf ausgeprägte Minimalwerte an. Eine befriedigende Erklärung für diese Tatsache gibt es bisher nicht. Das Prinzip von Gibbs und Curie, nach welchem der Kristall einer solchen Form zustreben soll, die ein Minimum der Oberflächenenergie besitzt, konnte bisher mit den Erfahrungstatsachen nicht widerspruchsfrei in Zusammenhang gebracht werden. Es besteht nur eine empirische Regel, die sog. Bravaissche Regel, nach welcher im allgemeinen die dichtesten Netzebenen die geringste Wachstumsgeschwindigkeit zeigen, wobei unter Wachstumsgeschwindigkeit einer Ebene die Geschwindigkeit gemeint ist, mit der sie sich in normaler Richtung verschiebt.

In einer interessanten Mitteilung hat Valeton[1]) kürzlich den Aufbau eines Ionengitters aus den Ionen behandelt und die verschiedenen Wachstumsgeschwindigkeiten verschiedener Netzebenen auf die Wahrscheinlichkeiten zurückgeführt, mit der ein Haftenbleiben oder eine Reflexion der ankommenden Ionen an den betreffenden Gitterebenen stattfindet. Diese Theorie enthält aber einige hypothetische Momente und kann schwerlich als Grundlage einer allgemeinen Theorie des Kristallwachstums in Frage kommen. Z. B. ist eine Verallgemeinerung der Theorie auf andere als Ionengitter, insbesondere auf Metallkristalle nicht angängig, da nach den seinerzeit vorliegenden Experimentalarbeiten von Knudsen[2]) und Bennewitz[3]) eine Reflexion von Molekülen an Metalloberflächen überhaupt nicht eintritt.

Neuere Messungen[4]) haben ergeben, daß doch eine geringe Reflexion stattfindet, doch kann daraus nicht, wie z. B. auch Gross und Volmer[5]) versucht haben, die erheblich verschiedene Wachstumsgeschwindigkeit eines Kristalls in den verschiedenen Richtungen erklärt werden.

Der Vorgang der Molekülabscheidung an Kristallen stellt sich vielmehr auf Grund der Versuche von Volmer und Estermann[4]) folgendermaßen dar:

Wenn ein Molekül auf eine geschlossene Netzebene trifft, so dringt es nicht ein, bleibt aber in dem der Fläche vorgelagerten Anziehungsfeld, und zwar setzt es innerhalb des Feldes seine Wärmebewegung fort, die nach zwei Raumrichtungen hin lediglich in translatorischer Bewegung, nach der 3. in Schwingungen besteht.

---

1) Diese Zeitschr. **21**, 606—608, 1920.
2) Ann. d. Phys. **47**, 697, 1915; **50**, 472, 1916.
3) Ann. d. Phys. **59**, 193, 1919.
4) Volmer u. Estermann, Zeitschr. f. Phys. **7**, 1 u. 13, 1921; Estermann, Dissertation 1921.
5) Zeitschr. f. Phys. **5**, 188, 1921.

Mit einem solchen Molekül kann dreierlei geschehen:

1. Es kann wieder verdampfen, wozu nicht die molekulare Verdampfungswärme erforderlich ist, sondern ein kleinerer Energiebetrag, den wir als Adsorptionswärme bezeichnen wollen. Der Bruchteil der Moleküle, die auf diese Weise das Feld wieder verlassen, ist klein; er beträgt, wie aus anderen Versuchen[1]) hervorgeht, bei *Hg*, *Cd*, *Zn* etwa $^1/_{12}$.

2. Die Moleküle können an den Rand der Fläche gelangen und dort auf eine andere Kristallfläche wandern.

3. Es können mehrere Moleküle auf der Fläche zusammentreffen und sich vereinigen. Diese zweidimensionalen Aggregate werden beim weiteren Wachsen ihre freie Bewegung allmählich verringern und sich so auf die ursprüngliche Gitterebene auflagern, daß die einzelnen Atome Gleichgewichtslagen einnehmen. So ist der Anfang einer neuen Gitterebene gebildet, die weiter auswächst, worauf sich dann das Ganze auf ihr wiederholt. Das Wachstum einer Kristallfläche stellt sich so als ein Aufeinanderlagern immer neuer Netzebenen dar.

Vergleichen wir nun zwei verschiedene Netzebenen, eine sehr dichte und eine dünner besetzte. Im 1. Fall dürfen wir die Äquipotentialflächen des vorgelagerten Feldes nahezu als Ebenen betrachten. Dann können die Moleküle ihre jeweilige Bewegungsrichtung ungehindert beibehalten und werden mit großer Geschwindigkeit nach dem Rand abwandern. Bei einer dünn besetzten Netzebene haben wir uns die Aquipotentialflächen mit vielen Krümmungen vorzustellen, etwa wie eine vollständig mit Hügeln besetzte Landschaft. Hier ist das Molekül in seiner Bewegung stark behindert, denn bei jeder Krümmung des Feldes erfährt es eine Ablenkung aus seiner Bahn, ähnlich wie ein Gasmolekül bei einem Zusammenstoß. Wir können uns direkt so ausdrücken, daß wir sagen, die freie Weglänge der Moleküle ist kleiner als im 1. Fall. Daher muß in diesem Falle die Abwanderung von der Fläche langsamer geschehen. Die Dichte der Moleküle ist im stationären Zustand dauernd höher als im 1. Fall, infolgedessen ist die Geschwindigkeit der Bildung neuer Gitterebenen größer als auf der dichten Netzebene. So ergibt sich also, daß das Wachstum der dünneren Netzebene größer ist als das der dichteren, wie es die Bravaissche Regel verlangt.

An eine quantitative Behandlung des Wachstumsvorgangs auf Grund der entwickelten Anschauung ist wohl vor der Hand nicht zu denken. Auch fehlt für die Prüfung jedes experimentelle Material, da bei allen unter gewöhnlichen Umständen gewachsenen Kristallen sekundäre Einflüsse wie Diffusions-, Wärmeableitungs- und Adsorptionsvorgänge eine mehr oder weniger maßgebende Rolle spielen; außerdem findet bei allen bisherigen Versuchen die Kristallbildung wenig entfernt vom Gleichgewichtszustand statt, was für die Kenntnis der Geschwindigkeitsvorgänge dieselbe Komplikation wie bei umkehrbarem chemischen Reaktionen und zwar in erhöhtem Maße infolge der Richtungsverschiedenheiten bedeutet.

Zum Schluß sei noch auf eine weitere Konsequenz aus der neuen Anschauung hingewiesen, die ihre experimentelle Bestätigung erfahren hat. Es läßt sich leicht einsehen, daß nach der entwickelten Auffassung die absolute Größe einer Fläche von Einfluß auf ihre relative Wachstumsgeschwindigkeit sein muß; denn die im stationären Zustand auf einer dichten Netzebene vorhandene Anzahl adsorbierter Moleküle ist in der Mitte am größten und nimmt nach dem Rande zu ab. Mit zunehmender Ausdehnung der Fläche nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß ein etwa in ihrer Mitte einfallendes Molekül nach dem Rande gelangt, immer mehr ab, dagegen die Wahrscheinlichkeit der neuen Keimbildung nfolgedessen immer mehr zu, so daß mit wachsender Ausdehnung der Fläche ihre Wachstumsgeschwindigkeit größer werden muß. Dieser Effekt hat sich tatsächlich in der erwarteten Größenordnung nachweisen lassen. Eine weitere Bestätigung der Auffassung ist darin zu sehen, daß, falls man durch einen Molekülstrahl lediglich einer dazu senkrechten Kristallfläche Moleküle zuführt, die neue Keimbildung stets etwa in der Mitte der Fläche erfolgt. Auch der Einfluß der Dampfkonzentrationen auf den Wachstumsvorgang entspricht den Erwartungen.

Hamburg, Phys.-Chemisches Laboratorium der Universität.

1) Für ein fremdes, z. B. ein Gasmolekül gilt offenbar dasselbe bezüglich der Wärmebewegung im adsorbierten Zustande. Es unterscheidet sich von einem frei im Raum beweglichen Molekül nur dadurch, daß ein Freiheitsgrad der potentiellen Energie dazugekommen ist, so daß z. B. für ein einatomiges adsorbiertes Gas die spezifische Wärme $\frac{4}{2}RT$ statt $\frac{3}{2}RT$ des freien Gases anzunehmen ist. Demnach dürfte die Adsorptionswärme nur wenig temperaturabhängig sein.

F. Goos, Ein photometrisch registrierender Komparator.

Das Kochsche Registrier-Photometer war, nachdem sein Wert für alle Probleme der photographischen Photometrie erwiesen war, nach den Worten seines Erfinders selbst nach zwei Richtungen hin zu verbessern. Erstens mußte die spezielle Trägheit der Photozellen herabgedrückt und zweitens das Instrument als Präzisions-Längen-Meßapparat ausgebaut werden. Beides ist im letzten Jahre in Hamburg geschehen, wie in einem der nächsten Hefte der Zeitschrift für Instrumentenkunde näher beschrieben sein wird.

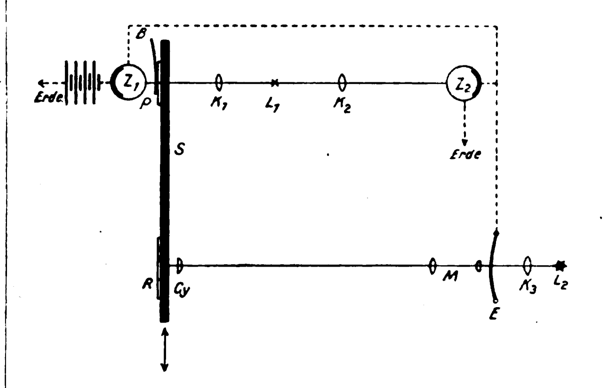
Dieses Instrument ist ebenso wie das erste Kochsche für zwei Übersetzungen, eine etwa 8fache und eine etwa 50fache gebaut, sodaß auf einer 9×12-Registrierplatte, d. h. derjenigen Platte, die die Schwärzungskurve aufnimmt, in dem einen Falle eine Strecke von 15 mm Länge der zu photometrierenden Platte, in dem anderen eine solche von $2^1/_2$ mm Platz findet. Der Apparat ist entsprechend der hohen von ihm verlangten Leistung sehr subtil gebaut und daher auch kostspielig in der Herstellung.

Für viele Fälle, in denen es sich nicht um die Photometrierung scharfer Objekte, z. B. Spektrallinien, Fabry-Perot-Ringe usw. handelt, sondern um diffusere Gebilde, ich nenne hier nur Absorptionsspektren und die Debye-Scherrer-Röntgen-Spektrogramme, wo über Strecken bis zu etwa 18 cm Länge photometriert werden muß und wo daher zweckmäßig mit kleinem Übersetzungsverhältnis gearbeitet werden muß, fehlte bisher ein geeignetes Registrierinstrument.

Diese Lücke auszufüllen dient ein Apparat, den ich jetzt näher beschreiben will, der überaus einfach in seiner Bauart und seiner Handhabung ist.

Das Übersetzungsverhältnis wurde 1 : 1 gewählt und die zu photometrierende Platte sowohl wie die Registrierplatte auf einem gemeinsamen Schlitten nach Art der bekannten Längenmeßkomparatoren angeordnet, wodurch sofort die große Schwierigkeit, die für Registrierphotometer mit hoher Übersetzung in der Konstanz des Übersetzungsverhältnisses liegt, restlos gehoben ist.

Die beigefügte schematische Skizze zeigt den Apparat im Aufriß. Der vertikal stehende Schlitten S ist in der Pfeilrichtung verschiebbar, auf ihm wird oben die zu photometrierende Platte P angelegt, unten trägt er die Registrierplatte R, die die Schwärzungskurve aufnehmen soll. Die Lichtquelle L_1 beleuchtet unter Zwischenschaltung der Kondensorlinse K_1 die Platte P und durchdringt dieselbe, das Licht kann aber vorn nur durch die kleine Blendenöffnung B austreten und in die Photozelle Z_1 gelangen; diese Blende B hat die Form einer Schleiffeder, die mit den starren Teilen des ganzen Apparates fest verbunden ist und bei Bewegung des Schlittens S mit sanftem Druck über die zu photometrierende Gegend der Platte P hinweggleitet; sie ist technisch so gearbeitet, daß eine Verletzung der photographischen Schicht nicht stattfindet. Sie blendet also auf mechanischem Wege direkt am Plattenort das jeweils gewünschte Plattenstück heraus. Die Lichtquelle L_1 beleuchtet ebenfalls durch die Kondensorlinse K_2 die Ableitungszelle Z_2, die bekanntlich dazu dient, Schwankungen in der Helligkeit der Lichtquelle L_1, die mit vollem Betrage in die photometrischen Daten eingehen würden, unschädlich zu machen; es ist also die elektrische Schaltung, die in der Skizze durch die gestrichelte Linie angedeutet ist, unverändert vom



ersten Kochschen Instrument übernommen worden.

Die Aufzeichnung der Registrierkurve erfolgt auf folgendem Wege: Die Elektrometersaite E eines Cremer-Edelmann-Elektrometers wird mittels Lichtquelle L_2 und Kondensorlinse K_3 beleuchtet und ein kleines Stück der Saite mittels des Mikroskops M und der Zylinderlinse Cy auf der Registrierplatte R scharf abgebildet. Das kleine Fadenelement macht beim Registrieren eine horizontale Bewegung, während die Registrierplatte selbst sich gleichzeitig vertikal bewegt.

Diese vertikale Bewegung des Schlittens wird bewirkt durch ein Uhrwerk, dessen Geschwindigkeit durch eine Wirbelstrombremse in weiten Grenzen verändert werden kann und das mit einer Trommel versehen ist, auf der sich eine Darmsaite aufwickelt, deren freies Ende am Schlitten befestigt ist. Die Trommel ist ausrückbar und dann der Schlitten durch Drehen der Trommel mit der Hand in jede beliebige Höhenlage zu bringen, was beim Justieren der Platte P auf den Schlitten sehr bequem ist.

Dieser Apparat ist ebenso wie das anfangs

erwähnte große Registrier-Photometer nach meinen Zeichnungen in der Werkstatt des Physikalischen Instituts der Hamburgischen Universität gebaut worden und wird ebenso wie jenes fabrikmäßig von der Firma A. Krüss, Hamburg hergestellt.

Hamburg, Physikalisches Institut der Universität, im August 1921.

W. Kunze, Das Richtungshören und einige technische Anwendungen.

Die Fähigkeit, Schallrichtungen zu empfinden, beruht auf einem Zusammenwirken beider Gehörorgane. Als physikalische Ursache für das Auftreten eines akustischen Richtungseindrucks kommen Unterschiede der Intensität, der Phase und des Zeitpunktes der Erregung beider Ohren in Frage.

Sowohl die Intensitätstheorie als auch die Phasentheorie, die bisher hauptsächlich zur Erklärung des Richtungshörens herangezogen wurden, stehen mit der Erfahrung in Widerspruch. Demgegenüber führt die dritte, bisher kaum beachtete Erklärungsweise, welche die Zeitdifferenz zwischen der Erregung beider Ohren für die Entstehung von Richtungseindrücken verantwortlich macht, zu einer vollen Übereinstimmung mit der Erfahrung. Diese Theorie ist von den Herren v. Hornbostel und Wertheimer im Jahre 1915 ausgebildet worden.

Während die früheren Forschungen der Anhänger der Intensitäts- und Phasentheorie, wie z. B. Rayleighs und seiner Schule, sich fast ausschließlich mit Tönen befaßten, gingen v. Hornbostel und Wertheimer von Versuchen mit kurzen Geräuschen aus. Sie stellten fest, daß der Seitenwinkel, in dem ein Schall gehört wird, gesetzmäßig abhängig ist von der Zeitdifferenz Δt, mit der der gleiche Reiz auf das eine und andere Ohr wirkt. Ist $\Delta t = 0$, so wird die Schallquelle als in der Medianebene liegend empfunden. Dieser Eindruck bleibt erhalten, solange Δt kleiner als etwa 0,00003 sec ist. Wird Δt größer als dieser Schwellenwert, so erscheint die Schallquelle immer stärker seitlich auf der Seite des zuerst erregten Ohres, bis bei $\Delta t \sim 0,0006$ sec der Eindruck größter Seitlichkeit (90^0) auftritt und für alle $\Delta t > 0,0006$ sec im allgemeinen erhalten bleibt, bis die Zeitdifferenzen so groß werden, daß der einheitliche Richtungseindruck verschwindet und das Nacheinander empfunden wird.

Allen Werten von Δt zwischen 0 und 0,0006 sec entsprechen ganz bestimmte subjektive Schallrichtungen zwischen 0 und 90^0. Der Schwellenwert $\Delta t = 0,00003$ sec entspricht einem Schallweg in Luft von etwa 1 cm, während in $\Delta t = 0,0006$ sec der Schall einen Weg von $k = 21$ cm zurücklegt. Man würde zunächst vermuten, daß diese Strecke dem Ohrabstand oder etwa dem halben Kopfumfang entspricht. Tatsächlich ist dies nicht der Fall; k ist eine empirische Konstante, deren eigentliche Bedeutung noch unbekannt ist. Wenn man zwei künstliche Empfänger, etwa Trichter oder Mikrophone, benutzt und durch getrennte Leitungen mit den Ohren verbindet, so hat man sie in einer Entfernung von $k = 21$ cm voneinander anzuordnen, wenn man die Schallrichtungen subjektiv genau so empfinden will, wie beim Hören mit freien Ohren. $k = 21$ cm nennen wir die Basis des natürlichen Hörens. Die Basis k, die Schallwegdifferenz Δs und die Schallrichtung α sind durch die Beziehung $\sin\alpha = \frac{\Delta s}{k}$ oder $\sin\alpha = \frac{\Delta t \cdot c}{k}$ verbunden, wo c die Schallgeschwindigkeit bedeutet.

Wenn man nun die beiden Empfänger in einem Abstand von $b > 21$ cm voneinander anordnet, so entsprechen naturgemäß einem Winkel α jetzt größere Schallwegdifferenzen, also auch größere Zeitdifferenzen und infolgedessen stimmt die subjektive Schallrichtung φ nicht mehr mit der wahren überein; die Schallquelle erscheint stärker seitlich, als sie in Wirklichkeit ist. Der Subjektivwinkel ist gegeben durch $\sin\varphi = \frac{b \sin\alpha}{k}$. Hat man etwa eine Schallrichtung, die beim Hören mit der 21 cm-Basis, also beim normalen freiohrigen Hören, eine so kleine Zeitdifferenz ergibt, daß sie nicht mehr von der Geradeausrichtung unterschieden werden kann, so kann man durch Wahl einer größeren Basis erreichen, daß die Zeitdifferenzen so groß werden, daß man deutlich die Abweichung von der Geradeausrichtung empfindet. Auf diesem Gedanken haben die Herren v. Hornbostel und Wertheimer eine Methode zur Verfeinerung der Richtungsbestimmung aufgebaut, die während des Krieges sehr viel angewandt worden ist.

Sie benutzen bei dieser Methode ferner die bekannte Tatsache, daß die Unterschiedsempfindlichkeit für Richtungen nahe der Geradeausrichtung wesentlich größer ist als für stark seitliche Eindrücke. In der Mitte kann man mit freiem Ohr Abweichungen von etwa 1^0 noch feststellen, während ganz seitlich etwa erst 10^0 den Eindruck einer Abweichung erwecken. Um Schallrichtungen zu bestimmen, orientiert man

sich beim freiohrigen Hören bekanntlich so, daß die Schallquelle einem geradevoraus erscheint. Man stellt sich so ein, daß die Zeitdifferenz gleich o wird, d. h. man wendet eine Nullmethode an.

Eine Drehung des Beobachters selbst ist bei Benutzung künstlicher Empfänger nicht erforderlich. Man kann vielmehr den Ausgleich der Zeitdifferenzen (die Kompensation) dadurch bewirken, daß man entweder die Empfängerbasis dreht oder zwischen Empfänger und Ohren in ihrer Länge veränderliche Schallwege einschaltet.

Da bei diesen Kompensationsvorgängen die Schallwegunterschiede und damit die Zeitdifferenzen zwischen dem Eintreffen der Schallwellen an den Ohren kontinuierlich verkleinert werden, hat man beim Hören den Eindruck, als wandere die ursprünglich seitlich erscheinende Schallquelle allmählich zur Mitte. Die Strecke, die zur Kompensation erforderlich ist, bildet direkt ein Maß für die wahre Schallrichtung.

Zu beachten ist, daß dieselbe Zeitdifferenz entsteht, wenn der Schall die Empfänger von vorn oder unter demselben Winkel von hinten trifft. Jede Messung enthält also zunächst eine Zweideutigkeit. Diese kann man beheben durch Benutzung einer zweiten Meßbasis, die mit der ersten einen Winkel (z. B. 90°) bildet.

Ich habe hier einen solchen Kompensator aufgebaut und bitte Sie, sich nachher das Wandern der Schallquelle anzuhören. Zwei Telephone werden gleichzeitig durch ein an einer Uhr sitzendes Mikrophon erregt. Durch Drehen des Kompensators verändern Sie die Weglängen zwischen den Telephonen und den Ohren und hören je nach dem Drehsinn die Uhr nach rechts oder links hinüberwandern. Die Einstellung auf Mitteneindruck gelingt auch dem ungeübten Beobachter ohne weiteres.

Diese Methode der Richtungsbestimmung ist natürlich nicht auf Luftschall beschränkt. Sie ist z. B. auch für Unterwasserschall anwendbar. Man muß hierbei jedoch bedenken, daß die Schallgeschwindigkeit im Wasser etwa 4,3 mal so groß ist als in Luft. Um dieselben Verhältnisse zu schaffen wie beim freiohrigen Hören in Luft, hat man also die Empfänger nicht in 21 cm, sondern in $4,3 \times 21$ cm Entfernung voneinander anzuordnen. Mit solchen schon von Bowlker[1]) angegebenen „Wasserschädeln" kann man Schallrichtungen im Wasser subjektiv genau so richtig bestimmen wie beim freien Hören in Luft. In der letzten Kriegszeit hat man auf unseren Unterseeboten solche Apparate mit Kompensatoren tatsächlich eingebaut und auch auf der Gegenseite sind sie in großem Umfange zur Richtungsbestimmung von Schiffsschraubengeräuschen benutzt worden. Ich bin bei den Atlas-Werken, Bremen damit beschäftigt, die Methode jetzt auch der Handelsschiffahrt nutzbar zu machen.

Wenn man beim Baden mit untergetauchtem Kopf ohne künstliche Empfänger Schallrichtungen zu bestimmen versucht, so findet man, wie es die Theorie verlangt und wie ich feststellte, daß bei Bewegen der Schallquelle im Halbkreis von 90° rechts bis 90° links nur der Eindruck einer Wanderung von etwa 20° rechts nach etwa 20° links entsteht. Im Wasser empfindet man eine querabliegende Schallquelle nicht 90° seitlich, sondern schräg vorwärts. Stark seitliche Eindrücke treten überhaupt nicht auf. Freilich ist die Lokalisation an sich schwierig, weil die Knochenleitung stärker mitwirkt als beim Hören in Luft und es infolgedessen nur schwer gelingt, das Schallbild außerhalb des Kopfes zu lokalisieren. Das Schallbild erscheint im Kopfe; bei Klopfgeräuschen empfindet man das Klopfen auf der Schädeldecke.

So weit ganz kurz die Phänomene des Richtungshörens. Ich muß mich im übrigen mit einem Hinweis auf die grundlegende Arbeit v. Hornbostels und Wertheimers[1]) begnügen, in der sich die Herren auch mit der Intensitäts- und Phasentheorie auseinandersetzen.

Intensitätsunterschiede spielen nach der Zeittheorie für die Entstehung von Richtungseindrücken keine wesentliche Rolle. Für so geringe Intensitätsunterschiede, wie sie beim freiohrigen Hören auftreten, trifft dies zweifellos zu. Ich habe jedoch bei Versuchen mit Apparaten zur Richtungsbestimmung, wie sie in der Unterwasserschalltechnik benutzt werden, feststellen müssen, daß bei großen Unterschieden der Intensität sich doch eine gewisse Veränderung des Richtungseindrucks bemerkbar macht. Bei Versuchen mit einer bestimmten Apparattype, bei denen der von einem Mikrophon auf zwei Telephone verteilte und durch 6 cm weite Rohre den Ohren zugeführte Schall auf einer Seite durch Parallelohm geschwächt wurde, ergab ein Intensitätsverhältnis von etwa 1 : 10 bereits eine merkbare Abweichung von der Geradeausrichtung nach der Seite des stärker erregten Ohres. Diese wurde bei weiterer Schwächung immer größer, bis etwa 20°. Bei einem Verhältnis von etwa 1 : 5000, bei dem der Schall auf dem geschwächten Telephon kaum noch zu hören

1) T. J. Bowlker, Brit. Patent 15102, 1910.

1) v. Hornbostel u. Wertheimer, Akad. d. Wissensch. **20**, 338—306, 1920.



war, sprang der Schall ganz in das stark erregte Ohr über. Die durch einseitige Intensitätsschwächung erzeugten Abweichungen bis etwa 20° konnten, durch Schallwegkompensation, d. h. durch Zeitkompensation wieder auf Mitteneindruck zurückgeführt werden. Umgekehrt konnten Seiteneindrücke, die durch Schallwegdifferenzen erzeugt waren, durch Veränderung des Intensitätsverhältnisses auf Mitteneindruck zurückgeführt werden. Es hatte den Anschein, als wären Unterschiede der Intensität Unterschieden in der Zeit der Erregung beider Ohren äquivalent. Die zahlenmäßigen Werte zeigten in verschiedenen Versuchsreihen und für verschiedene Beobachter zum Teil sehr erhebliche Abweichungen; Ermüdungserscheinungen und Übung spielten eine große Rolle und auch eine Abhängigkeit von der Apparattype wurde festgestellt. Diese Erscheinungen bedürfen also noch sehr der Klärung. Immerhin ging aus den Versuchen hervor, daß größere Intensitätsunterschiede unter Umständen imstande sind, Richtungseindrücke vorzutäuschen und daß bei dem vorliegenden Versuche die Reize im Sinne der Zeittheorie nicht mehr als gleich anzusprechen waren, wenn sich die Schallintensitäten etwa wie 1 : 10 verhielten.

Bei reinen Tönen müssen, da sich die gleichen Phasen in gewissen kleinen Zeitabschnitten, die durch die Frequenz bedingt sind, wiederholen, mehrfache Richtungseindrücke auftreten, wenn die halbe Wellenlänge kleiner als 21 cm ist, d. h. für $n > 800$. Die Zeittheorie erklärt die Beobachtungsergebnisse Bowlkers[1]) und anderer Anhänger der Phasentheorie einwandfrei, während dies der Phasentheorie nicht gelingt. Diese behauptet bekanntlich, daß der an den Ohren jeweils gleichzeitig bestehende Phasenzustand als solcher die Richtungseindrücke erzeugt, daß z. B. für 90° Phasendifferenz der Eindruck von 90° Seitlichkeit für alle Frequenzen erweckt wird. Die von Hartley[2]) ausgerechneten Werte der Phasenunterschiede an beiden Ohren und die daraus sich ergebenden Richtungseindrücke stehen mit der Zeittheorie im Einklang.

Wenn man nach einem alten Versuch von S. P. Thompson[3]) von zwei gleichsinnig gepolten Telephonen das eine kommutiert, so hat man den Eindruck, als spalte sich das ursprünglich einheitlich in der Mitte liegende Schallbild fächerförmig nach beiden Seiten auseinander. Da ein einheitliches Schallbild den Eindruck größerer Deutlichkeit und größerer Lautstärke erweckt, hat man also beim gleichzeitigen Hören mit zwei Telephonen diese gleichsinnig zu polen. Das Auftreten eines einheitlichen Schallbildes in der Mitte bietet direkt ein Kriterium dafür, ob die Polung gleichsinnig ist.

Ich möchte nun noch auf einige Anwendungen des Richtungshörens eingehen:

Wenn die Richtungseindrücke tatsächlich in den Zeitunterschieden in der Erregung beider Ohren durch den gleichen Reiz ihre Ursache haben — und es kann hieran kaum noch ein Zweifel bestehen —, so haben wir offenbar in unseren Gehörorganen ein äußerst empfindliches Chronometer und wir können diese Fähigkeit zur Messung kleinster Zeiten bis herab zur Größenordnung von $1 \cdot 10^{-5}$ sec benutzen.

Ich habe bereits in einer Notiz in dieser Zeitschrift[1]) auf die Möglichkeit zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten eines schallleitenden Mediums mit Hilfe der Richtungshörmethode hingewiesen.

Eine andere Anwendung bietet die Messung von Schallgeschwindigkeiten und der Ansprechzeiten von Relais, worauf v. Hornbostel und Wertheimer schon 1915 hingewiesen haben.

Wenn man von zwei gleich langen Rohren das eine mit Luft, das andere z. B. mit Leuchtgas füllt und mittels zweier durch dasselbe Mikrophon erregter Telephone den gleichen Schall durch die Rohre zu den beiden Ohren leitet, hat man deutlich einen Seiteneindruck nach der Seite, auf der Leuchtgas in den Schallweg eingeschaltet ist. Mit Hilfe eines Kompensationsapparates kann dieser Seiteneindruck auf Mitteneindruck zurückgeführt werden und aus der hierzu erforderlichen Weglänge die Schallgeschwindigkeit im Verhältnis zur Luft leicht berechnet werden.

Um die Ansprechzeiten von Relais festzustellen, kann man folgendermaßen verfahren: Man schließt beim Einschalten des Relais den Stromkreis eines mit dem einen Ohr verbundenen Telephons und erzeugt hierdurch einen Schallimpuls (Knacken). In derselben Weise läßt man im Augenblick des Ansprechens des Relais einen Stromstoß durch ein mit dem anderen Ohr verbundenes Telephon fließen. Die beiden Schallimpulse geben einen einheitlichen Richtungseindruck, wenn die Zeitdifferenz der Größe nach in den Bereich des Richtungshörens fällt.

Schließlich möchte ich noch auf eine Methode der Entfernungsmessung mit Hilfe von Schallimpulsen hinweisen, die dann von Wert ist, wenn eine Strecke zu messen ist, von der nur Anfangs- und Endpunkt zugänglich sind. Man ordnet an diesen beiden Stellen zwei Schall-

1) T. J. Bowlker, Phil. Mag. **15** (6), 318, 1908.
2) R. V. L. Hartley, Phys. Rev. **2** (13), Nr. 6, 373, 1919.
3) S. P. Thompson, Phil. Mag. (5), **6**, 391, 1878.

1) W. Kunze, diese Zeitschr. **21**, 437, 1920.



empfänger an und verbindet sie durch gleich lange Schalleitungen mit den Ohren. Dann schickt man von einer geeignet angeordneten Schallquelle möglichst stark gedämpfte Schallimpulse aus, die die Empfänger nacheinander erreichen und steigert kontinuierlich die Frequenz der Impulse. Ein einheitlicher Mitteneindruck wird offenbar dann auftreten, wenn die Frequenz der Impulse so bemessen ist, daß der eine Impuls gerade in dem Augenblick den der Schallquelle näheren Empfänger erreicht, in dem der andere Empfänger vom vorangegangenen Impuls erreicht wird. Die Frequenz n bildet dann direkt ein Maß für die Entfernung a der Empfänger voneinander. Diese ist $a = \frac{c}{n}$, wo c die Schallgeschwindigkeit bedeutet. Steigert man, nachdem man den ersten Mitteneindruck erhalten hat, die Frequenz weiter, so wird bei der doppelten Frequenz wieder ein Mitteneindruck auftreten usf. Während des kontinuierlichen Veränderns der Frequenz hört man nacheinander: Doppelschlag, Auftreten eines einheitlichen Schallbildes auf der einen Seite, Wandern desselben nach der Mitte, Hindurchgehen durch die Medianebene nach der anderen Seite und schließlich wieder Doppelschlag. Ich habe bei Messungen von Entfernungen im Wasser guten Erfolg mit dieser Methode gehabt und glaube, daß sie noch nach vielen Seiten hin ausbaufähig ist.

Ich hoffe, an diesen wenigen Beispielen gezeigt zu haben, wie das Richtungshören auch als Methode zur Kurzzeitmessung verwendet werden kann und vielleicht regen diese Ausführungen dazu an, das Gehörorgan als Zehn- und Hunderttausendstel-Sekundenuhr bei physikalischen Messungen zu verwenden.

E. Alberti und G. Zickner, Kurvenform und Phase der Schwingungen in Röhrensendern. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Mit Hilfe der Braunschen Röhre wurde eine qualitative Prüfung der theoretischen Ableitungen über die Kurvenformen und Phasenverhältnisse im fremderregten Röhrensender durchgeführt. Die Untersuchung geschah bei Hochfrequenz ($\lambda = 18000$, 6000, 2000 und 1000 m) nach der Methode der Lissajousschen Figuren mit Hilfe sin-förmiger Hilfsfelder durch elektrische und magnetische Ablenkung des Kathodenstrahls. Besondere Vorsichtsmaßregeln am Braunschen Rohr, wie elektrische Abschirmung der Kondensatoren und eine Spezialwicklung der Spulen, welche zur magnetischen Ablenkung des Strahlenbündels dienen, verbürgten ein einwandfreies Arbeiten bei Hochfrequenz.

In einem vorbereitenden Teil der Arbeit wurde der Einfluß der verschiedenen maßgebenden Faktoren, wie Kombinationswiderstand, Gitterspannung, Gittervorspannung und Anodenspannung auf die Leistung des Senders ermittelt. In Abhängigkeit vom Kombinationswiderstand ergibt sich in Übereinstimmung mit der Theorie ein günstigster Wert. Bei Beobachtung der Leistung in Abhängigkeit von der Gitterspannung zeigte sich dagegen eine Abweichung von der Theorie. Das Maximum, welches die Leistung mit wachsender Gitterwechselspannung nach der Theorie durchlaufen soll, konnte experimentell nicht beobachtet werden. Dieser Unterschied wird zurückgeführt auf die in der Theorie nicht berücksichtigte Erhöhung der Fadentemperatur beim Betrieb des Senders. Der sich dem Heizstrom überlagernde Emissionsstrom bewirkt ein Ansteigen der mittleren Fadentemperatur und damit wieder eine Erhöhung des Emissionsstromes selbst. Gleichzeitig wachsen Anodenstrom, Schwingungsstrom und Leistung.

Die Untersuchung der Kurvenformen und Phasen erstreckte sich auf Schwingungsstrom, Anodenspannung, Gitterspannung, Anodenstrom und Gitterstrom. Der Sender wurde im allgemeinen bei dem für die Leistung im Schwingungskreis günstigsten Kombinationswiderstand untersucht. Verändert wurden Anodenspannung, Gitterwechsel- nebst -Vorspannung, Eigenwelle und Kombinationswiderstand des Schwingungskreises, Heizung der Röhre sowie die Betriebswellenlänge. Bei allen Veränderungen ergaben die Kurven nach Form und Phase im wesentlichen eine Bestätigung der theoretischen Ableitungen. Außer der Einsattelung des Anodenstromes beim Auftreten von Gitterstrom wurde insbesondere die von Moeller abgeleitete, bei Verstimmung des Senders gegen die Erregerfrequenz auftretende Phasenverschiebung zwischen Gitter- und Anodenspannung und die daraus folgende Änderung der Kurvenform des Anodenstromes beobachtet. Abweichungen von der Theorie zeigten sich nur in wenigen Punkten. Die in den Berechnungen vorausgesetzte sin-Form der Gitterspannung ist beim Auftreten von Gitterstrom nicht mehr realisierbar. Die Kurve der Gitterspannung ist in diesem Falle infolge des induktiven Spannungsabfalls in der Gitterspule unsymmetrisch.

Die beiden Maxima des Anodenstromes, welche beim Auftreten stärkerer Gitterströme die Einsattelung einschließen, sollten nach der

Theorie bei Resonanz des Senders mit der Erregerfrequenz gleichgroß sein. Infolge der Abweichung der Gitterspannung von der sin-Form sind sie jedoch ungleich.

Die Erhöhung der Fadentemperatur durch den Emissionsstrom, die bei den Leistungskurven eine Abweichung von dem theoretisch geforderten Verlauf verursacht, äußert sich an der Kurve des Anodenstromes durch eine Erhöhung des Sättigungswertes mit wachsender Gitterspannung. Die Zunahme des Sättigungswertes wurde mit dem Braunschen Rohr deutlich beobachtet.

Eine Erscheinung, die von der Theorie nicht berücksichtigt ist und auch kaum rechnerisch erfaßt werden kann, ist das Auftreten der erst bei hohen Frequenzen nachweisbaren Ströme, welche die verteilten Kapazitäten der Apparatur aufladen. Durch geeignete Anordnung der Senderteile lassen sich diese Ladeströme wohl reduzieren, aber nicht beseitigen.

H. Wigge (Cöthen), Ein mechanisches Modell des Kettenleiters.

Das Modell des Kettenleiters, welches ich vorführen werde, besteht aus 10 Kettengliedern, die aus Federn und Pendeln zusammengebaut sind. Letztere lassen sich gegen die Schwere ausgleichen. Durch einige Handgriffe können an diesem Modell die Hauptformen des Kettenleiters dargestellt werden. Bekannt ist das mechanische Modell der homogenen Leitung, welches aus vielen gleichen gegen die Schwere ausgeglichenen Pendeln besteht, die durch Federn gekoppelt sind[1]). Dieses Modell stellt eigentlich schon einen Kettenleiter dar, die Spulenleitung. Man kann sich aber auf wenige Glieder beschränken. Den veränderlichen elektrischen Größen: Elektrizitätsmenge Q, Stromstärke i und Spannung v entsprechen Drehwinkel φ, Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ und Drehmoment D, während die elektrischen Konstanten: Ohmscher Widerstand R, Selbstinduktion L und Kapazität C durch Reibung ϱ, Trägheitsmoment K und den reziproken Wert der Direktionskraft F der Feder wiedergegeben werden. Läßt man für die Pendel nur kleine Drehwinkel zu, so kann man für das Drehmoment des unausgeglichenen Pendels setzen:

$$D = D_0 \varphi,$$

wo D_0 das maximale Drehmoment bedeutet.

1) Breisig, ETZ. 1915, S. 521, Deutsch, ebenda S. 545.

Es stellt dann $\frac{1}{D_0}$ einen weiteren Repräsentanten der Kapazität dar, von dem ebenfalls im Modell Gebrauch gemacht wird.

Man gelangt nun auf folgende Weise leicht zu einem Ansatz für den mechanischen Kettenleiter.

Die Differentialgleichung für einen Stromkreis aus Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, dem eine EMK. v aufgezwungen wird, lautet:

$$v = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt. \qquad (1)$$

Die entsprechende Gleichung für ein Pendel, das ein Drehmoment D erfährt, heißt

$$D = \varrho\frac{d\varphi}{dt} + K\frac{d^2\varphi}{dt^2} + F\cdot\varphi. \qquad (2)$$

Hierbei ist F die Summe aus dem maximalen Drehmoment des Pendels und der Direktionskraft der Feder, die etwa das Pendel in der Ruhelage festhalten will. In vektorieller Schreibweise lautet die erste Gleichung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{J}\left(\mathfrak{R} + i\omega L + \frac{1}{i\omega c}\right) = \mathfrak{J}\mathfrak{R}, \qquad (3)$$

wenn man eine sinusförmige EMK. annimmt.

Analog kann man mit der Gleichung (2) verfahren. Wir setzen die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$$

und betrachten sie ebenfalls als Vektor, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Dann wird bei sinusförmigem Drehmoment

$$\mathfrak{D} = \Omega\left(\varrho + i\omega K + \frac{F}{i\omega}\right) = \Omega\mathfrak{R}'. \qquad (4)$$

Man kann danach den Klammerausdruck als „gerichteten Bewegungswiderstand“ auffassen. Der reziproke Wert

$$\frac{1}{\mathfrak{R}'} = \mathfrak{G}'$$

gibt dann die „Bewegungsleitfähigkeit“.

Den Reihenwiderständen $\mathfrak{R}$ des Kettenleiters (Fig. 1) entsprechen die Bewegungswiderstände $\mathfrak{R}'$ der Pendel beim Modell, und den Nebenschlüssen $\mathfrak{G}$ die Kopplungsvorrichtungen $\mathfrak{G}'$. Über die Nebenschlüsse fließt ein Teil des Stromes ab, entsprechend geht in den Kopplungsvorrichtungen ein Teil der Winkelgeschwindigkeit verloren. Wir betrachten einen Teil des Modells, der aus dem $n-1$ ten und dem n ten Pendel sowie der Kopplungsvorrichtung zwischen beiden besteht (Fig. 2). Ω_{n-1} und Ω_n sind die Winkelgeschwindigkeiten beider Pendel. $\mathfrak{D}'_{n-1}$ ist das Drehmoment, das an das $n-1$ te Pendel $\mathfrak{D}_n'$

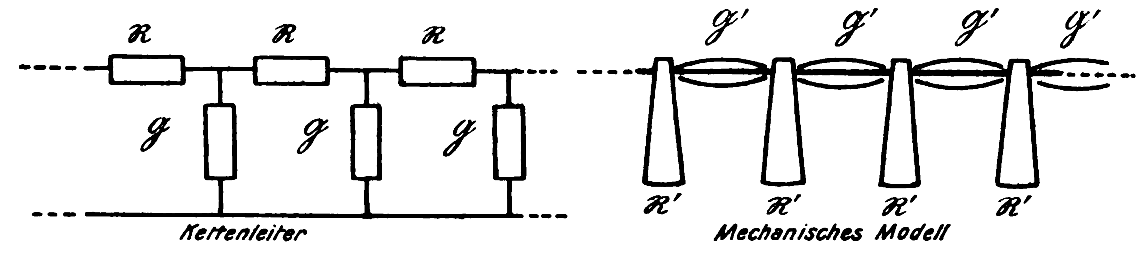


Fig. 1.

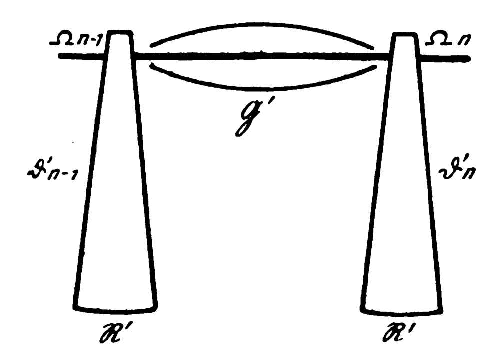


Fig. 2.

das Drehmoment, das an das *n* te Pendel angreift.

Es ist dann

$$\mathfrak{D}_n' = \mathfrak{D}'_{n-1} - \Omega_{n-1}\,\mathfrak{R}',$$
$$\mathfrak{D}_n'\,\mathfrak{G}' = \Omega_{n-1} - \Omega_n,$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{D}'_{n-1} - \tfrac{1}{2}\,\Omega_{n-1}\,\mathfrak{R}' = \mathfrak{D}_{n-1}$$
$$\text{und}\quad \mathfrak{D}'_n - \tfrac{1}{2}\,\Omega_n\,\mathfrak{R}' = \mathfrak{D}\ ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{n-1} - \mathfrak{D}_n &= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{R}'\,(\Omega_n + \Omega_{n-1})\\ \Omega_{n-1} - \Omega_n &= \mathfrak{G}'\,(\mathfrak{D}_{n-1} - \tfrac{1}{2}\,\Omega_{n-1}\,\mathfrak{R}').\end{aligned}\qquad(5)$$

Diese Gleichungen entsprechen durchaus den Differenzengleichungen des Kettenleiters zweiter Art. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Gleichungen für die mechanische Kette erster Art entwickeln. Diese ist aber nur für zwei Kettenformen mechanisch reproduzierbar wegen des Antriebs, während die Kette erster Art leicht herzustellen ist. Man braucht nur das erste und letzte Pendel mit dem halben Bewegungswiderstand zu versehen.

Über das Schalten der Bewegungswiderstände ist noch einiges zu sagen. Wie im elektrischen Stromkreis durch alle in Serie geschalteten Widerstände dieselbe Elektrizitätsmenge fließt, müssen im mechanischen Modell alle in Serie geschalteten Bewegungswiderstände gleichzeitig dieselbe Drehung ausführen. Bei parallel geschalteten Bewegungswiderständen muß dann entsprechend die Gesamtablenkung gleich der Summe der Drehwinkel der einzelnen Widerstände sein, was man z. B. erreichen kann durch Aneinanderhängen mehrerer Pendel.

In der folgenden Tabelle (Fig. 3) sind die wichtigsten Ketten und ihre mechanischen Modelle schematisch dargestellt. Der Index 1 bezeichnet die Reihenschaltung, der Index 2 den Nebenschluß.

Die Spulenleitung.

Das Modell der Spulenleitung ist bekannt. Die Pendel sind gegen die Schwere ausgeglichen, ihr Trägheitsmoment kann verändert werden. Die Kette wird undurchlässig für

$$\omega > 2\sqrt{\frac{F_2}{K_1}}\,.$$

Der Gleichstrombetrieb kann realisiert werden, indem man die Ketten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit antreibt. Die Pendel nehmen der Reihe nach die Bewegung auf, bis die ganze Kette mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotiert.

Die Kondensatorleitung (Fig. 4).

Die Pendel werden durch auf der Achse befestigte Spiralfedern festgehalten. Diese Spiralfedern entsprechen den Reihenkondensatoren. Die Kopplung geschieht durch lange Kopplungspendel, die in der Mitte zwischen je zwei Pendeln so auf die Achse aufgesetzt sind, daß sie sich in derselben Weise um die Achse drehen können wie die Pendel. Die Kopplungspendel tragen am untern Ende einen horizontal drehbaren Doppelarm, der an jedem Ende ein Auge besitzt, in welchem die Pendelstange gleitet. Diese Doppelarme sind storchschnabelartig ausgebildet, damit sie sich reibungslos verlängern und verkürzen können. Die Kopplungspendel tragen oberhalb der Achse ein Gegengewicht, welches gegen den Dreharm ausgeglichen ist, so daß das Kopplungspendel kein Drehmoment besitzt. Werden zwei benachbarte Pendel um die Winkel φ_{n-1} und φ_n abgelenkt, so erfährt das Kopplungspendel zwischen ihnen eine Drehung um $\frac{\varphi_{n-1} + \varphi_n}{2}$. Die kinetische Energie des

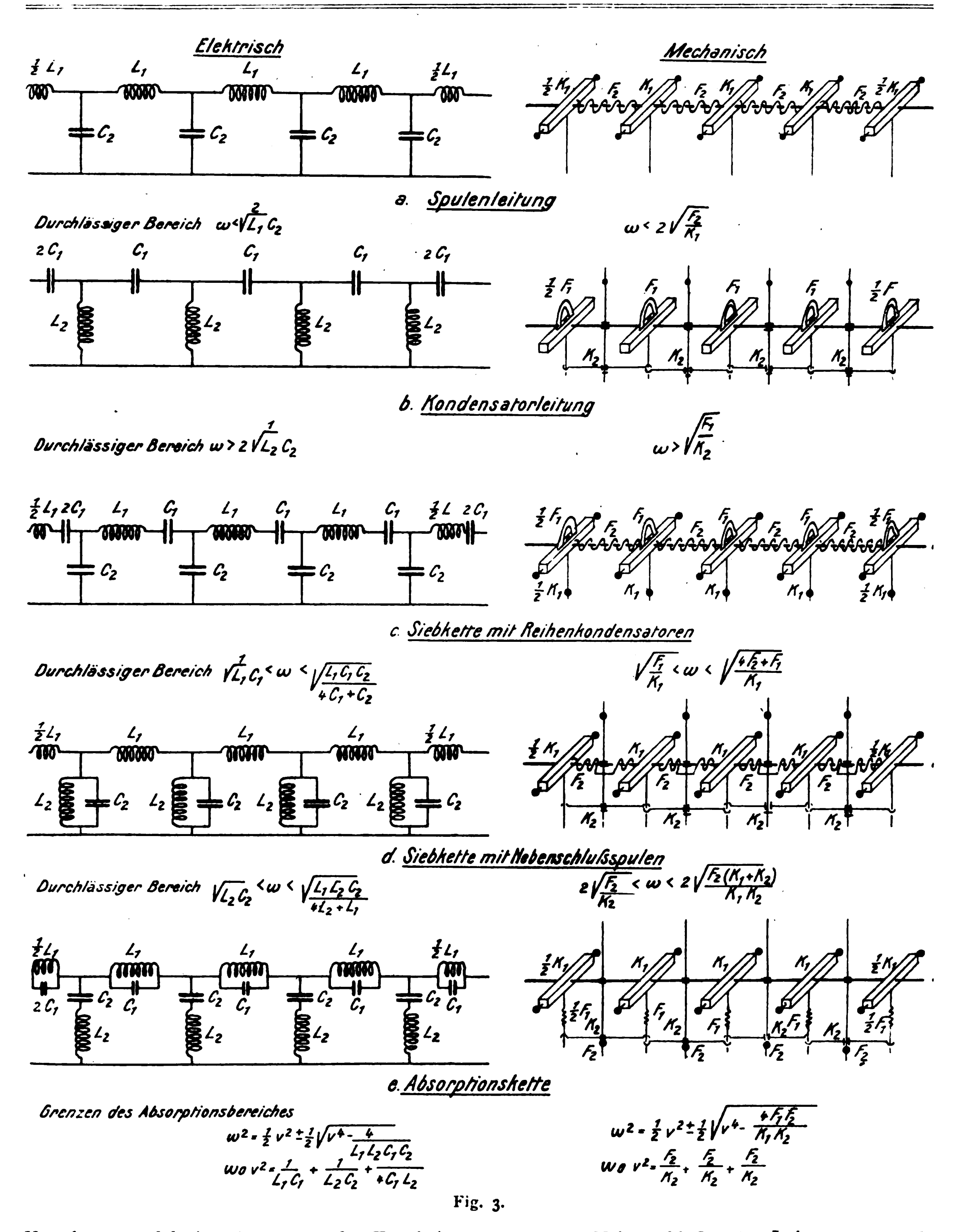


Fig. 3.

Kopplungspendels ist also, wenn das Trägheitsmoment des Dreharms um die Pendelstange vernachlässigt wird:

$$E_K = \frac{K_2}{8}\left(\frac{d\varphi_{n-1}}{dt} + \frac{d\varphi_n}{dt}\right)^2.$$

Das der Nebenschlußspule L_2 entsprechende Trägheitsmoment ist dann $\frac{1}{4}K_2$. Die Kette wird undurchlässig für

$$\omega < \sqrt{\frac{F_1}{K_2}}.$$

In Wirklichkeit entspricht diese mechanische Kette nicht ganz dem elektrischen Vorbild, weil die Pendel auch noch Trägheit besitzen. Im elektrischen Schaltschema müßten dann noch Spulen L_1 in Reihe mit den Kondensatoren C_1

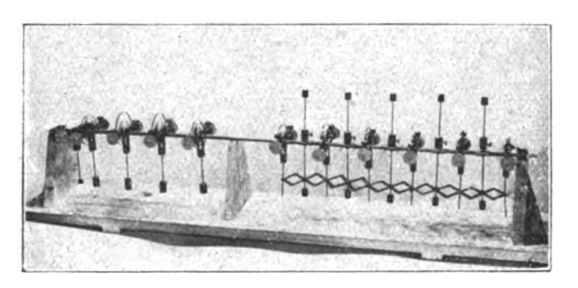


Fig. 4.

geschaltet werden. Elektrisch würde sich das so äußern, daß die Kette für Frequenzen, die oberhalb $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ liegen, wieder undurchlässig wird. Nun ist das Trägheitsmoment so klein, daß diese Frequenz oberhalb 30 liegt, also mechanisch kaum zu erreichen ist.

Die Siebkette mit Reihenkondensatoren.

Die Reihenkondensatoren werden wie bei dem Modell der Kondensatorleitung von Spiralfedern dargestellt, die an der Achse befestigt sind und die Pendel angreifen. Die Pendel bekommen durch Gewichte ein größeres Trägheitsmoment, auch brauchen sie nicht gegen die Schwere ausgeglichen zu sein. Sonst ist die Anordnung wie bei der Spulenleitung. Der durchlässige Bereich ergibt sich aus

$$\sqrt{\frac{F_1}{K_1}} < \omega < \sqrt{\frac{4F_2 + F_1}{K_1}}.$$

Die Siebkette mit Nebenschlußspulen.

Diese Siebkette entsteht aus der Kondensatorleitung, indem einmal die Reihenkondensatoren durch Spulen ersetzt, also im Modell, indem die Spiralfedern von den Pendeln entfernt und diese durch Gewichte belastet sowie gegen die Schwere ausgeglichen werden. Ferner ist eine den Kondensatoren C_2 entsprechende Kopplung außerdem anzubringen. Das ist dieselbe Kopplung wie bei der Spulenleitung. Sie wird hier bewerkstelligt durch um die Achse gewundene Spiralfedern, die in der Mitte eine Ausbuchtung besitzen, um die Kopplungspendel nicht zu stören.

Der durchlässige Bereich dieser Kette liegt bei

$$2\sqrt{\frac{F_2}{K_2}} < \omega < 2\sqrt{\frac{F_2(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}}.$$

Die Absorptionskette.

Eine Absorptionskette, also einen Kettenleiter, der einen bestimmten Frequenzbereich nicht hindurchläßt, bekommt man elektrisch nach dem Schaltschema (Fig. 3e). Wenn man die Ohmschen Widerstände außer acht läßt, erhält man

$$R = \frac{i\omega L_1}{1 - \omega^2 C_1 L_1}$$

$$S = \frac{i\omega C_2}{1 - \omega^2 C_1 L_1}$$

$$\cos\gamma = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 L_1 C_2}{(1 - \omega^2 C_1 L_1)(1 - \omega^2 C_2 L_2)} = A.$$

Nun wird $\beta = 0$ für $[A] < 1$. Die Frequenzen, welche den Absorptionsbereich begrenzen, ergeben sich dann aus

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\nu^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\nu^4 - \frac{4}{L_1 L_2 C_1 C_2}},$$

wo

$$\nu^2 = \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 C_1 L_2}$$

gesetzt ist.

Der Absorptionsbereich wird umso enger, je kleiner der Wurzelausdruck wird. Auch diese Kette läßt sich mechanisch durch das Modell wiedergeben. Der Parallelschaltung von L_1 und C_1 entspricht eine Anordnung, bei der die Pendelstange des trägen Pendels ersetzt ist durch eine Feder, an welcher die Kopplungsvorrichtung angreift. Die Serienschaltung $L_2 C_2$ wird sehr einfach durch ein Drehmoment realisiert, welches man dem Kopplungspendel durch ein am untern Ende angeschraubtes Zusatzgewicht erteilt. Ist P das Gewicht und a sein Abstand von der Drehachse, so läßt sich für kleine Drehwinkel die potentielle Energie des Kopplungspendels darstellen durch

$$E_p = \frac{P \cdot a}{8}(\varphi_{n-1} + \varphi_n)^2.$$

Dem Kondensator C_2 entspricht also hier das Drehmoment $\frac{P \cdot a}{4}$.

Die Grenzen des Absorptionsbereichs ergeben sich aus

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\nu^2 \pm \sqrt{\nu^4 - 4\frac{F_1 F_2}{K_1 K_2}}$$

wo

$$\nu^2 = \frac{F_1}{K_1} + \frac{F_1 + F_2}{K_2}.$$

Rein sinusförmige Bewegungen kann man erzielen mittels motorischen Antriebs, wenn man den Zapfen eines Antriebspendels in einer

geeignet gestalteten Ausnehmung einer Scheibe gleiten läßt, die auf der Achse des Motors befestigt ist. Doch kann man die typischen Erscheinungen auch sehr einfach durch Handantrieb erreichen, wenn man zwei Sekundenschläger auf die errechneten kritischen Frequenzen einstellt. Man hat dann zwei Frequenzmarken, nach denen man sich leicht richten kann.

Das Modell wurde hergestellt vom Institutsmechaniker Lickefett am Polytechnikum Cöthen und ist dem Verfasser patentamtlich geschützt.

H. Dießelhorst, Einige Versuche aus der Mechanik.

1. Modell für die kritische Tourenzahl.

An Stelle des Rades ist ein hölzerner Ring genommen. Die Drehachse ist vertikal, so daß die Schwere keine Rolle spielt. Der Ring kann natürlich nicht auf einer Welle sitzen. Die Kräfte, die ihn in die zentrische Lage bringen, werden von zwei Spiralfedern ausgeübt, die an entgegengesetzten Enden eines Durchmessers nach außen angreifen und andererseits an den Schenkeln eines U-förmigen Halters befestigt sind (Fig. 1). Der Halter kann auf eine Zentri-

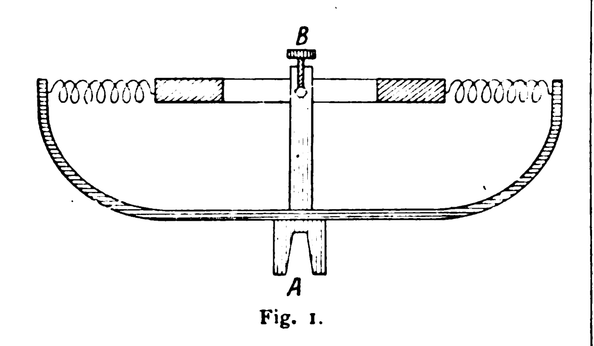


Fig. 1.

fugalmaschine gesetzt und dann um seine Achse AB gedreht werden. Der Halter trägt in der Achse einen festen Stab B, der durch den Ring hindurchtritt und für diesen als Anschlag dient. Die Biegungsschwingungen der Welle sind bei diesem Apparat durch Federschwingungen ersetzt, die relativ große Schwingungsdauer haben, so daß die kritische Tourenzahl niedrig liegt.

Dreht man den Apparat an, so legt sich bei der kritischen Tourenzahl der Ring an den Anschlag und kommt nicht wieder los. Will man beim Überschreiten der kritischen Tourenzahl den Ring zentrisch halten, so muß man einen engeren, nachgiebigen, die Schwingungen dämpfenden Anschlag verwenden, z. B. indem man ein paar Blätter Papier zu einem Rohr zusammenrollt und dieses von oben in die Öffnung des Ringes hält, so daß die Innenwand des Ringes an dem losen Papier schleift. Nach Überschreiten der kritischen Tourenzahl kann man das Papier herausziehen und der Ring rotiert stabil, fast freischwebend, nur von den schwachen Federn gehalten.

Wegen der Unsymmetrie der von Federn ausgeübten rücktreibenden Kraft um die Rotationsachse entspricht der Apparat nicht ganz dem Fall eines auf einer Welle sitzenden Rades, der zuerst von A. Föppl theoretisch aufgeklärt wurde. Herr Prandtl machte mich darauf aufmerksam, daß der Apparat dagegen ganz einem Fall entspricht, der von ihm gelegentlich einer Untersuchung über Laval-Turbinen behandelt wurde. Da die rücktreibende Kraft in Richtung der Federn und senkrecht dazu verschieden ist, so treten zwei Eigenschwingungen und dementsprechend zwei kritische Tourenzahlen auf. Und in dem ganzen Bereich dazwischen ist die Rotationsbewegung instabil. Daher auch die ungewöhnlich große Schwierigkeit, bei dem Apparat die kritische Tourenzahl zu überschreiten.

Durch einen kleinen Stoß kann man über die Rotationsbewegung Pendelschwingungen lagern, die sich leicht wieder dämpfen lassen, wenn man z. B. einen Papierstreifen, einen Gummischlauch, Bleistift oder ähnliches am Innenrand des Ringes schleifen läßt. Solche Pendelungen vergrößern sich auch von selbst, öffnen sich und wachsen bei der geringen Dämpfung an, bis sich der Ring an den Anschlag legt, womit die Stabilität der Bewegung aufhört. Durch eine geeignete Dämpfungsvorrichtung, z. B. einen aufgesetzten großen Papierzylinder, der Luftdämpfung bewirkt, kann man das Anwachsen der Pendelungen begrenzen.

Um mit dem Modell zeigen zu können, daß die Stabilität der Rotation an die nötige Bewegungsfreiheit gebunden ist, läßt sich ein Freiheitsgrad aufheben. Dazu gibt man dem Ring eine Führung längs einer dünnen Stange, die sich senkrecht zu dem Anschlagstabe B in einem dazu angebrachten Loch befestigen läßt. Bei guter Zentrierung (mittels Papierschablone) läßt sich dann die Umdrehungszahl weit über die kritische steigern; aber da die Zentrierung nie vollkommen ist, überwindet schließlich doch die Zentrifugalkraft die Reibung und die Federspannung, und der Ring fliegt plötzlich gegen den Anschlag.

2. Stabilität und Freiheitsgrade.

Die eben bereits besprochene Beziehung zwischen der Stabilität einer Bewegung und der Zahl der Freiheitsgrade läßt sich sehr einfach zeigen, wenn man unten an der senkrecht gestellten Achse einer Zentrifugalmaschine ein Cardanisches Gehänge befestigt und daran eine leichte Stange hängt. Die Stange rotiert stabil, selbst wenn man sie vorher in Pendelschwingungen versetzt hat. Freilich wird die Ebene dieser Pendelschwingungen stets langsam im Sinne der Rotation gedreht werden und die Schwingung selbst sich zu einer elliptischen und kreisförmigen öffnen. Sobald aber eins der beiden Gelenke der Cardanischen Aufhängung festgeklemmt ist, tritt die stabile Rotation nicht ein, sondern die Stange schlägt sofort aus nach Art eines Zentrifugalregulators.

3. Modell zur Demonstration der trocknen und flüssigen Lagerreibung.

An der zunehmenden Verbreitung der Michell-Lager und dem Aufkommen ähnlicher Konstruktionen läßt sich die Bedeutung ermessen, die den Vorgängen im laufenden Lager zukommt, wie sie zuerst Petroff, dann Reynolds, Sommerfeld, Rayleigh, Gümbel theoretisch zu erfassen versuchten. Ein einfaches Modell, das hier die wichtigsten Tatsachen zu zeigen erlaubt, wird daher willkommen sein.

Das Rohr R läuft mit horizontaler Achse in dem Lager B (Fig. 2) und wird mittels der Schnurscheibe S angetrieben. Ein auf das Rohr gesetzter Ring bildet den Zapfen Z des Versuchslagers. Die Lagerschale L hängt auf dem Zapfen. Um die Ölzufuhr, die von oben erfolgt und bei aufliegender Lagerschale gesperrt ist, frei zu geben, kann die Lagerschale durch eine Feder nach oben gezogen werden. Ein kleiner Zapfen Z' sitzt zentrisch etwas vor dem Rohr und wird durch drei dünne Arme vom Rohr aus gehalten. Fast in gleicher Ebene mit der Vorderfläche des kleinen Zapfens sitzt an der Lagerschale eine Scheibe L' mit zentrischem Loch, dessen Durchmesser um den gleichen Betrag größer ist, als der Durchmesser des Zapfens, wie bei dem wirklichen Lager L. Liegt also Z unten auf L, so liegt auch Z' unten auf L'. Man hat dann in $Z'L'$ das Bild eines Lagers, bei dem der Spielraum verhältnismäßig groß ist im Vergleich zu dem Zapfendurchmesser, so daß man bei starker Vergrößerung durch Projektion die Bewegung des Zapfens relativ zur Lagerschale deutlich verfolgen kann. An der Bewegung der drei Arme des Zapfens kann man beim Anlaufen den Rotationssinn erkennen. Bei schnellem Lauf verschwinden im Bilde die Arme.

Läßt man das Lager trocken anlaufen, so erkennt man die Verschiebung der Auflagestelle des Zapfens entgegen der Bewegungsrichtung. Bei geschmiertem Lager (Lagerschale durch die Feder nach oben gezogen)

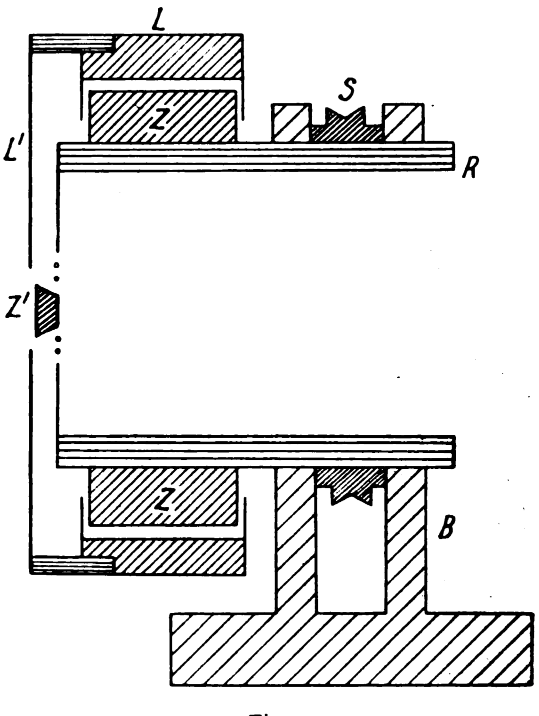


Fig. 2.

sieht man das Abheben des Zapfens von der Lagerschale und auch die von Sommerfeld errechnete und von Vieweg experimentell gemessene Seitenverschiebung des Zapfens von der ursprünglichen Auflagestelle aus im Sinne der Rotationsbewegung, also entgegengesetzt, wie bei trockenem Lauf. Insbesondere beim plötzlichen Wechseln der Drehrichtung tritt die Seitenverschiebung deutlich hervor.

4. Zwei Versuche zur Anwendung des Flächensatzes.

Der einfache Apparat für diese beiden Versuche besteht aus einem starken Kapillarrohr von etwa 20 cm Länge, das mit dem einen Ende horizontal in die Muffe eines Stativs geklemmt ist, und einem Faden, an dessen einem Ende eine kleine Kugel aus Holz oder Gummi befestigt ist. Man zieht den Faden durch das Kapillarrohr so, daß die Kugel an etwa 30 bis

40 cm Faden aus dem nicht eingespannten Ende des Rohres heraushängt.

I. Für den ersten Versuch legt man den Faden am Kapillarrohr fest, indem man ein kurzes Stück Gummischlauch über das Rohrende (und den Faden) schiebt oder den Faden einigemal um das Rohr schlingt und schleudert dann die Kugel so, daß der Faden sich vollends aufwickelt. Man beobachtet, wie bei abnehmender freier Fadenlänge die Winkelgeschwindigkeit wächst.

II. Beim zweiten Versuch nimmt man den Gummiring ab, läßt also den Faden mit der Kugel frei aus dem Rohr heraushängen und legt das Fadenende an der anderen Seite des Kapillarrohres fest (etwa mit einer Schlinge an der Muffe). Dann schleudert man die Kugel wieder so, daß sie eine Kreisbewegung vollführt, und zieht nun den Faden langsam durch das Kapillarrohr hindurch. Wiederum beobachtet man beim Verkleinern des Radius eine Zunahme der Winkelgeschwindigkeit, aber in auffällig stärkerem Maße, als bei dem vorigen Versuch.

Beim zweiten Versuch bleibt nach dem Flächensatz das Moment der Bewegungsgröße (der Drall), also $r^2\omega$ konstant, d. h. die Winkelgeschwindigkeit ist proportional $\frac{1}{r^2}$. Bei dem ersten Versuch bleibt die Energie konstant, also auch die Lineargeschwindigkeit $v = r\omega$, d. h. ω ist proportional $\frac{1}{r^2}$. Der Drall bleibt bei dem ersten Versuche nicht konstant, sondern muß abnehmen, weil die Fadenspannung, die auf die Kugel wirkt, nicht durch das Zentrum geht, sondern an einem Hebelarm gleich dem Radius des Rohres wirkt, also ein Drehmoment liefert, und zwar in rücktreibendem Sinne, so daß es den Drall verkleinert.

Arbeit leistet dagegen die Fadenspannung bei diesem Versuche nicht, weil die Bewegungsrichtung der Kugel stets senkrecht darauf steht, während bei dem zweiten Versuche die Bewegung der Kugel eine Komponente in Richtung der Fadenspannung hat, so daß Arbeit in das System hineingesteckt wird, eben die Arbeit, die man beim Durchziehen des Fadens aufbringen muß, und die als Energiezuwachs der Kugel zum Vorschein kommt.

E. Weiß (Charlottenburg), Zur mathematischen Analyse des Brillenproblems. (Autoreferat.)

Im Anschluß an die in der Zentralzeitung für Optik und Mechanik (Jg. 1920, S. 341) mitgeteilte mathematische Analyse für sphärische Brillengläser werden die entsprechenden Formeln für die zweifach symmetrischen, sphärisch-torischen Gläser entwickelt und auf die Formen mit konkaver torischer Fläche spezialisiert. Hierbei ergeben sich folgende Resultate:

1. In jeder der beiden Symmetrieebenen wachsen die astigmatischen und Refraktionsfehler im allgemeinen mit dem Quadrate des Blickwinkels.

2. In jeder der beiden Symmetrieebenen ändern sich die astigmatischen und Refraktionsfehler nach je einer durch eine Parabel darstellbaren Funktion der Durchbiegung so, daß man für jede Fehlerart im allgemeinen je zwei Durchbiegungen finden kann, bei der der betreffende Fehler null ist; aber diese Nullformen sind für verschiedene Fehlerarten verschieden, so daß man niemals alle Fehler zugleich beheben kann.

3. Es hat für die Zwecke der Praxis keinen Sinn, irgendwelche einfache Mittelwerte wie z. B. einen mittleren Refraktionsfehler oder die Differenz der astigmatischen Fehler genau auf Null zu bringen, da man dadurch entweder eine diskontinuierliche Reihe von Gläserformen bekommt oder aber für eine kontinuierliche Reihe ganz unzweckmäßig große Durchbiegungen erhält.

4. Man kann aber mittels der mitgeteilten Formeln ohne Schwierigkeit jene Durchbiegungen errechnen, bei denen das mittlere Fehlerquadrat, sei es der astigmatischen, sei es der Refraktionsfehler, ein Minimum wird.

H. Siedentopf (Jena), Über Neuerungen in der Mikroskopie. (Abgekürztes Referat.)

1. Eine besondere Schwierigkeit in der fabrikatorischen Herstellung der Mikroskopobjektive bildet die genaue Zentrierung der kleinen Linsen in ihrer Fassung. Es war früher üblich, die einzelnen Glieder durch Gewinde miteinander zu verschrauben, wodurch aber eine Fehlerquelle hinsichtlich der Zentrierung hineinkommt, die darauf zurückzuführen ist, daß sich alle Gewinde mehr oder weniger einseitig anziehen, so daß unvermeidliche kleine Reste von Zentrierungsfehlern übrigbleiben, die man durch Probieren oder gegenseitiges Kompensieren vermindern konnte. Diese Fassung ist bei Zeiß durch eine Zylinderfassung nach Hasert ersetzt worden,

so daß die Einzelteile des Objektivs in Ringe gefaßt werden, die einen genauen Außenzylinder haben. Diese Ringe werden in einem Hohlzylinder von gleichem Innendurchmesser wie die Außendurchmesser der Fassungsteile übereinandergesteckt. Hierdurch kann eine merklich größere Gewähr für genaue Zentrierung geboten werden, als es früher mit der Gewindefassung möglich war.

Bei den Okularen habe ich Neukonstruktionen angegeben, die eine Zweiteilung des Strahlenganges für besondere Zwecke benutzen, unter Anwendung einer halbdurchlässigen, halbreflektierenden Silberschicht. In diese Gruppe gehören der binokulare Tubusaufsatz für Mikroskope „Bitumi", das Doppelokular und das Vergleichsokular. Der binokulare Tubusaufsatz stellt eine Vereinfachung des Abbeschen stereoskopischen Okulars dar. Er dient dazu, ein monokulares Mikroskop in ein binokulares zu verwandeln und durch aufgesetzte Halbblenden einen stereoskopischen Effekt auch bei Beobachtungen mit nur einem Objektiv zu vermitteln. Das Doppelokular gestattet die Beobachtung desselben Präparates durch zwei Beobachter gleichzeitig bei jeder Vergrößerung, während das Vergleichsokular die in zwei verschiedenen Mikroskopen erzeugten Bilder in einem Okulargesichtsfeld zu vereinigen gestattet. Es mag erwähnt werden, daß sich mit Hilfe dieses „Bitumi" die Brownsche Molekularbewegung noch sehr viel sinnfälliger demonstrieren läßt, weil wir die Raumkomponente im Bilde dazugewinnen. Die Zick-Zack-Bewegung eines einzelnen Teilchens läßt sich sicherer verfolgen, als es bei monokularer Beobachtung möglich ist.

Außer Verbessungen in der Optik sind auch in der Mechanik solche zu nennen. Der wichtigste mechanische Teil des Mikroskops ist die Feinbewegung, von welcher verlangt wird, daß sie innerhalb eines größeren Temperaturbereiches frei von totem Gang sein soll. In der Regel benutzt man hierzu als Antrieb eine Schraube, welche aber den Nachteil hat, daß die kleinen Unterschiede zwischen Schraube und Mutter durch Fettung ausgeglichen werden müssen. Diese Fettung ist aber temperaturempfindlich und daher nicht so zuverlässig wie man es wünschen möchte. Infolgedessen wird neuerdings die Mikrometerschraube durch ein Zahnradgetriebe nach Meyer ersetzt, das den Vorteil besitzt, daß erstens die Stirnräder genauer hergestellt werden können, als es bei Schrauben möglich ist, daß zweitens zwischen den Zahnrädern keine Fettung notwendig ist, und daß man drittens bei Zahnrädern besser als bei Schrauben durch einseitigen Gegendruck einer Feder einseitige Flankenanlage erzwingen kann, um den toten Gang vollkommen aufzuheben.

2. Während die bisherigen Ausführungen mehr technischer Natur waren, sollen die folgenden mit einigen einfachen theoretischen Ergebnissen über Abbildungsfragen bekannt machen. Zur Einführung diene eine schematische Zusammenstellung der Bildentstehung im Mikroskop, die auf der Verschiedenheit der Objekte gegründet ist. Wir wollen punktförmige, lineare und flächenhafte Objekte unterscheiden. Die punktförmigen Objekte wollen wir weiterhin als klein gegen die Wellenlänge des Lichtes voraussetzen, die linearen Objekte als im Querschnitt klein hiergegen und für die flächenhaften Objekte wollen wir uns einfache Gitteranordnungen denken mit Abständen der Gitterstriche, welche noch mikroskopisch auflösbar sind. Wir wollen weiterhin zwei Fälle der Abbildung herausgreifen, einmal bei voller kreisrund begrenzter Öffnung des Objektivs und zweitens bei geradliniger Abblendung der Objektivöffnung von einer Seite her. — Wir beobachten eine bemerkenswerte Reziprozität der Erscheinungen in der Bildebene und in der hinteren Brennebene der Objektive. Als Lichtquelle diene eine enge Iris unter dem Kondensor, die wir der Einfachheit halber zentrisch gestellt denken wollen. Bei voller Öffnung und punktförmigem Teilchen erblicken wir die hintere Brennebene voll Licht und als Bild des Teilchens das bekannte Beugungsscheibchen. Blenden wir die Öffnung des Objektivs in der hinteren Brennebene oder deren Nähe einseitig ab, so gehen die Beugungsscheibchen von der normalen Form in das sogenannte Heliometerbild über. — Bei einzelnen linearen Objekten und voller Öffnung des Objektivs entsteht ein heller schmaler Streifen in der hinteren Brennebene, welcher senkrecht zu dem linearen Objekte liegt, wenn wir uns letzteres der Einfachheit halber als geradlinig vorstellen. Die Erscheinung läßt sich am besten bei Dunkelbeleuchtung beobachten. Im Bilde erscheint ein Beugungsstreifen, der beiderseitig von Interferenzfransen mit nach außen hin schnell abnehmender Helligkeit begleitet ist. Blenden wir das Objektiv parallel zum linearen Objekt einseitig ab, so verschwinden die Interferenzfransen auf einer Seite. — Bei einem flächenhaften Objekt wie dem obengenannten Gitter erhalten wir bei voller Öffnung in der hinteren Brennebene eine Reihe äquidistanter getrennter Beugungsbilder der lichtgebenden Öffnung, deren Verbindungslinie senkrecht zu den Gitterstrichen liegt. Blenden wir diese Beugungsbilder von beiden Seiten her ab, so daß nur das Hauptbild der Iris übrigbleibt, so verschwindet im Bilde die Struktur, es erscheint

eine leere Abbildung. — Die Reziprozität liegt in dem Sinken der Dimensionen im Öffnungsbild bei steigender Dimension des Objekts. —

Bei der Abbildung linearer Objekte stoßen wir auf zwei Eigentümlichkeiten: Erscheinungen, die mit der sogenannten Beckeschen Linie zusammenhängen, die wir im Hellfeld beobachten, und auf diejenigen Erscheinungen, die mit dem Azimutfehler zusammenhängen, der bei Dunkelfeldbeleuchtung auftritt.

Im Falle eines geradlinigen Objekts, z. B. eines Striches, ist das Bild bei enger zentraler Beleuchtung ein System von abwechselnd hellen und dunklen Streifen, die mit nach außen hin schnell abnehmender Helligkeit symmetrisch links und rechts vom Zentralstreifen angeordnet sind. Die Symmetrie bleibt bei zu hoher und zu tiefer Einstellung erhalten. Eine Unsymmetrie im Interferenzbild beobachten wir, wenn wir das Objektiv dicht oberhalb seiner letzten Linse zur Hälfte abblenden. Blenden wir die linke Hälfte des Objektivs ab, so erscheint bei enger zentraler Beleuchtung und bei zu hoher Einstellung das erste Maximum der Interferenzerscheinung auf der linken Seite des Striches, bei zu tiefer Einstellung auf der rechten. Man erkennt die Erscheinung bei Anwendung starker Okulare, mittelstarker Trockenobjektive und von durch Mattscheibe abgedämpftem Bogenlicht recht deutlich. Erweitern wir die sehr enge Irisöffnung ein wenig, so verblassen die äußeren Interferenzstreifen und nur das erste Seitenmaximum bleibt deutlich. Die Erscheinung kehrt sich um, wenn wir die rechte Objektivseite abblenden. Als Objekt empfiehlt sich ein sogenanntes Objektmikrometer, das einen Millimeter in 100 Teile geteilt zeigt.

Wir entfernen jetzt die Halbblende aus dem Objektiv und legen auf das Objektmikrometer ein Deckglas, und zwar so, daß die linke Hälfte des Objekts, also die rechte Hälfte des Bildes davon bedeckt erscheint. Es entsteht in der Nähe der Grenzkante des Deckglases auffälligerweise nicht bloß eine Veränderung in der Abbildung der bedeckten Striche, sondern auch der unbedeckten Striche, und zwar bis auf einen Abstand von mehr als etwa 10 Teilstrichen von der Grenze des bedeckten Teiles ab. Wir sehen die unbedeckten Teilstriche so, als ob wir die linke Hälfte des Objektivs verdeckt hätten. Die linke Hälfte des engen Beleuchtungskegels hat demnach bei der Abbildung der unbedeckten Striche nicht mitgewirkt, so daß „das Heliometerbild von Strichen" zustande kommen kann. Wir müssen annehmen, daß die linke Hälfte der Lichtstrahlen oder ein Teil derselben in das bedeckende Deckglas gedrungen sind oder an seine Stirnfläche reflektiert wurden, so daß sie an der Bilderzeugung in der betrachteten Bildebene nicht mitwirken können, da sie einen anderen Schnittpunkt bekommen haben.

Wir sehen die bedeckten Teilstriche in der Bildebene der unbedeckten nicht scharf, sondern müssen den Tubus heben, bis wir sie erkennen. Ihr Bild liegt infolge optischer Hebung durch das zwischengeschobene Deckglas um etwa $^1/_3$ von dessen Dicke höher. Es entspricht dem Heliometerbild, das wir erhalten, wenn wir die rechte Objektivhälfte bedecken. Bei zu hoher Einstellung liegt das erste Maximum auf der Seite, die von der Grenzkante des bedeckenden Deckglases nach dem Deckglas hinweist, also nach rechts. Bei zu tiefer Einstellung liegt es auf der anderen Seite.

Die rechte Hälfte der abbildenden Strahlen oder ein Teil derselben kann nicht mehr ungestört das bedeckende Deckglas durchlaufen, sondern tritt vorzeitig am Rande desselben in Luft oder wird sonstwie abgelenkt, so daß sie an der Bilderzeugung in der betrachteten Bildebene nicht oder nur unvollkommen mitwirkt. Man kann die Abbildung der Teilstriche bis auf etwa $^1/_{100}$ mm an die Grenzkante des Deckglases heran verfolgen. Letztere selbst entzieht sich infolge ihrer vielfach ausgebrochenen Kante der deutlichen Abbildung. Nur an wenigen regelmäßigen Stellen der Kante vermögen wir noch bis auf Bruchteile eines hundertstel Millimeter Abstand von ihr die Abbildung der Teilstriche wie vorbeschrieben zu beobachten.

Nach diesen einfachen Versuchen können wir die Beckesche Linie in folgender Weise als Teil einer allgemeineren physik.-optischen Erscheinung deuten: Die, wie wir annehmen wollen, links liegende Seite des höher brechenden Minerals ist optisch mit demjenigen Teil des Objektmikrometers zu vergleichen, der durch das Deckglas bedeckt wird. Wir benutzen eben den Kunstgriff, daß wir die höher brechende Substanz von gleicher Dicke durch eine gleichbrechende Substanz von größerer Dicke ersetzen. Denken wir uns nun unter dem Dünnschliff die Mikrometerteilung angebracht, so werden alle Teilstriche, die in genügender Nähe der Grenzkante unter dem höher brechenden Mineral liegen, bei Hocheinstellung im Bild mit hellem Saum an der rechten Seite abgebildet. Wir betrachten jetzt zwei Teilstriche, die in sehr kleiner Entfernung voneinander zu beiden Seiten der Grenzkante liegen mögen. Bei zu hoher Einstellung wird im Bild der rechte Teilstrich einen hellen Saum zur rechten Seite haben, der bei tiefer Einstellung nach links wandert. Bei noch tieferer Einstellung erblicken wir den linken Teilstrich mit hellem Saum an seiner linken Seite, der bei weiterem Senken des Tubus nach

rechts wandert. Machen wir in Gedanken das Experiment, daß wir beide Teilstriche sich so weit nähern lassen, daß wir sie nicht mehr einzeln unterscheiden können, und beschränken uns auf die höchste Einstellung, so haben wir die Erscheinung, die der Beckeschen Linie entspricht: bei Hocheinstellung eine Lichtlinie auf der Seite der höher brechenden Substanz. —

Wir wenden uns jetzt zu der anderen Erscheinung, die wir bei linearen Objekten im Dunkelfeld als sogenannten Azimutfehler beobachten. Ein lineares Objekt beugt bei Beleuchtung durch eine kleine entfernte Lichtquelle nicht, wie die punktförmigen Objekte, Licht nach allen Richtungen im Raume ab, sondern lediglich in den Richtungen der Mantelstrahlen eines Kreiskegels, den wir konstruieren können mit dem Objekt als Achse und dem beleuchtenden Strahl als einem Mantelstrahl dieses Beugungskegels. Je nachdem, ob ein Teil dieses Kegels in das Objektiv eindringen kann oder nicht, wird das lineare Element sichtbar gemacht oder nicht. Bei einseitig schiefer Dunkelfeldbeleuchtung beobachten wir diese Erscheinung z. B. an nadelförmigen Organismen.

Aber auch bei allseitig schiefer Dunkelfeldbeleuchtung können ähnliche Erscheinungen auftreten, die wir als Erscheinungen des wandernden Lichtscheines und als Erscheinungen des Funkelns beschreiben, wie wir sie besonders gut an Spirochäten beobachten, die wir als feine mikroskopische, schraubenförmige Objekte ansehen können. Bei flachen Schraubengängen erscheint gleichförmige Helligkeit, die bei steileren Schraubengängen durch Stellen geringerer Helligkeit unterbrochen wird, während bei ganz steilen Neigungen sogar Dunkelstellen auftreten müssen, und zwar um so eher, je geringer die Apertur des zur Beobachtung verwendeten Objektivs ist. —

Schließlich wollen wir einige Bemerkungen über flächenhafte Objekte anschließen, die wir uns durch geradlinige mikroskopische Parallelgitter vorstellen wollen. Hier spielt die Frage des Auflösungsvermögens eine wesentliche Rolle, die für die Fälle der Hellfeldbeleuchtung von Abbe geklärt ist. Für Dunkelfeldbeleuchtung muß die benutzte Formel verallgemeinert werden, weil wir zur Bilderzeugung infolge Fehlens des Hauptmaximums außer dem ersten Beugungsspektrum mindestens noch das zweite Beugungsspektrum mit heranziehen müssen. Das hat für die Praxis eine wesentliche Verminderung des Auflösungsvermögens bei Dunkelfeldbeleuchtung gegenüber dem bei Hellfeldbeleuchtung vorhandenen zur Folge. Diese auf einfachen geometrischen Gründen beruhende Verminderung des Auflösungsvermögens hat merkwürdige Unstetigkeiten im Auflösungsvermögen bei Dunkelfeldbeleuchtung zur Folge, die in drei verschiedenen Formen auftreten können, je nachdem wir entweder die Schiefe der Beleuchtung verändern, oder die Farbe des verwendeten Lichtes oder die Feinheit des benutzten Gitters.

Diese Unstetigkeiten im Auflösungsvermögen bei Dunkelfeldbeleuchtung sind einfache Folgerungen aus der Abbeschen Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung. Sie bilden durch ihre Empfindlichkeit eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit dieser Lehre.

3. Für die mikroskopische Abbildung haben alle diejenigen Methoden, die darauf hinzielen, den Kontrast im mikroskopischen Bilde zu heben, eine besondere Bedeutung. Hierin liegt der Wert für die Anwendung und Entwicklung der Dunkelfeldbeleuchtung, trotz ihrer Nachteile des geringeren Auflösungsvermögens und des Azimutfehlers. Wir wenden die Dunkelfeldbeleuchtung überall da mit Vorteil an, wo die einzelnen Objektelemente nur eine lichtschwache Beugung verursachen. Denn in solchen Fällen muß es eine sehr flaue oder gar vollkommen überstrahlte Interferenzerscheinung im Bilde geben, und wir können rund annehmen, daß das Bild aus diesem Grunde unsichtbar wird, wenn die Intensität des ersten Beugungsspektrums weniger als etwa ein Hundertstel oder ein Zweihundertstel von der Intensität des beleuchtenden Lichtes beträgt, denn nach bekannten photometrischen Erfahrungen können so geringe Helligkeitsunterschiede im visuellen Bilde nicht mehr wahrgenommen werden. Beim Dunkelfeld wirkt das primäre Maximum bei der Bilderzeugung nicht mit, und da die Helligkeitsunterschiede zwischen dem ersten und zweiten Beugungsspektrum sehr viel geringer sind, kann in solchen Fällen lichtschwacher Beugung noch ein kontrastreiches Dunkelfeldbild möglich sein, wo die Hellfeldbeleuchtung versagt.

Die Intensität des abgebeugten Lichtes kann aus zwei Gründen gering ausfallen. Einmal können die Brechungsvermögen benachbarter Strukturelemente nur sehr geringe Unterschiede aufweisen, und zweitens haben wir lichtschwache Beugung, wenn die Teilchen von ultramikroskopischen Dimensionen sind. Als Beispiel für den ersten Fall nennen wir die ungefärbten hämolysierten roten Blutkörperchen, für den zweiten Fall die ultramikroskopischen Goldteilchen. —

Für die Dunkelfeldbeleuchtung im Mikroskop sind sehr verschiedenene Methoden vorgeschlagen worden. Die bevorzugte Methode der allseitig schiefen Dunkelfeldbeleuchtung verwendet einen Kegel von Strahlen sehr hoher

Apertur zur Beleuchtung mit Hilfe von Spiegelkondensoren.

An einem dieser Spiegelkondensoren, dem Paraboloidkondensor sind neuerdings erhebliche Verbesserungen angebracht, die in dem neuen Wechselkondensor von Zeiß vereinigt sind. Die Verbesserungen verfolgen ein doppeltes Ziel. Jedes wird durch Drehung von je einem besonderen nach außen vorstehenden Hebel erreicht. Es soll einmal am Mikroskop ein bequemer und stetiger Übergang von Hellfeld- zur Dunkelfeldbeleuchtung und umgekehrt entstehen, um die Deutung der mikroskopischen Bilder unter ganz verschiedenen Beleuchtungsbedingungen zu erleichtern und damit zur Einführung der Dunkelfeldbeleuchtung den Weg mehr als bisher zu ebnen. Die erforderlichen Bewegungen für den Wechsel der Bildart und die Einstellung der Helligkeit werden mit einem einzigen Handgriff ausgeführt, indem bei der Umschaltung durch eine dem Kondensor eigentümliche Kuppelung eine Irisblende betätigt und zugleich eine Zentralblende verschoben wird. Durch diesen stetigen Übergang wird erreicht, daß das Erinnerungsbild sicher genug zum Vergleich der verschiedenen Bildarten bleibt. Eine zweite wesentliche Erleichterung bietet die andere Einrichtung an dem Wechselkondensor, die ihn innerhalb der praktisch in Betracht kommenden Grenzen von der Objektträgerdicke unabhängig macht. Es wird der rechts angeordnete, etwas kürzere Hebel benutzt, um die Schnittweite des Kondensors der Objektträgerdicke in dem Intervall von etwa 1—2 mm anzupassen. Diese Einstellung wird so bewirkt, daß vermittelst des rechten Hebels ein optisches Teil im Inneren des Wechselkondensors verstellt wird. Durch diese Konstruktion wird erreicht, daß man den Wechselkondensor auf die Objektebene fokussieren kann, ohne daß hierbei die Immersionsschicht zwischen Kondensor und Präparat gestört wird. Mit diesen beiden Einrichtungen entfallen wesentliche Hemmungen, die bislang der Anwendung der Dunkelfeldbeleuchtung gegenüberstanden. —

Institut für Mikroskopie an der Universität Jena, September 1921.

BESPRECHUNGEN.

R. Abegg (†) und F. Auerbach, Handbuch der anorganischen Chemie. Vierter Band, erste Abteilung, zweite Hälfte. XIII, 1072 S. Leipzig, S. Hirzel. 1921. Preis geh. M. 170.—, geb. M. 200.—

Im Jahre 1905 begann das Handbuch der anorganischen Chemie zu erscheinen; mit dem Jahre 1913 lag es vollständig vor bis auf die Elemente der sechsten und achten Gruppe. Der von dem ersten Herausgeber aufgestellte und nach dessen frühem Hinscheiden von dem zweiten Herausgeber innegehaltene Arbeitsplan fand sich in der Mehrzahl der Darstellungen — ungeachtet aller in der Individualität der Mitarbeiter begründeten Verschiedenheiten — gerechtfertigt. Während man in früheren Handbüchern des gleichen Wissensgebietes die Ergebnisse der physikalischen Chemie in einer Art Einleitung von einem Theoretiker dargestellt fand und dann fast ohne Bezugnahme darauf das Tatsachenmaterial der Chemie für die einzelnen Elemente und Verbindungen — sollte es das Kennzeichen des vorliegenden Werkes sein, die allgemeine und physikalische Chemie an jeder dazu auffordernden Stelle zu Worte kommen zu lassen. Daß die Hauptschwierigkeit solchen Unternehmens — die geeigneten Mitarbeiter zu finden — sehr befriedigend gelöst werden konnte, zeigen dem Kundigen die auf dem Titelblatt des Werkes verzeichneten Namen.

Durch das Erscheinen des vorliegenden Bandes wird die Befürchtung behoben, daß die Hemmung, die die Weiterführung des Werkes durch den Krieg erfahren mußte, eine dauernde sein würde. Der Band bringt von der sechsten Gruppe des periodischen Systems die Elemente der Nebengruppe Chrom, Molybdän, Wolfram, Uran; die selbst in der hier getroffenen vortrefflichen Anordnung schwer übersehbare Fülle von Verbindungen gerade dieser Elemente hat den Band auf über tausend Seiten anschwellen lassen. Die Eigenschaften der genannten Elemente, vor allem die des Wolframs, lassen den besonderen Hinweis an dieser Stelle gerechtfertigt erscheinen. Die ersten drei Elemente sind von J. Koppel behandelt worden; eine Reihe von Stichproben läßt die ungemein sorgfältige Arbeit erkennen. Die Darstellung ist insbesondere an Stellen, welche physikalisch-chemische Beziehungen betreffen, nicht die eines bloßen Nachschlagebuches, sondern hat oft die Form eines anregend geschriebenen Lehrbuches, so z. B. beim Chrom für die Theorien der Passivität oder bei der Besprechung der Chromiammine an Hand der Wernerschen Theorie. In anderen Fällen erscheint allerdings die Darstellung etwas in die Breite gegangen, so bei dem elektrochemischen Verhalten der Molybdänlösungen. Dagegen wäre es wohl hier wie in den anderen Bänden zweckmäßig gewesen, für die Legierungen die so übersichtlichen Schmelzdiagramme zu bringen. Der Dank aber für die imposante Arbeit, die hier geleistet worden ist, kann durch solche kleinen Ausstellungen nicht verringert werden. — Das Uran ist von R. J. Meyer behandelt. Von der Darstellung gilt das oben Gesagte; als besonders gelungen sei z. B. das photochemische Verhalten der Uranylsalze erwähnt. Für den Chemiker von Interesse ist ein hinzugefügtes umfangreiches Kapitel über die für das Molybdän und das Wolfram besonders wichtigen sogenannten Heteropolysäuren. Es ist bearbeitet von dem besten Kenner dieser Verbindungs-



klasse, A. Rosenheim. Von vortrefflicher Übersichtlichkeit ist in den von Koppel bearbeiteten Teilen die nach Jahreszahlen angeordnete Literaturübersicht. Es ist zu bedauern, daß diese Art nicht allen Mitarbeitern des Handbuches zur Pflicht gemacht werden konnte.

Die Atomgewichtsbestimmungen, die bisher für jedes Element in einem besonderen Abschnitt von B. Brauner-Prag gebracht worden sind, werden jetzt im Anschluß an die frühere bewährte Darstellungsart von J. Meyer-Breslau behandelt. Die bisher von Lottermoser bearbeitete Kolloidchemie der einzelnen Elemente hat G. Jander-Göttingen übernommen. Hoffentlich gelingt es dem verdienten Herausgeber die wohl bald zu erwartenden abschließenden Bände auf der Höhe der bisher erschienenen zu halten. A. Coehn.

F. Rinne, Die Kristalle als Vorbilder des feinbaulichen Wesens der Materie. 8°. V, 101 S. Mit 100 Textfig., 1 Zeichnung u. 5 Tafeln. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1921. Preis M. 25.—

Der Verfasser gibt uns eine kurzgefaßte Zusammenstellung der prächtigen Bestätigungen, welche die Raumgittertheorie erfahren hat, mit Hilfe der Feinanalyse durch Röntgenstrahlen, um dann auf mannigfache Art und Weise dem Gedanken Ausdruck zu geben, daß letzten Endes die einfachen Gesetze des Kristallbaues ihren Ursprung haben im räumlich symmetrischen Bau der Bausteine des Gitters, der Ionen, bzw. der durch sie bedingten Molekularkraftfelder. Die Kristalle sind in diesem Sinne nur die Indikatoren des Feinbaus der Materie und geben uns einen nicht zu unterschätzenden Fingerzeig für die Erforschung der sämtlichen Symmetrieeigenschaften der Molekularfelder. Das Werk ist äußerst knapp gefaßt, anderseits aber durch eine sehr reiche Ausstattung mit Textfiguren auch dem Nichtfachmann verständlich gemacht. Letzterem wird die Lektüre wahrscheinlich dadurch etwas erschwert, daß im Text oft leicht zu umgehende Fremdwörter verwendet werden. Das tut aber dem Wert des Buches keinen Abbruch. Mag es von Fachgenossen und naturwissenschaftlich interessierten Kreisen in vollem Umfang gewürdigt werden.

P. Frauenfelder.

W. Ostwald, Grundriß der allgemeinen Chemie. Sechste Auflage. XVI u. 647 S. mit 69 Textfiguren. Dresden und Leipzig, Theodor Steinkopff. 1920. Geb. M. 30,—, geb. M. 35.—

Die sechste Auflage ist der unveränderte Abdruck der fünften, über die in dieser Zeitschrift, 18, 603, 1917 ein Referat gegeben worden ist. Es genügt an dieser Stelle also der Hinweis, daß das seit einiger Zeit im Buchhandel fehlende Werk wieder zur Verfügung steht. A. Coehn.

H. Löwy, Elektrodynamische Erforschung des Erdinnern und Luftschiffahrt. 8°. 39 S. m. Fig. Wien, Manzsche Verlagshandlung. 1920. Preis 30 Kr. 7,50 M.

Der Verfasser beschreibt kurz die Methode der Reflexion elektrischer Wellen zur Ermittlung unterirdischer leitender Schichten, welche somit die Ermittlung von Erzlagern und Grundwasserbecken gestattet. Weit einfacher erweist sich die Kapazitätsmethode, bei der sich leitende Erdschichten durch Änderung der Kapazität eines schwingenden Systems verraten. Die Methode erlaubt eine große Zeitersparnis gegenüber der geologischen Aufsuchung, ist aber auf trockene Gegenden beschränkt. Der Verfasser schlägt vor, diese Messungen in einem geeigneten Flugzeug in konstanter Entfernung vom Erdboden durchzuführen und macht Vorschläge zur Behebung der technischen Schwierigkeiten. Der größte Teil der Broschüre befaßt sich mit den Anwendungsmöglichkeiten in Nord- und Südamerika, sowie Afrika, Indien und Australien. Jedem Ingenieur mag sich bei der Lektüre viel Interessantes bieten. P. Frauenfelder.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Würzburg Dr. Ing. L. C. Glaser für Physik, an der Universität Jena Dr. Hans Busch (früher in Göttingen) für Physik.

Ernannt: Der frühere Vorstand des Chemischen Laboratoriums an der Deutschen zoologischen Station in Neapel Professor Dr. Martin Henze zum ord. Professor für angewandte medizinische Chemie an der Universität Innsbruck, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. B. Dr. Heinrich Brandt zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen, der Privatdozent an der Universität Hamburg Dr. Bernhard Baule zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Graz (an Stelle des in den Ruhestand getretenen Hofrat Professor Dr. Oskar Peithner v. Lichtenfels), Dr. V. L. Bohnson zum a. o. Professor für allgemeine Chemie an der Universität von Wisconsin in Madison, der Privatdozent Dr. Karl Försterling zum a. o. Professor für Physik an der Universität Jena.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Königsberg Geh. Regierungsrat Dr. Heinrich Klinger (zum 1. April 1922).

Gestorben: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Halle Dr. Hugo Buchholz.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24. 15. Dezember 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 15. Dezember 1921.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Rotverschiebung der Spektrallinien der Sterne des Taurusstromes.

Von O. Kohl.

Der wichtigste Grundpfeiler, auf dem Einstein die allgemeine Relativitätstheorie aufgebaut hat, ist das Äquivalenzprinzip, nach welchem zwei Systeme, von denen das eine ruhend sich in einem homogenen Schwerefeld befindet, das andere in einem von Gravitationsfeldern freien Raume eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ausführt, in bezug auf alle sich in ihnen abspielenden physikalischen Prozesse vollständig gleichwertig sind. Diese Hypothese hat eine wichtige Erscheinung zur Folge, die sich durch die Beobachtung prüfen läßt, und die somit zur Entscheidung über die Richtigkeit des Äquivalenzprinzipes beitragen kann. Die Frequenz einer Spektrallinie, welche auf einem Stern erzeugt und von einem irdischen Beobachter bestimmt wird, ist nämlich von der Differenz der Gravitationspotentiale an der Erdoberfläche und auf dem Stern abhängig, so daß die Linien stellaren Ursprungs gegenüber den gleichen irdischen eine Schwingungsdifferenz aufweisen, die gegeben ist durch

$$\frac{\varDelta \nu}{\nu} = \frac{\varPhi_E - \varPhi_*}{c^2},$$

wobei ν und $\varDelta \nu$ Frequenz und ihre Änderung, $\varPhi_E$ und $\varPhi_*$ Gravitationspotential für die Erde und den Stern und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Für Erde und Sonne ergibt sich die Änderung der Frequenz der solaren Spektrallinien zu

$$\frac{\varDelta \nu}{\nu} = -2{,}12 \times 10^{-6},$$

d. h. eine Verschiebung der Sonnenlinien gegenüber den entsprechenden im irdischen Laboratorium erzeugten nach Rot im Betrag von 0,011 AE bei λ 5000 AE. Dieser Verschiebung der Sonnenlinien nach dem roten Spektralteile entspricht, wenn man sie als Dopplereffekt deuten würde, eine Bewegung der Sonnengase mit einer Geschwindigkeit von 0,635 km/sec von der Erde hinweg.

Die Größe dieser Rotverschiebung der Sonnenlinien liegt sehr wohl im Bereich der Nachweisbarkeit mit den heutigen Instrumenten und Beobachtungsmethoden. Es zeigt sich aber, daß die Wellenlängen der Sonnenlinien durch die in der Sonnenatmosphäre herrschenden Verhältnisse zum Teil in unkontrollierbarer und unbekannter Weise verändert sind, so daß sich der gesuchte Gravitationseffekt nicht so leicht und einwandfrei nachweisen läßt, als man auf den ersten Blick erwartet. Die Resultate der Beobachtungsreihen von Schwarzschild[1]), Evershed und Royds[2]), St. John[3]), Grebe und Bachem[4]), Pérot[5]) u. a., die alle den Nachweis dieser Rotverschiebung der Sonnenlinien bezwecken, widersprechen sich nämlich insofern, als St. John keine Verschiebung findet, Schwarzschild etwa ein Drittel und die anderen Beobachter den vollen von der Theorie geforderten Betrag. Worin die Ursache dieser Unstimmigkeit zu suchen ist, läßt sich nicht ohne weiteres angeben, aber wahrscheinlich werden es in der Hauptsache lokale Strömungen der Sonnengase, sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung sein, welche einen Dopplereffekt erzeugen, der sich über den gesuchten Gravitationseffekt lagert und ihn nicht immer in seiner vollen Größe erkennen läßt. Jedenfalls kann man aus den vorliegenden Untersuchungen nur den Schluß

1) Sitzungsber. Berl. Akad. 1914 II, S. 1201.

2) Kodaik. Bull. **39**, 1914; **64**, 1920; Observ. **41**, 531; **43**, 153, 158.

3) Ap. Journ. **46**, 249, 1917; Ann. Rep. Mt. Wils. 1920, S. 226.

4) Verh. D. Phys. Ges. **21**, 254, 1919; Zeitschr. f. Phys. **1**, 51, 1920; **4**, 105.

5) C. R. **171**, 229.

ziehen, daß die Frage der Gravitationsverschiebung der Sonnenlinien noch eine offene ist, und daß zu ihrer Klärung noch weitere sorgfältig mit entsprechenden Hilfsmitteln durchgeführte Beobachtungsreihen erforderlich sind.

Bei dem großen Interesse, das der allgemeinen Relativitätstheorie heute entgegengebracht wird, und der Wichtigkeit gerade der Existenz der Rotverschiebung der Spektrallinien im hohen Schwerepotential, ist es erklärlich, daß man noch andere Wege gesucht hat, diese Rotverschiebung nachzuweisen. Neben der Sonne kommen dafür nur noch Sterne in Betracht, die allein über ein so großes Gravitationspotential verfügen, daß die Beeinflussung ihrer Spektrallinien merkbar werden kann. Wenn auch unsere Kenntnis über die Massen und Dichten der Sterne noch sehr dürftig ist, so können wir aus unseren Erfahrungen doch soviel schließen, daß manche Sterne sehr wohl noch ein höheres Schwerepotential als die Sonne haben, so daß für sie der Gravitationseffekt also größere Beträge erreicht als für die Sonne, sich eventuell auch leichter zu erkennen gibt als bei dieser. Von einer quantitativen Prüfung muß man freilich wegen der angeführten Gründe von vornherein absehen. Im günstigsten Falle wird eine qualitative Prüfung möglich sein, und auch dieser stellen sich im allgemeinen nicht zu überwindende Schwierigkeiten entgegen. Von lokalen Strömungen der Gase in den Sternatmosphären wird man nicht viel zu befürchten brauchen, denn bei einem Stern haben wir es — im Gegensatz zur Sonne — mit dem Gesamtlicht der uns zugekehrten Halbkugel zu tun, und daher werden solche lokale Strömungen nur ganz geringen Einfluß auf die Wellenlängen der Spektrallinien haben. Kommen aber systematische Bewegungen der Gase über die Gesamtoberfläche in Betracht, wie man das neuerdings für die Veränderlichen des δ Cephei-Typus anzunehmen geneigt ist, so werden sich diese in einer scheinbaren Veränderlichkeit der Radialgeschwindigkeit des betreffenden Sternes bemerkbar machen. Solche Sterne wird man von der Untersuchung leicht ausschließen können. Die Schwierigkeit des Nachweises der Rotverschiebung der Spektrallinien der Sterne liegt vielmehr darin, daß sich diese — da sie proportional der ersten Potenz der Wellenlänge ist — vollkommen mit dem durch die relative Bewegung des Sternes gegen die Erde erzeugten Dopplereffekt vermischt, von dem sie im allgemeinen nicht getrennt werden kann. Bisher haben wir jede Linienverschiebung in den Sternspektren als kinematischen Dopplereffekt gedeutet, und wir besitzen vorläufig kein Mittel, darüber zu entscheiden, wieviel auf die Gravitationswirkung zu setzen ist. Nur in besonders günstigen Fällen wird das unter gewissen mehr oder weniger wahrscheinlichen Annahmen möglich, aber die Resultate haben auch dann noch — vorläufig wenigstens — qualitativen Charakter.

Eine solche Trennung der beobachteten Linienverschiebungen in den Sternspektrogrammen in einen Dopplereffekt und einen Gravitationseffekt sucht Freundlich[1]) bei den Heliumsternen der Oriongruppe durchzuführen. Die Massen dieser Sterne übertreffen nach unseren bisherigen Erfahrungen die Sonnenmasse um ein Vielfaches, so daß man für sie einen merkbaren Gravitationseffekt erwarten kann. Nach den Untersuchungen Kapteyns[2]) bilden die Mehrzahl der im Orion befindlichen Heliumsterne eine ausgedehnte zusammengehörige Gruppe, die mit dem großen Orionnebel sehr wahrscheinlich in physischem Zusammenhang steht. Nimmt man an, daß sich alle diese Sterne gemeinsam mit dem Nebel durch den Raum bewegen, sie relativ zu diesem also in Ruhe sind, im Nebel gewissermaßen schwimmen, so kann man aus den beobachteten Radialgeschwindigkeiten der einzelnen Objekte einen Schluß auf das Vorhandensein eines Gravitationseffektes ziehen. Das Gravitationspotential der einzelnen Sterne ist größer als das des Nebels, die Spektrallinien der Sterne müssen also im Vergleich zu den Linien des Nebels nach Rot verschoben sein, was sich dadurch zeigen wird, daß die beobachteten Radialgeschwindigkeiten der Sterne im positiven Sinne von der des Nebels abweichen werden. Freundlich findet in der Tat eine solche Abweichung im Betrag von + 6,0 km/sec im Mittel für 13 Sterne. Wenn die Annahme der Gleichförmigkeit und Parallelität der Bewegungen der Sterne und des Nebels der Wirklichkeit entspricht, so ist auf diesem Wege der Nachweis der Rotverschiebung der Spektrallinien möglich. Es scheint mir aber, daß gerade diese Annahme nicht so sicher fundiert ist, daß man das gefundene Resultat als beweiskräftig und überzeugend ansehen muß. Die Radialgeschwindigkeit des Nebels ist nur für dessen hellste Stelle bestimmt, und die von mehreren Beobachtern gefundenen Werte sind in befriedigender Über-

1) Diese Zeitschr. **20**, 561, 1919.

2) Ap. Journ. **40**, 43, Contr. fr. Mt. Wils. Nr. 82; Ap. Journ. **47**, Contr. fr. Mt. Wils. Nr. 147.

einstimmung. Nach Beobachtungen von Buisson, Fabry, Bourget[1]) und Frost[2]) liegen die Radialgeschwindigkeiten von ganz in der Nähe gelegenen Stellen aber zwischen + 24,9 und + 9,7 km/sec, so daß man auf Rotation wenigstens in diesem inneren, dichtesten Teile des Nebels schließen muß. Wie sich die weit außen liegenden kaum sichtbaren Teile in der Nähe der benutzten Sterne verhalten, entzieht sich vollkommen unserer Kenntnis. Die Eigenbewegungen der verwendeten Sterne sind alle sehr klein und etwa von der Größenordnung 0″,01. Für den Nebel sind genaue Daten nicht vorhanden; nach Beobachtungen auf dem Mt. Wilson[3]) ist seine Eigenbewegung 0″,006 und erfolgt unter einem Positionswinkel von 110 Grad, während Comas Sola[4]) 0″,025 und als Positionswinkel einen um rund 180 Grad von dem Mt. Wilson Wert verschiedenen angibt. Die von Freundlich gemachten Annahmen können vielleicht zutreffend sein, aber zwingend begründet durch das vorliegende Beobachtungsmaterial sind sie nicht, so daß der für die Sterne gefundene Überschuß der Radialgeschwindigkeiten über die des Nebels immerhin noch durch eine größere räumliche Geschwindigkeit der Sterne bedingt sein kann.

Ein viel sichereres Material für solche Untersuchungen liefern die Sternfamilien, von denen wir mit Bestimmtheit wissen, daß die zu einer solchen gehörigen Sterne sich alle mit gleicher Geschwindigkeit parallel zueinander durch den Raum bewegen, denn eingehende Untersuchungen über die Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten der Sterne dieser Familien haben ihre physische Zusammengehörigkeit immer wieder mit Sicherheit erkennen lassen, und eine weitere kräftige Stütze findet die Annahme der Gleichförmigkeit und Parallelität der Bewegung in der Übereinstimmung der beobachteten Parallaxen der einzelnen Familienmitglieder mit den aus der Strombewegung berechneten. Bei diesen Sternströmen, von denen ich als bekannteste nur die Bärenfamilie und den Taurusstrom nenne, können wir unter gewissen Bedingungen die Existenz des über den Dopplereffekt gelagerten Gravitationseffektes wenigstens qualitativ nachweisen.

Wenn der Zielpunkt der Bewegung und die Radialgeschwindigkeit wenigstens eines Sternes bekannt sind, so kann man die Stromgeschwindigkeit relativ zur Sonne angeben,

1) Ap. Journ. **40**, 241, 1914.
2) Pop. Astr. **23**, 485, 1915.
3) Ann. Rep. Mt. Wils. 1919, S. 240.
4) C. R. **162**, 414.

denn ist Δ der Abstand des betreffenden Sternes vom Zielpunkt, v seine beobachtete Radialgeschwindigkeit und ρ die Stromgeschwindigkeit, so ist

$$\rho = v \cdot \sec \Delta.$$

Da sich alle Sterne gleich schnell durch den Raum bewegen, müssen auch alle beobachteten Radialgeschwindigkeiten innerhalb der Beobachtungsfehler identische Werte von ρ ergeben. Kommen in einer Sternfamilie aber sowohl Riesen als Zwerge vor, so wird die aus den Riesen abgeleitete Stromgeschwindigkeit sich systematisch von der aus den Zwergen gefundenen unterscheiden.

Denn nach der Theorie[1]) von Russell, Hertzsprung und Eddington sind die Riesen durch große Masse und geringe Dichte ausgezeichnet, während die Zwerge kleine Masse und größere Dichte haben. Die Größe der Gravitationsverschiebung γ einer Spektrallinie ist proportional dem Schwerepotential an der Oberfläche des Sternes, von dem sie emittiert wird, und ist bestimmt durch

$$\gamma = \sqrt[3]{m^2 \delta},$$

wobei m und δ Masse und Dichte des Sternes sind, und als Einheiten die für die Sonne geltenden Werte genommen sind. Nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht über den Verlauf der in km/sec umgerechneten Rotverschiebung als Funktion von Masse und Dichte eines Sternes. Während bei der Sonne eine Rotverschiebung von 0,63 km/sec vorhanden ist, beträgt sie für einen Stern von 25-facher Sonnenmasse und dem zehnten Teile der Sonnendichte schon 2,48 km/sec.

Tabelle I.

m \ δ	0,001	0,01	0,1	1,0	1,5	2,0
0,5	0,04	0,08	0,18	0,40	0,46	0,51
1,0	0,06	0,13	0,29	0,63	0,72	0,79
5,0	0,18	0,39	0,84	1,84	2,10	2,32
10,0	0,29	0,62	1,34	2,92	3,32	3,68
25,0	0,55	1,13	2,48	5,39	6,14	6,8
40,0	0,74	1,59	3,45	7,43	8,51	9,4

Wenn also $m^2\delta$ für die Riesen wegen der viel größeren Masse einen merkbar größeren Wert hat als für die Zwerge, so werden ihre Radialgeschwindigkeiten durch den Gravitationseffekt in stärkerem Maße beeinflußt sein als die der Zwerge. Zwar nimmt im Laufe seiner Entwicklung ein Stern, den wir jetzt als Riesen beobachten, in ferner Zukunft einmal Zwerg-

1) Nature **93**, 227, 258, 281; Observ. **36**, 324; **37**, 165; M. N. **75**, 326; **81**, 342 ff.



charakter an, und da kein Grund vorhanden ist anzunehmen, daß sich seine Masse während dieses Entwicklungsganges merkbar verringert, so würde für ihn $m^2\delta$ dann einen größeren Wert haben als in seinem Riesenzustand. Ob unter den bisher beobachteten Zwergen vom K- oder M-Typus aber solche sind, die eine so große Masse besitzen, daß sie früher einmal B- oder A-Sterne gewesen sind, wissen wir nicht, jedenfalls nimmt man im allgemeinen an, daß die beobachteten Zwerge der Spektralklassen K und M nur geringe Massen haben, die bedeutend kleiner sind als die der Riesen vom gleichen Typus, so daß $m^2\delta$ bei ihnen auch trotz der größeren Dichte doch beträchtlich kleiner sein wird als bei den Riesen. Für eine Sternfamilie, deren Mitglieder physisch miteinander verknüpft sind, ist die Annahme wohl auch nicht unberechtigt, daß alle ihre Sterne nahe gleiches Alter haben, und daß die in ihr vorkommenden K- und M-Zwerge diesen Zustand nur deshalb schon erreicht haben, weil sie eben geringe Masse haben, während die Entwicklung der massigeren Sterne noch auf dem aufsteigenden Ast sein wird und etwa bis G, F und A fortgeschritten ist. Man kann also von diesem Gesichtspunkt aus erwarten, daß das Gravitationspotential der Riesen vom Typus G und K wegen ihrer viel größeren Masse beträchtlich von dem der Zwerge desselben Typus verschieden sein wird, und die Folge davon ist, daß die Radialgeschwindigkeiten der Riesen im Vergleich mit denen der Zwerge systematisch nach der positiven Seite verfälscht erscheinen. Bestimmt man also die Stromgeschwindigkeit einer Sternfamilie einmal aus den in ihr vorkommenden Riesen, dann aus ihren Zwergen, und findet man einen Unterschied in dem Sinne, daß die Riesen eine Geschwindigkeit ergeben, welche im positiven Sinne von der aus den Zwergen gefundenen abweicht, so kann man dieses Resultat als Folge des stärkeren Gravitationseffektes der Riesen gegenüber den Zwergen erklären. Dadurch kann also die Existenz dieses Effektes wenigstens qualitativ nachgewiesen werden.

Die Bärenfamilie kommt für eine solche Untersuchung nicht in Betracht, denn ihre Sterne gehören alle der Spektralklasse A an, für welche der Unterschied zwischen Riesen und Zwergen sehr gering ist. Man kann daher nicht erwarten, daß der Gravitationseffekt für die einzelnen Sterne so stark verschieden ist, daß er sich in der ausgeführten Weise zu erkennen gibt.

Viel günstiger liegen die Verhältnisse beim Taurusstrom. Er enthält Sterne aller Spektralklassen[1]) von A bis K, vielleicht auch M-Sterne, und eine Gruppierung nach der absoluten Helligkeit läßt eine Trennung in Riesen und Zwerge deutlich erkennen (Tabelle III).

Die physische Zusammengehörigkeit eines großen Teiles der Hyadengruppe zu einer Sternfamilie erkannte zuerst L. Boss[2]) der im Jahre 1908 zeigte, daß die Eigenbewegungen von 39 Sternen dieses offenen Haufens alle nach dem Punkte $\alpha\ 6^h 8^m,5$, $\delta + 6^0 56'$ (1900,0) gerichtet sind, die Sterne sich also alle parallel zueinander durch den Raum bewegen. Er zeigte ferner, daß die Größe der beobachteten Eigenbewegungen den Schluß rechtfertigt, daß alle Sterne sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen und leitete aus den damals bekannten Radialgeschwindigkeiten von drei Sternen die Gruppengeschwindigkeit zu + 44,4 km/sec und daraus die Parallaxen der einzelnen Sterne ab. Von Kapteyn und de Sitter[3]) wurden eine größere Anzahl vor allem schwacher Sterne angegeben, deren Zugehörigkeit zur Gruppe nach Größe und Richtung ihrer Eigenbewegungen mehr oder weniger wahrscheinlich ist. Von ihnen wurde auch die mittlere Parallaxe[4]) der Familie auf photographischem Wege bestimmt und in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der von Boss aus der Stromgeschwindigkeit berechneten gefunden. Eine neue Ableitung des Zielpunktes der Bewegung und der Stromgeschwindigkeit führte 1912 Wilson[5]) aus. Ihm standen die Radialgeschwindigkeiten von 8 auf der Lick-Sternwarte beobachteten Sternen zur Verfügung. Er findet als Koordinaten des Zielpunktes $\alpha\ 6^h 13^m 28^s$ $\delta + 7^0 4'$ (1900,0) und die Stromgeschwindigkeit relativ zur Sonne $\rho = + 44,5$ km/sec. Eine weitere Bestimmung der Stromgeschwindigkeit ist 1920 von Adams, Joy und Strömberg[6]) ausgeführt worden, welche die Radialgeschwindigkeiten von 19, wohl zum größten Teile auf dem Mt. Wilson beobachteten Sternen verwenden konnten. Sie finden aus diesem Material $\rho = + 39$ km/sec.

Um möglichst genaue und einheitliche Daten für die vorliegende Untersuchung zur Verfügung zu haben, habe ich die Bewegung der Gruppe erneut untersucht unter streng rechnerischer Behandlung des Beobachtungs-

1) A. N. **211**, 289.
2) A. Journ. Nr. 604, Bd. **26**, 31, 1908.
3) Publ. Gron. **14**, 1904.
4) Publ. Gron. **23**, 1909.
5) Pop. Astr. **20**, 359.
6) Publ. Astr. Soc. Pac. **32**, 195, 1920.

Tabelle II.

Nr.	Gron. 14	B. D.	Bezeichnung	α (1900,0)	δ (1900,0)	100 μ
1	2	3	4	5	6	7
1*	. . .	16° 523	Pi. 187	3h 47m 27s	+ 17° 1′,8	14″,7
2*	. . .	17 666	Pi. 215	3 55 3	+ 17 54,7	14,0
3*	. . .	7 592	Pi. 234	3 58 32	+ 7 55,2	15,9
4*	. . .	5 601	Br. 566	4 6 1	+ 5 15,8	14,2
5	1	15 603	Br. 572	4 10 6	+ 15 9,0	12,3
6*	. . .	21 618	Br. 576	4 12 28	+ 21 20,1	11,2
7	28	15 612	γ Tauri	4 14 6	+ 15 23,2	12,0
8	34	13 663	Br. 585	4 14 20	+ 13 47,6	12,0
9	44	13 665	. . . . .	4 15 15	+ 13 37,5	11,3
10*	56	14 687	. . . . .	4 15 56	+ 14 10,3	10,6
11	79	17 712	δ Tauri	4 17 10	+ 17 18,5	11,5
12	87	16 586	Br. 596	4 17 41	+ 16 32,6	11,4
13	107	17 714	Br. 597	4 18 20	+ 17 12,7	12,4
14	120	14 693	. . . . .	4 18 33	+ 14 31,6	11,1
15	122	16 591	. . . . .	4 18 37	+ 16 50,9	10,3
16	123	16 592	. . . . .	4 18 44	+ 16 39,3	13,6
17*	. . .	21 642	ϰ Tauri	4 19 24	+ 22 3,9	11,2
18	. . .	21 643	Br. 600	4 19 28	+ 21 58,3	13,1
19	143	17 719	Br. 601	4 19 42	+ 17 42,0	11,1
20	150	15 621	Br. 603	4 19 55	+ 15 42,7	11,5
21*	. . .	22 696	υ Tauri	4 20 19	+ 22 35,2	12,3
22	163	15 624	. . . . .	4 20 24	+ 15 17,8	12,0
23	170	15 625	Br. 605	4 20 39	+ 15 23,5	11,7
24	190	. . . . . .	. . . . .	4 21 21	+ 15 8,7	9,1
25*	. . .	21 647	Pi. 82	4 22 5	+ 21 23,8	11,8
26	212	14 699	. . . . .	4 22 7	+ 14 11,5	9,4
27	222	14 702	Br. 611	4 22 43	+ 14 31,1	11,1
28*	. . .	18 640	ε Tauri	4 22 46	+ 18 57,5	12,0
29*	224	15 631	ϑ1 Tauri	4 22 52	+ 15 44,4	10,8
30*	227	15 632	ϑ2 Tauri	4 22 57	+ 15 38,9	10,7
31	228	16 606	. . . . . .	4 23 2	+ 17 3,8	12,1
32*	. . .	12 598	Br. 614	4 23 14	+ 12 49,6	11,2
33	242	16 609	. . . . .	4 24 13	+ 16 27,1	10,8
34	251	15 637	Br. 619	4 24 50	+ 15 58,6	11,6
35	255	15 639	Br. 620	4 24 57	+ 15 28,5	10,9
36	. . .	13 690	Br. 621	4 25 0	+ 13 30,4	11,0
37	258	15 640	. . . . .	4 25 3	+ 15 55,9	12,9
38	282	15 645	Br. 623	4 26 9	+ 15 38,2	10,9
39	283	. . . . . .	. . . . .	4 26 11	+ 15 17,0	14,5
40	297	15 647	. . . . .	4 27 16	+ 15 36,4	13,8
41	306	16 620	. . . . .	4 27 53	+ 16 33,1	10,8
42	315	14 720	ρ Tauri	4 28 10	+ 14 38,1	10,4
43	317	14 721	. . . . .	4 28 17	+ 14 57,2	12,5
44	325	15 651	. . . . .	4 28 53	+ 15 17,8	12,0
45	342	16 630	. . . . .	4 30 15	+ 16 20,1	7,9
46	343	15 654	. . . . .	4 30 23	+ 15 28,7	12,0
47	371	15 661	Br. 638	4 32 26	+ 15 50,0	9,4
48*	. . .	12 618	Br. 639	4 32 34	+ 12 18,6	10,5
49*	385	15 666	σ2 Tauri	4 33 33	+ 15 43,2	8,4
50	. . .	7 681	Pi. 146	4 33 41	+ 7 40,3	8,2
51	390	16 640	. . . . .	4 34 41	+ 16 19,2	14,7
52	. . .	10 621	Pi. 169	4 38 53	+ 10 57,6	9,8
53*	. . .	18 743	Br. 666	4 45 31	+ 18 40,2	9,2
54*	. . .	15 713	Br. 694	4 54 0	+ 15 46,0	10,4
55*	. . .	21 751	ι Tauri	4 57 7	+ 21 26,8	8,2
56*	. . .	9 743	Br. 716	5 3 49	+ 9 42,1	7,4

materials zur Ableitung des Zielpunktes der Bewegung.

In Tabelle II ist eine Zusammenstellung der Sterne aus Kapteyns Liste gegeben, die nach meinen Rechnungen mit großer Wahrscheinlichkeit zum Taurusstrom gehören. Die einzelnen Spalten der Tabelle sind durch ihre Überschrift genügend gekennzeichnet; sofern besondere Erläuterungen nötig sind, werden sie weiter unten gegeben werden. Die in Spalte 7 angeführten 100jährigen Eigenbewegungen wurden entweder dem P. G. C. von Boss entnommen oder, soweit sie in diesem nicht vorkamen, aus Gron. Publ. 14 unter Berücksichtigung der dort gegebenen Korrektionen.

Die Richtungen der Eigenbewegungen von Sternen, die sich parallel zueinander durch den Raum bewegen, konvergieren infolge der per-

Tabelle II.

Nr.	ψ_B	$\Delta\psi = B - R$	Δ	Größenklasse scheinb.	Größenklasse abs.	Hell. $\odot = 1$	Spektrum	v
	8	9	10	11	12	13	14	15
1	103° 0'	+2° 38'	35° 38',4	5,96	2,86	11,4	F	var.?
2	105 20	+2 38	34 2,4	5,76	2,66	13,7	F	.....
3	85 41	−2 1	32 16,1	5,48	2,38	17,7	A	+32,9
4	84 44	+1 24	30 37,3	5,71	2,61	14,3	F	.....
5	101 40	+1 2	29 57,0	6,35	3,25	7,9	F	.....
6	110 23	−0 47	31 6,3	5,56	2,46	16,4	A 5	var.?
7	103 0	+1 23	29 2,9	3,86	0,76	78,7	G 8	+38,3
8	103 28	+4 40	28 42,5	5,59	2,49	16,0	F 1	.....
9	98 38	+0 2	28 27,8	6,14	3,04	9,6	F 7	.....
10	101 57	+2 15	28 23,2	6,71	3,61	5,7	F 6	.....
11	106 42	+1 11	28 46,8	3,93	0,83	73,8	G 8	+38,7
12	106 22	+2 6	28 28,0	5,68	2,58	14,7	A 5	+36,4
13	109 19	+3 45	28 29,2	4,84	1,74	31,9	F 0	+38,0
14	101 25	+0 42	27 49,5	7,8	4,7	2,1	G 3	.....
15	100 6	−4 53	28 19,6	8,0	4,9	1,7	F 8	.....
16	107 30	+2 51	28 15,0	8,2	5,1	1,4	G 2	.....
17	115 25	+1 25	29 53,9	4,36	1,26	49,7	A 3	+40,5
18	117 9	+3 17	29 50,8	5,42	2,32	18,7	A 2	....
19	103 2	−3 41	28 18,6	4,24	1,14	55,5	A 2	+36,4
20	104 38	+1 30	27 44,8	6,39	3,29	7,7	G 0	.....
21	114 54	−0 10	29 55,4	4,40	1,30	47,9	A 5	var
22	100 5	−2 22	27 32,5	7,43	4,33	2,9	G 0	.....
23	103 19	+0 39	27 30,2	4,60	1,50	39,8	F 2	.....
24	99 28	−2 51	27 17,1	9,7	6,6	0,36	....	.....
25	112 26	−1 11	29 3,6	5,74	2,64	13,9	A	+35,7
26	102 16	+1 39	26 54,9	8,8	5,7	0,83	....	.....
27	100 54	−0 26	26 50,0	5,97	2,87	11,3	F 2	var.?
28	108 26	−1 11	28 0,7	3,63	0,53	97,3	G 8	+38,9
29	105 4	+1 21	27 3,8	4,04	0,94	66,7	G 9	+37,5
30	103 31	−0 2	27 1,3	3,62	0,52	98,2	F 1	+42,6
31	109 20	+3 6	27 12,0	7,8	4,7	2,1	G 1	.....
32	99 18	+1 13	26 25,4	5,12	2,02	24,7	A 7	.....
33	109 26	+4 7	27 35,5	8,7	5,6	0,91	....	.....
34	105 57	+1 25	26 39,8	4,84	1,74	31,9	A 8	var.
35	105 57	+2 23	26 30,7	5,49	2,39	17,5	A 9	+38,4
36	100 29	+0 48	26 6,3	5,49	2,39	17,5	F 2	+39,2
37	101 40	−2 49	26 36,1	6,66	3,56	6,0	F 7	.....
38	106 27	+2 20	26 16,3	6,04	2,94	10,6	F 3	.....
39	102 19	−1 6	26 10,7	9,9	6,8	0,30	....	.....
40	102 32	−1 44	26 0,2	8,6	5,5	1,0	....	.....
41	102 52	−3 23	26 6,6	9,0	5,9	0,69	....	.....
42	104 26	−1 7	25 56,3	4,75	1,65	34,7	F 1	var
43	100 8	−3 0	25 36,6	8,6	5,54	0,96	....	.....
44	109 2	+5 0	25 33,0	8,6	5,5	1,0	G 1	.....
45	103 52	−2 27	25 30,2	9,8	6,7	0,33	....	.....
46	101 30	−3 6	25 18,7	9,0	5,9	0,69	....	.....
47	108 3	+2 18	24 51,7	5,80	2,70	13,2	F 3	+35,6
48	95 30	−2 42	24 5,8	4,30	1,20	52,5	A 5	.....
49	103 42	−2 3	24 34,3	4,85	1,75	31,6	A 8	.....
50	90 42	+2 56	23 34,7	5,55	2,45	16,6	A	var.
51	103 45	−3 20	24 28,7	9,4	6,3	0,49	....	.....
52	98 13	+2 23	22 23,7	5,35	2,25	20,0	A	+38,8
53	113 12	−2 0	22 55,2	5,12	2,02	24,7	A 5	.....
54	109 8	−1 55	19 54,9	6,70	3,60	5,8	....	.....
55	125 6	−0 14	21 57,8	4,70	1,60	36,3	A 5	+42,0
56	94 38	−0 24	16 10,3	5,42	2,32	18,7	A	var.?

spektivischen Wirkung für einen Beobachter auf der Erde nach einem Punkt der Sphäre, dem Zielpunkt der Bewegung. Die Lage dieses Konvergenzpunktes kann um so genauer bestimmt werden, je ausgedehnter die Sterngruppe ist, da nur die Richtungen der Eigenbewegungen von weit auseinander stehenden Sternen merklich voneinander abweichen, während für Sterne in der Mitte der Gruppe diese Richtungen alle nahe einander parallel sind, ihr Schnittpunkt also nur sehr ungenau bestimmt werden kann.

Zur Ableitung der Lage des Konvergenzpunktes suchte ich 19 Sterne mit gut bestimm-

ten Eigenbewegungen aus, wobei besondere Rücksicht auf eine günstige Verteilung dieser Sterne über die ganze Gruppe genommen wurde, so daß eine sichere Bestimmung des Zielpunktes der Bewegung gewährleistet war. Die für diese Rechnung verwendeten Sterne sind in Tabelle II mit einem Sternchen versehen. Bei der Ableitung des Konvergenzpunktes bediente ich mich der von Bessel[1]) zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung vorgeschlagenen Methode, deren rechnerische Ausarbeitung von Harzer[2]), Kobold[3]) und Newcomb[4]) gegeben worden ist. Sind die Eigenbewegungen einer Anzahl Sterne genau nach einem Punkt gerichtet, so liegen die Pole der größten Kreise, in welchen die Eigenbewegungen geschehen, alle auf einem größten Kreise. Von den beiden Polen dieses größten Kreises ist der eine der Konvergenzpunkt der Eigenbewegungen. In der Praxis werden infolge der Beobachtungsfehler der Eigenbewegungen die Pole ihrer Richtungen nicht genau auf einem Großkreis der Sphäre liegen, sie werden sich um einen solchen aber dicht gruppieren. Es kommt darauf an, denjenigen größten Kreis zu bestimmen, der sich den einzelnen Polen am besten anschmiegt.

Die Rechnung nach der von Newcomb entwickelten Methode ergibt für die Lage des Konvergenzpunktes:

$$\alpha = 6^h 8^m 53^s \quad \delta = +7^0 55' 7'' \quad (1900{,}0).$$

Die Darstellung der Beobachtungen mit diesen Koordinaten ist unter $\Delta\psi$ gegeben. Alle Sterne der Kapteynschen Liste, für welche $\Delta\psi$ größer als 5^0 ist, habe ich nicht mit in Tabelle II aufgenommen. Neuere Bestimmungen der Eigenbewegungen dieser Sterne können aber sehr wohl zu Werten führen, welche die Zugehörigkeit auch dieser Sterne zum Taurusstrom sicherstellen. Spalte 10 enthält die Abstände Δ der einzelnen Sterne vom Konvergenzpunkt, und unter v ist in Spalte 15 die beobachtete Radialgeschwindigkeit eingetragen. Die Radialgeschwindigkeiten der Sterne 25, 27, 35, 36, 47 und 52 verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. I. S. Plaskett in Victoria, Canada, der mir die bisher noch unveröffentlichten Werte in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte und dadurch viel zum Gelingen dieser Untersuchung beigetragen hat. Ich möchte ihm auch hier für sein Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Spektroskopische Doppelsterne sind durch var. gekennzeichnet; liegt eine Bahnbestimmung vor, wie bei Nr. 12 und 30, so ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit eingetragen.

Zum Nachweis der Gravitationswirkung auf die Spektrallinien ist es — wie oben ausgeführt wurde — erforderlich, eine Trennung der Sterne in Riesen und Zwerge vorzunehmen, wobei als Erkennungszeichen die absolute Größe oder besser die absolute Helligkeit in Einheiten der Sonnenhelligkeit dient, welche den Unterschied zwischen Riesen und Zwergen noch deutlicher hervortreten läßt. In Tabelle III ist eine solche Zusammenstellung der Sterne nach ihrer absoluten Helligkeit gegeben, wobei die Tabelle die Nummern der Sterne enthält, deren Helligkeit in das angegebene Intervall fällt.

Tabelle III.

Verteilung der Sterne nach absoluter Helligkeit.

Abs. Hell. in Sonnen-einheiten	Nummer der Sterne	Mittlere abs. Hell.
$\leqq$ 1,0	24 26 33 39 40 41 43 44 45 46 51	0,7
1,1—5,9	10 14 15 16 22 31 54	3,1
6,0—20,9	1 2 3 4 5 6 8 9 12 18 20	
	25 27 36 37 38 47 50 52 56	14,0
21,0—49,9	13 17 21 23 32 34 42 49 53 55	35,0
$\geqq$ 50	7 11 19 28 29 30 48	74,7

Die Sterne der ersten Zeile, deren mittlere absolute Helligkeit nur 0,7 der Sonnenhelligkeit beträgt, sind ganz gewiß Zwerge, während die der letzten Reihe, die im Mittel 75mal so hell sind als die Sonne, unzweifelhaft Riesen sind. Diese beiden Gruppen sind für den Nachweis des Gravitationseffektes am besten geeignet, aber leider erlaubt das vorhandene Beobachtungsmaterial nicht, den Vergleich mit diesen Sternen durchzuführen, da Radialgeschwindigkeiten der ausgesprochenen Zwerge noch nicht veröffentlicht sind. Ich muß mich daher damit begnügen, eine Teilung der Sterne in zwei Gruppen vorzunehmen, deren absolute Helligkeiten im Mittel das 61fache und das 16fache der Sonnenhelligkeit ist. Wenn die Sterne der zweiten Gruppe auch keine typischen Zwerge sind, so werden sie aber dennoch einen so weitgehenden Unterschied — wenigstens in ihren Massen — gegen die Riesen aufweisen, daß ihr Gravitationseffekt merkbar von dem der Riesen verschieden sein wird. Die Rechnung bestätigt das auch, denn man erhält für die Stromgeschwindigkeit aus den beiden Gruppen + 43,8 km/sec für die Riesen

1) Fund. Astr., S. 308.
2) A. N. 133, 79.
3) A. N 132, 314.
4) Publ. Carnegie-Inst. Nr. 10. Washington 1904.

Tabelle IV.

Gruppe I				Gruppe II			
Nr.	v	Δ	ϱ	Nr.	v	Δ	ϱ
7	+ 38,3	29° 2′,9	+ 43,8	3	+ 32,9	32° 16′,1	+ 38,9
11	38,7	28 46,8	44,2	12	36,4	28 28,0	41,4
13	38,0	28 29,2	43,2	25	35,7	29 3,6	40,8
17	40,5	29 53,9	46,7	35	38,4	26 30,7	42,9
19	36,4	28 18,6	41,3	36	39,2	26 6,3	43,7
28	38,9	28 0,7	44,1	47	35,6	24 51,7	39,2
29	37,5	27 3,8	42,1	52	38,8	22 23,7	42,0
55	42,0	21 57,8	45,3				
		Mittel:	+ 43,8 ± 0,6 km/sec			Mittel:	+ 41,3 ± 0,7 km/sec

in Gruppe I und + 41,3 km/sec für die Sterne der Gruppe II, wie Tabelle IV zeigt.

Es besteht also zwischen den beiden Gruppen ein Unterschied von + 2,5 ± 0,9 km/sec in den Stromgeschwindigkeiten, den man in Hinsicht auf seinen mittleren Fehler als reell ansehen wird. Die Sterne der ersten Gruppe geben eine zu große positive Stromgeschwindigkeit als Folge zu groß beobachteter Radialgeschwindigkeiten. Ihre Spektrallinien sind also gegenüber denen der zweiten Gruppe mit einer Rotverschiebung behaftet, deren Ursache man wegen des Riesencharakters dieser Sterne in dem von Einsteins Theorie geforderten Gravitationseffekt erblicken wird. Adams, Joy und Strömberg geben als Stromgeschwindigkeit + 39 km/sec an, also einen um noch mehr als 2 km kleineren Wert, als ihn meine zweite Gruppe gibt. Es ist mir nicht möglich festzustellen, welche Sterne sie bei ihrer Untersuchung verwendet haben, da sie in der zitierten Note nicht angeführt sind. Man wird aber wahrscheinlich nicht fehlgehen, wenn man annimmt, daß unter diesen Sternen eine größere Anzahl scheinbar schwacher Sterne sind, die sich dem Zwergtypus also noch mehr nähern als die Sterne meiner zweiten Gruppe, und dann ist die von ihnen gefundene Stromgeschwindigkeit ein weiteres Zeichen für die Existenz des Gravitationseffektes.

Man wird das gefundene Resultat in Rücksicht auf das für die ausgeführte Untersuchung wenig geeignete Beobachtungsmaterial vorläufig nur als eine Andeutung für das Vorhandensein des Gravitationseffektes ansehen können, und eine Entscheidung über seine Existenz einer weiteren Bearbeitung mit geeigneterem Material überlassen. Dazu wäre es nötig, daß die Radialgeschwindigkeiten der Sterne der ersten Zeile von Tabelle III bestimmt würden, deren scheinbare Größe im Mittel 9,1 ist. Mit den großen Spiegeln auf dem Mt. Wilson und in Victoria ist das sehr wohl möglich, denn bei 2½stündiger Belichtung kann man damit von Sternen 9,5ter Größe noch gut meßbare Spektrogramme erhalten.

Die aus den Radialgeschwindigkeiten der helleren Sterne bestimmte Stromgeschwindigkeit ist durch den Gravitationseffekt entstellt, man kann also den unverfälschten Wert nur aus Zwergen erhalten, für welche keine merkbare Rotverschiebung der Spektrallinien zu erwarten ist. Auch die Eigenbewegungen der einzelnen Sterne in Verbindung mit den individuellen Parallaxen können zur Bestimmung der Stromgeschwindigkeit verwendet werden. Ist μ'' die Eigenbewegung eines Gruppensternes im Jahre, π'' seine Parallaxe, so folgt ρ in km/sec aus

$$\varrho = 4{,}737 \cdot \frac{\mu''}{\pi''} \cdot \operatorname{cosec} \Delta.$$

Die auf diese Weise ermittelte Stromgeschwindigkeit muß für alle Sterne — einerlei ob Riesen oder Zwerge — gleich sein. Mit dem heute zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterial ist es allerdings nicht möglich, ρ aus den Eigenbewegungen sehr genau abzuleiten, da hierfür außer einem guten Werte der Eigenbewegungen eine außerordentlich genaue Kenntnis der Parallaxen der einzelnen Sterne erforderlich ist, denn einer Änderung von π um 0″,001 entspricht eine Änderung von ρ um 1¾ km. Deshalb hat man die angegebene Gleichung bisher auch immer zur Berechnung der Parallaxen der einzelnen Sterne aus ihren Eigenbewegungen und der aus den Radialgeschwindigkeiten gefundenen Stromgeschwindigkeit benutzt. Die bisher gebräuchlichen Methoden der direkten Parallaxenmessung, selbst die photographische mit langbrennweitigen Instrumenten und ebenso die spektroskopische, geben aber im günstigsten Falle nur den zehnten Teil der hier verlangten Genauigkeit. Vielleicht ist es in Zukunft möglich, etwa unter Verwendung von Michelsons Interferenzmethode die Genauigkeit der direkten Paral-

laxenmessung so zu steigern, daß 0",001 oder noch weniger verbürgt ist. Dann könnte man mit Vorteil die Strombewegung auch aus den Eigenbewegungen mit der gewünschten Sicherheit ableiten und käme dadurch zur Kenntnis ihres unverfälschten Wertes. Ein Vergleich mit dem aus den Radialgeschwindigkeiten gefundenen würde dann auch eine sichere Bestimmung der Größe des Gravitationseffektes für jeden Stern mit bekannter Radialgeschwindigkeit ermöglichen.

Göttingen, im Oktober 1921.

(Eingegangen 10. November 1921.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

J. Eggert und W. Noddack, Anwendung der Quantentheorie auf die photographische Trockenplatte.

Während sich das Einsteinsche photochemische Äquivalenzgesetz bereits in mehreren Fällen an gasförmigen Reaktionen (Warburg[1]), Nernst, Pusch) sowie an flüssigen Systemen (Noddack) bestätigen ließ, fehlt unseres Wissens bisher eine Prüfung des Satzes am festen Körper. Eine seit langem bekannte und technisch in hohem Maße angewendete photochemische Reaktion am festen Körper ist die Einwirkung des Lichtes auf Bromsilber. Im Folgenden teilen wir einige vorläufige Ergebnisse mit, die wir durch Messungen an der photographischen Trockenplatte gewonnen haben.

In seiner einfachsten Fassung verlangt das Einsteinsche Gesetz, daß die Anzahl der photochemisch veränderten Moleküle N gleich der Summe der absorbierten Quanten von der Frequenz ν ist. Es gilt also

$$N = \frac{\text{absorbierte Energie}}{h\nu}.$$

Im vorliegenden Falle besteht die photochemische Einwirkung des Lichtes auf das Bromsilber darin, daß sich die Aufspaltung der $AgBr$-Molekel in die Atome gemäß der Gleichung

$$AgBr + h\nu = Ag + Br$$

vollzieht. Wenn das Einsteinsche Gesetz gilt, muß jedem absorbierten Quant ein Atom Ag entsprechen.

Die erste Versuchsreihe befaßte sich damit, Trockenplatten verschiedener Herstellungsart (Agfa-Reproduktion, Agfa-Spezial, Agfa-Extra Rapid, Schleußner u. a.), mit Licht von der Wellenlänge 407,8 $\mu\mu$ (Quecksilberlampe mit Farbfilter aus $Cu(NH_3)_4SO_4$-Lösung) und in absolutem Maße bekannter Energie 0,5 bis 2 Stunden zu belichten. Die Energiemessung geschah mit einer Rubensschen Thermosäule und wurde auf die Gerlachsche Bestimmung der Lumensekunde $22{,}6 \cdot 10^{-6}$ cal. bezogen, so daß für unsere Anordnung auf den cm² der Trockenplatte $2{,}01 \cdot 10^{14}$ Quanten der Frequenz

$$\frac{3 \cdot 10^{10}}{407{,}8 \cdot 10^{-7}} = 7{,}35 \cdot 10^{14}$$

auftrafen. Das bei dieser Belichtung ausgeschiedene Silber (0,1 — 0,5 mg) wurde nach Entfernung des unveränderten Bromsilbers durch neutrales Natriumthiosulfat in chlorfreier Salpetersäure gelöst — natürlich ohne vorher die Platte photographisch zu entwickeln — und nach Volhard titriert. Aus Energie, Wellenlänge und Einwirkungsdauer des Lichtes folgt unmittelbar die Anzahl Q der eingesandten Quanten, aus der Titration andererseits die Anzahl N

Tabelle I.

Plattensorte	Belichtungsdauer	Mittlere Energie in Hefnerkerzen	Q Zahl der eingesandten Quanten	Silber gef. (mg Ag)	N Anzahl der Ag-Atome	$\frac{N}{Q} = a$ (Photochem. Absorpt. in Proz.)
Agfa-Reproduktion . . .	30'	1,00	$36 \cdot 10^{18}$	0,214	$1{,}19 \cdot 10^{18}$	3,3 Proz.
„	60'	1,13	$70{,}5 \cdot 10^{18}$	0,379	$2{,}11 \cdot 10^{18}$	3,0 „
„	120'	1,00	$111 \cdot 10^{18}$	0,597	$3{,}32 \cdot 10^{18}$	2,9 „
Agfa-Röntgen	54'	1,13	$73{,}5 \cdot 10^{18}$	0,139	$0{,}77 \cdot 10^{18}$	1,05 „
Agfa-Spezial	53'	1,41	$89{,}5 \cdot 10^{18}$	1,74	$9{,}65 \cdot 10^{18}$	10,8 „
Schleußner	56'	1,23	$82{,}5 \cdot 10^{18}$	0,218	$1{,}21 \cdot 10^{18}$	1,47 „

1) Literatur vgl. Nernst, Theoret. Chemie, 8—10. Aufl., S. 878ff., 1921.

Tabelle II.

Plattensorte	Reflektiertes Licht	Durchgelassenes Licht	Absorbiertes Licht	Elektrochem. Absorption a nach Tab. I
Agfa-Reproduktion	42 Proz.	53 Proz.	5 Proz.	3,2 Proz.
"	50 "	42 "	8 "	
Agfa Röntgen	58 "	38 "	4 "	1,05 "
Agfa-Spezial	62 "	26,6 "	11,4 "	10,8 "

gebildeter Ag-Atome. Das Verhältnis dieser beiden Zahlen ergibt, da das Einsteinsche Gesetz pro Quant ein Ag-Atom fordert, direkt den Bruchteil $a = \frac{Q}{N}$ der eingesandten Strahlung, die von der Platte photochemisch verbraucht wird; a zeigte sich bei verschiedenen Lichtstärken und Belichtungszeiten aber zunächst gleichem ν für die gleiche Plattensorte konstant (vgl. Tab. I). So wurde z. B. an der Agfa-Reproduktionsplatte. bei Belichtungszeiten von 30, 60 und 93 Minuten die konstante photochemische Absorption von 3 Proz. gefunden.

Andererseits ließ sich die Lichtabsorption aus photometrischen Messungen an der unbelichteten Platte — freilich nicht ganz einfach — direkt bestimmen. Hierbei ist zu bedenken, daß die auf die Platte eingestrahlte Energie nur zum Teil absorbiert, zum anderen größeren Teil aber diffus reflektiert und durchgelassen wird. Auch bei dieser Messung war die Absorption für die verschiedenen Plattensorten von der Größe 5—12 Proz. (vgl. Tab. II). Genauere Messungen hierüber sind im Gange. Aus der Übereinstimmung der photochemisch und photometrisch gemessenen Absorption folgt unmittelbar die Gültigkeit des Einsteinschen Gesetzes.

Eine dritte Versuchsreihe beschäftigte sich damit, die Anzahl der absorbierten Quanten mit der Anzahl der entwickelten $AgBr$-Körner in Beziehung zu bringen. In diesem Falle betrug die Belichtungsenergie 10^{-6} Lumen-Sekunden $= 10^8$ Quanten pro Sekunde und Quadratzentimeter Plattenoberfläche. Es zeigte sich an Auszählungen der Ag-Körner auf derartig belichteten und im völlig Dunkeln entwickelten und fixierten Platten (an Mikrophotogrammen dieser Platten ermittelt), daß einige Hundert mal so viel Quanten absorbiert werden, als sich später Körner auf der Platte ausbilden. Dieses Ergebnis könnte, oberflächlich betrachtet, so gedeutet werden, daß allemal einige hundert Quanten auf 1 Korn wirken müssen, ehe es vom Entwickler reduziert wird. Bedenkt man aber, daß zwischen den einzelnen entwickelten Ag-Körnern gewaltige Zwischenräume liegen, die vor dem Fixieren der Platte von $AgBr$-Körnern erfüllt waren, so erscheint diese Deutung des Befundes vollkommen hinfällig. Vielmehr führt dieser zu dem Schluß, daß nur solche $AgBr$-Körner von dem entwickelnden Reduktionsmittel angegriffen werden, bei denen die abgeschiedenen Ag-Atome unmittelbar an der Oberfläche des Kristalles (Kornes) sitzen. Körner, die in ihrem Inneren Ag-Atome besitzen, verhalten sich wie unbelichtete. Zur Stütze dieser Deutung sei erwähnt, daß bei einem Plattenkorn von der verwendeten Art, welches schätzungsweise 10^{10} Moleküle enthält, auf 300 Moleküle im Innern des Kornes 1 Oberflächenmolekül kommt, d. h. hier liegt dasselbe Verhältnis vor, wie wir es bei der Abzählung von absorbierten Quanten und Körnern fanden. Die Abzählung führt im Hinblick auf diese Betrachtungsweise zu folgendem Ergebnis: Nicht jedes absorbierte Quant liefert ein Silberkorn; wohl aber entspricht jedes Silberkorn einem und nur einem absorbierten Quant.

Fritz Weigert (Leipzig), Über das Einsteinsche photochemische Äquivalenzgesetz. (Kurzer Bericht[1]).

Das Einsteinsche Gesetz stellt eine stöchiometrische Verknüpfung von Strahlungsenergie mit chemischen Umsetzungen dar, und gehört daher mit dem Faradayschen Gesetz zu den wichtigsten Grundlagen der physikalischen Chemie. Die experimentelle Prüfung des Gesetzes verdankt man vorwiegend E. Warburg, sowie Nernst und seinen Schülern. Sie gelang aber bis jetzt nur in besonders einfachen gasförmigen und flüssigen Systemen. Nach Versuchen, die in Gemeinschaft mit Herrn W. Schoeller ausgeführt wurden, konnte nun auch das Einsteinsche Gesetz in einem festen System[2]) bestätigt werden.

Zur Untersuchung kamen Chlorsilber-Gelatine-Emulsionen, wie sie für die lichtempfindlichen photographischen Auskopierpapiere verwendet werden. Sie enthalten außer Gelatine und Chlorsilber noch überschüssiges Silbernitrat und lösliche organische Silbersalze, und

1) Vgl. F. Weigert, Berl. Akad. Ber. 1921, S. 641.
2) Vgl Anm. am Schluß.



die Färbung im Licht beruht auf der Ausscheidung von fein verteiltem metallischem Silber. Dieses wurde mit der sehr empfindlichen nephelometrischen Methode von Richards und Wells bestimmt. Es zeigte sich nun, daß das im Licht neu gebildete Silber nicht aus dem Chlorsilber, sondern praktisch nur aus den überschüssigen löslichen Silbersalzen stammt. Mit der Belichtungszeit wächst die Silbermenge anfangs langsam, die Reaktionsgeschwindigkeit nimmt aber bald zu, um mit dunkler werdender Färbung der Schicht wieder abzunehmen. Graphisch läßt sich dieser Verlauf in Gestalt einer S-förmigen Kurve darstellen. Diese deutet darauf hin, daß sich während der Belichtung ein Sensibilisator bildet, der in diesem Fall nur das Silber selbst sein kann.

Die Prüfung des Einsteinschen Gesetzes geschah mit dem monochromatischen blauen Licht der Quecksilberlampe, das mit dunklen Kobaltgläsern und einer dicken Schicht von 0,5 Proz. Chininsulfat, welche auch das Violett 406 $\mu\mu$ vollkommen absorbiert, herausgefiltert wurde. Die Energie der Strahlung wurde unter den üblichen Vorsichtsmaßregeln mit einem Flächenbolometer von Lummer und Kurlbaum und die Absorption für Blau 436 $\mu\mu$ mit dem Spektralphotometer von König und Martens gemessen.

Die Messungen ergaben, daß das Güteverhältnis φ/P nach Warburg nur dann im Sinne des Einsteinschen Gesetzes in der Nähe von 1 herauskam, wenn nicht die gesamte von dem Chlorsilber und dem Silber absorbierte, sondern nur die vom metallischen Silber allein absorbierte Lichtmenge berücksichtigt wurde. Das Güteverhältnis wurde, wie aus der Tabelle hervorgeht, mit zunehmender Belichtungszeit und Färbung der Schicht immer ungünstiger, erreicht aber bei Extrapolation auf die Silbermenge 0 den theoretischen Wert 1.

Belichtungsintervall	[0']	0—30'	30—60'	60—90'	90—120'
φ/p	[1,0]	0,65	0,30	0,15	0,10

Es liegt also hier die erste Bestätigung des Gesetzes in einem festen und in einem sensibilisierten, lichtempfindlichen System vor. Die Tatsache, daß gerade das metallische Silber, also der bei der photochemischen Reaktion entstehende Bestandteil lichtempfindlich ist, verlangt eine besondere Deutung des Mechanismus, da die Energie von den quantenhaft absorbierenden Silberatomen auf die leicht zersetzlichen Silbersalze übertragen werden muß. Dies kann nicht wie in Gasen durch Zusammenstöße geschehen. Die einfachste Vorstellung scheint die Annahme einer Vermittlung durch Elektronen zu sein, welche in einem lichtelektrischen Effekt vom Silber emittiert und von einem benachbarten elektronenfangenden Molekül aufgenommen werden. Es findet hier also ein innerer lichtelektrischer Effekt statt, welcher durch äußere elektrische Messungen nicht nachweisbar ist und schon bei kleineren Frequenzen als die Ionisierungsfrequenz auftreten kann.

Dieselbe Schlußfolgerung ergab sich aus kürzlich veröffentlichten Versuchen über die photochemischen Eigenschaften von Farbstoffschichten[1]), und sie ermöglicht die Deutung einer Anzahl charakteristischer Erscheinungen an festen lichtempfindlichen Systemen, worüber an anderer Stelle ausführlich berichtet werden soll.

Anmerkung bei der Drucklegung. Die in dem vorhergehenden Bericht von Herrn Eggert mitgeteilte Bestätigung des Einsteinschen Gesetzes an der photographischen Trockenplatte (J. Eggert und W. Noddack, Berl. Akad. Ber. **1921**, 631) also gleichfalls in einem festen System, erschien mir auffallend, weil die Absorption der gelben Bromsilberschichten im Violett mit 4—11,4 Proz. so unerwartet gering war. Ich habe deshalb inzwischen einige Messungen der Absorption nach einer photographischen Methode, über die demnächst in der Zeitschr. f. Physik. Chem. berichtet werden soll, ausgeführt und fand Absorptionen für das Violett zwischen 73 und 84 Proz. Das Gesetz scheint demnach in diesem wichtigen Fall noch nicht experimentell bestätigt zu sein.

Diskussion.

Wigand: Es liegt nahe, den Schwellenwert der Lichtempfindlichkeit der entwickelten Trockenplatte in Beziehung zu setzen zur Quantentheorie, indem man die Quantenzahl berechnet, die bei der Schwelle auf ein geschwärztes Bromsilberkorn kommt. Nach roher Berechnung aus vorliegenden Versuchen müssen das mehr als 1000 Quanten sein. Neue ad hoc angestellte Versuche wären erwünscht.

Noddack: Die alleinige Zersetzung der organischen Silbersalze durch das Licht in der Emulsion ließe sich so erklären, daß zuerst $AgCl$ in $Ag + Cl$ zersetzt wird, daß das Cl-Atom die organische Silberverbindung zerstört, so daß der Endeffekt der von Herrn Weigert geschilderte ist.

1) F. Weigert, Zeitschr. f. Phys. **5**, 410, 1921.

Weigert: Eine Zersetzung und nachherige Neubildung von Chlorsilber erscheint in dem untersuchten Fall ausgeschlossen, weil ja durch die Bestätigung des Einsteinschen Gesetzes gezeigt wurde, daß das Silber der photochemisch absorbierende Bestandteil des Systems ist.

Noddack: Die Absorption der Weigertschen Schwellen ist eine sehr geringe, ich glaube, daß die Reflexion, die der Herr Vortragende vernachlässigt, von derselben Größenordnung ist und so den zu kleinen photochemischen Effekt bei $AgCl$ erklärt, und möchte fragen, wie eine so kleine Absorption von der des umgebenden Mediums unterschieden werden kann?

Weigert: Die Emulsionen befanden sich in einem sehr geringen Reifungszustand und die Schichten waren daher annähernd klar durchsichtig, so daß die Reflexionsverluste vernachlässigt werden konnten.

Noddack: Wie groß war die Genauigkeit der nephelometrischen Messung? Ließe sich die anfangs schwache Neigung der Kurve nicht durch Fehler erklären, so daß sie erst linear ansteigt und oben normal wegen verminderter Absorption, wie Herr Weigert sagte, umbiegt?

Weigert: Die nephelometrische Bestimmungsmethode erlaubte in der Schicht noch Silbermengen von ca. 0,001 mg/cm² zu messen. Diese verfeinerte Analysenmethode war notwendig, weil alle zusammengehörigen Versuche an einer 9/12 Platte angestellt werden mußten. Zwei verschiedene mit der Hand gegossene Platten zeigten deutliche Unterschiede in der Empfindlichkeit. Über die näheren quantitativen Angaben gebe ich Herrn Noddack gern nach der Sitzung Auskunft.

Wigand: Daß der subjektiv und photometrisch feststellbare Schwellenwert nicht existiert, wäre neu.

Ulfilas Meyer: Eine Hauptschwierigkeit scheint mir darin zu liegen, die absorbierte Lichtmenge genau zu bestimmen, da sie in den vorliegenden Fällen nur klein gegen das durchgelassene bzw. reflektierte Licht ist. Ich möchte fragen, ob noch nicht der Versuch gemacht ist, für solche Messungen einen schwarzen Körper zu benutzen, d. h. die lichtempfindliche Schicht in einen Hohlkörper zu bringen.

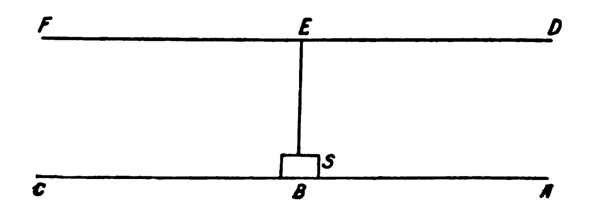
Weigert: Die Methode des schwarzen Körpers ist aussichtsreich, ist aber noch nicht auf diesen Fall angewendet worden.

R. Schachenmeier (Karlsruhe), Das elektromagnetische Feld einer strahlenden, schwach gedämpften Antenne.

I. Es sind die Eigenschwingungen von Sendeantennen auf Grund der Feldwirkungstheorie zu berechnen. Bei den in der Praxis heute meist benutzten Antennenformen mit starken Endkapazitäten ist diese Aufgabe noch nicht gelöst. Es wird ein Verfahren angegeben, welches dieselbe zwar nicht streng, doch in manchen Fällen mit guter Annäherung zu lösen erlaubt und einen Einblick in den physikalischen Vorgang der Wellenausstrahlung gewährt.

Die Antennendrähte seien vollkommene Leiter; die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums sei gleich 1. Das gestellte Randwertproblem verlangt dann: Eine in der Zeit rein periodische Lösung der Feldgleichungen zu finden, welche in großer Entfernung von der Antenne forteilende Wellen darstellt und derart, daß auf der Oberfläche der Leiter die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwindet.

II. Das Antennensystem werde eingeteilt 1. in Drähte, welche in der Hauptsache nur Leitungsstrom führen und fast keine freien Ladungen tragen („Stromzuführung"), 2. in Drähte, welche nur freie Ladungen tragen und keinen Leitungsstrom führen („Luftleiter" und „Gegengewicht"). Ob diese Einteilung überhaupt möglich ist, läßt sich streng genommen erst entscheiden, wenn die gesuchte Lösung bereits vorliegt. Sie muß also zunächst versuchsweise vorgenommen werden. Wenn das darauf angewendete Verfahren zur Lösung des Randwertproblems führt, so war sie berechtigt; anderenfalls ist sie zu verwerfen. Dies stellt in methodischer Hinsicht einen Mangel unseres Lösungsverfahrens dar. Immerhin ist bei allen praktisch gebrauchten Antennen die Einteilung aus elementarer, durch die Erfahrung bestätigter Überlegung hinreichend genau bekannt. Z. B. wird man an der T-Antenne der Fig. 1



BE als stromführenden, ABC und DEF als Kapazitätsleiter behandeln. In der Sendeapparatur S seien vorläufig Verlängerungsspulen und Verkürzungskondensatoren kurz geschlossen. Die Punkte des Stromleiters mögen durch einen Parameter s bezeichnet werden, die Punkte der

Kapazitätsleiter durch σ bzw. τ. Zwischen B und E sei $0 \leq s \leq l$ zwischen A und C $a \leq \sigma \leq c$, zwischen D und F $d \leq \tau \leq f$.

III. Wir gehen aus von der Eigenschwingung, welche gewonnen wird, wenn man die Theorie des geschlossenen Schwingungskreises auf die Antenne anwendet: Es bedeuten C, L Kapazität und Selbstinduktion des Stromleiters, gleichförmig verteilt gedacht und bezogen auf die Längeneinheit. Stromstärke $i_0(s)$ und Dichte der wahren Ladungen $\varrho_0(s)$ folgen[1]) dann aus den Gleichungen

$$\frac{1}{C}\frac{\partial \varrho_0}{\partial s} + L\frac{\partial i_0}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial i_0}{\partial s} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

mit den Grenzbedingungen:

$$i_0(o) = i_0(l) = C_a C\left[\left(\frac{\partial i_0}{\partial s}\right)_0 - \left(\frac{\partial i_0}{\partial s}\right)_l\right], \qquad (3)$$

worin t die Zeit und C_a die (statische) Antennenkapazität (in Fig. 1 ABC gegen DEF) bedeuten.

Die Ladungen $\varrho_0(s)$ erzeugen ein Potential

$$\Phi_0' = \int_0^l \frac{\varrho_0(s)}{r}ds - \frac{1}{4\pi C}\int_0^l \varrho_0(s)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu}ds \qquad (4)$$

(die Integration ist genauer über die Oberfläche des von dem Drahte eingenommenen röhrenförmigen Raumes zu erstrecken; r bedeutet den Abstand zwischen Integrationselement und Aufpunkt, ν die Normale auf die Drahtoberfläche) und ein elektrisches Feld

$$\mathfrak{e}_0' = -\operatorname{grad}\Phi_0'. \qquad (5)$$

Das mit dem Strom $\mathfrak{i}_0$ durch die Feldgleichungen

$$4\pi\mathfrak{i}_0 + \frac{\partial \mathfrak{e}_0''}{\partial t} = c \operatorname{rot}\mathfrak{h}_0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{e}_0'' = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_0}{\partial t} = c \operatorname{rot}\mathfrak{e}_0'', \quad \operatorname{div}\mathfrak{h}_0 = 0 \qquad (7)$$

verknüpfte elektromagnetische Feld $\mathfrak{e}_0''$, $\mathfrak{h}_0$ ($\mathfrak{i}_0$ bedeutet den Vektor des Leitungsstromes $i_0(s)$, c die Lichtgeschwindigkeit) stimmt nahe überein mit dem Feld von Dipolen, welche auf der Drahtachse angebracht werden, und für deren Moment $\mathfrak{p}_0$ gilt:

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_0}{\partial t} = \dot{\mathfrak{p}}_0 = i_0 d\mathfrak{f} \qquad (8)$$

($d\mathfrak{f}$ = Linienelement der Drahtachse). $\mathfrak{e}_0''$, $\mathfrak{h}_0$ berechnen sich daher in bekannter Weise[2]) aus dem Hertzchen Vektor

$$\mathfrak{Z}_0 = \int_0^l \frac{d\mathfrak{f}}{r}\int_0^{t-\frac{r}{c}} i_0\,dt, \qquad (9)$$

$$\mathfrak{e}_0'' = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_0}{\partial t^2}; \quad \mathfrak{h}_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{Z}_0. \qquad (10)$$

Wir machen über die Gestalt des Stromleiters die Annahme, daß $\mathfrak{e}_0''$ in Punkten der Kapazitätsdrähte verschwindende Tangentialkomponente habe (d. h. im wesentlichen, daß die Strahlung der Dipole (8) unbehindert nach außen gelangen kann). Sei

$$\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0' + \mathfrak{e}_0''. \qquad (11)$$

Auf den Kapazitätsleitern treten wahre Ladungen $\varrho_0(\sigma)$, $\varrho_0(\tau)$ auf, für welche gilt

$$\int_a^c \varrho_0(\sigma)d\sigma = \int i_0(o)dt; \quad \int_d^f \varrho_0(\tau)d\tau = \int i_0(l)dt. \qquad (12)$$

Ihre Verteilung ergibt sich mit Hilfe eines Potentiales Φ_1, welches nach den Methoden der Potentialtheorie zu bestimmen ist als Lösung der Potentialgleichung

$$\Delta\Phi_1 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} = 0 \qquad (13)$$

unter den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\sigma) &= -\Phi_0'(\sigma) + \alpha_1,\\ \Phi_1(\tau) &= -\Phi_0'(\tau) + \beta_1.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die Konstanten α_1, β_1 sind festgelegt durch die Bedingungen (12). Es ist dann

$$\varrho_0(\sigma) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu}\right]_\sigma, \quad \varrho_0(\tau) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu}\right]_\tau. \qquad (15)$$

Wir setzen

$$\mathfrak{e}_1 = -\operatorname{grad}\Phi_1. \qquad (16)$$

Das elektrische Feld

$$\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1 \qquad (17)$$

genügt nun wohl der Randbedingung auf den Kapazitätsdrähten, nicht aber auf dem Stromleiter.

IV. Wir führen für die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{e}_1$ an der Oberfläche des Stromleiters die Abkürzungen $\mathfrak{e}_0^{(p)}$ bzw. $\mathfrak{e}_1^{(p)}$ ein, für die Normalkomponenten $\mathfrak{e}_0^{(s)}$ bzw. $\mathfrak{e}_1^{(s)}$. Der Randbedingung kann man genügen durch Superposition eines Stromes $i_2(s)$ und wahrer Ladungen $\varrho_2(s)$ gemäß

$$\frac{1}{C}\frac{\partial\varrho_2}{\partial s} + L\frac{\partial i_2}{\partial t} = \mathfrak{e}_1^{(p)}. \qquad (18)$$

Da die nunmehr noch von o verschiedene

1) Kirchhoff, Poggendorffs Ann. d. Phys. 121, 551, 1864.

2) Abraham, Enzyklop. d. math. Wiss. V, 18, „Elektromagnetische Wellen", § 5; Abraham-Föppl, Theorie d. Elektrizität, Bd. 1, Leipzig 1918. § 79, 80.

Komponente $\mathfrak{e}_1^{(s)}$ einen Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{e}_1^{(s)}}{\partial t}$ bewirkt, so muß ferner

$$\frac{\partial i_2}{\partial s}+\frac{\partial \varrho_2}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{e}_1^{(s)}}{\partial t} \qquad (19)$$

sein. $i_2(s)$, $\varrho_2(s)$ sind bestimmt durch diese beiden Gleichungen (18), (19) mit der Grenzbedingung

$$i_2(0)=i_2(l)=C_a C\left[\left(\frac{\partial i_2}{\partial s}\right)_0-\left(\frac{\partial i_2}{\partial s}\right)_l\right]. \qquad (20)$$

Die Ladungen $\varrho_2(s)$ erzeugen ein Potential

$$\Phi_2'=\int_0^l \frac{\varrho_2(s)}{r}ds-\frac{1}{4\pi C}\int_0^l \varrho_2(s)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu}ds \qquad (21)$$

und ein elektrisches Feld

$$\mathfrak{e}_2'=-\operatorname{grad}\Phi_2'. \qquad (22)$$

Der Strom $i_2(s)$ erzeugt ein elektromagnetisches Feld $\mathfrak{e}_2''$, $\mathfrak{h}_2$, das sich aus dem Hertzschen Vektor

$$\mathfrak{Z}_2=\int_0^l \frac{d\mathfrak{l}}{\nu}\int_0^{t-\frac{r}{c}} i_2 dt \qquad (23)$$

herleitet. Sei

$$\mathfrak{e}_2=\mathfrak{e}_2'+\mathfrak{e}_2''. \qquad (24)$$

Wegen (18) ist jetzt

$$\mathfrak{e}_0^{(p)}+\mathfrak{e}_1^{(p)}+\mathfrak{e}_2^{(p)}=0. \qquad (25)$$

Jedoch ist nun die Grenzbedingung auf den Kapazitätsdrähten nicht mehr erfüllt; ferner erscheinen dort wahre Ladungen $\varrho_2(\sigma)$, $\varrho_2(\tau)$, für die gilt

$$\int_a^e \varrho_2(\sigma)d\sigma=\int i_2(0)dt;\ \int_d^f \varrho_2(\tau)d\tau=\int i_2(l)dt, \qquad (26)$$

und deren Verteilung sich mit Hilfe eines Potentials Φ_3 ergibt:

$$\Delta\Phi_3=0, \qquad (27)$$

das der Grenzbedingung genügt:

$$\begin{aligned}\Phi_3(\sigma)&=-\Phi_2'(\sigma)+\alpha_3,\\ \Phi_3(\tau)&=-\Phi_3'(\tau)+\beta_3.\end{aligned} \qquad (28)$$

Die Konstanten α_3, β_3 sind festgelegt durch (26). Es ist dann

$$\varrho_2(\sigma)=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Phi_3}{\partial\nu}\right]_\sigma,\ \varrho_2(\tau)=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Phi_3}{\partial\nu}\right]_\tau. \qquad (29)$$

Ist jetzt

$$\mathfrak{e}_3=-\operatorname{grad}\Phi_3, \qquad (30)$$

so erfüllt

$$\mathfrak{e}_0+\mathfrak{e}_1+\mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3 \qquad (31)$$

die Grenzbedingung auf den Kapazitätsdrähten, aber nicht mehr auf den Stromleitern. Das gibt Veranlassung zu einer Korrektur wie anfänglich bei $\mathfrak{e}_1$. Es entsteht so ein alternierendes Verfahren:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{C}\frac{\partial\varrho_n}{\partial s}+L\frac{\partial i_n}{\partial t}=\mathfrak{e}_{n-1}^{(p)},\\ &\frac{\partial i_n}{\partial s}+\frac{\partial\varrho_n}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{e}_{n-1}^{(s)}}{\partial t},\\ &(n=2,4,6\ldots)\end{aligned}\right| \qquad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\Phi_{n+1}=0,\\ &\Phi_{n+1}(\sigma)=-\Phi_n'(\sigma)+\alpha_n,\\ &\Phi_{n+1}(\tau)=-\Phi_n'(\tau)+\beta_n,\\ &(n=2,4,6\ldots)\end{aligned}\right| \qquad (33)$$

Die Frage nach der Konvergenz dieses alternierenden Verfahrens und damit die Aufstellung von Kriterien für zulässige Antennenformen muß der Raumersparnis wegen an anderer Stelle gesondert behandelt werden. Empirisch-zeichnerisches Vorgehen gestattet dort bei jeder vorgelegten Antennenform über die Anwendbarkeit des Verfahrens zu entscheiden.

V. Die Konvergenz vorausgesetzt, liefert unsere Methode Stromstärke i und wahre Ladungen ϱ der gesuchten Lösung des Randwertproblems in der Gestalt

$$i=i_0+i_2+i_4+\cdots, \qquad (34)$$

$$\varrho=\varrho_0+\varrho_2+\varrho_4+\cdots. \qquad (35)$$

Es entsteht ferner ein elektrisches Feld

$$\mathfrak{e}=\mathfrak{e}_0+\mathfrak{e}_1+\mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3+\cdots, \qquad (36)$$

das den Grenzbedingungen genügt, sowie ein magnetisches Feld

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0+\mathfrak{h}_2+\mathfrak{h}_4+\cdots. \qquad (37)$$

Man setze außerdem

$$\mathfrak{e}'=\mathfrak{e}_0'+\mathfrak{e}_1+\mathfrak{e}_2'+\mathfrak{e}_3+\cdots, \qquad (38)$$

$$\mathfrak{e}''=\mathfrak{e}_0''+\mathfrak{e}_2''+\mathfrak{e}_4''+\cdots. \qquad (39)$$

Um mit den elektrischen Größen i, ϱ, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ außerhalb der Leiter den Feldgleichungen genügen zu können, belegen wir jeden Punkt, in welchem

$$\dot{\mathfrak{e}}'=\frac{\partial\mathfrak{e}'}{\partial t}\neq 0 \qquad (40)$$

mit einem Dipol vom Moment

$$\mathfrak{p}=-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{e}'df\,dh=-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{e}'d\nu, \qquad (41)$$

wo df Querschnitt, dh Höhe, $d\nu$ Volumen eines unendlich kleinen Zylinders bedeuten, dessen Achse in die Richtung der Feldstärke $\mathfrak{e}'$ fällt. Das Feld $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{h}^*$ dieser Dipole resultiert aus dem Hertzschen Vektor

$$\mathfrak{Z}=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\nu}{r}[\mathfrak{e}]_{t-\frac{r}{c}}. \qquad (42)$$

$$\mathfrak{e}^*=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2};\ \mathfrak{h}^*=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{Z}. \qquad (43)$$

Fällt der Aufpunkt in einen „Erregungspunkt", so wird dort der Integrand von (42) unendlich wie r^{-1}. Bei Bildung des Integrals (42) ist daher dieser Punkt durch eine kleine Kugel zunächst auszuscheiden. Läßt man ihren Radius unendlich klein werden, so verschwindet ihr Beitrag und (42) bleibt endlich. $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{h}^*$ genügen den Feldgleichungen

$$-\mathfrak{i}' + \frac{\partial \mathfrak{e}^*}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{h}^*, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e}^* = 0, \qquad (44)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}^*}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{e}^*, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h}^* = 0. \qquad (45)$$

Wir machen nun die bei schwach gedämpften Antennen wohl meistens zulässige Annahme, daß auf den Leitern die Tangentialkomponente von $\mathfrak{e}^*$ verschwindend klein sei; wie oben bedeutet dies im wesentlichen, daß die Strahlung der Dipole unbehindert nach außen gelangen kann. Wegen (6), (7) usw. ist

$$4\pi \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{e}''}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{h}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e}'' = 0, \qquad (46)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{e}'', \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \qquad (47)$$

und wegen (5), (16) usw.

$$\operatorname{div} \mathfrak{e}' = 0. \qquad (48)$$

Die Größen

$$\mathfrak{i}, \varrho, \mathfrak{E} = \mathfrak{e}' + \mathfrak{e}'' + \mathfrak{e}^*, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^* \qquad (49)$$

genügen daher außerhalb der Leiter den Feldgleichungen

$$4\pi \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \qquad (50)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \qquad (51)$$

(49) ist die Lösung des Randwertproblems. Dieselbe ist überall endlich außer in den Punkten der Achse des stromführenden Leiters, wo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ singulär werden (weil $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{h}$ sich aus Hertzschen Vektoren von der Form (9) herleiten). Sie stellen in großer Entfernung forteilende Wellen dar. Die Wellenstrahlung geht nicht nur von der Strombahn aus, sondern von allen Punkten in der Umgebung des Leiters.

VI. Die Funktion

$$\Phi = \Phi_0' + \Phi_1 + \Phi_2' + \Phi_3 + \cdots \qquad (52)$$

liefert die Werte des Potentials auf den Leitern. In dem der Strombahn und den Kapazitätsdrähten gemeinsamen Punkt B (Fig. 1) wird i. a.

$$[\Phi]_{\sigma=+0} - [\Phi]_{s=0} = \alpha \neq 0 \qquad (53)$$

sein, d. h. das Potential Φ eine Unstetigkeit erfahren. (Die Forderung der Stetigkeit würde in (14), (28) usw. den Konstanten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3 \beta_3, \cdots$ Bedingungen auferlegen, die i. a. nicht vereinbar sind mit (12), (26) usw.) Man kann diesen Potentialsprung beseitigen, indem man in der Sendeapparatur S (Fig. 1) eine Verlängerungsspule von der Selbstinduktion L_0 einschaltet, so daß

$$-L_0 \left[\frac{\partial i}{\partial t}\right]_0 = \alpha. \qquad (54)$$

Wenn der Sprung α und $[\Phi]_{s=0}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so ist anstatt L_0 ein Verkürzungskondensator einzuschalten von der Kapazität C_0, so daß

$$-\frac{1}{C_0} \int i(0)\, dt = \alpha. \qquad (55)$$

An der Lösung (49) wird hierdurch nichts geändert.

Die bereits durch (1), (2), (3) festgelegte Wellenlänge kann also nur unter Zuschaltung von L_0 bzw. C_0 ausgestrahlt werden. Die Theorie gestattet, zu jeder gewünschten Betriebswelle die nötige Verlängerungsinduktivität bzw. Verkürzungskapazität, schließlich auch die Eigenwellenlänge der Antenne zu berechnen.

H. Gerdien (Berlin-Grunewald), Über einen akustischen Schwinger (mit Vorführungen). Nach gemeinsam mit Herrn Dr. H. Riegger und Herrn Dr. K. Boedeker ausgeführten Untersuchungen.

Bei der Bearbeitung einer technischen Aufgabe ergab sich vor etwa 6 Jahren für uns die Notwendigkeit, ein mechanisches schwingungsfähiges Gebilde zu schaffen[1]), welches innerhalb des Empfindlichkeitsbereiches des Ohres nur einer Grundschwingung fähig sein sollte — der Schwinger, wie wir kurz sagen wollen, sollte also frei sein von allen hörbaren Obertönen. An weiteren Anforderungen wurde gestellt, daß die Grundfrequenz durch das Herstellungsverfahren genügend genau und unveränderlich festgelegt sein sollte, und daß ferner die Feinregelung dieser Frequenz in einfacher Weise möglich sein sollte. Endlich wurde verlangt, daß das Herstellungsverfahren ein für die Methoden der Präzisionsmassenherstellung geeignetes sein sollte. Das so entstandene Gebilde schien uns nun nicht allein für den gedachten technischen Anwendungszweck geeignet zu sein, sondern auch für den Physiker ein gewisses Interesse zu bieten, da das physikalische Instrumentarium bisher nicht gerade über allzu

1) Ein Teil der hier beschriebenen Anordnungen ist bereits mitgeteilt in den „Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern", Bd. 1, Heft 1, S. 137—140 „Ein akustischer Schwinger", 1920; H. Gerdien u. H. Riegger, und ebenda „Über Bau und Anwendungen eines mechanischen Schwingers" 1920, von K. Boedeker u. H. Riegger, S. 141—142.

viel Möglichkeiten verfügt, welche geeignet sind, reine Töne zu erzeugen[1]).

Betrachtet man etwa die an einem einerseits eingeklemmten Stabe möglichen Transversalschwingungen, so leuchtet ein, daß die gleichmäßige Verteilung der schwingungsfähigen Massen und Biegungswiderstände über die ganze Länge des Stabes die Grundlage bildet für die Ausbildung der verschiedenen möglichen Schwingungsformen. Wir können eine Grundschwingung schon dadurch merklich bevorzugen, daß wir an dem freien Ende des Stabes die Masse und gleichzeitig die Querschnitte vom freien Ende aus so vergrößern, daß Durchbiegungen hier gegenüber dem unverändert gelassenen Teile des Stabes merklich unterdrückt werden (vgl. Fig. 1). So gelangt

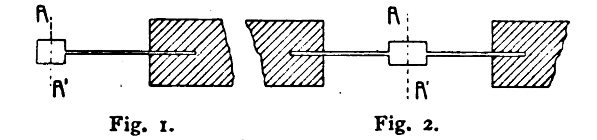
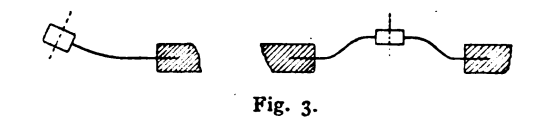


Fig. 1. Fig. 2.

man bei fortschreitender Verkürzung des biegungsfähigen Teiles zu schwingungsfähigen Gebilden, welche die Grundschwingung stark ausgeprägt bevorzugen. Man stößt aber auf Schwierigkeiten, sie auch für größere schwingende Massen und Frequenzen im Hörbereich bei zulässigen Biegungsbeanspruchungen des federnden Teiles für technisch brauchbare Schwingungsweiten auszuführen. Man muß bestrebt sein, die Federkraft im Verhältnis zur schwingenden Masse möglichst zu vergrößern, ohne dabei zu Dicken der durchgebogenen Federn zu gelangen, welche die mögliche Schwingungsweite allzusehr herabsetzen. Man gelangt dazu z. B., indem man die Federkraft möglichst am ganzen Umfange der schwingenden Masse angreifen läßt und sich z. B. aus dem in Fig. 1 dargestellten Schnitt durch Rotation um die Achse AA' einen Rotationskörper hergestellt denkt, wie er aus Fig. 2 ersichtlich ist. Man gelangt so zu einer Platte mit verstärkter Mitte und verstärktem Rande, bei welcher die gewünschte Schwingung der zentralen Masse M_1 gegenüber dem Ring M_2 parallel der Rotationsachse AA', zu denken ist. Dabei ist eine Änderung in der Beanspruchung des federnden Teiles gegenüber Fig. 1 eingetreten; die schwingende Masse erfährt jetzt nur noch Parallelverschiebungen und keine Drehungen mehr. In Fig. 3 sind die im Fall 1

[1]) Ähnliche Wege zum gleichen Ziele wurden bereits verfolgt von W. Hahnemann u. H. Hecht, „Die Grundform des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers", diese Zeitschr. 21, 187, 1920.


Fig. 3.

und 2 stattfindenden Verbiegungen der federnden Teile in vergrößertem Maßstabe angedeutet.

Eine derartige Ausführungsform des Schwingers erfüllt aber noch nicht die Anforderung der Reinheit der Grundfrequenz. Die schwingungsfähige Masse besitzt noch mehr als einen einzigen Freiheitsgrad der Bewegung. Auch wenn man den federnden Teil der Platte in radialer Richtung möglichst verkürzt, so daß die Gradführung für die schwingende Masse schon eine verhältnismäßig vollkommene wird, bleiben dennoch Schwingungsformen übrig, bei welchen die zentrale Masse um einen zur Rotationsachse AA' senkrechten Radius Drehbewegungen ausführt. Diese „Wackelschwingungen" treten naturgemäß dann besonders stark auf, wenn etwa durch exzentrisches Anschlagen die Masse zum Schwingen angeregt wird. Wir haben die Gradführung dadurch vervollkommnet, daß wir zwei Schwinger der bisher beschriebenen Art durch feste Verbindung der zentralen Teile und der Ränder zu einem einzigen schwingungsfähigen Gebilde vereinigten. Derartige Gebilde (vgl. Fig. 4 und 5[1])) erfüllen in der Tat alle ein-

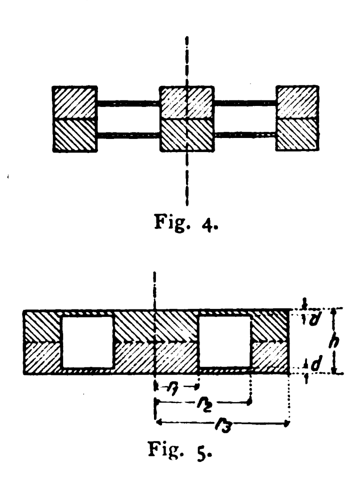


Fig. 4.

Fig. 5.

leitend an einen akustischen Schwinger gestellten Anforderungen. Sie zeigen bei geeigneter Wahl der Ausmaße nur eine einzige im Hörbereich des Ohres liegende Grund-

[1]) Der Gedanke, eine schwingungsfähige Masse zwischen zwei federnden ebenen Teilen aufzuhängen, so daß eine vollkommene Gradführung erreicht wird, ist von mir zuerst in der Patentschrift D.R.P., Nr. 298918. Kl. 74d, Gruppe 6, vom 20. August 1915, der Siemens & Halske Akt.-Ges. veröffentlicht worden.



schwingung. Sie lassen sich als Rotationskörper äußerst leicht mit genügender Genauigkeit reproduzieren. Die Feinregelung auf eine bestimmte Frequenz ist ebenso leicht durch Abdrehen oder Nachschleifen nach dem Zusammenschrauben der beiden Teile ausführbar und die Präzisionsmassenherstellung stößt auf keinerlei Schwierigkeiten. Wir haben derartige Schwinger für die Frequenzen zwischen 30 pro Sekunde und einigen 1000 pro Sekunde aus Siemens-Martinstahl und Chromnickelstahl hergestellt. Sie wurden durch Elektromagneten, welche mit sinusförmigem Wechselstrom in kontinuierlich langsam veränderter Frequenz erregt wurden, zum Schwingen gebracht und auf das Auftreten von Oberschwingungen durch Abhören geprüft[1]).

Die folgende Tabelle enthält die Ausmaße (nach den Bezeichnungen der Fig. 5 in mm) für 5 verschiedene Schwinger, welche sämtlich auf die Frequenz $n = 1050$ in der Sekunde abgestimmt waren. Die Dämpfung nimmt für ein bestimmtes Material mit wachsender Differenz $r_3 - r_1$ ab. Die Dämpfung ist auch beeinflußt durch die Eigenschaften des Materials, wie man sich durch Anschlagen eines Schwingers aus Aluminium oder eines Schwingers aus Hartgummi überzeugen kann.

r_1	r_2	r_3	d	h
10	30	50	0,8	20
10	40	60	1,25	20
15	25	60	0,5	20
15	20	60	0,25	20
15	35	55	0,9	20

Die Frequenz des Schwingers ergibt sich in bekannter Weise aus der schwingenden Masse M_1, der Ringmasse M_2 und der Direktionskraft C (Kraft bei der Ausweichung um die Längeneinheit) zu

$$\omega^2 = C\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right),$$

worin ω wie gewöhnlich die Kreisfrequenz bezeichnet. Für nicht sehr weit von 1 verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{r_1}{r_2}$ läßt sich die Direktionskraft in erster Annäherung berechnen, indem man den federnden Teil des Schwingers als Blattfeder von der Länge $r_2 - r_1$, der Dicke d und der Breite $\pi (r_1 + r_2)$ betrachtet, deren Ende einerseits fest eingespannt, andrerseits im Endquerschnitt parallel der Ruhelage geführt wird. Bei endlicher Größe der Masse M_2 führt natürlich auch diese Schwingungen um den mit der Masse M_1 gemeinsamen Schwerpunkt aus, wobei sich die von diesem Schwerpunkt aus gemessenen Amplituden umgekehrt wie die Massen verhalten. Es ist daher bei dem Gebrauch der Schwinger notwendig, auf die Befestigung des äußeren Ringes zu achten. Ist dieser starr eingespannt oder mit einer andern Masse fest verschraubt, so tritt eine Verkleinerung der Frequenz gegenüber dem frei schwingenden System ein, welche allerdings sehr unbedeutend ist. Bei allen Schwingern, deren Ringmasse an sich schon sehr groß gegenüber M_1 gehalten ist. Bei kleinen Schwingern genügt es, den Ring lose zwischen Daumen und den gespreizten andern vier Fingern der Hand zu halten, um eine genügend nachgiebige freie Lage des Schwingers zu gewinnen. Es wird lediglich die Dämpfung etwas vermehrt gegenüber einer wirklich nachgiebigen Aufhängung. Eine solche erhält man leicht durch Aufhängen an einer Drahtschlinge oder durch Auflegen des Schwingers auf eine aus drei gebogenen Blattfedern bestehende Unterlage. In der letzteren Anordnung läßt sich sehr schön mittels aufgestreuten Sandes die völlige Freiheit von Oberschwingungen zeigen: es tritt nur eine einzige kreisförmige Knotenlinie hervor. Die zunächst gegenüber der Stimmgabel nachteilig erscheinenden Schwingungen des äußeren Ringes sind für die meisten technischen Anwendungen sehr wertvoll, weil sie es ermöglichen, die Bewegungen der schwingenden Masse in jedem gewünschten Maße verkleinert auf andere gekoppelte Systeme zu übertragen. Man kann natürlich auch die zentrale Masse größer machen als die Ringmasse oder sie überhaupt durch starre Befestigung an einer sehr großen Masse festlegen. Dann dient die Ringmasse als schwingende Masse (vgl. Fig. 6).

Die Dämpfung frei aufgehängter Schwinger ist bei kleinen handlichen Ausführungen etwas größer als die der gewöhnlichen Stimmgabeln auf Resonanzkästen. Wir haben Messungen des Schwingungsdekrementes für einen ziemlich stark gedämpften Schwinger aus Siemens-Martinstahl und zum Vergleich für eine Stimmgabel ausgeführt, indem wir die von einem Telephon aufgenommenen Schwingungen mittels eines Dreiröhrenverstärkers vergrößert dem Oszillographen zuführten. Die Ausmessung der Oszillogramme[1]) ergab für den Schwinger das

1) Es wird hier also durch räumliche Trennung des Trägers der kinetischen Energie der Schwingung von dem der potentiellen Energie der analoge Schritt getan, wie seinerzeit in der Entwicklung der drahtlosen Telegraphie, als man die Selbstinduktion und Kapazität des Antennengebildes räumlich zu trennen suchte.

1) Die Oszillogramme sind an der unter 1 zitierten Stelle, S. 140, wiedergegeben.



Dekrement $5 \cdot 10^{-4}$, für die Stimmgabel das Dekrement $1 \cdot 10^{-4}$.

Aus den bisher beschriebenen schwingungsfähigen Gebilden einfachster Art, welche wir als Elementarschwinger bezeichnen wollen, haben wir nun verschiedene Anordnungen zusammengebaut, welche bestimmten Anwendungen angepaßt sind. Es war natürlich erwünscht, die Schwinger in kontinuierlicher Erregung benutzen zu können. Das kann in einfachster Weise geschehen, indem man einen Elementarschwinger, am Rande unterstützt durch einen nachgiebigen Gummiring, auf eine Grundplatte legt, welche in der Mitte einen kleinen Elektromagneten nach Art eines Telephonmagneten trägt. Führt man den Windungen dieses Elektromagneten Wechselströme von einer Wechselstromsirene oder bequemer von einem Röhrensender[1]) zu, so läßt sich der Schwinger bei Resonanz bequem zu erheblicher Lautstärke anregen. Mit einer andern jetzt zu beschreibenden Anordnung bezweckten wir, bei etwas besser definierten Frequenz- und Dämpfungsverhältnissen (ohne Benutzung eines Röhrensenders) die kontinuierliche Erregung zu erhalten; die Anordnung ist in folgender Weise gestaltet (vgl. Fig. 7). Der eigentlich tönende Schwinger besteht aus den fest miteinander verschraubten Massen M_1 und M_2, welche durch die federnden Teile E_1, E_2 mit den Massen M_3, M_4, M_5, M_6 verbunden sind. Die letzteren sind wiederum durch zwei federnde Teile mit den Massen M_7, M_8, M_9 nachgiebig verbunden, wobei die Federung jetzt so schwach gewählt ist, daß die Schwingungen in der Richtung der Rotationsachse nicht im mindesten behindert werden und die

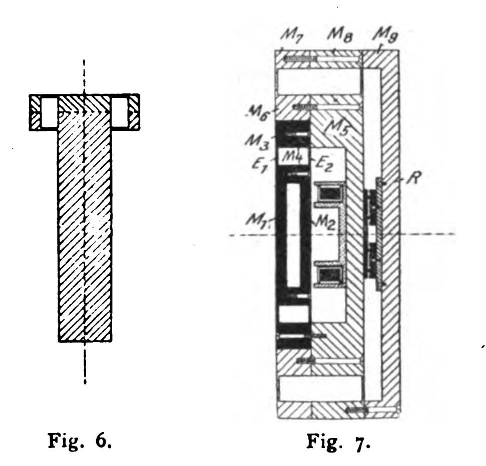


Fig. 6. Fig. 7.

1) Wenn es sich um präzise Festlegung der Frequenz handelt, kann als Röhrensender zum Beispiel der von E. Grüneisen u. E. Merkel in der Zeitschr. f. Phys. **2**, 277—296, 1920 beschriebene, benutzt werden.

Federung nur sehr wenig zur Frequenz des eigentlich tönenden Teiles beiträgt. Die Federn sind andererseits hinreichend stark, um den Schwinger zu tragen. In dieser Form kann der Schwinger unbedenklich auf den Tisch gestellt werden, ohne daß eine störende Zunahme der Dämpfung in Kauf genommen werden müßte. Der eigentlich tönende Teil ist mit den übrigen Teilen nur durch drei Schrauben fest verbunden und kann leicht gegen einen Schwinger von anderer Frequenz ausgewechselt werden. Eine stufenweise Änderung der Frequenz läßt sich auch durch Aufschrauben von zusätzlichen Massen in der Mitte des Schwingers bewirken. Während des Schwingens bewegen sich die beiden ineinander federnd gelagerten Massen gegeneinander. Da sie etwa im Verhältnis 1 : 10 gewählt sind, so liegt die Schwingungsenergie zu etwa 90 Proz. in der kleineren Masse.

Um den Schwinger anzuregen, sitzt auf der Masse M_5 ein Magnetsystem. Dieses kann wie beim Telephon aus einem permanenten Magneten mit entsprechenden Spulen bestehen. Als zweckmäßig hat sich eine Anregungsform ergeben, wie sie aus der Fig. 7 erkennbar ist. Die Magnetisierung wird hier durch einen Gleichstrom bewirkt, dem ein Wechselstrom überlagert ist. Wird dieses Magnetsystem mit Wechselstrom beschickt, so gibt der Schwinger bei Resonanz einen kräftigen, rein sinusförmigen Ton. Durch ein mit dem Schwinger verbundenes Mikrophon kann aber auch nach einer der bekannten Summerschaltungen Selbsterregung des Schwingers bewirkt werden. Wir haben zu diesem Zweck ein Mikrophon auf die Rückwand R aufgebracht. Die Masse M_5 trägt dabei die Kohlenmembran und die Kohlekörner befinden sich also zwischen einem bewegten und einem stehenden Teil. Auch ein sogenanntes Schüttelmikrophon kann verwendet werden. Bei der Größe der mit M_5 verbundenen Massen und ihrer relativ kleinen Amplitude wird die Dämpfung des Schwingers durch den Betrieb des Mikrophons nicht unnötig vergrößert, die Frequenz kaum merklich beeinflußt[1]).

Statt der Anregung durch ein Mikrophon haben wir auch die Selbsterregung durch einen Satz von Verstärkerröhren bewirkt, welche mit Induktionsströmen aus einer kleinen Spule gespeist wurden, in der sie durch die Bewegung der Schwingermasse selbst erzeugt waren. Die Fig. 8 zeigt diese Anordnung. Der Elemen-

1) Die Anordnung kann auch dazu benutzt werden, um aus einer durch die bewegte Schwingermasse induzierten Wicklung einen sinusförmigen Wechselstrom von gut definierter Frequenz zu entnehmen.



tarschwinger ist wiederum auswechselbar, dicht vor den Polen von 2 kleinen Telephonmagnetsystemen gelagert, von denen das eine die induzierten Ströme erzeugt, während das andere, mit dem verstärkten Induktionsstrom gespeist, die Bewegung des Schwingers unterhält. Man kann in einfacher Weise durch Schwächen des Verstärkungsgrades — Verringerung der Rückkoppelung — einen Schwinger mit einer Dämpfung herstellen, deren Dekrement jeden beliebigen kleineren Wert unterhalb des Dekrements des freien Schwingers erreicht.

Das durch Rückkoppelung elektromagnetisch erregte Schwingersystem läßt sich leicht so ausgestalten, daß innerhalb gewisser Grenzen eine stetige und meßbare Änderung der Frequenz vorgenommen werden kann. Man befestigt zu diesem Zweck auf dem mit der Schwingungsrichtung vertikal liegenden Schwinger ein Gefäß (vgl. Fig. 8), in welchem man

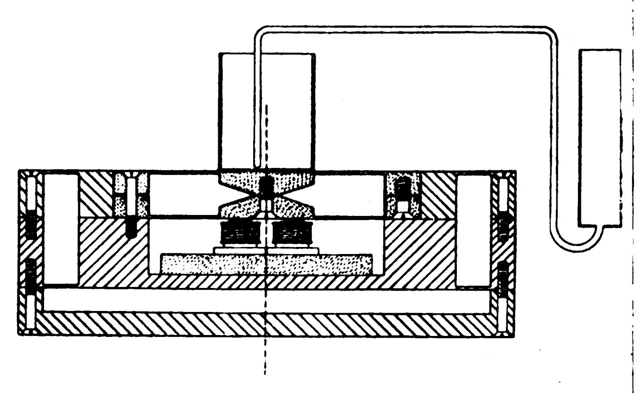


Fig. 8.

durch Einfließenlassen von Wasser die schwingende Masse kontinuierlich verändert[1]).

Endlich mag noch eine Anordnung erwähnt werden, welche sich vielleicht als Normalschallquelle für Messungen in abgeschlossenen Räumen eignet, da bei ihr in besonders gut reproduzierbarer Weise der Zusammenhang zwischen der Schallamplitude in Luft und der Amplitude der schwingenden festen Körper festgelegt ist. Die Anordnung (vgl. Fig. 9) besteht aus zwei genau gleichen Elementarschwingern, welche beiderseits mit einem Mittelstück verschraubt sind. Das Mittelstück trägt an beiden Seiten in möglichst genau gleichen Abständen von den Schwingern je einen kleinen Elektromagneten zur Anregung der Schwinger. Der Luftraum, welcher von den beiden Schwingern eingeschlossen wird, ist mit einem Rohranschluß versehen, mittels

1) Diese Anordnung kann mit Vorteil zur Untersuchung der Ohrempfindlichkeit dienen.

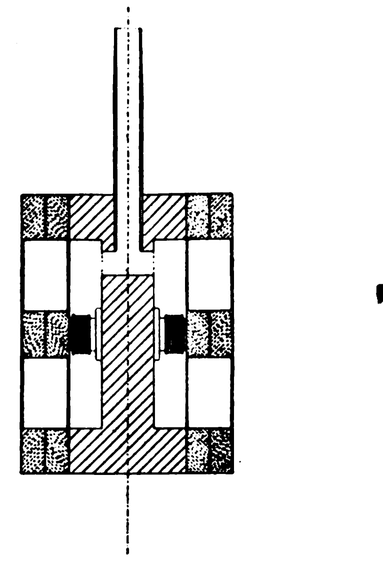


Fig. 9.

dessen die Schallenergie beliebigen geschlossenen Räumen zugeführt werden[1]) kann. Wegen der Symmetrie der Anordnung bleibt das Mittelstück während des Schwingens vollkommen in Ruhe, so daß es ohne Einfluß für die Dämpfung und die Frequenz beliebig befestigt oder auf den Tisch gelegt werden kann[2]).

1) Diese Anordnung läßt sich ebenfalls für den unter 1 genannten Zweck verwenden.

2) Mittels der beschriebenen Anordnungen als Schallquellen kann bei kontinuierlicher Erregung leicht eine Reihe von Versuchen aus der Akustik vorgeführt werden (Schwebungen, Kombinationstöne, Doppler-Effekt, stehende Wellen, Interferenz von Wellen u. a. m.).

Physikalisch-chemisches Laboratorium der Siemens & Halske Akt.-Ges., Sept. 1921.

Hans Reichenbach, Bericht über eine Axiomatik der Einsteinschen Raum-Zeit-Lehre.

Eine Klärung der Grundbegriffe der Relativitätstheorie ist nur dadurch möglich, daß die Lehren der Theorie in axiomatischer Form dargestellt werden. Die Axiome enthalten dann diejenigen fundamentalen Tatsachen, deren Bestehen der Theorie Existenzberechtigung verleiht; sie sind prinzipiell empirische Behauptungen, die also durch das Experiment nachgeprüft werden können. Zu ihnen treten die Definitionen, aus denen der begriffliche Gehalt der Theorie aufgebaut wird. Im Gegensatz zu den Axiomen sind sie willkürliche Gedanken-

bildungen, die grundsätzlich weder empirisch bestätigt noch widerlegt werden können. Nur logische Forderungen sind an sie zu stellen; denn ihre Willkür ist, damit ein wissenschaftlich zweckmäßiges System entsteht, gewissen Einschränkungen unterworfen. Vor allem müssen sie eindeutig sein; aber darüber hinaus müssen sie zu einem wissenschaftlichen System von gewissen Einfachheits-Eigenschaften führen. Daß sie diese Forderung erfüllen, liegt nicht an ihrer Form allein, sondern vor allem an der Geltung der Axiome; die in diesen niedergelegten Tatsachen ermöglichen erst die Vorzugseigenschaften des gebildeten Begriffssystems. Durch die systematische Ableitung aller Sätze der Theorie aus den Definitionen und Axiomen „ordine geometrico" wird deshalb zweierlei geleistet: einmal die Aufdeckung derjenigen Tatsächlichkeiten, ohne welche die Theorie nicht bestehen kann, mit deren Geltung sie aber auch vollständig bewiesen ist, und andererseits die Aufdeckung der logischen Struktur, welche der Theorie ihre Existenzberechtigung als einer wissenschaftlichen Theorie gibt.

Die Axiome zerfallen in 2 Klassen: Lichtaxiome (I—V) und Materialaxiome (VI—X). Die ersteren sind Behauptungen allein über die physikalischen Eigenschaften des Lichtes, ohne jede Beziehung zu materiellen Gebilden. Es wird gezeigt werden, daß allein auf diese Axiome eine vollständige Raum-Zeit-Lehre aufgebaut werden kann. Die Materialaxiome besagen die Identität der so entwickelten „Lichtgeometrie" mit der Raum-Zeit-Lehre der starren Maßstäbe und Uhren. Es darf als wichtigstes Resultat dieser Untersuchung aufgefaßt werden, daß diese Trennung möglich ist, daß also auch ohne die Geltung der Materialaxiome, deren empirische Bestätigung noch nicht restlos durchgeführt werden konnte, die Relativitätstheorie eine gültige und vollständige physikalische Theorie ist.

Wir entwickeln die Axiome zunächst für die spezielle Relativitätstheorie. Über die Ausdehnung auf die allgemeine Theorie berichten wir zum Schluß[1]).

1. Axiome der Zeitfolge. Zunächst ist die Zeitfolge in einem Punkt zu definieren. Ein Lichtsignal werde von einem Punkt A fortgeschickt, an einem beliebigen Punkt B (der auch bewegt sein darf) reflektiert und kehre nach A zurück.

Definition 1. Der Abgang des Signals in A heißt „früher" (geschrieben $<$) als die Rückkehr nach A.

1) Eine ausführliche Veröffentlichung der ganzen Untersuchung wird später erfolgen.

Damit ist das zeitliche Nacheinander in demselben Punkt definiert. Die Bestimmung der „Gleichzeitigkeit in demselben Punkt" wird dabei als möglich vorausgesetzt; sie ist ein philosophisches Problem für sich und soll hier nicht untersucht werden. Zu der Definition des Nacheinander müssen 5 Axiome treten, damit sie eindeutig wird und eine kontinuierliche unendliche Zeitreihe für den Punkt definiert. Die wichtigsten unter diesen Axiomen lauten:

Axiom Ia. Ist das Ereignis $E_1 < E_2$, so gibt es keinen Signalzug derart, daß $E_1 > E_2$ wird.

Axiom Ib. Zu irgend zwei Ereignissen $E_1 E_2$ in A gibt es stets einen Signalzug derart, daß entweder $E_1 < E_2$ oder $E_1 > E_2$ wird.

Axiom Ic. Zu jedem Ereignis E läßt sich ein Ereignis E_1 und ein Ereignis E_2 herstellen, derart, daß $E_1 < E < E_2$.

Die Übertragung der Zeitfolge auf einen anderen Punkt geschieht durch Lichtsignale. Da in dem anderen Punkt die Zeitfolge nach obigem Verfahren definiert ist, muß folgendes Axiom hinzutreten:

Axiom II. Werden zwei Lichtsignale von A nach B gesandt, so ist die Zeitfolge ihrer Abgangszeiten in A dieselbe wie die Zeitfolge ihrer Ankunftszeiten in B.

Dieses Axiom gilt auch für zueinander bewegte Punkte.

2. Axiome des Zeitvergleichs. Es muß jetzt eine „Systemzeit" definiert werden. Dann muß zuvor definiert sein, was zueinander ruhende Punkte sind. Wir führen den Hilfsbegriff „Uhr" ein, der jedoch gar nichts über materielle Uhren aussagt, insbesondere für jede ganz beliebige zeitliche Metrik gilt.

Definition 2. Uhr ist jeder Mechanismus, der die Ereignisse in einem Punkt in der Ordnung der Zeitfolge den reellen Zahlen zuordnet.

Definition 3. Man wähle in A einen beliebigen Uhrablauf als Maß gleicher Zeiten. Man suche alle diejenigen (irgendwie bewegten) Punkte P, die (nach diesem Uhrablauf gemessen) fortwährend einen für jedes P konstanten Wert der Signalzeit APA ergeben. Dieses Punktsystem heißt ein „auf A bezogenes System".

Axiom III. Es ist möglich, den Uhrablauf in A so zu wählen, daß das entstehende auf A bezogene Punktsystem für jeden seiner Punkte ein bezogenes System ist.

Definition 4. Ein System nach Axiom III heißt „Normalsystem"; eine danach eingestellte Uhr heißt „Normaluhr".

Das so bestimmte Punktsystem ist noch nicht eindeutig festgelegt; es bleibt noch eine

lineare Dehnung möglich, bei der jeder Punkt sich radial von A fortbewegt mit einer konstanten Geschwindigkeit, die seinem Abstand von A zur Zeit $t = 0$ proportional ist. Die zeitliche Metrik ist dementsprechend noch nicht bis auf eine lineare Funktion festgelegt, wie es die Gleichförmigkeit verlangt, sondern es bleibt noch eine logarithmische Funktion dieser Zeit möglich. Das wird ausgeschlossen, wenn man Axiom V hinzunimmt; wir werden dies in Definition 7 vollziehen. Vorläufig machen wir jedoch von dieser weiteren Einschränkung noch keinen Gebrauch; im folgenden sind unter Uhren zunächst Normaluhren nach Definition 4 zu verstehen.

Die Einstellung aller Uhren innerhalb eines Normalsystems geschieht durch die Einsteinsche Definition des Synchronismus:

Definition 5. Ein Signal werde in A zur Zeit t_1 weggeschickt und kehre, in B reflektiert, zur Zeit t_3 nach A zurück; dann erhält der Zeitpunkt des Eintreffens in B die Zeitzahl

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}.$$

In einem Normalsystem ist der Synchronismus symmetrisch, d. h. wenn A synchron B, ist auch B synchron A.

Axiom IV. Werden von einem Punkt A eines Normalsystems zwei Lichtsignale um einen geschlossenen Dreiecksweg $ABCA$ gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne geschickt, so kehren sie gleichzeitig zurück[1]).

Erst jetzt läßt sich ableiten, daß alle nach Definition 5 eingestellten Uhren auch untereinander synchron sind, daß der definierte Synchronismus nicht bloß symmetrisch, sondern auch transitiv ist. (Ich nenne diese Doppeleigenschaft „substitutiv".) Hierin liegt eine Vorzugseigenschaft der Einsteinschen Zeitlehre. Sie ist allein auf die einfachen Erfahrungstatsachen der Axiome II, III, IV begründet.

3. Metrisches Axiom. Wir definieren gerade Linien durch Lichtstrahlen und die Streckengleichheit durch

Definition 6. Werden zwei Signale gleichzeitig von A längs der Wege ABA und ACA geschickt, und kehren sie gleichzeitig nach A zurück, so heißt $AB = AC$.

Axiom V. Es ist möglich, das auf A bezogene Normalsystem so zu wählen, daß die definierte Metrik euklidisch wird.

Definition 7. Ein System nach Axiom III, IV, V heißt Inertialsystem, die Punkte eines solchen Systems heißen „zueinander ruhend", die zugehörige Normalzeit heißt gleichförmig.

Es läßt sich beweisen, daß diese Definition eindeutig ist. Damit sind zueinander ruhende Punkte ohne Benutzung starrer Verbindungen definiert; es ist eine „Lichtstarrheit" festgelegt. Ebenso ist die gleichförmige Zeit durch die Lichtbewegung bestimmt, ohne Benutzung materieller Mechanismen. Es geschieht dies ähnlich wie bei der Einsteinschen Lichtuhr, nur war diese Lichtuhr noch auf den starren Körper basiert.

Aus den Definitionen 5 und 6 und den Axiomen II—IV folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit eine Systemkonstante ist. Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist also auch lichtgeometrisch keine bloße Definition, sondern beruht auf gewissen Erfahrungstatsachen. Soll es auch für die Metrik starrer Maßstäbe gelten, so muß das Materialaxiom VII hinzutreten.

4. Die Lorentz-Transformation. Die Transformation bezieht sich auf gleichförmig bewegte Systeme, sie sind definiert durch

Definition 8. Ein Punktsystem K' bewegt sich gleichförmig gegen ein System K, wenn alle Punkte von K', von K beurteilt, in gleichen Zeiten gleiche und gleichgerichtete Wege zurücklegen.

Es muß angenommen werden, daß auch in K' die Axiome I gelten. Dann läßt sich zeigen, daß in K' die Axiome II—V gelten. Es ist also auch K' ein System in sich ruhender Punkte, und es läßt sich auch zeigen, daß sich umgekehrt K gleichförmig gegen K' bewegt. Die Übertragung der Längen- und Zeiteinheit vermitteln folgende Definitionen:

Definition 9. Die Länge der in K' ruhenden Einheit, gemessen in K, soll gleich sein der Länge der in K ruhenden Einheit, gemessen in K'.

Definition 10. Die Zeiteinheit in K' ist so zu wählen, daß die Lichtgeschwindigkeit, bezogen auf die nach Definition 9 übertragene Längeneinheit, in K' denselben Zahlwert erhält wie in K.

Damit läßt sich die Lorentz-Transformation ableiten. Sie enthält also, lichtgeometrisch aufgefaßt, überhaupt kein besonderes Axiom. Bezieht man sie auf starre Maßstäbe und Uhren, so enthält sie die Materialaxiome VI—X.

5. Die Materialaxiome. Ganz unabhängig von aller Metrik lassen sich „starre Körper" und „natürliche Uhren" definieren. Sie sind gegeben durch das Verhalten materieller Gebilde, wenn die Einflüsse der Umgebung in der

1) Auf die Bedeutung dieses Axioms für den Synchronismus ist von Einstein schon in seinen Vorlesungen hingewiesen worden.

Grenze Null werden[1]). Die durch sie definierte Raum-Zeit-Metrik wird durch folgende Axiome in Verbindung gebracht mit der Lichtgeometrie:

Axiom VI. Zueinander ruhende Punkte (nach Definition 7) lassen sich durch starre Stäbe verbinden.

Axiom VII. Gleiche Strecken nach Definition 6 sind in Inertialsystemen auch in starren Maßstäben gemessen gleich.

Axiom VIII. Die durch starre Stäbe in ein gleichförmig bewegtes Inertialsystem K' transportierte Einheit ist gleich der nach Definition 9 übertragenen.

Axiom IX. Die natürliche Uhr läuft gleichförmig.

Axiom X. Die durch natürliche Uhren in ein gleichförmig bewegtes Intertialsystem K' transportierte Zeiteinheit ist gleich der nach Definition 10 übertragenen.

Durch diese Axiome wird die Identität der „natürlichen Metrik" mit der Lichtgeometrie vollständig festgelegt. Zu ihrer empirischen Bestätigung ist zu bemerken:

Axiom VI und IX werden kaum bestritten werden. Daß es ein System gibt, in dem VII gilt, wird ebenfalls nicht bestritten; daß dieses Axiom aber in allen gleichförmig bewegten Systemen gilt, ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Michelson-Versuch. Es handelt sich dabei gar nicht um eine mögliche Interpretation dieses Versuchs, sondern lediglich um die Wiedergabe des beobachteten Tatbestandes; die Interpretation — die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit innerhalb jedes Systems — vollziehen erst die Definitionen auf Grund der anderen Axiome. Axiom VIII ist noch nicht experimentell sichergestellt; aus dem Michelson-Versuch folgt nur, daß die transportierten Maßstäbe auch in K' nach Definition 6 untereinander gleich sind. Würde aber VIII nicht gelten, so würde trotz der Geltung von VII in allen Systemen ein System bevorzugt sein; dies erscheint unwahrscheinlich. Axiom X enthält die zweite Aussage des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, daß nämlich die Systemkonstante c in allen Systemen denselben Zahlwert hat; dieses Axiom ist experimentell noch nicht hinreichend bestätigt. Wichtig hierfür wäre eine Untersuchung des transversalen Dopplereffektes an Kanalstrahlen.

Die Verfolgung der sämtlichen genannten Axiome in der allgemeinen Relativitätstheorie läßt sich im Rahmen dieses kurzen Vortrags nicht durchführen. Wesentlich ist, daß mit der Maßbestimmung der speziellen Theorie auch die der allgemeinen festgelegt ist. Von den Resultaten sei mitgeteilt:

a) Im statischen Gravitationsfeld gelten Axiom I—IV, VI, IX. Es gibt dort eine gleichförmige Zeit, und der Synchronismus nach Definition 5 ist substitutiv. Die Zeit unterscheidet sich hier noch fast gar nicht von der Zeit der Inertialsysteme, es fehlt nur die Übertragbarkeit der Längen- und Zeiteinheit durch starre Maßstäbe und Uhren.

b) Im stationären Gravitationsfeld (z. B. rotierende Scheibe) gelten I—III, VI, IX. Auch hier gibt es noch eine gleichförmige Zeit, jedoch ist der Synchronismus nicht mehr substitutiv, nur noch symmetrisch. Erst damit fällt die wichtigste Eigenschaft der Gleichzeitigkeit.

c) In beliebigen Gravitationsfeldern gelten immer noch die Axiome I und II, wenn man sie auf solche Punkte beschränkt, die durch reale Massenpunkte dargestellt werden können. Hierin spricht sich der Grenzcharakter der Lichtgeschwindigkeit auch für beliebige Gravitationsfelder aus; das Licht bleibt der rascheste Bote. Auch in beliebigen Gravitationsfeldern darf deshalb unter Zeitfolge derselbe anschauliche Ablauf, nur ohne alle Metrik und substitutive Gleichzeitigkeit verstanden werden, der bisher darunter verstanden wurde. Er bedeutet noch eine Besonderheit der Koordinatenwahl, die jedoch immer durchführbar ist. Ein Zwang zu dieser einfachen anschaulichen Vorstellung besteht jedoch nicht.

Diskussion.

Lohr: Der Herr Vortragende hat zur Festlegung relativ ruhender Punkte mit gleichen Zeitintervallen operiert. Was soll man unter gleichen Zeitintervallen in einem Punkte verstehen, da doch eine Uhr (periodischer Vorgang) nicht vorausgesetzt wird?

Reichenbach: Zunächst ist eine Uhr von ganz beliebiger Metrik anzunehmen; sie soll die Gleichheit der Zeitstrecken vorläufig definieren. Durch die Forderung, daß das entstehende Punktsystem für jeden seiner Punkte ein bezogenes System werden soll (Axiom III), wird aber die Metrik weitgehend eingeschränkt; diese Forderung ist eben bei beliebiger Metrik nicht realisierbar. Mit Hinzutreten von Axiom V ist dann die Einschränkung so weit vorgeschritten, daß die Metrik nur bis auf eine lineare Funktion willkürlich bleibt, d. h. daß die Zeit gleichförmig ist.

Richter: Wenn der Vortragende seine Erwägungen als geltend annimmt, sowohl für die

[1]) Eine ausführliche Begründung hierfür enthält die spätere Veröffentlichung.



ideale Mathematik, als auch für die Welt der Wirklichkeit, so muß er zeigen, wo es einen mathematischen Punkt (A oder B) in der Wirklichkeit gibt, und wie er sich in der Wirklichkeit einen mathematischen Punkt denkt. Der mathematische Punkt ist verschieden von der Wirklichkeit.

Reichenbach: In der Wirklichkeit gibt es nur Annäherungen. Das ist stets so und gilt nicht nur für das hier Vorgetragene.

Richter: Ebenso muß er vormachen, wie er in der Wirklichkeit eine mathematisch genaue mittlere Stellung zwischen den beiden Punkten A und B zur Beobachtung einnehmen will. Die Denkfähigkeit solcher Dinge stimmt nicht mit der möglichen Ausführung überein. Auch hier läuft die ganze Frage der Einsteinschen Theorie auf die Lösung der Erkenntnisfrage, auf die Relation zwischen Subjekt und Objekt hinaus. Sonst ist es nicht möglich, eine mittlere Stellung zwischen A und B einzunehmen. Wie will er das in der Wirklichkeit tun?

Reichenbach: Was gleiche Strecken sind, wurde von mir exakt definiert, mit Subjekt und Objekt hat das nichts zu tun. Richtig ist, daß die Möglichkeit einer näherungsweisen Erkenntnis ein philosophisches Problem bleibt. Sie mögen es ein Axiom nennen; aber dieses Axiom steht über der ganzen Physik, und darum habe ich es nicht besonders erwähnt.

Richter: Dann wird in der Wirklichkeit immer nur von einer idealen Welt gesprochen. (Man vergleiche hierzu meine Arbeit über: Entwicklung der Begriffe von Kraft, Stoff, Raum, Zeit durch die Philosophie mit Lösung des Einsteinschen Problems. Leipzig, Otto Hillmann, 1921.)

Frank: Zu den Axiomen des Herrn Vortragenden muß noch das Relativitätsprinzip hinzutreten, um die Relativitätstheorie abzuleiten. Wenn man aber dieses annimmt, so folgen die Axiome des Herrn Vortragenden zum Teil daraus.

Reichenbach: In der Tat folgt aus den genannten Axiomen nur die Maßgesetzlichkeit der Relativitätstheorie, nicht die Kovarianz aller Naturgesetze; aber dies stand hier nicht zum Problem. Man kann auch die Einsteinsche Darstellung in gewissem Sinne axiomatisch nennen, denn Einstein setzt ja die beiden Forderungen: Relativitätsprinzip und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, an die Spitze. Aber dies sind sehr allgemeine Formulierungen. Es kommt gerade darauf an, zu analysieren, in welche Einzelbehauptungen sie zerfallen. Die vorgetragene Untersuchung zeigt, daß nur ein Teil der Einzelbehauptungen Relativität axiomatisch voraussetzt (nämlich Axiom VIII und X), daß ein zweiter Teil sie nur definiert (Definition 9 und 10), und ein dritter Teil mit ihr nichts zu tun hat. Nur auf diesem analytischen Wege gelangt man über unscharfe Allgemeinbehauptungen hinaus zu einem Minimum von Voraussetzungen, und erst so wird die Grundlage einer exakten Kritik geschaffen.

Stuttgart, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, September 1921.

BESPRECHUNGEN.

M. Centnerszwer, Das Radium und die Radioaktivität. 2. Auflage. (Aus Natur und Geisteswelt 405.) Leipzig, B. G. Teubner. 1921. M. 1.50 u. Teuerungszuschlag.

Das Büchlein ist bestimmt, dem Nichtphysiker einen Begriff von den Eigenschaften und dem Wesen der Radioaktivität zu vermitteln. Es erfüllt seinen Zweck vollständig, solange es sich darum handelt, die verschiedenen Tatsachen über das Radium und seine Strahlen dem Leser bekannt zu geben. Er bekommt einen tiefen Einblick in die Reichhaltigkeit der radioaktiven Erscheinungen, in die Fülle der neuen Gesichtspunkte, die sich hier dem Forscher enthüllen.

Weniger glücklich ist der Verfasser da, wo er versucht, das Verständnis für diese Tatsachen zu wecken. Schon daß für den radioaktiven Zerfall das alte Atommodell von J. J. Thomson zugrunde gelegt wird, ist verfehlt. Wohl wird an einer Stelle (S. 68) vom Alpha-Strahl als einem Heliumkern gesprochen, aber es wird nicht scharf unterschieden zwischen Eigenschaften des Kerns und Vorgängen in der Elektronenhülle. So ist es möglich, daß der radioaktive Zerfall als eine chemische Umwandlung bezeichnet wird (S. 71, 106). Auch die Lehre von den Isotopen ist nicht überall konsequent durchgeführt, so z. B. soll die Stellung der *ThEm* im periodischen System noch nicht sicher feststehen (S. 94).

Anzuerkennen ist das Kapitel, wo der Verfasser von der historischen Entwicklung der Radioaktivität spricht. Der Leser bekommt einen guten Begriff von den enormen Schwierigkeiten, die am Anfang zu überwinden waren, sowie von den vielen neuen Erscheinungen, die aus diesem Wissensgebiet hervorgingen.

E. Stahel.

W. Bein, Das chemische Element, seine Wandlung und sein Bau als Ergebnis wissenschaftlicher Forschung. gr. 8°. VIII u. 360 S. Mit 39 Fig. Berlin und Leipzig, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger. 1920. Geh. M. 45.—, geb. M. 53.—

Ein gewaltiges Tatsachenmaterial und eine Unmenge von Literaturnachweisen zu jedem Kapitel ist in diesem Werk zusammengetragen. Jeder Ab-



schnitt ist für sich bis zur neuesten Zeit entwickelt. Die große Arbeit, ein solches Material zusammenzutragen, sei nicht unterschätzt. Hingegen ist mit dem Werk weder dem Fachmann noch dem Nichtfachmann gedient. Zu einem solchen Unternehmen ist die erste Voraussetzung, die vollständige Beherrschung aller behandelten Kapitel, was hier nicht zutrifft. Abschnitt 1, 2 und 3 will ich in dieser Hinsicht nicht angreifen. Hingegen ist das Kapitel „Die materiellen Eigenschaften der Elektrizität und der andern Energien" paragraphenweise einfach nicht akzeptierbar. Es mögen einige kurze Proben meine Behauptung stützen:

§ 32, S. 57. Sie (die Elektrizität) ist anzusehen als ein chemischer Stoff, als solcher ist sie atomistisch gegliedert. Ihre Atome sind von bestimmter Masse, Trägheit und Energie und sind fähig, sich mit chemischen Atomen zu verbinden.

§ 33, S. 61. Das Elektron ist, wie viele chemische Stoffe weit verbreitet, vor allem auf der Sonne.

§ 35, S. 63/64. Nach Faraday bilden die von dem Körper ausgehenden Kraftlinien das Band zwischen Körperelektronen und Elektronen der Umgebung. Bewegt sich nun der Körper, so wandern die Kraftlinien zwangsläufig mit und es verschieben sich auch die Elektronen der Umgebung. Ändert sich die Geschwindigkeit der Elektronen im Körper, also ihre träge Masse (durch Änderung von Strom und Spannung), so ändert sich auch die träge Masse der Elektronen der Umgebung usw.

§ 36, S. 66. Zweifelhaft ist dabei (Bindung von *Na* mit einem Elektron), ob das Elektron als ein- oder zweiwertig aufzufassen ist (Rydberg 1906). Im letztern Falle wären die Metalle wie Oxyde oder Sulfide anzusehen, z. B. $Na = Na_2e$ • (entsprechend Na_2S), denen sie auch vielfach gleichen (Metallglanz, Leitfähigkeit).

Der Abschnitt „Elementarquantum und Corpusculartheorie" ist überladen und für den Stand der Forschung Ende 1920 als unklar zu bezeichnen, abgesehen von vielen Unstimmigkeiten.

§ 46. „Einiges Materielle über den Äther ist vom heutigen Standpunkt aus einfach abzulehnen."

Mein Eindruck ist der, daß der Verfasser viel zu weit ausgegriffen hat. Die Literaturangaben stehen in keinem Verhältnis zur wissenschaftlichen Einschätzung des Textes. Auf alle Fälle ist eine viel kritischere Auswahl im Anführen von Autoren am Platze.

Weit befriedigender dem Texte nach sind dann die 5 folgenden Abschnitte über radiologische Forschungen. Wieder wenig kritisch ist der letzte Abschnitt, betreffend die Forschungen über den Atombau. Insbesondere dürften hier die älteren Ringmodelle von Nicholson und ähnliches vollauf weggelassen werden.

Im Anhang vermißt man sehr eine ausführlichere Behandlung der Astonschen Arbeiten am Massenspektrographen. P. Frauenfelder.

G. Berndt, Physikalisches Wörterbuch. (Teubners kleine Fachwörterbücher Bd. 5.) kl. 8⁰. IV, 200 S. Mit 81 Fig. Leipzig, B. G. Teubner. 1920. M. 4.—

Das Buch hat zum Zweck, dem Nichtfachmann ein handliches, knapp gefaßtes Nachschlagebuch zu geben, um sich kurz über die Bedeutung von Fachausdrücken zu orientieren. Vorausgesetzt ist Mittelschulbildung.

Der Stoff ist gut ausgewählt und bei dem kleinen Umfang des Werkchens sehr vollständig. Es sei jedem Nichtfachmann warm empfohlen.

P. Frauenfelder.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Jena der Abteilungsleiter bei der Firma Carl Zeiß für Mikrophotographie Dr. August Köhler.

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Karl Fleischer zum Professor für Chemie an der Forstlichen Hochschule zu Hannoversch-Münden (an Stelle des ausgeschiedenen Dr. Siebert), der Privatdozent an der Universität Freiburg Dr. Walter Madelung zum a. o. Professor für Chemie an derselben Hochschule.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr Amandus Schwarz, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Franz Staudinger, der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg Geheimer Rat Dr. Leo Königsberger, der frühere ord. Prof. der Mathematik an der Universität Erlangen Geh. Hofrat Dr. Max Nöther.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:

E. Riecke und H. Th. Simon



Herausgeber und Schriftleiter:

P. Debye in Zürich

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 100 Mark fürs Inland und fürs Ausland auf Grund der Valuta-Ordnung. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 120 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 1.75 Mark, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastraße 35, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Königstraße 2.

No. 1. | 1. Januar 1921. No. 581. | 22. Jahrgang.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**



Schriftleiter
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 150 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 202 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 3.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 24. 15. Dezember 1921. No. 604 **22. Jahrgang.**

Eingegangene Bücher.

(Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle.)

Aufgaben aus der Theoretischen Physik. In Verbindung mit F. Henning u. R. v. Mises herausgeg v. R. Seeliger. 8⁰. IX u. 154 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. Geheftet M. 20.—, geb. M. 24.—.

Auerbach, F., Moderne Magnetik. 8⁰. VIII u. 304 S. Mit 167 Abbildungen. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1921. Geheftet M. 48.—, geb. M. 55.—.

Auskunft, Die. Heft III: Physik, v. F. Paehler. kl. 8⁰. 91 S. Heidelberg, W. Ehrig. Kart. M. 3.60

Bezold, W. v., Die Farbenlehre im Hinblick auf Kunst und Kunstgewerbe. 2. Aufl., vollst. neu bearb. u. ergänzt von W. Seitz. 8⁰. XX u. 196 S. Mit 60 Fig. u. 12 zum Teil farbigen Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. M. 35.—.

Biltz, H., Experimentelle Einführung in die unorganische Chemie. 9.—11. Aufl. 8⁰. VI u. 130 S. Mit 15 Fig. Berlin u. Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger. 1920. Gebunden M. 20.—.

Bolliger, A., Die Hochspannungs-Gleichstrommaschine. 8⁰. IV u. 82 S. Mit 53 Textfig. Berlin, Julius Springer. 1921. M. 18.—.

Dungern, E. v., Über die Prinzipien der Bewegung, das Wesen der Energie und die Ursachen der Stoßgesetze. 8⁰. 37 S. Jena, G. Fischer. 1921. M. 5.—.

Ehringhaus, A., Das Mikroskop. (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 678.) kl. 8⁰. 121 S. Mit 75 Abbildungen. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1921. Kart M. 6.80; geb. M. 8.80.

Gruner, P., Leitfaden der geometrischen Optik und ihrer Anwendungen auf die optischen Instrumente. 8⁰. 148 S. Mit 93 Fig. Bern, Paul Haupt. 1921. M. 24.—.

Haas, A., Einführung in die theoretische Physik. Zweiter Band. Erste und zweite Auflage. 8⁰. VI u. 286 S. Mit 30 Abbildungen. Berlin u. Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger. 1921. Geheftet M. 45.—, geb. M. 53.—.

Kähler, K., Luftelektrizität. (Sammlung Göschen, Bd. 649.) kl. 8⁰. 134 S. Mit 19 Abbildungen. Berlin u. Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger. 1921. M. 2.10 u. 100% Teuerungszuschlag.

Kohler, M., Das Elektrizitätsprinzip als Korrelat zur Relativitätstheorie. 8⁰. IX u. 70 S. Mit 26 Figuren. Leipzig u. Wien, F. Deuticke. 1921. Kr. 52.—, M. 7.—.

Kossel, W., Valenzkräfte und Röntgenspektren. 8⁰. IV u. 70 S. Mit 11 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1921. M. 12.—.

Ludewig, P., Radioaktivität. (Sammlung Göschen, Bd. 317.) kl. 8⁰. 133 S. Mit 37 Abbildungen, Berlin u. Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger. 1921. M. 2.10 u. 100% Teuerungszuschlag.

Mach, E., Die Prinzipien der physikalischen Optik. 8⁰. X u. 443 S. Mit 279 Fig. u. 10 Bildnissen. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1921. Geheftet M. 48.—, geb. M. 60.—.

Ollivier, H., Cours de Physique générale. Deuxième Edition. Tome premier. 8⁰. 749 pag. Avec 408 fig. dans le texte et 3 planches hors texte. Paris, J. Hermann. 1921.

Ostwald, Wo., Kleines Praktikum der Kolloidchemie. Mitbearbeitet v. P. Wolski. 2. Aufl. 8⁰. XII u. 159 S. Mit 14 Textfiguren. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1921. Kart. M. 15.—.

— Die Welt der vernachlässigten Dimensionen. 5. u. 6. Aufl. 8⁰. VI u. 255 S. Dresden u. Leipzig, Theodor Steinkopff. 1921. Kart. M. 25.—.

Przybyllok, E., Über einen Fall örtlicher Refraktionsstörung. (S.-A. aus Astr. Nachr., Nr. 5092, Bd. 213, März 1921.) 4⁰. Kiel, C. Schaidt. 1921.

Witting, A., Einführung in die Infinitesimalrechnung. (Math.-phys. Bibl., Bd. 9 u. 41.)
I: Die Differentialrechnung. 2. Aufl. kl. 8⁰. 52 S. Mit 1 Porträttafel, vielen Beispielen und Aufgaben und 33 Figuren.
II: Die Integralrechnung. 2. Aufl. kl. 8⁰. 50 S. Mit 1 Porträttafel, 85 Beispielen und Aufgaben u. mit 9 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1921. Kart. je M. 2.—.